Bulletin de la Classe des sciences

Sur les courbes-base d'un système linéaire de surfaces

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre l'existence de courbes-base d'un système linéaire de surfaces analogues aux courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE

Sur les courbes-base d'un système linéaire de surfaces,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre l'existence de courbes-base d'un système linéaire de surfaces analogues aux courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace.

On sait que dans les transformations birationnelles de l'espace se présentent des courbes fondamentales de seconde espèce que l'on peut caractériser de la manière suivante : Si Γ est uue telle courbe, les surfaces du système homaloïdal touchant en un point de Γ un plan tangent à cette courbe, touchent également au même point un certain nombre d'autres plans tangents à la courbe. De plus, il existe dans le système homaloïdal ∞^1 réseaux dont les surfaces se raccordent le long de Γ. Nous nous sommes proposé de voir si un système linéaire de surfaces algébriques pouvait posséder des courbes-base présentant la même propriété. La réponse est affirmative et est donnée par le théorème suivant :

Un système linéaire de dimension r *de surfaces algébriques* $|F|$ *peut posséder une courbe-base Γ possédant les propriétés suivantes :*

a. *Les surfaces* F *tangentes en un point de Γ à un plan tangent à cette courbe en ce point touchent encore, au même point,* $\lambda - 1$ *autres plans tangents à la courbe Γ en ce point.*

b. *Il existe dans* $|F|$ ∞^1 *systèmes linéaires de dimension* $r - 1$ *dont les surfaces se raccordent suivant* λ *nappes le long de la courbe Γ.*

Nous construisons effectivement de tels systèmes.

Si $r > 3$, nous montrons ensuite que *la variété à trois dimensions qui représente le système* $|\mathrm{F}|$ *dans* S_r *possède une courbe rationnelle* γ *multiple d'ordre* λn, *où* n *est l'ordre de la courbe* Γ, *correspondant à cette courbe.*

Pour démontrer le premier théorème, nous montrons que l'on peut toujours transformer birationnellement le système $|\mathrm{F}|$ en un système dont les surfaces découpent, sur un cône équivalent projectivement au cône projetant d'un point générique la courbe Γ, un système linéaire de courbes composé au moyen d'un faisceau. Ce procédé est évidemment applicable au cas où $|\mathrm{F}|$ esr un système homaloïdal.

1. Soit $|\mathrm{F}|$ un système linéaire de surfaces algébriques possédant une courbe-base Γ satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Les surfaces F touchant en un point de Γ un plan tangent à cette courbe ont en outre $\lambda - 1$ plans tangents à la même courbe au même point comme plans tangents fixes.

b. Si r est la dimension de $|\mathrm{F}|$, il existe des systèmes linéaires appartenant à $|\mathrm{F}|$, de dimension $r - 1$, dont les surfaces se raccordent suivant λ nappes le long de la courbe Γ.

Nous supposerons la courbe Γ dépourvue de points multiples effectifs et nous désignerons par n son ordre. Soient alors

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4 = \frac{\varphi_m(x_1, x_2, x_3)}{\varphi_{m-1}(x_1, x_2, x_3)}$$

une représentation monoïdale de cette courbe, φ_m et φ_{m-1} étant des formes de degrés m, $m - 1$ respectivement.

La transformation birationnelle T, d'équations

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_1(x_4\varphi_{m-1} - \varphi_m), \\ \rho x_2' &= x_2(x_4\varphi_{m-1} - \varphi_m), \\ \rho x_3' &= x_3(x_4\varphi_{m-1} - \varphi_m), \\ \rho x_4' &= f_n(x_4\psi_{m-n} - \psi_{m-n+1}), \end{aligned}$$

où ψ_{m-n}, ψ_{m-n+1} sont des formes de degrés respectifs $m - n$,

$m - n + 1$, admet la courbe Γ comme courbe fondamentale de première espèce [1].

Désignons par S_3 l'espace contenant le système $|F|$ et par S'_3 l'espace lieu du point x' que T fait correspondre au point x de S_3.

Aux points infiniment voisins d'un point y de la courbe Γ, la transformation T fait correspondre dans S'_3 les points d'une droite passant par le point O'_4 (0, 0, 0, 1). Lorsque le point y décrit la courbe Γ, cette droite décrit le cône

$$f_n(x'_1, x'_2, x'_3) = 0. \tag{1}$$

Le point O'_4 est fondamental pour la transformation T, de même que la courbe Γ'_1 d'équations

$$x'_4 = 0, f_n(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

De plus, aux $n(m - 1)$ droites $r_1, r_2, \ldots$ qui appartiennent au cône et au monoïde définissant Γ, correspondent $n(m - 1)$ droites $r'_1, r'_2, \ldots$ du cône (1) et ces droites sont associées par couples de droites fondamentales de seconde espèce de T.

2. Désignons par s la multiplicité de la courbe Γ pour les surfaces F et supposons qu'en un point de Γ, les plans tangents à une surface F soient tous variables avec la surface.

Aux surfaces F, T fait correspondre dans S'_3 des surfaces F′ passant un certain nombre de fois par le point O'_4 et par la courbe Γ'_1, et rencontrant les génératrices du cône (1), en dehors du sommet O'_4 et de la courbe Γ'_1, en s points variables.

