Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques (Seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction, comme image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique, d'une surface de genres pa = pg = 2, p(1) = 3, P2 = 5 sur laquelle le système canonique est constitué par un faisceau auquel est adjointe une composante fixe, rationnelle, non exceptionnelle.

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(Seconde note)

Résumé. — Construction, comme image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique, d'une surface de genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 5$ sur laquelle le système canonique est constitué par un faisceau auquel est adjointe une composante fixe, rationnelle, non exceptionnelle.

Continuant les recherches commencées dans notre première note, nous considérons une involution cyclique d'ordre 43, appartenant à une surface d'ordre huit et présentant trois points unis. Désignons par F cette surface et par Φ une image de l'involution telle qu'à ses sections hyperplanes correspondent sur F les courbes d'un système linéaire partiel dépourvu de points-base. Les points de diramation sur Φ présentent la même structure. Chacun de ces points est quadruple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en deux plans (σ_1), (τ) et un cône du second ordre (σ_2). Le plan (τ) a une droite commune avec (σ_1) et une droite commune avec (σ_2), mais (σ_1), (σ_2) ne se rencontrent pas en dehors du point de diramation. Sur la droite commune aux plans (σ_1), (τ), la surface possède un point double biplanaire ordinaire, infiniment voisin du point de diramation.

Le système canonique de la surface Φ est formé d'un faisceau de courbes elliptiques et d'une courbe rationnelle fixe, non exceptionnelle. Nous construisons le système bicanonique de Φ et précisément une surface du huitième ordre, de S_4, dont les sections hyperplanes constituent le système bicanonique.

La surface Φ a les genres

$$p_a = p_g = 2, \quad p^{(1)} = 3, \quad P_2 = 5.$$

Nous indiquons d'ailleurs un modèle projectif de la surface Φ dans l'espace à trois dimensions.

1. Soit F la surface d'équation

$$a_1x_1^7x_2 + a_2x_2^7x_3 + a_3x_3^7x_1 + a_4x_4^8 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{37}x_3 & \epsilon^{27}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période 43, où ϵ est une racine primitive d'ordre 43 de l'unité.

L'homographie H possède comme points unis les sommets du tétraèdre de référence ; trois de ceux-ci, O_1, O_2, O_3, appartiennent à la surface et H engendre donc sur F une involution I d'ordre 43, possédant trois points unis.

A cause de la symétrie de l'équation de F en x_1, x_2, x_3, ces points unis ont la même structure et il nous suffira d'étudier l'un d'eux : O_1.

2. Le plan tangent à F en O_1 est le plan $x_2 = 0$ et dans ce plan, H détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon^{37}x_3 & \epsilon^{27}x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Si nous posons $\eta = \epsilon^{37}$, nous avons $\eta^{17} = \epsilon^{27}$ et si nous posons $\zeta = \epsilon^{27}$, nous avons $\zeta^{38} = \epsilon^{37}$. Les nombres attachés au point uni O_1 sont donc $\alpha = 17$, $\beta = 38$.

Pour déterminer la structure du point uni O_1 et du point de diramation O_1' correspondant sur une surface image Φ de l'involution, nous avons à déterminer les solutions en nombres entiers positifs λ, μ des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 43)$$

c'est-à-dire

$$\lambda + 17\mu \equiv 0, \quad \mu + 38\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 43).$$

Les premières solutions, rangées par ordre de croissance de $\lambda + \mu$, sont

$$\lambda = 1, \mu = 5 ; \lambda = 9, \mu = 2 ; \lambda = 2, \mu = 10 ; \lambda = 10, \mu = 7.$$

Observons que l'on a

$$1 + 5 \times 17 = 2 \times 43, \quad 5 + 1 \times 38 = 43.$$

Considérons sur F un système linéaire $|C|$ transformé en soi par H et contenant un système linéaire $|C_0|$ dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I. Soit Φ une surface normale, image de l'involution, dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0 et soit O_1' le point de diramation de Φ homologue de O_1.

