Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques (Quatrième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique dont le système canonique possède une composante fixe, rationnelle, non exceptionnelle et dont le système bicanonique est irréductible, comme image d'une involution appartenant à une surface algébrique.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Quatrième note).

Résumé. - Construction d'une surface algébrique dont le système canonique possède une composante fixe, rationnelle, non exceptionnelle et dont le système bicanonique est irréductible, comme image d'une involution appartenant à une surface algébrique.

Nous considérons dans cette quatrième note (¹) une involution d'ordre $p = 9\eta^2 + 3\eta + 1$, η étant choisi de telle sorte que p soit premier, appartenant à la surface

$$a_1x_1^{3\eta+1}x_2 + a_2x_2^{3\eta+1}x_3 + a_3x_3^{3\eta+1}x_1 + a_4x_4^{3\eta+2} = 0,$$

involution qui possède trois points unis. L'image de cette involution contient une courbe rationnelle γ_0 et un faisceau linéaire $|\gamma|$ de courbes elliptiques. Les courbes canoniques de cette surface sont formées de la composante fixe γ_0 et $\eta - 1$ courbes du faisceau $|\gamma|$. Le système bicanonique est irréductible et la courbe γ_0 ne peut donc être exceptionnelle.

1. La courbe

$$a_1x_1^{\nu}x_2 + a_2x_2^{\nu}x_3 + a_3x_3^{\nu}x_1 = 0$$

est transformée en soi par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^{(\nu-1)^2+1}x_3\,,$$

(¹) Les trois premières notes ont été publiées dans le *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1951, pp. 819-825, 836-835, 938-949.

de période

$$p = \nu^2 - \nu + 1,$$

où ν est un entier positif et ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Observons que p ne peut être premier si $\nu = 3\eta + 2$, car on a alors

$$p = 3(3\eta^2 + 3\eta + 1).$$

Par contre, si $\nu = 3\eta$ ou $\nu = 3\eta + 1$, p est en général premier. Nous supposerons dans ce qui va suivre $\nu = 3\eta + 1$, d'où $p = 9\eta^2 + 3\eta + 1$.

2. Considérons la surface F, d'équation

$$a_1x_1^{3\eta+1}x_2 + a_2x_2^{3\eta+1}x_3 + a_3x_3^{3\eta+1}x_1 + a_4x_4^{3\eta+2} = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^{9\eta^2+1}x_3 : \epsilon^{6\eta^2+\eta+1}x_4\,,$$

de période $p = 9\eta^2 + 3\eta + 1$, ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous supposerons η choisi de telle sorte que p soit premier.

Sur la surface F, l'homographie H engendre une involution I_p, d'ordre p, présentant trois points unis : $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$ et $O_3(0, 0, 1, 0)$. A cause de la symétrie de l'équation de F, ces trois points unis ont même structure et il suffira donc d'étudier l'un d'eux.

Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I_p choisie de telle sorte qu'à ses sections hyperplanes Γ_0 correspondent sur F des courbes C_0 formant un système privé de points-base. Les points de diramation O_1', O_2', O_3' de Φ, respectivement homologues des points unis O_1, O_2, O_3 de l'involution seront donc des points isolés.

3. Le plan tangent à F au point uni O_1 est $x_2 = 0$ et dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \epsilon^{9\eta^2+1}x_3 : \epsilon^{6\eta^2+\eta+1}x_4\,. \tag{1}$$

Posons $\xi = \epsilon^{9\eta^2+1}$. On peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$x'_1 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \xi x_3 : \xi^a x_4 ,$$

où

$$a = 3\eta^2 + 2\eta + 1.$$

Si nous posons d'autre part

$$\zeta = \epsilon^{6\eta^2+\eta+1},$$

les équations (1) peuvent s'écrire

$$x'_1 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \zeta^\beta x_3 : \zeta x_4 ,$$

où

$$\beta = 9\eta^2 + 2.$$

Les directions unies issues de O_1 sont O_1O_3 ($x_4 = 0$) et O_1O_4 ($x_3 = 0$). Les courbes C_0 passant par O_1 auront en ce point la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec O_1O_4 et μ avec O_1O_3, λ et μ satisfaisant aux congruences

$$\lambda + a\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

Pour déterminer la structure du point O_1 et celle du point de diramation correspondant O'_1 de la surface Φ, nous utiliserons la méthode que nous avons exposée dans les Bulletins de l'Académie en 1949.

