Bulletin de la Classe des sciences

Sur certaines représentations unitaires d’un groupe infini de transformations. Mémoire présenté par Léon Van Hove. Rapports

Théophile Henri Joseph Lepage, Lucien Godeaux

Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations.

Mémoire présenté par Léon VAN HOVE.

RAPPORTS

L'Auteur considère le groupe continu infini de transformations, de classe C^∞, de l'espace R^{2n+1} : (s, p_j, q_j) en lui-même, conservant la forme de Pfaff $\varpi = ds - \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j$.

A tout sous-groupe à un paramètre τ, de classe C^∞ en ce paramètre, se trouve associée, d'une manière univoque une fonction réelle $f(p, q)$ de classe C^∞ de l'espace R^{2n} : (p_j, q_j), les équations de la transformation infinitésimale correspondante étant

$$\frac{\delta s}{\delta\tau} = f - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f}{\partial p_j}, \qquad \frac{\delta p_j}{\delta\tau} = \frac{\partial f}{\partial q_j}, \qquad \frac{\delta q_j}{\delta\tau} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}.$$

Désignant par $\mathcal{F}_\Gamma$ l'ensemble des fonctions $f(p, q)$, de classe C^∞ sur R^{2n}, pour lesquelles ce système possède toutes ses courbes intégrales définies dans l'intervalle $-\infty < \tau < +\infty$, il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de cette famille et les transformations infinitésimales de classe C^∞ du groupe Γ. Soit $X[f]$ la transformation infinitésimale correspondant à $f \in \mathcal{F}_\Gamma$; $\Phi(s, p, q)$ étant une fonction de classe C^∞ de R^{2n+1} l'on a

$$X[f]\Phi = \left(f - \Sigma p_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial s} + (f, \Phi)$$

où

$$(f, \Phi) = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right).$$

Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\Gamma$, la parenthèse de Lie $(X[f_1], X[f_2])$ est définie par

$$\{ X[f_1]X[f_2] - X[f_2]X[f_1] \} \Phi ;$$

si $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}_\Gamma$, l'on aura

$$(\mathrm{X}[f_1], \mathrm{X}[f_2]) = \mathrm{X}[(f_1 f_2)].$$

De même a_1, a_2 étant des constantes réelles, l'on aura

$$a\mathrm{X}[f_1] + b\mathrm{X}[f_2] = \mathrm{X}[af_1 + bf_2]$$

si $af_1 + bf_2 \in \mathcal{F}_\Gamma$. L'Auteur montre par des exemples que ces conditions, savoir $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}_\Gamma$, $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in \mathcal{F}_\Gamma$, ne sont pas toujours remplies. Ainsi se trouve définie une structure algébrique de l'ensemble des transformations infinitésimales du groupe Γ. Ce n'est pas une structure d'Algèbre de Lie. On peut définir, dans $\mathcal{F}_\Gamma$, des sous-ensembles fermés pour les opérations de combinaisons liminaires à coefficients réels et de parenthèse de Poisson (f_1, f_2) ; ces sous-ensembles constituent des algèbres de Lie et il en est de même pour les ensembles correspondants de transformations infinitésimales. Il en est notamment ainsi pour l'ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\Gamma$ des fonctions $f(p, q)$ de classe C^∞ sur R^{2n} telles que

1° $f(p, q) = \mathrm{O}(\rho^2)$ pour $\rho^2 = \Sigma\,(p_j^2 + q_j^2) \to +\infty$.

2° pour $m = 1, 2, \ldots$ toutes les dérivées d'ordre m de f vérifient la condition

$$f^{(m)}(p, q) = \mathrm{O}(\rho^{2-m}) \qquad \text{pour} \qquad \rho \to +\infty.$$

L'objet principal du Mémoire est de construire pour le groupe Γ, des représentations unitaires dans l'espace séparable de Hilbert $\mathcal{H}_{2n+1}$ des fonctions à valeurs complexes $\Phi(\Omega)$, mesurables et de carrés sommables, sur R^{2n+1}. Ω désigne un point de R^{2n+1}, $d\Omega$ l'élément de volume $\varpi \dfrac{d\varpi^n}{n\,!}$, les transformations de Γ conservent $d\Omega$. Il en résulte que toute transformation $\gamma \in \Gamma$ conserve le produit scalaire

$$(\Phi, \Psi) = \int_{\mathrm{R}} \overline{\Phi}(\Omega)\Psi(\Omega)d\Omega,$$

en ce sens que $\Phi(\Omega)$ désignant un élément quelconque de $\mathcal{H}_{2n+1}$, et posant

$$\mathrm{U}_\gamma\Phi(\Omega) = \Phi(\gamma^{-1}\Omega),$$

l'on aura

$$(U_\gamma \Phi, \ U_\gamma \Psi) = (\Phi, \ \Psi).$$

Il en résulte que l'opérateur linéaire U_γ de $\mathcal{H}_{2n+1}$ est une transformation unitaire et, de plus, $U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1 \gamma_2}$; ainsi l'application $\gamma \to U_\gamma$ est une représentation de Γ par des transformations unitaires dans $\mathcal{H}_{2n+1}$. Cette représentation est désignée par $\mathcal{R}$.

