Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques (Troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique de genres pa = pg = 3, p(1) = 4, P2 = 7, dont le système canonique possède trois composantes fixes, rationnelles, de degré virtuel -4, et est complété par les couples de courbes elliptiques d'un faisceau. Le système bicanonique de la surface est simple.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

(Troisième note).

Résumé. — Construction d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 7$, dont le système canonique possède trois composantes fixes, rationnelles, de degré virtuel -4, et est complété par les couples de courbes elliptiques d'un faisceau. Le système bicanonique de la surface est simple.

Poursuivant l'étude de surfaces algébriques représentant des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (1), nous considérons une surface du dixième ordre transformée en soi par une homographie de période 73. L'involution engendrée par cette homographie sur cette surface F possède trois points unis de seconde espèce. Sur une surface normale Φ image de cette involution, les trois points de diramation sont de même structure. Chacun d'eux est quadruple pour la surface Φ et le cône tangent en ce point à cette surface se décompose en deux plans et en un cône du second ordre ; les deux plans ne se rencontrent qu'au point de diramation, mais le cône du second ordre rencontre chacun des plans suivant une droite. Au point infiniment voisin du point de diramation sur une de ces droites, la surface Φ possède un point double biplanaire ordinaire.

La surface Φ a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 7$. Les courbes canoniques sont formées de trois composantes fixes, rationnelles, de degré virtuel -4, et de deux courbes elliptiques

(1) Les deux premières notes ont paru dans le *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1951, pp. 819-825, 826-835.

variables dans un faisceau. Le système bicanonique est simple. On a ainsi un nouvel exemple de surface algébrique dont le système canonique possède des composantes fixes, rationnelles, non exceptionnelles.

1. Considérons la surface F, du dixième ordre, d'équation

$$a_1x_1^9x_2 + a_2x_2^9x_3 + a_3x_3^9x_1 + a_4x_4^{10} = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie de période 73,

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{65}x_3 & \epsilon^{22}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 73 de l'unité.

L'homographie H possède comme points unis les sommets du tétraèdre de référence et trois de ces points : O_1, O_2, O_3 appartiennent à la surface F. Sur celle-ci, H engendre donc une involution I d'ordre 73 présentant trois points unis. Ceux-ci ont même structure et nous commencerons par étudier cette structure et celle des points de diramation correspondants sur une surface image Φ de l'involution.

2. Dans le plan tangent $x_2 = 0$ à la surface F au point O_1, l'homographie H détermine une homographie que l'on peut représenter sous l'une des formes

$$\begin{pmatrix} x_1 & \eta x_3 & \eta^{52}x_4 \\ x_1 & x_3 & x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & \zeta^{66}x_3 & \zeta x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

en posant $\eta = \epsilon^{65}$ et $\zeta = \epsilon^{22}$. Les nombres attachés au point uni O_1 dont donc $\alpha = 52$, $\beta = 66$.

Prenons, comme modèle projectif de la surface Φ, image de l'involution, une surface normale dont les sections hyperplanes Γ_0 ont pour homologues sur F des courbes C_0 formant un système linéaire dépourvu de points-base et appartenant totalement à un système linéaire plus ample $|C|$, contenant, outre $|C_0|$, 72 systèmes linéaires appartenant à l'involution I.

Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par O_1, par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de

O_1O_3, O_1O_4, par C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4, et ainsi de suite.

Les courbes C_0' ont en O_1 un point multiple d'ordre $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec O_1O_4 et μ avec O_1O_3, $\lambda + \mu$ étant le plus petit possible et formé de nombres positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu = 0, \qquad \mu + \lambda\beta = 0, \qquad (\text{mod. } 73).$$

Actuellement, ces congruences sont

$$\lambda + 52\mu = 0, \qquad \mu + 66\lambda = 0, \qquad (\text{mod. } 73) \qquad (1)$$

et on a $\lambda = 1$, $\mu = 7$. Les courbes C_0' ont donc la multiplicité huit en O_1, une tangente coïncidant avec O_1O_4 et sept avec O_1O_3. Le comportement des courbes C_0' au point O_1 est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll} & O_1^8, (3,1)^7, (3,2)^7, (3,3)^3, (3,4)^1, \ldots, (3,51)^1, & \\ (4,1)^1, & (3,3,1)^2, & \\ (4,2)^1, & (3,3,2)^2. & \\ \vdots & & \\ (4,65)^1\,; & & \end{array}$$

nous avons rappelé la signification de ces symboles dans notre seconde note, à laquelle nous renvoyons.

