Bulletin de la Classe des sciences

Sur les variétés exceptionnelles. Mémoire présenté par L. Derwidué. Rapports

Lucien Godeaux, Florent Bureau

Sur les variétés exceptionnelles.

Mémoire présenté par L. DERWIDUÉ.

RAPPORTS

On sait qu'une correspondance birationnelle entre deux surfaces algébriques F, F′, peut présenter des exceptions. Il peut correspondre à un point simple A de F, par exemple, une infinité de points de F′ formant nécessairement une courbe rationnelle γ'. S'il existe sur γ' un point A′, simple pour F′, auquel correspondent sur F les points d'une courbe γ, la courbe γ' est dite exceptionnelle de seconde espèce ; dans le cas opposé, elle est de première espèce. M. G. Castelnuovo et F. Enriques ont montré que les surfaces possédant des courbes exceptionnelles de seconde espèce appartiennent à la classe des réglées et que, d'autre part, on peut toujours transformer birationnellement une surface possédant des courbes exceptionnelles de première espèce en une surface dépourvue de telles courbes. Le but de M. Derwidué est d'étendre ces considérations aux variétés algébriques à un nombre quelconque de dimensions.

Rappelons que dans deux mémoires en cours d'impression dans les *Mathematische Annalen* (1), l'auteur a résolu deux problèmes de grande importance. Dans le premier mémoire, il établit que dans toute classe de variétés algébriques à k dimensions (deux à deux birationnellement équivalentes), il existe des variétés dépourvues de points singuliers, question qui a longtemps arrêté les géomètres. Le second mémoire est relatif à la décomposition des transformations birationnelles entre deux variétés en produits de transformations élémentaires. Ces transformations vont jouer un rôle essentiel dans le mémoire qui est soumis à notre examen, comme d'ailleurs leur emploi est à la base du premier

(1) Les épreuves du premier mémoire et une copie du second ont été communiquées aux commissaires.

mémoire. Rappelons-en la définition. Considérons sur une variété irréductible V à k dimensions, une sous-variété γ dépourvue de singularités. Considérons ensuite un système linéaire $|W|$ de variétés à $k-1$ dimensions, tracées sur V, passant par γ sans avoir aucun contact entre elles en un point de cette variété ; supposons en outre que les variétés W passant par un point de V, même infiniment voisin d'un point de γ, ne passent jamais en conséquence par un second point de V. Cela étant, rapportons projectivement les variétés W aux hyperplans d'un espace ayant même dimension que $|W|$. A V correspond une variété V' à k dimensions. C'est la correspondance existant entre V et V' que l'auteur appelle transformation élémentaire.

Dans son mémoire, M. Derwidué commence par définir les variétés exceptionnelles appartenant à une variété algébrique V, privée de singularités ; il les classe en variétés propres et impropres, généralisation des notions de courbes exceptionnelles de première et de seconde espèce dans le cas où V est une surface. Le but qu'il poursuit est de démontrer que dans toute classe de variétés algébriques, il existe des variétés privées de singularités (ce qui résulte du premier mémoire) et de variétés exceptionnelles propres. Partant d'une variété V privée de singularités et contenant une variété exceptionnelle propre, l'auteur montre que l'on peut considérer celle-ci comme résultant d'une suite de transformations birationnelles élémentaires. En d'autres termes, il construit une suite de variétés V', V'',..., $V^{(i)}$ telles que l'on passe de l'une à la suivante par une transformation élémentaire et par conséquent de $V^{(i)}$ à V par un produit de transformations élémentaires inverses.

M. Derwidué démontre ensuite qu'il est toujours possible de transformer birationnellement une variété algébrique V, privée de singularités mais possédant des variétés exceptionnelles propres, en une variété algébrique V', privée à la fois de singularités et de variétés exceptionnelles propres, mais sur laquelle il peut exister des variétés exceptionnelles impropres.

Il resterait à étudier les variétés possédant des variétés exceptionnelles impropres, problème difficile, que nous espérons voir aborder par l'auteur de ce mémoire. Quoi qu'il en soit, M. Derwidué a résolu un problème essentiel pour la géométrie sur une variété algébrique, puisqu'il permet d'aborder l'étude d'une telle variété à partir de modèles particulièrement simples. Nous proposons volontiers l'impression de son travail dans le recueil des *Mémoires in*-8° de l'Académie.

Lucien GODEAUX.

Je me rallie aux conclusions du rapport de mon savant Confrère Monsieur L. Godeaux.

Fl. BUREAU.