Soient P un point de la courbe Γ, p' la génératrice du cône (1) qui lui correspond. Aux surfaces F touchant en P un plan σ_1 tangent en P à Γ correspondent les surfaces F′ passant par un point P'_1 de p'. Par hypothèse, les surfaces F envisagées doivent également toucher, en P, $\lambda - 1$ plans $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\lambda$ également tangents à Γ en P. Les surfaces F′ passant par P'_1 doivent donc également passer par $\lambda - 1$ points fixes $P'_2, P'_3, \ldots, P'_\lambda$ de la génératrice p'.

Une surface F′ rencontrant p' en s points variables, ces s points

(1) Voir L. Godeaux, *Géométrie algébrique*, tome I (Liège, Sciences et Lettres 1948), pp. 114-119.

doivent se répartir en groupes de λ points et λ divise donc s. Nous poserons $s = \lambda\nu$. Les ν groupes de λ points suivant lesquels les surfaces F' coupent la droite p' décrivent une involution g^1_λ.

Considérons maintenant un système linéaire compris dans $|F|$, de dimension $r - 1$, dont les surfaces se raccordent suivant λ nappes le long de Γ. Les surfaces F' correspondantes coupent le cône (1), en dehors du point O'_4 et de la courbe Γ'_1, suivant une courbe rencontrant les génératrices du cône en λ points. On en conclut que les surfaces F' découpent, sur le cône (1), un système linéaire composé au moyen d'un faisceau de courbes coupant chaque génératrice en λ points. Il existe donc ∞^1 systèmes de dimension $r - 1$ de surfaces F possédant la propriété en question.

Inversement, donnons-nous dans l'espace S_3 un système linéaire de surfaces $|F'|$ découpant, sur le cône (1), un système linéaire dont chaque courbe est composée de ν courbes rencontrant les génératrices du cône en λ points variables. A ce système $|F'|$, la transformation T^{-1} fait correspondre un système linéaire de surfaces $|F|$ dont Γ est une courbe-base multiple d'ordre $s = \lambda\nu$, possédant les propriétés indiquées au début. L'existence de courbes-base possédant ces propriétés est donc établie.

Les surfaces F' pourront d'ailleurs avoir comme éléments-base le point O'_4 et la courbe Γ'_1. Ce sera le cas pour le système $|F'|$ transformé du système $|F|$ dont nous étions primitivement parti, mais ces conditions ne sont évidemment pas nécessaires pour notre objet.

Soient $F_0, F_1, \ldots, F_r$ $r + 1$ formes algébriques de degré $s - n$ en x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_r$ $r + 1$ formes binaires de degré ν et Ψ_1, Ψ_2 deux formes de degré λ en x'_1, x'_2, x'_3. Considérons le système linéaire de surfaces

$$(\mu_0 F_0 + \mu_1 F_1 + \ldots + \mu_r F_r) f_n(x'_1, x'_2, x'_3) +$$
$$\mu_0 \Phi_0(\Psi_1, \Psi_2) + \mu_1 \Phi_1(\Psi_1, \Psi_2) + \ldots + \mu_r \Phi_r(\Psi_1, \Psi_2) = 0.$$

Il a pour transformé par T^{-1}, dans S_3, un système linéaire de surfaces d'ordre $s(m + 1)$ pour lesquelles la courbe Γ est multiple d'ordre $s = \lambda\nu$ et présente la particularité indiquée.

3. Reprenons le système $|F|$ considéré au début et supposons-le simple. Rapportons projectivement ses surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Aux points de S_3 correspondent dans S_r les points d'une variété V_3^N à trois dimensions, dont l'ordre N est égal au degré du système $|F|$.

Aux surfaces F touchant en un point P de Γ un plan σ_1 tangent à cette courbe en ce point et par conséquent $\lambda - 1$ plans σ_2, σ_3, ..., σ_λ tangents à Γ au même point, correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P' de V_3^N. Lorsque le plan σ_1 tourne autour de la tangente à Γ en P, le point P' décrit une courbe rationnelle γ, image de l'involution g_λ^1 que le groupe de plans σ_1, σ_2, ..., σ_λ engendre dans le faisceau des plans tangents à Γ en P.

Considérons un des ∞^1 systèmes linéaires de dimension $r - 1$ de surfaces F se raccordant suivant λ nappes le long de Γ et supposons qu'au point P, les λ plans tangents à ces nappes soient précisément σ_1, σ_2, ..., σ_λ. Aux surfaces F de ce système correspondent précisément les hyperplans passant par le point P'. On en conclut que, lorsque le point P décrit la courbe Γ, la courbe γ reste fixe.

Deux surfaces F ont en commun une courbe C, variable avec es surfaces. Si ces deux surfaces se raccordent suivant λ nappes le long de σ, la courbe C dégénère et comprend comme partie une courbe d'ordre λn, infiniment voisine de Γ et une certaine courbe C'. Celle-ci rencontre une surface F quelconque en $N - \lambda n$ points. Par conséquent, l'espace S_{r-2} commun à deux hypeplans passant par un point de la courbe γ ne rencontrent plus V_3^N qu'en $N - \lambda n$ points ; la courbe γ est donc multiple d'ordre λn pour la variété V_3^N.

Considérons une surface F. En un point P de Γ elle possède $s = \gamma\nu$ plans tangents formant ν groupes de l'involution g_λ^1. A chacun de ces groupes correspond un point de la courbe γ situé dans l'hyperplan homologue de la surface F considérée, et il n'existe pas d'autre point de cette courbe situé dans cet hyperplan. Donc, la courbe γ est d'ordre ν.

Liége, le 22 février 1951.