Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques possédant deux systèmes linéaires dont chacun est l'adjoint de l'autre

Lucien Godeaux

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Variétés algébriques possédant deux systèmes linéaires dont chacun est l'adjoint de l'autre. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 61, 1975. pp. 192-197;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1975.57906

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1975_num_61_1_57906

Fichier pdf généré le 05/06/2020

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques possédant deux systèmes linéaires dont chacun est l'adjoint de l'autre

par † Lucien GODEAUX
Membre de 'Académie

Résumé. — Sur la surface d'Enriques, l'adjoint à un système linéaire a, à son tour, comme adjoint, le système primitif. Cette propriété est-elle suffisante? La réponse est affirmative et les raisonnements s'étendent aux variétés algébriques à n dimensions.

Sur une surface d'Enriques $F(p_a = p_g = 0, P_6 = 1)$, un système linéaire $| C_1 |$ a pour adjoint un système linéaire $| C_2 |$ et celui-ci a à son tour comme adjoint le système linéaire $| C_1 |$. Nous démontrons que cette propriété est caractéristique des surfaces d'Enriques. Nous établissons le théorème suivant:

Si une surface algébrique F *possède deux systèmes linéaires distincts dont chacun est l'adjoint de l'autre, c'est une surface d'Enriques, privée de courbe canonique et de courbes pluricanoniques de rang impair, mais possédant des courbes pluricanoniques d'ordre zéro de rang pair. La surface* F *est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.*

La dernière partie de ce théorème est due à Enriques [1]. Nous en avons donné une démonstration plus simple [2] suivant un procédé qui sera utilisé plus loin dans un cas plus général.

---

[1] Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (Rendiconti dell'Accademia di Bologna, 1908, pp. 40-46). Opere scelte, vol. II, pp. 303-306.

[2] *Une démonstration nouvelle d'un théorème de F. Enriques* (Rendiconti della Accademia Naz. dei Lincei, 2° sem. 1966, pp. 297-299).

L'extension de nos raisonnements au cas des variétés à n dimensions nous donne le théorème suivant:

Si une variété algébrique W à n dimensions contient deux systèmes linéaires distincts de variétés à $n-1$ dimensions dont chacun est l'adjoint à l'autre, elle est dépourvue de variétés canonique et pluricanoniques de rang impair, mais possède des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro. Elle est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une variété dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

1. Soit F une surface algébrique sur laquelle se trouvent deux systèmes linéaires distincts $|C_1|$, $|C_2|$ dont chacun est l'adjoint à l'autre. Nous avons donc

$$|C_1'| = |C_2|, \ |C_2'| = |C_1|.$$

Supposons que l'on ait $|C_1' - C_2| = |K|$, K étant une courbe canonique de la surface. Nous avons également $|C_2' - C_1| = |K|$, d'où $K \equiv 0$. La surface F possède donc une courbe canonique d'ordre zéro ou ne possède pas de courbe canonique.

Dans le premier cas, tout système linéaire est son propre adjoint et l'on aurait $|C_1| = |C_2|$, contrairement à l'hypothèse.

La surface F est donc dépourvue de courbe canonique. On a

$$|C_1''| = |C_2'| = |C_1|$$

et la surface F possède une courbe bicanonique, d'ordre zéro puisque $|C_1|$ et $|C_1''|$ coïncident.

Si nous désignons par π le genre des courbes C_1 ,elles sont rencontrées par les courbes C_2 en $2\pi - 2$ points. Les courbes C_2 ont également le genre π. Comme on a

$$[C_1',C_2] = [C_2,C_2], \ [C_2',C_1] = [C_1,C_1],$$

les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ont le degré $2\pi - 2$.

Si l'on désigne par r_1 la dimension de $|C_1|$ et par r_2 celle de $|C_2|$, on a

$$r_1 \leqslant \pi - 1, \ r_2 \leqslant \pi - 1.$$

On a, comme sur toute surface, $C_1' - C_1 \equiv C_2' - C_2$, ce qui donne ici

$$|2C_1| = |2C_2|.$$

2. Le système $| C_1 |$ étant choisi arbitrairement sur F, il lui correspond un adjoint $| C_2 |$ dont $| C_1 |$ est à son tour l'adjoint. On peut donc choisir $| C_1 |$ de telle sorte que:

les nombres r_1, r_2 soient arbitrairement grands,
les systèmes $| C_1 |, | C_2 |$ soient simples.