Le point de diramation O_1' de Φ, homologue du point uni O_1, est quadruple pour la surface, le cône tangent se décomposant en trois parties : deux plans et un cône du second ordre.

Projetons la surface Φ du point O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point O_1', correspond l'ensemble de deux droites σ_{11}, σ_{12} et d'une conique τ_1. Rappelons que les droites σ_{11}, σ_{12} ne se rencontrent pas, mais rencontrent chacune la conique τ_1 en un point. Les sections hyperplanes Γ_0' de Φ_1 correspondent évidemment aux courbes C_0'. Les courbes σ_{11}, τ_1, σ_{12} représentent respectivement les domaines des points unis de première espèce $(4,65)$, $(3,3,2)$, $(3,51)$.

3. Les premières solutions des congruences (1), rangées par ordre de croissance des sommes $\lambda + \mu$, sont :

$\lambda = 11, \mu = 4$; $\lambda = 2, \mu = 14$; $\lambda = 21, \mu = 1$; $\lambda = 12, \mu=11$;...

Comme nous l'avons établi dans nos travaux cités dans la première note, les courbes C_0'' ont en O_1 la multiplicité 15, onze tangentes étant confondues avec O_1O_4 et quatre avec O_1O_3. Avant de déterminer le comportement des courbes C_0'' au même point, nous déterminerons, au moins en partie, celui des courbes C_0''' au même point.

Les courbes C_0''' ont la multiplicité 16 en O_1, deux tangentes étant confondues avec O_1O_4 et quatorze avec O_1O_3. La somme des multiplicités de C_0''' aux points de la suite O_1, (4,1), (4,2), ..., (4,65) devant être égale à 73, il est clair que les courbes C_0''' ne peuvent passer par les derniers de ces points. Ces courbes passent deux fois par les points (4,1), (4,2), ..., (4,28), une fois par le point (4,29) et par un point, uni de première espèce pour l'involution, (4,29,1), infiniment voisin du point (4,29).

En revenant aux courbes C_0'', on voit que le schéma de leur comportement au point O_1 est le suivant :

$$\begin{array}{lll}
 & O_1^{15}, (3,1)^4, (3,2)^4, & (3,3)^2, (3,4)^1, \ldots, (3,51)^1. \\
(4,1,8)^1, \ldots, (4,1,1),^1 & (4,1)^3, & (3,3,1)^1, \\
 & (4,2)^2, & (3,3,2)^1. \\
 & \vdots & \\
 & (4,28)^2, & \\
(4,29,1)^1, & (4,29)^1. &
\end{array}$$

Aux courbes C_0'' correspondent sur Φ les sections Γ_0'' par les hyperplans passant par le point (σ_{11}, τ_1) commun à la droite σ_{11} et à la conique τ_1.

Si n est l'ordre de Φ, le degré de $|C_0|$ est $73n$. Parmi les intersections de deux courbes C_0', le point O_1 absorbe 4.73 unités et l'ordre de Φ_1 est $n - 4$. Parmi les intersections de deux courbes C_0'', le point O_1 absorbe 6.73 unités, par conséquent $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - 6$ et le point (σ_{11}, τ_1) est double pour la surface Φ_1.