4. La solution des congruences précédentes donnant la plus petite valeur pour $\lambda + \mu$ est

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 3\eta - 1.$$

Les courbes C_0 assujetties à passer par O_1 acquièrent donc en ce point la multiplicité 3η, une des tangentes étant confondue avec O_1O_4 et $3\eta - 1$ avec O_1O_3. Nous désignerons ces courbes par C'_0.

Désignons par (4,1), (4,2),... les points infiniment voisins successifs de O_1 dont le premier est sur O_1O_4 et par (3,1), (3,2),... les points infiniment voisins de O_1 dont le premier est sur O_1O_3.

Le comportement des courbes C_0' en O_1 est déterminé par le schéma suivant :

$$
\begin{array}{ll}
O_1^{3\eta},\ (3,1)^{3\eta-1},\ldots,\ (3,\ \eta-1)^{3\eta-1},\ (3,\ \eta)^{2\eta},\ (3,\ \eta+1)^2,\ldots, & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3,\ 3\eta^2+2\eta)^2. & \\
(4,1)^1, \qquad\qquad\qquad\qquad (3,\ \eta,\ 1)^{\eta-1},\ (3,\ \eta,\ 1,\ 1)^{\eta-1}. & \\
\vdots & \\
(4,\ 9\eta^2+1)^1. &
\end{array}
$$

Le nombre de points d'intersection de deux courbes C_0' absorbés en O_1 est égal à $p(\eta+2)$.

Projetons la surface Φ du point O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_1 d'ordre $n-\eta-2$, n étant l'ordre de Φ. Le point O_1' est multiple d'ordre $\eta+2$ pour la surface Φ et à son domaine correspond sur cette surface l'ensemble de trois courbes rationnelles :

une droite σ_1, correspondant au domaine du point $(4,\ 9\eta^2+1)$;

une courbe τ d'ordre $\eta-1$, correspondant au domaine du point $(3,\ \eta,\ 1,\ 1)$;

une conique σ_2, correspondant au domaine du point $(3, 3\eta^2+2\eta)$.

5. Les solutions suivantes λ, μ, rangées par ordre de croissance de $\lambda+\mu$, sont

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= 3\eta+3, & \mu_2 &= 3\eta-4\ ; \\
\lambda_3 &= 2, & \mu_3 &= 6\eta-2.
\end{aligned}
$$

Les courbes C_0' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4, courbes que nous désignerons par C_0'', ont donc en O_1 la multiplicité $6\eta-1$, $3\eta+3$ tangentes étant confondues avec O_1O_4 et $3\eta-4$ avec O_1O_3. Il en résulte que les courbes C_0'' ne peuvent plus passer par le point $(4,\ 9\eta^2+1)$ et passent au plus $\eta-2$ fois par le point $(3,\ \eta,\ 1,\ 1)$. Si nous désignons par Γ_0' les sections hyperplanes de Φ_1, qui correspondent aux courbes C_0', et par Γ_0'' les courbes qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0'', on voit que les courbes Γ_0'' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par un point commun aux courbes σ_1 et τ.

Avant de déterminer le comportement des courbes C_0'' au point

O_1, nous étudierons celui des courbes C_0''', c'est-à-dire des courbes C_0'' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4.

Les courbes C_0''' ont en O_1 la multiplicité 6η, deux tangentes étant confondues avec O_1O_4 et $6\eta - 2$ avec O_1O_4.

Nécessairement, les courbes C_0''' passent deux fois par les points $(4,1)$, $(4,2)$, ..., $\left(4, \frac{3}{2}\eta[3\eta - 1]\right)$, une fois par le point $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta + 2}{2}\right)$ et une fois par un point $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta + 2}{2}, 1\right)$, infiniment voisin du précédent.