Les courbes C_0 passant par O_1 acquièrent en ce point la multiplicité six, cinq tangentes en ce point étant confondues avec O_1O_3 et une avec O_1O_4. Désignons par C_0' ces courbes, par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4 et C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4.

En appliquant la théorie que nous avons développée dans les travaux cités dans notre première note, on voit tout de suite que la structure du point uni O_1 et le comportement des courbes C_0' en ce point sont déterminés par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll} & O_1^6, (3,1)^5, (3,2)^4, (3,3)^2, \ldots, (3,16)^2, & \\ (4,1)^1, & & (3,2,1)^1, (3,2,1,1)^1. \\ (4,2)^1, & & \\ \vdots & & \\ (4,37)^1. & & \end{array}$$

Rappelons que les suites de points (3,1), (3,2), ..., (3,16) et (4,1), (4,2), ..., (4,37) sont formées de points infiniment voisins successifs de O_1. Le point (3,1) se trouve sur O_1O_3 et le point (4,1) sur O_1O_4. Le point (3,2,1) est infiniment voisin de (3,2) et le point (3,2,1,1) est infiniment voisin du précédent. Tous ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution sauf les points (4,37), (3,16) et (3,2,1,1), qui sont unis de première espèce. Les exposants indiquent les multiplicités des différents points pour les courbes C'_0.

Le point O'_1 est multiple d'ordre quatre pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se décompose en un cône du second ordre et en deux plans.

Projetons Φ de O'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par O'_1 ; nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0. Au domaine du point O'_1 sur Φ correspond sur Φ_1 l'ensemble de trois courbes : Une droite σ_{11} représentant le domaine du point (4,37) ; une droite τ_1, représentant le domaine du point (3,2,1,1) et une conique σ_{12}, représentant le domaine du point (3,16). La droite τ_1 rencontre en un point σ_{11} et en un point σ_{12}, mais σ_{11} et σ_{12} ne se rencontrent pas.

3. Les courbes O''_0 ont en O_1 la multiplicité onze, deux tangentes coïncident avec la droite O_1O_3 et une avec la droite O_1O_4. Ces courbes passent deux fois par chacun des points (3,1), (3,2), ..., (3,16). Il en résulte qu'aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_1 les courbes Γ''_0 découpées par les hyperplans passant par un point de la droite τ_1 n'appartenant pas à σ_{12}. D'autre part, la somme des multiplicités des courbes C''_2 aux points O_1, (4,1), (4,2), ..., (4,37) doit être égale à 43, donc les hyperplans des courbes L''_0 passent par un point appartenant à σ_{11}, c'est-à-dire par le point commun aux droites σ_{11}, τ_1.

Considérons les courbes C'''_0 ; elles ont la multiplicité douze en O_1, dix tangentes étant confondues avec O_1O_3 et deux avec O_1O_4. Les courbes C'''_0 ne peuvent plus passer deux fois par le point (3,16), donc il leur correspond sur Φ_1 des courbes Γ'''_0 découpées par des hyperplans passant par un point de σ_{12}, qui est nécessairement le point de rencontre de cette conique avec τ_1 [sans quoi les courbes C'''_0 passeraient par un point fixe infiniment voisin de (3,16)]. Les courbes Γ'''_0 étant des courbes Γ''_0 particulières, elles sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par la droite τ_1.

Le comportement des courbes C'''_0 au point O_1 est facile à déterminer ; il est caractérisé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{llll}
 & O_1^{12}, & (3,1)^{10}, (3,2)^7, (3,3)^1, \ldots, (3,14)^1, & \\
 & (4,1)^2, & (3,2,1)^3, \ (3,2,1,1)^3. & \\
 & (4,2)^2, & & \\
 & \vdots & & \\
 & (4,14)^2, & & \\
(4,15,1)^1, & (4,15)^1, & &
\end{array}$$

