SUR QUELQUES

CONGRUENCES PARTICULIÈRES

DE DROITES

PAR

Lucien GODEAUX

Etudiant en Sciences physiques et mathématiques

à Liège.

Dans cette note, j'étudie quelques congruences engendrées par les droites qui rencontrent un système de plans ou de surfaces en des groupes de points en involution. Ces congruences sont contenues dans des complexes qui ont été étudiés par M. Neuberg [1] et par moi [2].

1. — Considérons $(n + 1)$ groupes de n plans et écrivons l'équation de l'un de ces plans sous la forme

$$a_{ijx} = 0 \quad (i = 1, \ldots.. n + 1 ; j = 1, \ldots.. n)$$

a_{ij} n'étant qu'un symbole et a_x désignant une forme quadrilinéaire.

[1] *Sur le complexe de Grassmann*, Mathesis, 1902, II_5.

[2] *Sur quelques complexes particuliers*, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Classe des sciences, 1907 ; *Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann*. Nouvelles Annales de Mathématiques, 1907, VII_4.

Nous allons rechercher le lieu des droites qui rencontrent les $(n+1)$ groupes de n plans en $(n+1)$ groupes de n points d'une I^{n}_{n-1}.

Soient Y $(y_1 \ldots\ldots y_4)$, et Z $(z_1 \ldots\ldots z_4)$ deux points quelconques de l'espace. Un point de la droite Y Z a pour coordonnées :

$$K y_i + K' z_i \quad (i = 1, \ldots\ldots 4)$$

Si ce point appartient au plan $a_{ijx} = 0$, on a :

$$K a_{ijy} + K' a_{ijz} = 0.$$

On peut donc prendre pour K et K' les valeurs :

$$K = -a_{ijz}, \quad K' = a_{ijy}.$$

Faisons varier j de 1 à n et substituons les valeurs obtenues pour K et K' dans l'équation d'une I^{n}_{n-1}. Faisons ensuite varier i de 1 à $(n+1)$ et éliminons les coefficients de l'équation de la I^{n}_{n-1}, nous obtiendrons l'équation du lieu cherché sous la forme :

$$\left| \prod_{j=1}^{j=n} a_{ijy} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{a_{i\nu z}}{a_{i\nu y}} \prod_{j=1}^{j=n} a_{ijy} \quad \ldots\ldots \ldots\ldots \quad \prod_{j=1}^{j=n} a_{ijz} \right|_{i=1}^{i=n+1} = 0 \quad (1)$$

Cette équation peut facilement s'écrire en fonction des coordonnées radiales de la droite Y Z. Elle représente un complexe d'ordre $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

2. — Considérons, au lieu de $(n + 1)$ groupes de n plans, $(n + 2)$ groupes. Les droites qui rencontrent ces groupes en des groupes de n points d'une même I^{n}_{n-1} engendrent une congruence.

Les équations de cette congruence sont évidemment :

$$\left\| \Pi a_{ijy} \dots \dots \dots \dots \dots \Pi a_{ijz} \right\|_{i=1}^{i=n+2} = 0 \qquad (3)$$

Pour rechercher l'ordre de cette congruence, supposons les $(y_1 \dots\dots y_4)$ fixes et $z_4 = 0$; la matrice (2) représentera alors un nombre fini de points (z_1, z_2, z_3) qui sera l'ordre de la congruence.

On peut déterminer ce nombre de points par la méthode employée par MM. Giambelli [1] et Stuyvaert [2].

On trouve le nombre :

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=0} (n - 2i)\left[2(n - 2i)^2 - (n - 2i) + 1\right],$$

la sommation s'étend jusqu'au premier terme nul.

Dans ce qui suit, nous considérerons plus spécialement le cas où n est égal à deux.

Les équations de la congruence sont alors :

$$\left\| a_{i1y}\, a_{i2y} \quad a_{i1y}\, a_{i2z} + a_{i2y}\, a_{i1z} \quad a_{i1z}\, a_{i2z} \right\|_{i=1}^{i=4} = 0 \qquad (4)$$

[1] *Ordine di una varieta piu ampia di quella rappresentata coll' annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme.* Mem. R. Ist. Lomb., 1904, XI_3.

[2] *Cinq études de géométrie analytique.* Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1908, VII_3. (*Prix François Deruyts.*)

Cette congruence est du septième ordre.

Pour simplifier l'écriture, nous écrirons :

$$a_{11x} \equiv a_x = 0, \quad a_{12x} \equiv a'_x = 0, \quad a_{21x} \equiv b_x = 0, \quad \text{etc.}$$

Les équations de la congruence pourront alors s'écrire :

$$\left\| \begin{matrix} a_y a'_y & a_y a'_z + a'_y a_z & a_z a'_z \\ b_y b'_y & — & — \\ c_y c'_y & — & — \\ d_y d'_y & — & d_z d'_z \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (4')$$

3. — Recherchons les éléments singuliers de cette congruence.