Il est facile de voir que les courbes C_0''' ne peuvent passer $\eta - 2$ fois par le point $(3, \eta, 1, 1)$ et que par conséquent, elles passent $\eta - 3$ fois par ce point. Dans ces conditions, on voit que les courbes C_0''' passent $6\eta - 9$ fois par le point $(3,1)$, $3\eta - 7$ fois par les points $(3,2)$, $(3,3)$, ..., $(3, \eta - 1)$, $2\eta - 4$ fois par le point $(3, \eta)$, deux fois par les points $(3, \eta + 1)$, ..., $(3, 3\eta^2 + 2\eta)$, $\eta - 3$ fois par les points $(3, \eta, 1)$, $(3, \eta, 1,1)$. Aux courbes C_0''' correspondent sur la surface Φ_1 des courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans touchant la courbe τ au point commun à cette couche et à σ_1.

Puisqu'il y a $6\eta - 2$ tangentes aux courbes C_0''' confondues avec O_1O_3 et que le point $(3,1)$ est multiple d'ordre $6\eta - 9$, les courbes C_0''' passent sept fois par un point $(3, 1,1)$ infiniment voisin de $(3,1)$. Au point $(3, 1,1)$ font suite des points $(3, 1, 1,1)$, $(3, 1, 1,2)$, ... dont les multiplicités pour les courbes C_0''' ont pour somme $3\eta - 9$, puisque le point $(3,2)$ est multiple d'ordre $3\eta - 7$. Si le nombre $3\eta - 9$ était multiple de 7, η serait de la forme $7\epsilon + 3$, mais alors p serait divisible par 7 alors qu'il est premier. Il en résulte que sur les courbes C_0''', le point O_1 est l'origine d'une branche superlinéaire ayant la multiplicité $3\eta - 2$ en $(3,1)$, 7 en $(3, 1,1)$, passant en outre avec une certaine multiplicité par les points $(3, 1, 1,1)$, ... Le dernier point de cette suite, commun à toutes les courbes C_0''', est simple pour celles-ci et uni de première espèce pour l'involution.

6. Revenons aux courbes C_2''. Il est facile de voir qu'elles passent $3\eta - 4$ fois par les points $(3,1)$, $(3,2)$, ..., $(3, \eta - 1)$, $2\eta - 2$ fois par le point $(3, \eta)$, deux fois par les points $(3, \eta + 1)$,

..., $(3, 3\eta^2 + 3\eta)$, $\eta - 2$ fois par les points $(3, \eta, 1)$, $(3, \eta, 1,1)$.
D'autre part, ces courbes passent 3 fois par le point $(4,1)$, deux fois par les points $(4,2)$, $(4,3)$, ..., $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta}{2}\right)$, une fois par les points $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta + 2}{2}\right)$ et $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta + 2}{2}, 1\right)$, enfin, elles passent une fois par 3η points $(4, 1,1)$, $(4, 1,2)$, ..., $(4, 1, 3\eta)$ infiniment voisins successifs de $(4,1)$.

Deux courbes C_0'' ont $(\eta + 4)p$ points d'intersection absorbés en O_1, par conséquent, $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - n - 4$ et le point commun à σ_1, τ est double pour la surface Φ_1. Projetons celle-ci de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_2 d'ordre $n - \eta - 4$ sur laquelle, au domaine du point considéré correspondent deux droites : ρ_1, représentant le domaine du point $\left(4, \frac{9\eta^2 - 3\eta + 2}{2}, 1\right)$ et ρ_t, représentant le domaine du point $(4, 1, 3\eta)$. Le point commun à σ_1 et τ est donc double biplanaire pour la surface Φ_1.

A la droite σ_1 de Φ_1 correspond sur Φ_2 un point (singulier) de la droite ρ_1 ; à la courbe τ, une courbe d'ordre $\eta - 2$ rencontrant ρ_t et à σ_2, une conique.

7. En poursuivant l'examen des courbes C_0', C_0'', C_0''', ..., on arrivera à des courbes, que nous désignerons par C_0^*, qui passeront deux fois par le point $(3, 3\eta^2 + 2\eta)$ et une fois par le point $(3, \eta, 1, 1)$. Pour ces courbes, on aura $\mu^* = 5$ et le point O_1 sera multiple d'ordre $3\eta^2 - 4\eta + 2$. Par conséquent, on aura $\lambda^* = 3\eta^2 - 4\eta - 3$. On a bien

$$\lambda^* + (3\eta^2 - 2\eta + 1)\mu^* = 2p,$$

de sorte que l'on est assuré que le système $|C_0^*|$ existe.