Revenons maintenant aux courbes C_0''. Ces courbes doivent nécessairement passer une fois par le point $(4,15,1)$. Il en résulte qu'elles ont le comportement suivant au point O_1 :

$$\begin{array}{ll}
 & O_1^{11}, \ (3,1)^2, \ (3,2)^2, \ldots, (3,14)^2. \\
(4,1,6)^1, \ldots, (4,1,1)^1, & (4,1)^3 \\
 & (4,2)^2, \\
 & \vdots \\
 & (4,14)^2, \\
(4,15,1)^1, & (4,15)^1,
\end{array}$$

Les points $(4,1,6)$, $(4,15,1)$ sont unis de première espèce pour l'involution et le point commun aux droite σ_{11}, τ_1 est double pour la surface Φ_1. En effet, si n est le degré de $|\Gamma_0|$, c'est-à-dire l'ordre de Φ, $|\Gamma_0'|$ est de degré $n-4$, $|\Gamma_0''|$ de degré $n-6$.

Projetons Φ_1 du point commun à σ_{11}, τ_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle le domaine du centre de projection est représenté par deux droites ρ_{11}, ρ_{12} se coupant en un point. Le point (σ_{11}, τ_1) est donc double biplanaire pour Φ_1. A la droite σ_{11} correspond sur Φ_2 un point de ρ_{11} et à τ_1, un point de ρ_{12}, ces points étant singuliers pour la surface. La droite ρ_{11} représente le domaine du point $(4,15,1)$ et la droite ρ_{12} le domaine du point $(4, 1, 6)$.

Les hyperplans découpant sur Φ_2 les courbes Γ_0''' passent par le point projection de τ_1, point commun à la droite ρ_{12} et à la conique σ_{12} ; ce point est triple pour la surface puisque les courbes C_0''' passent trois fois par le point $(3,2,1,1)$.

4. Appelons $C_0^{(4)}$ les courbes C_0''' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte des droites O_1O_3, O_1O_4 ; elles ont en O_1 la multiplicité 17, dix tangentes étant confondues avec O_1O_4 et sept avec O_1O_3. Leur comportement en O_1 est caractérisé par le schéma suivant :

$$
\begin{array}{rl}
 & O_1^{17}, (3,1)^7, (3,2)^5, (3,1)^1, \ldots, (3,14)^1. \\
(4,1,6)^1, \ldots, (4,1,1)^1, (4,1)^4, & (3,2,1)^2, (3,2,1,1)^2. \\
(4,2)^3, & \\
(4,8)^3, & \\
(4,9,2)^1, (4,9,1)^1, (4,9)^1. &
\end{array}
$$

A ces courbes correspondent sur Φ_2 les sections $\Gamma_0^{(4)}$ par les hyperplans passant par la droite ρ_{12}. Le point (4,9,2) est uni de première espèce pour l'involution et il lui correspond, sur Φ_2, le domaine du point commun aux droites ρ_{11}, ρ_{12}. Ce point est par conséquent simple pour la surface Φ_2. Par conséquent, le point (σ_{11}, τ_1) est double biplanaire ordinaire pour la surface Φ_1.

De tout ceci, on conclut que le point O_1' sur Φ est équivalent à l'ensemble de quatre droites σ_{11}, ρ_{11}, ρ_{12}, τ_1 et d'une conique σ_{12}. On a

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \Gamma_0' + \sigma_{11} + \rho_{11} + \rho_{12} + \tau_1 + \sigma_{12}, \\
\Gamma_0 &= \Gamma_0'' + \sigma_{11} + 2(\rho_{11} + \rho_{12}) + \tau_1 + \sigma_{12}, \\
\Gamma_0 &= \Gamma_0''' + \sigma_{11} + 2(\rho_{11} + \rho_{12} + \tau_1) + \sigma_{12}, \\
\Gamma_0 &= \Gamma_0^{(4)} + \sigma_{11} + 2\rho_{11} + 3\rho_{12} + 2\tau_1 + \sigma_{12}.
\end{aligned}
$$

Les droites σ_{11}, ρ_{11}, ρ_{12} sont de degré virtuel -2, la droite τ_1 et la conique σ_{12} de degré virtuel -3.

