

Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques (*); par Lucien Godeaux, étudiant en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liège.

Dans une des séances du IV^e Congrès des mathématiciens, tenu à Rome du 6 au 11 avril 1908, M. D. Montesano s'est occupé de la détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques. Nous demanderons à l'Académie la permission d'exposer brièvement une méthode qui nous conduit à la solution de ce problème (**).

1. — Les coniques de l'espace sont en nombre ∞^8 . Celles qui sont assujetties à cinq conditions engendrent un complexe.

Les caractéristiques d'un complexe de coniques sont, d'après M. Montesano (***) :

1^o *Le nombre α de ses coniques situées dans un plan quelconque de l'espace ;*

2^o *La classe β du cône, lieu des plans des coniques du complexe passant par un point quelconque.*

Actuellement, nous nous proposerons de déterminer la nature des cinq conditions auxquelles sont assujetties

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n^o 6, pp. 597-601, 1908.

(**) Cette méthode est consignée dans un pli cacheté daté du 20 mars 1908. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], avril 1908.)

(***) *Una estensione del Problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1898, I₃, p. 322.)

les coniques des complexes de caractéristiques $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

2. — Une conique quelconque de l'espace peut être représentée par les équations

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$k_1a1_x^2 + k_2a2_x^2 + k_3a3_x^2 + k_4a4_x^2 + k_5a5_x^2 + k_6a6_x^2 = 0, \quad (2)$$

$a1_x^2, \dots, a6_x^2$ étant les premiers membres des équations de six quadriques linéairement indépendantes.

Il suffit de remarquer qu'une quadrique passant par cinq points d'une conique la contient tout entière.

A une conique de l'espace correspond un système de valeurs des u et des k et un seul. Réciproquement, à un système (u, k) correspond une conique de l'espace.

Il y a exception pour les systèmes

$$(u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, k)$$

$$(u, k_1 = 0, \dots k_6 = 0),$$

qui doivent être écartés.

3. — Les paramètres des coniques d'un complexe sont fonctions de quatre variables homogènes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$.

$$\rho u_i = f_i(\nu) \quad (i = 1, \dots 4) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\sigma k_j = \varphi_j(\nu) \quad (j = 1, \dots 6) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Les fonctions $f_i(\nu)$ et $\varphi_j(\nu)$ sont supposées respectivement de degrés m et n .

Pour que l'on ait $\alpha = 1$, il faut que, les $u_1, \dots u_4$ étant donnés, les équations (5) fournissent un et un seul système de valeurs des $\nu_1, \dots \nu_4$. Cela arrive en premier lieu pour $m = 1$.

Les équations (3) fourniront alors pour $\nu_1, \dots, \nu_4$ des fonctions linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4 . En substituant ces valeurs dans les équations (4), on trouvera

$$\sigma k_j = \psi_j(u) \quad (j = 1, \dots, 6),$$

les fonctions ψ étant de degré n .

4. — Une conique du complexe sera représentée par les équations

$$u_x = 0$$

$$\sum_{j=1}^6 \psi_j(u) a_j^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Si, dans ces équations, nous supposons les x constants et les u variables, elles représenteront généralement un cône de classe n .

Pour que la caractéristique β soit égale à l'unité, ces équations doivent représenter un faisceau de plans. Cela arrive en premier lieu lorsque n est égal à l'unité. Mais il peut se faire que l'équation (5) soit la n^{me} puissance d'une forme linéaire; dans ce cas, n est égal à 2 car les x ne peuvent entrer dans (5) qu'au second degré. Nous sommes donc amenés à considérer les deux cas où n est égal à 1, puis à 2.

5. — Dans le premier cas, l'équation (5) peut s'écrire

$$u_1 a_{1x}^2 + u_2 a_{2x}^2 + u_3 a_{3x}^2 + u_4 a_{4x}^2 = 0.$$

On peut diviser les complexes correspondant à cette équation en trois types :

TYPE I. — Les quadriques $a_{1x}^2 = 0, \dots, a_{4x}^2 = 0$ sont linéairement indépendantes.

Le complexe est le lieu des intersections des qua-

driques d'un système linéaire triplement infini et des plans d'un espace projectif à ce système.

Le cas particulier où les quadriques ont même tétraèdre antopolaire a été considéré par M. Humbert (*).

TYPE II. — Les quadriques $a_{1x}^2 = 0, \dots, a_{4x}^2 = 0$ appartiennent à un même réseau.

Le complexe est engendré par les intersections des quadriques d'un réseau et des plans d'un espace, le réseau et l'espace étant liés par une correspondance $(1, \infty)$.

TYPE III. — Les quadriques appartiennent à un même faisceau.

On pourrait considérer un quatrième cas où les quatre quadriques seraient identiques, mais ce cas serait dénué d'intérêt.

6. — Passons au complexe représenté par les équations symboliques

$$u_x = 0, \quad u_\alpha^2 a_x^2 = 0.$$

La seconde de ces équations doit se réduire au carré d'une forme linéaire

$$u_\alpha a_x$$

quels que soient $u_1, \dots, u_4$. On en conclut que l'on a constamment

$$u_\alpha^2 a_x^2 \equiv (u_\alpha a_x)^2$$

et que l'on est ainsi ramené au cas précédent.

(*) Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre. (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1894, LXIV^e cahier.)

7. — Reprenons :

$$\rho u_i = f_i(\nu_1 \dots \nu_4) \quad (i = 1, \dots 4)$$

$$\sigma k_j = \varphi_j(\nu_1 \dots \nu_4) \quad (j = 1, \dots 6)$$

Les f_i sont supposées de degré m et les φ_j de degré n .

Supposons que les surfaces $f_i = 0$ (les ν étant les coordonnées courantes) aient en commun une courbe d'ordre p et q points fixes, et que, de plus, trois surfaces passant par cette courbe et ces points n'aient plus qu'un nouveau point commun. Alors le complexe est linéaire.

Pour qu'il soit de première classe, il faut que les surfaces

$$\sum_{i=1}^4 x_i f_i = 0, \quad \sum y_j \varphi_j = 0$$

$$\sum a_j^2 \cdot \varphi_j = 0$$

où les x et les y sont fixes, n'aient qu'un point variable commun.

Les deux premières ont en commun une courbe variable d'ordre $m^2 - p$ passant par les q points fixes respectivement $r_1, \dots, r_q$ fois et rencontrant h fois la courbe d'ordre p .

Supposons que la troisième surface passe s fois par la courbe d'ordre p et $s_1 \dots s_q$ fois par chacun des q points fixes. Il peut se faire que l'on ait :

$$(m^2 - p)n - hs - \sum_{i=1}^q s_i r_i = 1.$$

Liège, mai 1908.