Cela étant fait, considérons un espace linéaire Σ à $r_1 + r_2 + 1$ dimensions contenant deux espaces linéaires σ_1 de dimension r_1 et σ_2 de dimension r_2, ne se rencontrant pas et de dimensions respectives r_1, r_2.

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans de σ_1 et les courbes C_2 aux hyperplans de σ_2. Nous obtenons dans σ_1 une surface F_1 et dans σ_2 une surface F_2 birationnellement identiques à F. Nous désignerons par s les droites de Σ qui joignent deux points homologues de F_1, F_2.

Nous désignerons par C_1, C_2^+ les courbes qui correspondent sur F_1 aux courbes C_1, C_2 et par C_1^+, C_2 celles qui correspondent à ces courbes sur F_2. Ces courbes de même que les surfaces F_1, F_2 sont d'ordre $2(\pi - 1)$.

Considérons un hyperplan de Σ passant par σ_2, et deux courbes homologues C_2^+, C_2. L'hyperplan coupe C_2^+ en $2(\pi - 1)$ points et contient donc $2(\pi - 1)$ droites s s'appuyant en des points homologues sur les courbes C_2, C_2^+. La variété V_1 de ces droites passe simplement par la courbe C_2 et par conséquent V_1 est d'ordre $4(\pi - 1)$.

Lorsque l'hyperplan varie, la variété V_1 engendre la variété V_2 lieu des droites s. Cette variété passe simplement par F_1, donc la variété V_2 est d'ordre $6(\pi - 1)$.

Les courbes $2C_1$ et $2C_1^+$ se correspondent et nous pouvons choisir sur F_1 une courbe $2C_1$ découpée sur F_1 par une hyperquadrique Q_1 de σ_1 dont la courbe homologue $2C_1^+$ est découpée sur F_2 par une hyperquadrique Q_2 de σ_2.

Nous désignerons par

$$Q = Q_1 + Q_2$$

l'hyperquadrique de Σ formée par la réunion de la projection de Q_1 à partir de σ_2 et de la projection de Q_2 à partir de σ_1.

L'intersection de V_2 et de Q comprend la variété lieu des droites s s'appuyant sur les courbes $2C_1$, $2C_1^+$ choisies plus haut et est complétée par une surface Φ d'ordre $4(\pi - 1)$.

Les droites s découpent sur Φ les couples d'une involution d'ordre deux, I.

3. Soit H l'homographie biaxiale harmonique de Σ ayant comme axes les espaces σ_1, σ_2. Les droites s et l'hyperquadrique Q sont unies pour H de sorte que H détermine sur Φ l'involution I.

Si l'involution I possède un point uni, celui-ci appartient à σ_1 ou σ_2, c'est-à-dire à F_1 ou F_2. Mais alors le point qui lui correspond sur l'autre surface appartient aussi à l'involution, ce qui est absurde. L'involution I est donc privée de point uni.

Entre le genre arithmétique $p'_a = 0$ de F et celui p_a de Φ, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p_a = 1$.

Désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ. Ce système comprend les courbes Γ_1 transformées des courbes C_1 et les courbes Γ_2 transformées des courbes C_2. Ces courbes ont le genre $2\pi - 1$. Les courbes Γ_1 découpent sur une courbe Γ_2 des groupes canoniques de cette courbe. Il en résulte que le système $|\Gamma|$ est son propre adjoint et la surface Φ possède une courbe canonique d'ordre zéro. Il est clair que les courbes pluricanoniques de Φ sont d'ordre zéro également.

Le genre du système $|\Gamma|$ est égal à sa dimension $r_1 + r_2 + 1$. D'autre part il est égal au genre $2\pi - 1$ des courbes Γ_1, Γ_2. On a trouvé

$$r_1 + r_2 \leqslant 2\pi - 2$$

et on a donc

$$r_1 = r_2 = \pi - 1.$$

Dans notre note citée plus haut, nous avions pris pour F_1, F_2 des surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre.