Projetons la surface Φ_1 du point (σ_{11}, τ_1) sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle, au domaine du point (σ_{11}, τ_1) correspond l'ensemble de deux droites ; une droite ρ_{11}, correspondant au domaine du point (4,29,1) et une droite ρ_{12}, correspondant au domaine du point

(4, 1, 8). Ces droites se rencontrent en un point et le point (σ_{11}, τ_1) est double biplanaire pour Φ_1.

Sur la surface Φ_2, il correspond à σ_{11} un point (singulier) appartenant à la droite ρ_{11} ; à la conique τ_1, une droite s'appuyant sur ρ_{12} et que nous continuerons à désigner par τ_1. Enfin, à la droite σ_{12} correspond une droite rencontrant en un point la droite τ_1.

4. Revenons aux courbes C_0'''. A ces courbes correspondent sur la surface Φ_2 les sections Γ_0''' par des hyperplans passant par un point de ρ_{12}, puisque les courbes C_0''' ne passent plus par le point (4,1,8). Les hyperplans en question ne peuvent passer par un point de la droite σ_{12}, puisque celle-ci ne rencontre pas ρ_{12}. Si les courbes C_0''' passaient par le point (3,3,2), elles passeraient au moins une fois par le point (3,3,1), au moins deux fois par (3,3) ; quatre fois par (3,2) et quatre fois par (3,1). Mais alors, la somme des multiplicités des courbes Γ_0''' aux points de la suite O_1, (3,1), (3,2), ..., (3,51) serait supérieure à 73, ce qui est impossible. Par conséquent, les hyperplans des courbes Γ_0''' sur Φ_2 passent par le point (ρ_{12}, τ_1) commun aux droites ρ_{12}, τ_1.

Il est alors facile de former le schéma du comportement des courbes C_0''' au point O_1 ; on trouve précisément

$$\begin{array}{lll}
 & & O_1^{16},\ (3,1)^7,\ (3,2)^1,\ \ldots,\ (3,51)^1. \\
 & (4,1)^2, & (3,1,1)^6, \\
 & (4,2)^2, & (3,1,2)^1,\ (3,1,2,1)^1,\ \ldots,\ (3,1,2,5)^1. \\
 & \vdots & \\
 & (4,28)^2, & \\
(4,29,1)^1, & (4,29)^1. &
\end{array}$$

On en déduit que le degré du système $|\Gamma_0'''|$ est $n - 7$. Le point (ρ_{12}, τ_1) est simple pour la surface Φ_2 et son domaine correspond à celui du point (3,1,2,5).

5. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 22 en O_1, 21 tangentes étant confondues avec O_1O_4 et une avec O_1O_3. Ces courbes passent simplement par les points (3,1), (3,2), ..., (3,51).

Projetons la surface Φ_2 du point (ρ_{12}, τ_1) sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_3 sur laquelle, au centre de projection, correspond une droite exceptionnelle a. Sur cette surface sont tracées deux droites ρ_{11}, σ_{12}. La première coupe a en un point (singulier) qui représente ρ_{12} et contient un point singulier qui représente σ_{11}. La seconde rencontre a en un point singulier qui représente τ_1.

Aux courbes $C_0^{(4)}$ correspondent sur Φ_3 des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ découpées par les hyperplans rencontrant σ_{12} en un point variable, puisque les courbes $C_0^{(4)}$ passent par le point (3,51). Ces hyperplans doivent passer par un point de a, puisque les courbes $C_0^{(4)}$ ne passent pas par le point (3,1,2,5).

D'autre part, les courbes $C_0^{(4)}$ ne peuvent plus passer par le point (4,29,1), pour ne pas avoir plus de 73 points communs avec la suite O_1, (4,1), (4,2), ..., (4,65). Les hyperplans des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ passent donc par le point commun aux droites a, ρ_{11} de Φ_3.