On trouvera de même des courbes, que nous désignerons par C_0^{**}, qui passeront deux fois par le point $(3, 3\eta^2 + 2\eta)$, mais non par le point $(3, \eta, 1, 1)$. Ces courbes seront données par $\mu^{**} = 2$ et passeront $3\eta^2 - \eta + 1$ fois par O_1. Par suite, on aura $\lambda^{**} = 3\eta^2 - \eta - 1$ et comme

$$\lambda^{**} + (3\eta^2 + 2\eta + 1)\mu^{**} = p,$$

on est assuré que le système $|C_0^{**}|$ existe.

Aux courbes C_0^* correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0^* découpées par les hyperplans passant par le point A_1 commun à la droite σ_1 et à la courbe τ, ayant un contact d'ordre $\eta - 3$ avec cette courbe en ce point.

Aux courbes C_0^{**} correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0^{**} découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\eta - 2$ avec la courbe τ au point A_1.

Observons que parmi les solutions des congruences envisagées, nous avons

$$\lambda^{***} = 3\eta^2 - 4\eta - 2, \quad \mu^{***} = 3\eta + 4,$$

car on a

$$\lambda^{***} + (3\eta^2 + 2\eta + 1), \ \mu^{***} = (\eta + 2)p.$$

Il existe donc des courbes que nous désignerons par C_0^{***} ayant la multiplicité $3\eta^2 - \eta + 2$ en O_1, $3\eta^2 - 4\eta - 2$ tangentes étant confondues avec O_1O_4 et $3\eta + 4$ avec O_1O_3. Ces courbes passent $3\eta + 4$ fois par les points $(3,1), (3,2), \ldots, (3, \eta - 1)$, $2\eta + 3$ fois par le point $(3,\eta)$, une fois par les points $(3, \eta + 1), \ldots, (3, 3\eta^2 + 2\eta)$ et $\eta + 1$ fois par les points $(3, \eta, 1), (3, \eta, 1, 1)$. A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0^{***} découpées par les hyperplans contenant la courbe τ. Ces hyperplans ne rencontrent plus la conique σ_2 qu'en un point variable, par conséquent les courbes τ et σ_2 se rencontrent en un point, simple pour la surface Φ_1.

8. Nous avons vu que le point A_1, commun à la droite σ_1 et à la courbe τ, était double biplanaire pour la surface Φ_1. Il peut être double biplanaire singulier, c'est-à-dire être équivalent à un ensemble de courbes rationnelles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, de degré virtuel -2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres.

Dans ces conditions, on a

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \tau + \sigma_2$$

et le point O_1' sur Φ est équivalent à l'ensemble des courbes

$\sigma_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t, \tau, \sigma_2$, dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On en déduit que les courbes σ_1, τ et σ_2 ont respectivement pour degrés virtuel -2, $-(\eta+1)$, -3.

Pour déterminer t, remarquons qu'il existe sur Φ une courbe Γ_1 telle que l'on ait

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + h_1\sigma_1 + k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + \ldots + k_t\rho_t + h\tau + h_2\sigma_2 + \Delta,$$

les h, k étant des entiers et la courbe Γ_1 rencontrant la droite σ_1 en un point mais ne rencontrant pas les autres courbes du domaine de O_1' et Δ étant un terme qui provient des autres points de diramation.

En coupant la courbe précédente successivement par σ_2, τ, $\rho_t, \rho_{t-1}) \ldots, \rho_1$, on obtient les relations

$$h = 3h_2, \quad k_t = (3\eta+2)h_2, \quad k_{t-1} = (6\eta+1)h_2, \quad \ldots,$$
$$k_2 = [3(t-1)\eta + 4 - t]h_2,$$
$$k_1 = (3t\eta + 3 - t)h_2, \quad h_1 = [3(t+1)\eta + 2 - t]h_2.$$

En coupant la courbe $p\Gamma$ par la droite σ_1, on a

$$2h_1 - k_1 = p,$$

c'est-à-dire

$$h_2 = 1, \quad t(3\eta - 1) = 3\eta(3\eta - 1).$$

On en conclut $t = 3\eta$. Par conséquent, si η est pair, le point A_1 de Φ_1 est double biplanaire et la surface possède une suite de $\frac{1}{2}(3\eta - 2)$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, le dernier étant ordinaire. Si au contraire η est impair, la singularité en A_1 de Φ_1 se compose d'une suite de $\frac{1}{2}(3\eta - 1)$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, suivis d'un point double conique.