5. Comme nous l'avons remarqué plus haut, les points O_1, O_2, O_3 ont la même structure, par conséquent, le point de diramation O_2', homologue de O_2, est équivalent à l'ensemble de quatre droites σ_{21}, ρ_{21}, ρ_{22}, τ_2 et d'une conique σ_{22}. De même, le point O_3', homologue de O_3, est équivalent à l'ensemble de quatre droites σ_{31}, ρ_{31}, ρ_{32}, τ_3 et d'une conique τ_{32}. Ces configurations sont évidemment analogues à celle qui correspond à O_1'.

Soit Λ une courbe canonique (éventuelle) de Φ ou encore une courbe dont la transformée sur F est une courbe canonique de cette surface. Nous avons démontré que la courbe Λ devait rencontrer en $m - 2$ points une courbe rationnelle de degré $-m$, intervenant dans la composition d'un point de diramation. Par conséquent, la courbe Λ doit rencontrer en un point chacune des courbes τ_1, σ_{12}, τ_2, σ_{22}, τ_3 et σ_{32}.

A la courbe Λ correspond sur F une courbe L qui doit passer, dans le domaine de O_1, une fois par chacun des points (3,14) et (3,2,1,1). Le comportement de cette courbe L au point O_1 est donc caractérisé par le schéma

$$O_1^4,\ (3,1)^4,\ (3,2)^3,\ (3,3)^1,\ \ldots,\ (3,14)^1$$
$$(3,2,1)^1,\ (3,2,1,1)^1.$$

Ainsi donc les courbes canoniques L de F, transformées des courbes canoniques éventuelles de Φ, ont des points quadruples en O_1, O_2, O_3.

Parmi ces courbes L se trouve la section de F par le plan $x_4 = 0$ comptée quatre fois. Si l'on applique l'homographie H, on trouve que x_4^4 est transformée en $\epsilon^{22}x_4^4$. Les surfaces du quatrième ordre, adjointes à F, découpant sur cette surface les courbes L, sont donc représentées par une équation dont le premier membre se reproduit multiplié par ϵ^{22} lorsqu'on lui applique l'homographie H. On trouve ainsi le système

$$x_4(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3) = 0.$$

Il en résulte que la surface Φ possède un faisceau de courbes canoniques. Elle est régulière comme F et a donc les genres $p_a = p_g = 2$.

6. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes bicanoniques découpées par des surfaces du huitième ordre dont fait partie la surface $x_4^8 = 0$. Lorsque l'on effectue l'homographie H sur le premier membre de l'équation d'une de ces surfaces, celui-ci se reproduit multiplié par ϵ. Ces surfaces sont donc

$$\lambda_1x_1^7x_2 + \lambda_2x_2^7x_3 + \lambda_3x_3^7x_1 + \lambda_4x_4^8 + \lambda_5x_1x_2x_3x_4^5 + \lambda_6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = 0.$$

Faisons correspondre à cette surface l'hyperplan

$$\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 + \lambda_4X_4 + \lambda_5X_5 + \lambda_6X_6 = 0$$

d'un espace S_5. A la surface F correspond un modèle projectif de la surface Φ d'équations

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = 0,$$
$$X_4X_6 = X_5^2, \qquad X_1X_2X_3X_4 = X_6^4.$$

C'est une surface normale appartenant à un espace S_4, à sections bicanoniques, du huitième ordre. On a donc, pour Φ, $P_2 = 5$.

Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de Φ, le modèle projectif envisagé a l'ordre $4(p^{(1)} - 1) = 8$, d'où $p^{(1)} = 3$. On vérifie d'ailleurs que l'on a bien $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

Désignons par $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les courbes de Φ qui correspondent respectivement aux sections de F par les plans $x_4 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Ces courbes sont rationnelles.