Le comportement des courbes $C_0^{(4)}$ au point O_1 a pour schéma

$$\begin{array}{rl} & O_1^{22},\ (3,1)^1,\ (3,2)^1,\ \ldots,\ (3,51)^1. \\ (4,1,8)^2,\ \ldots,\ (4,1,1)^2, & (4,1)^5, \\ & (4,2)^3, \\ & \vdots \\ & (4,16)^3, \\ (4,17,2)^1,\ (4,17,1)^1, & (4,17)^1. \end{array}$$

Sur la surface Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite ρ_{12}. Le système $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n - 10$. Au domaine du point (4,17,2) de F correspond sur Φ_2 le domaine du point (ρ_{11}, ρ_{12}) de Φ_2. On en conclut que le point (σ_{11}, τ_1) de Φ_1 est un point double biplanaire ordinaire de cette surface.

6. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 23 en O_1, 12 tangentes étant confondues avec O_1O_4 et onze avec O_1O_3. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (3,51) et il est facile de voir qu'il leur correspond sur Φ_2 les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ découpées par les hyperplans passant par les droites ρ_{12}, τ_1 de cette surface.

Le schéma du comportement en O_1 des courbes $C_0^{(5)}$ est le suivant :

$$\begin{array}{lll} & O_1^{23}, (3,1)^{11}, (3,2)^{11}, (3,3)^5, (3,4)^2, \ldots (3,14)^2, (3,15)^1 & \\ (4,1,8)^1, \ldots, (4,1,1)^1, (4,1)^4, & (3,3,1)^3, & (3,15,1)^1. \\ (4,2)^3, & (3,3,2)^3 & \\ \vdots & & \\ (4,16)^3, & & \\ (4,17,2)^1, (4,17,1)^1, (4,17)^1, & & \end{array}$$

Le système $|\Gamma_0^{(5)}|$ a le degré $n - 14$.

De ce qui précède, on conclut que le point O_1' est équivalent à un ensemble de cinq courbes

$$\sigma_{11}, \rho_{11}, \rho_{12}, \tau_1, \sigma_{12},$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Ces courbes sont des droites sauf τ_1, qui est une conique.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_{11} + \rho_{11} + \rho_{12} + \tau_1 + \sigma_{12}$$

et les droites $\sigma_{11}, \rho_{11}, \rho_{12}, \sigma_{12}$ sont de degré virtuel — 2 et la conique τ_1 de degré virtuel — 4.

On a en outre

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_{11} + 2(\rho_{11} + \rho_{12}) + \tau_1 + \sigma_{12},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_{11} + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + \tau_1 + \sigma_{12},$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_{11} + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + 2\tau_1 + \sigma_{12}.$$

Le point de diramation O_2', homologue du point uni O_2, est équivalent à cinq courbes rationnelles $\sigma_{21}, \rho_{21}, \rho_{22}, \tau_2, \sigma_{22}$ et le point de diramation O_3', homologue du point uni O_3, à cinq courbes rationnelles $\sigma_{31}, \rho_{31}, \rho_{32}, \tau_3, \rho_{32}$. Ces groupes de courbes sont entièrement analogues au groupe correspondant à O_1'.

7. Les courbes canoniques de la surface Φ doivent rencontrer en $p - 2$ points une composante de degré $-p$ d'un point de diramation. Par conséquent, ces courbes doivent rencontrer en deux points chacune des courbes τ_1, τ_2, τ_3. Il en résulte que les transformées de ces courbes sur la surface F doivent être des courbes canoniques de cette surface qui passent deux fois par le point (3,3,2) du voisinage de O_1 et avoir un comportement analogue en O_2, O_3.

Le comportement des courbes en question au point O_1 est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} O_1^6,\ (3,1)^6,\ (3,2)^6,\ &(3,3)^2,\\ &(3,3,1)^2,\\ &(3,3,2)^2. \end{aligned}$$

Les transformées sur F des courbes canoniques Λ_0 de Φ sont des courbes canoniques L_0 de F passant six fois par les points O_1, O_2, O_3. Par conséquent, parmi les courbes L_0 se trouve la section de F par le plan $x_4 = 0$, comptée six fois.