On a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + (9\eta^2 + 2)\sigma_1 + (9\eta^2 - 3\eta + 3)\rho_1 + \ldots$$
$$+ (3\eta + 2)\rho_{3\eta} + 3\tau + \sigma_2.$$

9. Désignons par $|L|$ le système canonique de F, par $|\Lambda|$ celui de Φ et par L_0 les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de Φ.

Nous avons établi que les courbes canoniques Λ de Φ doivent rencontrer en $\omega - 2$ points une courbe rationnelle de degré virtuel $-\omega$ tracée sur Φ. On en conclut que les courbes Λ doivent rencontrer en un point la courbe σ_2 et en $\eta - 1$ points la courbe τ. Elles auront des comportements analogues en O'_2, O'_3.

Les courbes L_0 passent donc une fois par les points $(3, \eta + 1)$, $(3, \eta + 2)$, ..., $(3, 3\eta^2 + 2\eta)$ et $\eta - 1$ fois par les points $(3, \eta, 1, 1)$, $(3, \eta, 1)$. Par conséquent, elles passent $2\eta - 1$ fois par le point $(3, \eta)$ et $3\eta - 2$ fois par les points $(3, \eta - 1)$, $(3, \eta - 2)$, ..., $(3,1)$. Par suite, elles passent $3\eta - 2$ fois par le point O_1. Elles ont des comportements analogues en O_2, O_3.

Parmi les courbes cherchées se trouve la section de F par le plan $x_4 = 0$ comptée $3\eta - 2$ fois. Or, si l'on applique l'homographie H à $x_4^{3\eta-2}$, on obtient la même fonction multipliée par $\epsilon^{3\eta^2+5\eta}$. Il en résulte que les transformées des courbes canoniques de Φ seront découpées sur F par les adjointes d'ordre $3\eta - 2$ dont l'équation se reproduit, lorsque l'on applique H, multipliée par $\epsilon^{3\eta^2+5\eta}$.

Considérons l'expression

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x^{3t+i},$$

où $i = 0, 1, 2$ et

$$i_1 + i_2 + i_3 + 3t + i = 3\eta - 2.$$

Lorsque l'on applique H, cette expression se reproduit multipliée par ϵ à la puissance

$$i_2 + i_3(9\eta^2 + 1) + (3t + i)(6\eta^2 + \eta + 1)$$

et cette quantité doit être congrue à $3\eta^2 + 5\eta$, mod. p.

Pour $i = 0$, on a

$$3\eta(\eta + t + i_3 + 1) + 2\eta - t - i_2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

Comme $t + i_2$ est au plus égal à $3\eta - 2$, on aurait

$$3\eta(\eta + t + i_3) + 2\eta + 2 \leqslant 0,$$

ce qui est absurde. On ne peut donc avoir $i = 0$.

Pour $i = 2$, on a

$$(3t + 3i_3 + 4)\eta - (t + i_2 + 1) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

Comme $t + i_2$ est au plus égal à $3\eta - 4$, on est encore conduit à une absurdité.

Reste l'hypothèse $i = 1$. On a cette fois

$$3\eta(\eta - t - i_3 - 1) - (\eta - t - i_2 - 1) \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

Le premier membre doit être nul, car autrement $t + i_2$ ne pourrait être au plus égal à $3\eta - 3$. On a nécessairement

$$\eta - t - i_3 - 1 = 0, \qquad \eta - t - i_2 - 1 = 0,$$

d'où

$$i_1 = i_2 = i_3 = \eta - t - 1.$$

Les surfaces cherchées sont donc représentées par l'équation

$$x_4 \,\Sigma\, a_t(x_1x_2x_3)^{\eta-t-1}x_4^{3t} = 0,$$

t variant de 0 à $\eta - 1$.