Cette représentation n'est pas irréductible, l'Auteur établit qu'elle peut être considérée, en certain sens, comme la somme d'une famille continue de représentations irréductibles $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ où le paramètre réel α prend toutes les valeurs.

Soit $\gamma \epsilon \Gamma$; désignant par ω un point (p, q) de R^{2n}, ω' le point image de ω, la transformation γ pourra s'écrire

$$\omega' = \gamma\omega, \ s' = s + \Pi_\gamma(\omega).$$

Cela étant, α désignant un nombre réel, $\varphi(\omega)$ un élément de $\mathcal{H}_{2n}$ espace d'Hilbert des fonctions de carré sommable sur R^{2n}, la fonction

$$U_\gamma^{(\alpha)} \varphi(\omega) = e^{i\alpha \Pi_\gamma(\gamma^{-1}\omega)} . \varphi(\gamma^{-1}\omega)$$

définit une transformation unitaire dans $\mathcal{H}_{2n}$ qui, pour $\gamma_1, \gamma_2 \epsilon \Gamma$ donne

$$U^{(\alpha)}_{\gamma_1\gamma_2} = U^{(\alpha)}_{\gamma_1} . U^{(\alpha)}_{\gamma_2} ;$$

ainsi, pour tout nombre réel α, l'application $\gamma \to U_\gamma^{(\alpha)}$ est une représentation de Γ par des transformations unitaires de l'espace $\mathcal{H}_{2n}$. Cette représentation est notée $\mathcal{R}^{(\alpha)}$. Elle est fidèle pour $\alpha \neq 0$, $\mathcal{R}^{(0)}$ est, au contraire, une représentation fidèle du groupe-quotient Γ/C, C désignant le centre de Γ.

Les trois premiers chapitres du Mémoire sont consacrés à la définition du groupe Γ et des représentations $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{(\alpha)}$; les variétés linéaires fermées de $\mathcal{H}_{2n+1}$ invariantes pour la représentation $\mathcal{R}$ y sont déterminées. Le chapitre IV est consacré à l'étude des transformations infinitésimales dans les représentations obtenues. Aux transformations infinitésimales de Γ correspondent, dans chacune des représentations $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, des opérateurs hypermaximaux-symétriques (en abrégé H-S) : $-i$ H$[f]$, $-i$ H$^{(\alpha)}[f]$. *Il* *existe dans l'espace d'Hilbert un domaine sur lequel tous ces opérateurs sont définis, qu'ils laissent invariant et sur lequel ils sont essentiellement hypermaximaux.* Il en résulte qu'à toute algèbre de Lie de transformations infinitésimales de Γ correspondent, dans les représentations $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, des algèbres de Lie au sens de *Segal.*

La démonstration de l'existence d'un domaine $\mathcal{D}_{2n+1}$, sous-ensemble linéaire et dense de l'espace d'Hilbert, tel que pour tout $f \epsilon \mathcal{F}_\Gamma$ la restriction de $\mathrm{H}[f]$ à $\mathcal{D}_{2n+1}$ soit essentiellement H. S. (et, d'une proposition analogue pour les opérateurs $\mathrm{H}^{(\alpha)}[f]$) constitue, à notre avis, la pièce maîtresse du travail. Grâce à elle il est possible d'établir que les systèmes d'opérateurs $\mathrm{H}[f]$ et $\mathrm{H}^{(\alpha)}[f]$ possèdent la même structure algébrique que l'ensemble des transformations infinitésimales du groupe Γ. En particulier si $\mathcal{F}$ désigne une algèbre de Lie contenue dans $\mathcal{F}_\Gamma$, c'est-à-dire si $\mathcal{F}$ est une sous-ensemble de $\mathcal{F}_\Gamma$ fermé pour les opérations de combinaison linéaire à coefficients réels et de parenthèse de Poisson, l'ensemble $\mathcal{R}[\mathcal{F}]$ des opérateurs antisymétriques $-i\mathrm{H}[f]$ sera une algèbre de Lie. De même pour tout α réel, pour l'ensemble $\mathcal{R}^{(\alpha)}[f]$ des opérateurs $-i\mathrm{H}^{(\alpha)}[f]$, $f \epsilon \mathcal{F}$. Les applications

$$f \to -i\mathrm{H}[f], \qquad f \to -i\mathrm{H}^{(\alpha)}[f]$$

sont des isomorphismes de $\mathcal{F}$ avec les algèbres de Lie $\mathcal{R}[\mathcal{F}]\,\mathcal{R}^{(\alpha)}[\mathcal{F}]$.