Les adjointes à la surface F sont les surfaces du sixième ordre. Celles qui découpent sur F les courbes L_0 sont représentées par des équations dont le premier membre, après avoir opéré H, doit se reproduire multiplié, comme x_4^6, par ϵ^{59}. Ces surfaces sont donc

$$\lambda_1 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \lambda_2 x_1 x_2 x_3 x_4^3 + \lambda_3 x_4^6 = 0. \tag{1}$$

Désignons par γ les courbes de Φ qui correspondent aux courbes découpées sur F par les surfaces

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4^3 = 0. \tag{2}$$

Le système canonique de Φ est composé au moyen du faisceau $|\gamma|$, chaque courbe canonique étant formée de deux courbes γ. Les genres arithmétique et géométrique de Φ sont donc $p_a = p_g = 3$.

8. Nous allons vérifier que les courbes découpées par les surfaces (2) passent une fois par le point (3,3,2).

Opérons sur F et sur la surface (2) la transformation

$$\theta_3^3 = \begin{pmatrix} y_1^4 & y_2 y_3^3 & y_1^3 y_3 & y_3^3 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\theta_3^{-3} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^3 & x_2 x_1^3 & x_3^4 & x_1^3 x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons respectivement

$$a_1 y_1^{36} y_2 + a_2 y_1^3 y_2^9 y_3^{25} + a_3 y_1^{31} y_3^6 + a_4 y_3^{27} y_4^{10} = 0 \tag{3}$$

et

$$y_1^7 y_2 + \lambda y_3^5 y_4^3 = 0. \tag{4}$$

La transformation θ_3^3 fait correspondre au point (3,3) le point de coordonnées $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Opérons maintenant sur les surfaces précédentes la transformation

$$\theta_4^2 = \begin{pmatrix} y_1^3 & y_2 y_4^2 & y_3 y_4^2 & y_1^2 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\theta_4{}^2 = \begin{pmatrix} x_1 x_1^2 & x_1^2 x_2 & x_1^2 x_3 & x_4^3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

On obtient respectivement

$$a_1 y_1^{99} y_2 + a_2 y_2^9 y_3^{25} y_4^{66} + a_3 y_1^{84} y_3^6 y_4^{10} + a_4 y_1^{16} y_3^{27} y_4^{62} = 0. \tag{5}$$

et

$$y_1^{15} y_2 + \lambda y_3^5 y_4^{11}. \tag{6}$$

La transformation θ_4^2 fait correspondre au point (3,3,2) des surfaces (3), (4), le point $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ des surfaces (5), (6). D'autre part, la transformation $\theta_3^3 \theta_4^2$ fait correspondre à l'homographie H l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^6 y_2 & \epsilon^{46} y_3 & \epsilon^{46} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui détermine, dans le plan tangent $y_2 = 0$ aux surfaces (5), (6) au point (1,0,0,0) homologue de (3,3,2), une homologie de centre (1, 0, 0, 0), ce qui correspond bien au fait que le point (3,3,2) est uni de première espèce.

Nous allons maintenant démontrer que sur la courbe commune aux surfaces (1), (2), le point O_1 est l'origine d'une branche superlinéaire se terminant par un point simple, qui ne peut être que le point (3,3,2).

Représentons la courbe commune aux surfaces (1), (2) sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 y_2 : y_2^2 y_3 : y_3^2 y_1 : y_1 y_2 y_3 \,;$$

nous obtenons

$$a_1 y_1^{17} y_2^{10} + a_2 y_2^{17} y_3^{10} + a_3 y_3^{17} y_1^{10} + a_4 (y_1 y_2 y_3)^9 = 0.$$

En opérant la transformation quadratique

$$y_1 : y_2 : y_3 = z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2,$$

on obtient la courbe

$$a_1 z_2^7 z_3^{17} + a_2 z_3^7 z_1^{17} + a_3 z_1^7 z_2^{17} + a_4 (z_1 z_2 z_3)^8. \tag{7}$$

Il est aisé de voir que chacun des sommets du triangle de référence est multiple d'ordre 7 pour la courbe (7) et qu'à chacun de ces points sont infiniment voisins successifs un point multiple d'ordre 7, deux points triples suivis d'un point simple.