Ces surfaces découpent sur F des courbes composées de la section D_0 de F par $x_4 = 0$ et de $\eta - 1$ courbes D du faisceau découpé sur F par les surfaces

$$x_1x_2x_3 + kx_4^3 = 0.$$

10. Recherchons le genre des courbes D ; à cet effet, considérons la courbe D intersection de F et de la surface

$$x_1x_2x_3 - x_4^3 = 0,$$

qui peut être représentée sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2y_3 : y_2^2y_1 : y_3^2y_2 : y_1y_2y_3.$$

A la courbe D correspond la courbe

$$a_1y_1^{6\eta+1}\,y_3^{3\eta-1} + a_2y_2^{6\eta+1}\,y_1^{3\eta-1} + a_3y_3^{6\eta+1}\,y_2^{3\eta-1} + a_4(y_1y_2y_3)^{3\eta} = 0.$$

En effectuant deux fois de suite la transformation

$$\begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_2 y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

puis $\eta - 1$ fois de suite la transformation

$$\begin{pmatrix} y_1^2 & y_2 y_3 & y_1 y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

puis encore une fois la première transformation, on voit que sur la courbe précédente, le point (1, 0, 0) est l'origine d'une branche superlinéaire comprenant deux points multiples d'ordre $3\eta - 1$, suivi d'une suite de $\eta - 1$ points triples, suivis eux-mêmes d'un point double de rebroussement. Il en est de même des points (0, 1, 0), (0, 0, 1). Par conséquent, les courbes Γ ont le genre

$$\frac{1}{2}(27\,\eta^2 + 9\eta + 2).$$

11. Désignons par γ_0 la courbe qui correspond sur Φ à D_0 et par γ les courbes homologues des courbes D. D'après ce qui vient d'être établi, le système canonique de Φ possède une composante fixe γ_0 et sa partie variable appartient au faisceau $|\gamma|$, chaque courbe étant formée de $\eta - 1$ courbes de ce faisceau. On en conclut que les genres de Φ sont

$$p_a = p_g = \eta,$$

la surface étant régulière puisque F est régulière.

Sur une courbe D, H détermine une involution d'ordre $p = 9\eta^2 + 3\eta + 1$, possédant trois points unis. Si x est le genre de la courbe γ, on a donc, par la formule de Zeuthen,

$$2p(x-1) + 3(9\eta^2 + 3\eta) = 27\eta^2 + 9\eta,$$

d'où $x = 1$. Les courbes γ sont donc elliptiques.

Aux courbes du système canonique

$$|\gamma_0 + (\eta - 1)\gamma|$$

de Φ correspondent des courbes du système

$$|D_0 + (\eta - 1)D|,$$

compris dans le système canonique de F. Il est clair que la courbe D_0 passe par les points (3,1), (3,2), ..., $(3, \eta - 1)$, (3η), $(3, \eta + 1)$, ..., $(3, 3\eta^2 + 2\eta)$ et les courbes D, par les points (3,1), (3,2), ..., $(3, \eta - 1)$, $(3, \eta)$, $(3, \eta, 1)$, $(3, \eta, 1,1)$. Précisément, ces dernières courbes ont en O_1 le schéma

$$O_1^3,\ (3,1)^3,\ \ldots,\ (3,\ \eta - 1)^3,\ (3,\ \eta)^2,\ (3,\ \eta,\ 1)^1,\ (3,\ \eta,\ 1,1)^1.$$

12. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes découpées par les surfaces d'ordre $6\eta - 4$, ne contenant pas la surface F comme partie, dont l'équation se reproduit, lorsque l'on opère l'homographie H, multipliée par $\epsilon^{6\eta^2+10\eta}$. Dans cette équation se trouvent les termes

$$x_4^2 \Sigma x_t (x_1 x_2 x_3)^{2\eta - t - 1} x_4^{3t},$$

où t varie de 0 à $2n - 2$.