Le système canonique de Φ est un faisceau déterminé par les courbes $4\gamma_0$, $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$; ce système a donc la composante fixe γ_0. Cette courbe n'est pas exceptionnelle, car elle serait alors composante fixe du système bicanonique, ce qui n'a pas lieu. On obtient donc *un exemple d'une surface dont le système canonique possède une composante fixe non exceptionnelle.*

En suivant la même méthode que dans notre première note, on trouve que les courbes du faisceau déterminé par les courbes $3\gamma_0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ sont elliptiques. Les hyperplans

$$\lambda^2X_4 + 2\lambda X_5 + X_6 = 0$$

touchent la surface Φ suivant les courbes de ce faisceau.

En particulier, l'hyperplan $X_4 = 0$ doit avoir un contact du quatrième ordre avec la surface Φ le long de la courbe γ_0. Cet hyperplan a un contact du huitième ordre avec la surface Φ le long de la droite

$$X_4 = X_5 = X_6 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$$

et cette droite, comptée deux fois, est donc la courbe γ_0.

7. Pour étudier de plus près la surface Φ, projetons-la de la droite $X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = 0$ sur l'espace $X_4 = X_6 = 0$. En posant

$$a_4\varphi = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3,$$

on obtient une surface Φ_0 d'équation

$$X_1X_2X_3\varphi^5 + X_5^8 = 0.$$

Changeons de notations en posant

$X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \varphi = x_3,\ X_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,\ X_3 = x_4,$

de sorte que l'équation de Φ_0 s'écrit actuellement

$$x_1 x_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) x_3^5 + x_4^8 = 0.$$

La droite O_1O_2 est quintuple pour la surface Φ_0 et le plan $x_3 = 0$ ne rencontre pas cette surface en dehors de cette droite.

Pour étudier la singularité de la surface le long de O_1O_2, coupons la surface par le plan $x_2 = \lambda x_1$ et projetons la section du point O_2 sur le plan $x_2 = 0$. Nous obtenons la courbe

$$\lambda x_1^2[(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)x_1 + \alpha_3 x_3] x_3^5 + x_4^8 = 0,$$

qui possède un point quintuple en O.

Opérons la transformation quadratique

$$x_1 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_3 y_4 : y_1 y_4,$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_3 = 0$ le point $(y_2 = y_3 = 0)$. La transformée de la courbe est

$$\lambda[(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) y_1^2 + \alpha_3 y_3 y_4] y_3^5 + y_1^4 y_1^3 = 0,$$

qui possède un point triple en $(y_2 = y_3 = 0)$, les trois tangentes étant confondues avec $y_4 = 0$.

Opérons la transformation quadratique

$$y_1 : y_2 : y_3 = z_1^2 : z_1 z_3 : z_3 z_4$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin du point (1, 0, 0) sur la droite $y_4 = 0$, le point $(z_2 = z_3 = 0)$. La transformée de la courbe a pour équation

$$\lambda[(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) z_1^3 + \alpha_3 z_3^2 z_4] z_3^2 + z_1^2 z_4^3 = 0.$$

Le point $(z_2 = z_3 = 0)$ est un point de rebroussement ordinaire.

On en conclut que la surface Φ_0 possède une droite quintuple $r = O_1O_2$, à laquelle est infiniment voisine une droite triple r', à laquelle est à son tour infiniment voisine une droite double cuspidale r'', ces droites r', r'' étant situées sur une nappe superlinéaire.

Les adjointes à la surface Φ_0 sont des surfaces du quatrième ordre qui doivent passer quatre fois par r, deux fois par r' et une fois par r'', c'est-à-dire quatre fois par r et trois fois par r'. Le système canonique est donc découpé sur Φ_0 par les plans passant par r.

Quant au système bicanonique, il est découpé par les surfaces

$$x_3[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda_4 x_4] + \lambda_5 x_4^2 = 0\ ;$$

c'est-à-dire par les cônes du second ordre touchant la surface Φ_0 (ou le plan $x_3 = 0$) le long de la droite r.

Liège, le 28 septembre 1951.