Il résulte de ce qui précède que les courbes γ rencontrent en un point chacune des courbes τ_1, τ_2, τ_3 et que par conséquent les couples de courbes γ sont bien des courbes canoniques de la surface Φ.

La courbe (7) est de genre 109. En appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance entre cette courbe et son homologue γ et en observant qu'il y a sur celle-ci trois points de diramation, on voit que les courbes γ sont elliptiques.

Le faisceau $|\gamma|$ contient une courbe dégénérée en une courbe rationnelle comptée trois fois, homologue de la section de F par $x_4 = 0$ et une courbe décomposée en trois courbes rationnelles, homologues des sections de F par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

9. Aux courbes bicanoniques de la surface Φ correspondent sur F les courbes découpées par le système linéaire de surfaces du douzième ordre, transformées chacune en soi par l'homographie H, contenant la surface $x_4^{12} = 0$. Ce système a pour équation

$$\lambda_0 (x_1 x_2 x_3)^4 + \lambda_1 (x_1 x_2 x_3)^3 x_4^3 + \lambda_2 (x_1 x_2 x_3)^2 x_4^6 + \lambda_3 x_1 x_2 x_3 x_4^9 + \lambda_4 x_4^{12}$$
$$+ (\lambda_5 x_1^9 x_2 + \lambda_6 x_2^9 x_3 + \lambda_7 x_3^9 x_1) x_4^2 = 0.$$

Rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_7 X_7 = 0$$

d'un espace S_7. Nous obtenons les équations du modèle bicanonique de Φ en éliminant x_1, x_2, x_3, x_4 entre les équations précédentes et celle de F ; on a

$$\begin{Vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

$$X_5 X_6 X_7 = X_0^2 X_2 = X_0 X_1^2,$$

$$a_1 X_5 + a_2 X_6 + a_3 X_7 + a_4 X_4 = 0.$$

La dernière représente un hyperplan S_6 ; les premières représentent une variété V_3^4 dans cet espace S_6 et l'équation restante une variété cubique. Le modèle bicanonique de Φ est donc une surface d'ordre 12, de S_6. On a par conséquent $P_2 = 7$, $p^{(1)} = 4$.

10. Posons

$$\varphi = -\frac{1}{a_4}(a_1 X_5 + a_2 X_6 + a_3 X_7).$$

La surface Φ peut être représentée, dans l'espace S_6 dont les coordonnées homogènes sont X_0, X_1, X_2, X_3, X_5, X_6, X_7, par les équations

$$\begin{Vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \varphi \end{Vmatrix} = 0,$$

$$X_5 X_6 X_7 = X_0^2 X_2.$$

Les courbes du faisceau $|\gamma|$ sont découpées sur Φ par les plans

$$X_0 = \lambda X_1, \quad X_1 = \lambda X_2, \quad X_2 = \lambda X_3, \quad X_3 = \lambda\varphi ;$$

ce sont donc des cubiques elliptiques.

Les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 \varphi = 0$$

découpent sur Φ des courbes bicanoniques formées de quatre courbes γ.

La partie variable du système canonique, $|2\gamma|$, est formée de courbes elliptiques, alors que nous avons trouvé $p^{(1)} = 4$. Il en résulte que le système canonique comprend une composante fixe et est précisément

$$|\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + 2\gamma|.$$

Les courbes τ_1, τ_2, τ_3 étant rationnelles et de degré virtuel -4, les courbes elliptiques γ rencontrant en un point chacune des courbes τ_1, τ_2, τ_3, on a bien, pour le genre du système canonique

$$p^{(1)} = 3 \cdot 0 + 2 + 6 - 4 = 4.$$

Ainsi, le système canonique de la surface Φ possède trois courbes fixes, rationnelles, qui ne sont pas exceptionnelles.

Liége, le 14 octobre 1951.