En raisonnant comme plus haut, on voit que l'équation des surfaces en question contient aussi les termes

$$\begin{gathered}
\Sigma\, b_{1k} x_1^{4\eta - t - 1} x_2^{\eta - t - 1} x_3^{\eta - t - 2} x_4^{3t},\\
\Sigma\, b_{2k} x_1^{\eta - t - 2} x_2^{4\eta - t - 1} x_3^{\eta - t - 1} x_4^{3t},\\
\Sigma\, b_{3k} x_1^{\eta - t - 1} x_2^{\eta - t - 2} x_3^{4\eta - t - 1} x_4^{3t},\\
(t = 0,\ 1,\ \ldots,\ \eta - 2)
\end{gathered}$$

et n'en contient pas d'autre. Il en résulte que l'équation des surfaces en question contient $5(\eta - 1) + 1$ termes. Observons que parmi ceux-ci se trouvent les termes

$$\begin{gathered}
(x_1 x_2 x_3)^{\eta - 2} x_1^{3\eta + 1} x_2, \qquad (x_1 x_2 x_3)^{\eta - 2} x_2^{3\eta + 1} x_3,\\
(x_1 x_2 x_3)^{\eta - 2} x_3^{3\eta + 1} x_1, \qquad (x_1 x_2 x_3)^{\eta - 2} x_4^{3\eta + 2}.
\end{gathered}$$

Pour que les surfaces envisagées ne contiennent pas la surface F comme partie, il faut supprimer l'un des termes précédents. Il en reste donc $5(\eta - 1)$ et on a donc pour le bigenre de la surface $\Phi : P_2 = 5\ \ (\eta - 1)$.

Observons enfin que parmi les termes de l'équation figurent

$$x_1^{4\eta - 1} x_2^{\eta - 1} x_3^{\eta - 2}, \quad x_1^{\eta - 2} x_2^{4\eta - 1} x_3^{\eta - 1}, \quad x_1^{\eta - 1} x_2^{\eta - 2} x_3^{4\eta - 1};$$

on en conclut que le système bicanonique de Φ ne contient pas la courbe γ_0 comme partie fixe.

On a

$$P_2 = p_a + p^{(1)}, \qquad \text{d'où} \qquad p^{(1)} = 4\eta - 5.$$

La courbe rationnelle γ_0 ne peut être exceptionnelle, car alors, elle serait une composante fixe du système bicanonique.

13. En résumé :

On peut prendre, comme modèle projectif de l'image de l'involution d'ordre premier

$$p = 9\eta_2 + 3\eta + 1$$

engendrée sur la surface

$$a_1x_1^{3\eta+1}x_2 + a_2x_2^{3\eta+1}x_3 + a_3x_3^{3\eta+1}x_1 + a_4x_4^{3\eta+2} = 0$$

par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{9\eta^2+1}x_3 & \epsilon^{6\eta^2+\eta+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ *est une racine primitive d'ordre* p *de l'unité, une surface possédant trois points de diramation. Chacun de ceux-ci est multiple d'ordre* $\eta + 2$ *pour la surface et le cône tangent à celle-ci en un de ces points se décompose en un plan, un cône d'ordre* $\eta - 1$ *et un cône du second ordre. Le plan coupe le cône d'ordre* $\eta - 1$ *suivant une droite mais ne rencontre pas le cône du second ordre en dehors du point multiple. Les cônes d'ordre* $\eta - 1$ *et du second ordre se coupent suivant une droite. Au point multiple est infiniment voisine une suite de points doubles infiniment voisins successifs dont le premier est sur la droite commune au plan et au cône d'ordre* $\eta - 1$. *Si* η *est pair, cette suite se compose de* $\frac{3}{2}\eta$ *points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ; si* η *est impair, cette suite se compose de* $\frac{1}{2}(3\eta - 1)$ *points doubles biplanaires sauf le dernier, qui est conique.*

La surface Φ, image de l'involution, contient une courbe rationnelle γ_0 et un faisceau linéaire $|\gamma|$ de courbes elliptiques. Le système canonique de Φ se compose de γ_0, composante fixe, et du faisceau $|\gamma|$ compté $\eta - 1$ fois ; une courbe canonique est donc formée de la courbe γ_0 et de $\eta - 1$ courbes γ. Le système bicanonique est irréductible.

Liège, le 3 décembre 1951.