4. Nous allons maintenant étendre les raisonnements précédents aux variétés algébriques à n dimensions.

Soit W une variété algébrique à n dimensions contenant deux systèmes linéaires distincts $|V_1|$, $|V_2|$ dont chacun est adjoint à l'autre. Nous avons donc

$$V'_1 \equiv V_2, \quad V'_2 \equiv V_1.$$

Comme dans le cas des surfaces, on voit que si W possède une variété canonique, elle est d'ordre zéro ou n'existe pas.

Si W possédait une variété canonique d'ordre zéro, tout système serait son propre adjoint et V_1, V_2 appartiendraient à un même système linéaire, contrairement à l'hypothèse.

La variété W est donc dépourvue de variété canonique.

On a

$$|V_1''| = |V_2'| = |V_1|.$$

Les systèmes $|V_1|$ et $|V_1''|$ coïncident et la variété W possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

Il est évident que W est privée de variétés pluricanoniques de rang impair et possède des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro.

De $V_1' - V_1 \equiv V_2' - V_2$, on déduit

$$|2V_1| = |2V_2|.$$

Si nous désignons par r_1 la dimension de $|V_1|$, par r_2 celle de $|V_2|$, par p_g le genre géométrique de V_1, par p_g' celui de V_2, on a

$$r_1 \leqslant p_g' - 1, \quad r_2 \leqslant p_g - 1.$$

5. Comme dans le cas des surfaces, on peut supposer que r_1 et r_2 sont aussi grands qu'on le veut et que les systèmes $|V_1|$ et $|V_2|$ sont simples. Cela étant, considérons un espace Σ de dimension $r_1 + r_2 + 1$ contenant deux espaces σ_1, σ_2 de dimensions respectives r_1, r_2 ne se rencontrant pas. On désignera par W_1 et W_2 des variétés obtenues en rapportant projectivement les variétés V_1 aux hyperplans de σ_1 et les variétés V_2 aux hyperplans de σ_2.

Nous désignerons par V_1, V_2^+ les variétés qui correspondent à V_1, V_2 sur W_1 par V_1^+, V_2 celles qui leur correspondent sur W_2.

Les variétés $2V_1$, $2V_2$ appartenant au même système linéaire, les variétés V_1, V_2 ont le même ordre m. Il en est de même des variétés V_1, V_2^+, V_1^+, V_2.

Les variétés W_1, W_2 sont birationnellement identiques et nous appellerons s les droites qui joignent deux points homologues.

Considérons deux variétés V_2, V_2^+ homologues. Un hyperplan passant par σ_2 coupe V_2^+ suivant une variété d'ordre m et les droites s passant par les points de cette variété engendrent une variété d'ordre

m. La variété W'_1 lieu des droites s s'appuyant sur V_2 et V_2^+ est donc d'ordre $2m$. Lorsque l'hyperplan varie, la variété W'_1 engendre la variété lieu des droites s et cette variété passant simplement par W_1, est d'ordre $3m$.

Soient Q_1 une hyperquadrique de σ_1 et Q_2 une hyperquadrique de σ_2 découpant respectivement sur W_1 et sur W_2 des variétés $2V_1$ et $2V_1^+$ homologues. Donnons à $Q = Q_1 + Q_2$ la même signification que plus haut.

L'intersection de Q et du lieu des droites s se compose du lieu des droites s s'appuyant sur les courbes précédentes et d'une variété Ω à n dimensions.

6. L'homographie biaxiale harmonique H ayant comme axes σ_1 et σ_2 détermine sur Ω une involution I du second ordre qui est également déterminée par les droites s. Cette involution ne peut posséder de point uni comme on le voit en raisonnant comme plus haut.

Appelons ω les sections hyperplanes de la variété Ω. Le système $|\, \omega \,|$ contient les transformées ω_1 de V_1 et celles ω_2 de V_2. Ces variétés découpent sur ω_2 et sur ω_1 des variétés canoniques. On en conclut que le système $|\, \omega \,|$ est son propre adjoint et que Ω possède une variété canonique d'ordre zéro. Les variétés pluricanoniques de Ω sont également d'ordre zéro.

La variété W est donc une généralisation de la surface d'Enriques.

Liège, le 14 février 1975.