Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d’une surface algébrique de genres pa = pg = 2, p(1) = 1, P2 = 3, ... image d’une involution cyclique d’ordre 31 appartenant à une surface du septième ordre et possédant trois points unis.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(Première note).

Résumé. — Construction d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 3$, ... image d'une involution cyclique d'ordre 31 appartenant à une surface du septième ordre et possédant trois points unis.

Nous nous proposons, dans cette note et dans celles qui lui feront suite, quelques involutions cycliques appartenant à des surfaces algébriques. Celles-ci seront représentées par des équations de la forme

$$a_1x_1^\nu x_2 + a_2x_2^\nu x_3 + a_3x_3^\nu x_1 + a_4x_4^{\nu+1} = 0,$$

dans l'hypothèse où cette surface est transformée en soi par une homographie de période $p = (\nu - 1)^2 + \nu$ n'ayant comme points unis que les sommets du tétraèdre de référence. Nous avons déjà rencontré le cas $\nu = 4$ en cherchant à déterminer les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface algébrique (¹). Dans cette note, nous considérons le cas $\nu = 6$; nous obtenons, comme image de l'involution, une surface de genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 3$, ..., $P_i = i + 1$, ... Le système canonique de cette surface est un faisceau de courbes elliptiques contenant deux courbes dégénérées : l'une en une courbe rationnelle comptée trois fois, l'autre en trois courbes rationnelles. Dans les notes suivantes, nous considérons les cas $\nu = 7$, $\nu = 9$.

Ces recherches nous donnent l'occasion d'appliquer les résul-

(¹) *Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique* (BULL. ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1939, pp. 308-313).

tats que nous avons obtenus sur la structure des points de diramation isolés des surfaces multiples (¹).

1. Considérons la surface F d'équation

$$a_1x_1^6x_2 + a_2x_2^6x_3 + a_3x_3^6x_1 + a_4x_4^7 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{26}x_3 & \epsilon^9 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 31 de l'unité. L'homographie H a donc la période 31 et engendre sur F une involution de cet ordre, I.

L'homographie H possède quatre points unis : les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence. Les trois premiers appartiennent à la surface F et sont d'ailleurs des points simples de celle-ci. L'involution I possède donc trois points unis et ceux-ci, d'après la symétrie de l'équation de F, présentent la même structure ; il suffira d'étudier l'un d'eux, par exemple O_1.

2. Le plan tangent à F au point uni O_1 est le plan $x_2 = 0$. Dans ce plan, l'homographie H engendre l'homographie

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \epsilon^{26}x_3 : \epsilon^9 x_4.$$

En posant $\eta = \epsilon^{26}$, on a $\eta^{23} = \epsilon^9$ et en posant $\zeta = \epsilon^9$, on a

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES, n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (MÉM. IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938, pp. 1-44) ; *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1938, pp. 193-222) ; *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (IDEM, 1938, pp. 189-210) ; *Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation* (IDEM, 1950, pp. 1-13) ; *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (ANNALI DI MATEMATICA, 1929, 4e s., t. 28, pp. 89-106) ; *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840) ; *Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation* (IDEM, 1950, pp. 170-179).

$\zeta^{27} = \epsilon^{26}$. Il en résulte que les nombres qui caractérisent le point uni O_1 sont $\alpha = 23$, $\beta = 27$.

Pour notre objet, nous devons considérer un système linéaire $|C_0|$, appartenant à l'involution I, privé de points-base et considérer la singularité en O_1 des courbes C_0 passant par ce point. Nous pouvons prendre par exemple pour $|C_0|$ le système linéaire découpé sur F par les surfaces d'ordre 31 transformées chacune en soi par l'homographie H et ne passant par aucun des points O_1, O_2, O_3, ou un multiple de ce système.

Si λ, μ sont deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 31),$$
$$\mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 31),$$

les courbes C_0 passant par O_1 (courbes que nous désignerons par C_0') ont en ce point la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes coïncidant avec $x_2 = x_3 = 0$ et μ avec $x_2 = x_4 = 0$, la quantité $\lambda + \mu$ étant la plus petite possible. Actuellement, on a $\lambda = 1$, $\mu = 4$ et