Parmi les sous-groupes de Γ particulièrement intéressants figurent :

le *centre* C :

$$s' = s + \sigma, \quad p'_j = p_j, q'_j = q_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

le *sous-groupe* T :

$$s' = s + \sigma + \Sigma \alpha_j q_j, \quad p'_j = p_j + \alpha_j, \quad q'_j + \beta_j,$$

et le *groupe linéaire* L :

$$s' = s + \sigma + \mathrm{F}, \quad p'_j = a_{jk} p_k + b_{jk} q_k + \alpha_j, \quad q'_j = c_{jk} + d_{jk} q_k + \beta_j$$

où σ, α_j, β_j, sont des constantes arbitraires, F certain polynome de second degré en les variables p, q, et où les matrices

$A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$, $D = (d_{jk})$ désignent quatre matrices réelles telles que

$$AB' = BA' = CD' = DC' = 0, \quad AD' - BC' = I.$$

T est sous-groupe invariant de L et le groupe-quotient L/T est isomorphe au groupe symplectique réel à $2n$ variables.

Le chapitre V est consacré à l'établissement de l'irréductibilité des représentations $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, Il faut distinguer suivant que α est nul ou non, le représentation $\mathcal{R}^{(0)}$ jouissant de propriétés particulières. Pour $\alpha \neq 0$, l'Auteur établit que $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ est réductible en tant que représentation du sous-groupe L.

Il détermine les variétés linéaires fermées de $\mathcal{H}_{2n}$ invariantes, au nombre de deux, pour les transformations $U_\gamma^{(\alpha)}$ ($\alpha \neq 0$, $\gamma \epsilon L$). L'irréductibilité de $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, pour $\alpha \neq 0$, comme représentation du groupe Γ, s'établit ensuite en montrant que certaines transformations $U_\gamma^{(\alpha)}$, $\gamma \epsilon \Gamma$, ne laissent aucune des deux variétés précédentes invariantes.

La représentation $R^{(0)}$ demande une étude à part ; elle diffère, par sa structure, des autres représentations $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, en raison du fait que l'opérateur $H^{(0)}[1]$ est nul et que les $2n$ opérateurs $H^{(0)}[p_j]$, $H^{(0)}[q_j]$ sont commutables. D'ailleurs, contrairement à $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, pour $\alpha \neq 0$, la représentation $\mathcal{R}^{(0)}$ du sous-groupe L est irréductible.

Cette représentation avait déjà été considérée par *Koopman* et par *von Neuwan* dans l'étude du problème ergodique. Les résultats de l'Auteur généralisent une méthode indiquée par *Koopman* pour l'introduction en Mécanique classique d'opérateurs de l'espace hilbertien. La Mécanique quantique utilisant les opérateurs de cet espace, la question se pose de chercher s'il existe quelque analogie entre les deux espèces d'opérateurs. A cet égard, on observe que les opérateurs de Koopman et van Neumann, savoir les opérateurs $H^0[p_j]$, $H^0[q_j]$ sont commutables, alors que les opérateurs quantiques P_j, Q_j vérifient la relation

$P_jQ_j - Q_jP_j = -\hbar i$, $\hbar$ constante de Planck divisée par 2π.

L'Auteur observe que, pour $\alpha = \dfrac{1}{\hbar}$, les opérateurs $K[f] = \alpha^{-1}H^{(\alpha)}[f]$ vérifient, au contraire, la relation de commutation

$$K[f_1]\ K[f_2] - K[f_2]\ K[f_1] = \hbar\ i\ K[(f_1 f_2)].$$

en particulier

$$K[p_j] \ K[q_j] - K[q_j]\,K[p_j] = -\hbar \ i.$$

relation présentant avec les lois de commutation quantique une analogie remarquable. Toutefois les opérateurs $K[f]$ présentent avec les opérateurs quantiques des différences essentielles qui sont indiquées dans le chapitre V. L'Auteur y établit qu'il n'existe pas de représentations unitaires du groupe Γ fournissant des opérateurs identiques aux opérateurs quantiques. Il n'en est plus ainsi si, au lieu de Γ, on considère le sous-groupe linéaire L ; dans ce cas, les opérateurs quantiques linéaires et quadratiques en les P_j, Q_j peuvent se déduire de certaine représentation unitaire des transformations infinitésimales de L.

Le Mémoire de Mr Van Hove apporte une contribution extrêmement remarquable à l'étude d'un groupe infini en appliquant une technique utilisée jusqu'à présent dans l'étude des représentations des groupes finis seulement. Nous en proposons volontiers l'impression, dans la série des Mémoires in-8° de l'Académie.

Bruxelles, le 28 juin 1951.

TH. LEPAGE.

Je me rallie bien volontiers aux conclusions de mon savant confrère.

Lucien GODEAUX.