$$1 + 4.23 = 3.31, \quad 4 + 1.27 = 31.$$

Il en résulte que les courbes C_0' ont en O_1 la multiplicité cinq, quatre tangentes étant confondues avec $x_2 = x_4 = 0$ ou O_1O_3 et une avec $x_2 = x_3 = 0$ ou O_1O_4. De plus, en appliquant la théorie que nous avons établie dans nos travaux cités plus haut, il existe une suite de 26 points unis infiniment voisins successifs de O_1, dont le premier se trouve sur O_1O_4 : ces points sont unis de seconde espèce sauf le dernier, qui est uni de première espèce ; nous les désignerons par (4,1), (4,2), ..., (4,26). D'autre part, il existe une suite de 22 points unis infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur O_1O_3 ; nous les désignerons par (3,1), (3,2), ..., (3,22). Ces points sont unis de seconde espèce sauf le dernier, qui est uni de première espèce. Le point (3, 1) est quadruple pour les courbes C_0', le point (3,2) est double et les points (3,3), (3,4), ..., (3,22) sont simples. Les courbes C_0' passent en outre simplement par deux points (3, 2, 1), (3, 2, 2) infiniment voisins successifs du point (3,2), le premier est uni de seconde espèce, le dernier uni de première espèce.

3. Soit Φ une surface image de l'involution I dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0 et que nous pouvons supposer normale. Désignons par O'_1, O'_2, O'_3 les points de diramation de Φ, homologues de O_1, O_2, O_3 respectivement.

Nous avons établi que le point O'_1 est triple pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant dégénéré en trois plans. Si nous projetons Φ de O'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point O'_1, correspond l'ensemble de trois droites que nous désignerons par σ_{13}, τ_1, σ_{14}. La première correspond au domaine du point (3,22) sur la surface F, la seconde au domaine du point (3, 2, 2) et la troisième au domaine du point (4,26). La droite τ_1 rencontre chacune des droites σ_{13}, σ_{14}, mais ces deux dernières ne se rencontrent pas. Les droites σ_{13}, σ_{14} sont de degré — 2, la droite τ_1 de degré — 3.

On pourrait voir que les courbes O'_1 assujetties à toucher en O_1 une droite de $x_2 = 0$ différente de O_1O_3, O_1O_4, courbes que nous désignerons par C''_0, ont en O_1 la multiplicité 9, une tangente coïncidant avec O_1O_3 et les autres avec O_1O_4. Les courbes C''_0 passent simplement par les points (3,1), (3,2), ..., (3,22), trois fois par (4,1), deux fois par (4,2), (4,3), ..., (4,10), une fois par (4,11), une fois par cinq points (4, 1, 1), (4, 1, 2), ... (4, 1, 5) infiniment voisins successifs de (4,1) et une fois par un point (4, 11, 1), infiniment voisin de (4,11). Il en résulte que le point commun aux droites τ_1, σ_{14} est double biplanaire pour la surface Φ_1.

De même, le point O'_2 est équivalent à l'ensemble de trois droites σ_{21}, τ_2, σ_{24} et d'un point double biplanaire à l'intersection de τ_2, σ_{24}. Le point O'_3 est équivalent à l'ensemble de trois droites σ_{32}, τ_3, σ_{34} et d'un point double biplanaire à l'intersection de τ_3, σ_{34}.

4. Une courbe canonique de la surface Φ ne rencontre pas les courbes rationnelles de degré — 2, mais rencontre en un point les courbes rationnelles de degré — 3. Par conséquent les courbes canoniques de Φ rencontrent en un point chacune des courbes τ_1, τ_2, τ_3.

Envisageons une courbe canonique Λ de Φ et soit L la courbe qui lui correspond sur F. La courbe Λ rencontre la courbe τ_1

en un point, donc la courbe L doit passer simplement par le point (3, 2, 2) ; mais alors elle passe aussi une fois par le point (3, 2, 1) et une fois par le point (3, 2). Il en résulte que la courbe L passe trois fois par le point (3,1) et par conséquent trois fois par le point O_1. Nous voyons donc que L a un point triple en O_1, les trois tangentes étant confondues avec la droite O_1O_3.

Pour la même raison, la courbe L a un point triple en O_2, les trois tangentes étant confondues avec O_2O_1 et un point triple en O_3, les trois tangentes étant confondues avec O_3O_2.

La surface F est dépourvue de points multiples et ses courbes canoniques sont découpées par les surfaces cubiques. Cherchons, parmi ces surfaces, celles qui coupent F suivant des courbes ayant des points triples en O_1, O_2, O_3, les tangentes en ces points satisfaisant aux conditions indiquées plus haut. Une première solution s'aperçoit immédiatement : la section de F par le plan $x_4 = 0$, comptée trois fois est une courbe canonique de F et satisfait aux conditions imposées.

L'ensemble des sections de F par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ constitue une courbe canonique répondant à la question. En effet, la courbe

$$x_1 = 0,\ a_2x_2^6x_3 + a_1,x_4^7 = 0$$

passe par O_2 et a un point sextuple en O_3. Par conséquent, l'ensemble des trois courbes envisagé est une courbe ayant des points heptuples en O_1, O_2, O_3, d'où la conclusion précédente.

Les surfaces cubiques

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0 \tag{1}$$

découpent donc sur F des courbes canoniques transformées de courbes canoniques de Φ. Il n'en existe pas d'autre, car si l'on applique l'homographie H au premier membre de l'équation précédente, il se reproduit multiplié par ϵ^{27} et il n'existe pas d'autre surface cubique présentant la même propriété.

On en conclut que la surface Φ possède un faisceau de courbes canoniques. Elle est d'autre part régulière puisque F est régulière. Les genres de Φ sont donc $p_a = p_g = 2$.

5. Pour déterminer le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface Φ, nous commencerons par déterminer le genre de la courbe intersection de F et de la surface (1). On peut dans ce but déterminer le genre de la projection.

$$a_1x_4^{18} + a_2x_2^{11}x_3^7 + a_3x_2^4x_3^{11}x_4^3 + a_4x_2^5x_3^6x_4^7 = 0$$

de cette courbe, à partir du point O_1, sur le plan $x_1 = 0$.

Sur cette projection, le point O_2 est l'origine d'une branche superlinéaire comprenant un point heptuple O_2 et successivement un point heptuple, un point quadruple, un point triple et des points simples. Le point O_3 est l'origine de deux branches superlinéaires : le point O_3 est heptuple, l'une des branches comprend un point triple et des points simples, l'autre deux points quadruples, un point triple et des points simples. Il en résulte que la courbe envisagée est de genre 46.

On peut aussi considérer la représentation plane de la surface (1) au moyen des formules

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2y_2 : y_2^2y_3 : y_3^2y_1 : y_1y_2y_3.$$

A la section de la surface (1) par F correspond la courbe

$$a_1y_1^{11}y_2^7 + a_2y_2^{11}y_3^7 + a_3y_3^{11}y_1^7 + a_4y_1^6y_2^6y_3^6 = 0.$$

En opérant la transformation quadratique

$$y_1 : y_2 : y_3 = z_2z_3 : z_3z_1 : z_1z_2,$$

la courbe précédente se transforme dans la courbe

$$a_1z_3^{11}z_2^4 + a_2z_1^{11}z_3^4 + a_3z_2^{11}z_1^4 + a_4z_1^5z_2^5z_3^5 = 0.$$

Les sommets du triangle de référence sont quadruples pour cette courbe : chacun d'eux est l'origine d'une branche superlinéaire comprenant un point quadruple, un point triple et des points simples. La courbe est bien de genre 46.

Envisageons la correspondance (1,31) existant entre une courbe canonique Λ de Φ et la courbe L homologue sur F, courbe qui est donc de genre 46. La courbe Λ rencontre en un point chacune des courbes τ_1, τ_2, τ_3 et il y a donc trois points de diramation pour cette correspondance. La formule de Zeuthen donne, pour le genre π de Λ,

$$2.31(\pi - 1) + 3.30 = 2(46 - 1),$$

d'où $\pi = 1$.

Les courbes canoniques de la surface Φ sont donc elliptiques et on a $p^{(1)} = 1$.

6. Le faisceau canonique de la surface Φ contient deux courbes dégénérées.

A la section de F par le plan $x_4 = 0$ correspond sur Φ une courbe rationnelle γ_0 qui rencontre les droites σ_{13}, σ_{21}, σ_{32}. La courbe γ_0, comptée trois fois, est une courbe du faisceau canonique $|\varDelta|$ de Φ.

Considérons la section de F par le plan $x_2 = 0$, c'est-à-dire la courbe

$$x_3 = 0,\ a_1x_1^6x_2 + a_4x_4^7 = 0.$$

Cette courbe possède un point sextuple en O_2, le point infiniment voisin de O_2 sur cette courbe étant simple. Cette courbe est transformée en soi par H et il lui correspond sur Φ une courbe γ_3 que rencontrent les courbes σ_{14}, σ_{24}. La courbe γ_3 est, comme la courbe à laquelle elle correspond, rationnelle.

Soient γ_1, γ_2 les courbes rationnelles qui correspondent aux sections de F par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. La courbe $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ est une courbe canonique de la surface Φ et le faisceau canonique est déterminé par cette courbe et la courbe $3\gamma_0$.

Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées sur cette surface par le système des surfaces du sixième ordre transformées en elles-mêmes par H et comprenant la surface $x_4^6 = 0$. Ce système est

$$\lambda_0x_1^2x_2^2x_3^2 + \lambda_1x_1x_2x_3x_4^3 + \lambda_2x_4^6 = 0.$$

On en conclut que le système bicanonique est composé au moyen du faisceau $|\varDelta|$; on a $P_2 = 3$. Les systèmes pluri-canoniques sont évidemment composés au moyen de $|\varDelta|$ et on a $P_i = i + 1$.

Liège, le 22 septembre 1951.