Désignons d'une manière générale pour α, β, ..., α', β', respectivement les plans :

$$a_x = 0,\ b_x = 0,\ — —,\ a'_x = 0,\ b'_x = 0,\ — —;$$

et par T le tétraèdre formé par les plans α, β, γ, δ ; par A, B, C, D ses sommets ; par T′ le tétraèdre $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ et par A′, B′, C′, D′ ses sommets.

Le point A, intersection des plans β, γ, δ, est un point singulier. En effet, introduisons dans l'équation (4′) les hypothèses :

$$b_y = 0,\ c_y = 0,\ d_y = 0,$$

elle deviendra :

$$\left\| \begin{matrix} a_y a'_y & a_y a'_z - a'_y a_z & a_z a'_z \\ o & b'_y\ b_z & b_z\ b'_z \\ o & c'_y\ c_z & c_z\ c'_z \\ o & d'_y\ d_z & d_z\ d'_z \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (5)$$

~~On en conclut~~ que les droites de la ~~congruence passant par~~ A, sont les droi~~tes de trois faisceaux situés~~ chacun dans une f~~ace du t~~étraèdre T passant par A.

On en conclut aussi que les sommets et les faces des tétraèdres T et T′ sont des éléments singuliers de la congruence (4′).

4. La congruence est contenue dans quatre complexes de Grassmann.

Soit g une droite du complexe défini par les couples de plans $(\beta, \beta' ; \gamma, \gamma' ; \delta, \delta')$. On sait que les plans joignant les points (g, β), (g, γ), (g, δ) respectivement aux droites A′ B′, A′ C′, A′ D′, se rencontrent suivant une droite[1].

On en conclut d'abord une génération géométrique de la congruence, et ensuite ce théorème, qui n'est pas dépourvu d'intérêt :

Etant donnés deux tétraèdres T et T′ situés d'une manière générale dans l'espace, si une droite g est telle que les ternes de plans

$$[g, \beta ; A'B'], \ [g, \gamma ; A'C'], \ [g, \delta ; A'D']$$
$$[g, \alpha ; B'A'], \ [g, \gamma ; B'C'], \ [g, \delta ; B'D']$$

ont respectivement une droite commune; il en sera de même des ternes :

$$[g, \alpha ; C'A'], \ [g, \beta ; C'B'] ; \ [g, \delta ; C'D']$$

et

$$[g, \alpha ; D'A'], \ [g, \beta ; D'B'] \ [g, \gamma ; D'C'].$$

5. — Au lieu de considérer, dans les numéros 1 à 5, des groupes de n plans, on aurait pu considérer des surfaces d'ordre n, ou même un groupe de surfaces d'ordre total n.

Dans le cas de n égal à deux, on trouvera un complexe

[1] Neuberg, loc. cit.

signalé par Salmon [1] et par M. Neuberg [2]. Ce complexe possède huit points principaux.

La congruence a pour équations :

$$\left\| \begin{matrix} a_y^2 & a_y a_z & a_z^2 \\ b_y^2 & b_y b_z & b_z^2 \\ c_y^2 & c_y c_z & c_z^2 \\ d_y^2 & d_y d_z & d_z^2 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$a_x^2 = 0,\ b_x^2 = 0,\ c_x^2 = 0,\ \ d_x^2 = 0,$

représentant des quadriques linéairement indépendantes.

Elle possède trente-deux points singuliers tels que les droites de la congruence passant pour ces points forment des cônes cubiques.

6. – Considérons une surface cubique générale :

$$a_x^3 = 0.$$

Soient, d'autre part, quatre points X_1 ($x\,1_1, \ldots\ldots\, x\,1_4$), ……… X_4 ($x\,4_1, \ldots\ldots\, x\,4_4$), non situés sous un même plan. Les quadriques polaires de ces points par rapport à la surface cubique (6) ont symboliquement pour équations, respectivement :

$$a_{x_1} a_x^2 = 0,\quad a_{x_2} a_x^2 = 0,\quad a_{x_3} a_x^2 = 0,\quad a_{x_4} a_x^2 = 0.$$

La congruence formée au moyen de ces quadriques a pour équation :

$$\left\| \begin{matrix} a_{x_1} a_y^2 & a_{x_1} a_y a_z & a_{x_1} a_z^2 \\ a_{x_2} a_y^2 & a_{x_2} a_y a_z & a_{x_2} a_z^2 \\ a_{x_3} a_y^2 & a_{x_3} a_y a_z & a_{x_3} a_z^2 \\ a_{x_4} a_y^2 & a_{x_4} a_y a_z & a_{x_4} a_z^2 \end{matrix} \right\| = 0$$

[1] *Géométrie analytique à trois dimensions, traduction Chemin.*

[2] Loc. cit.

Cette congruence pourrait s'appeler la « *Grassmannienne* » de la surface cubique ; nous espérons revenir sur ce sujet.

Remarquons que l'ordre de la congruence s'abaisse de sept à $7 - \lambda$ lorsque la surface cubique possède λ points doubles.

De même, on pourrait associer une « *Grassmannienne* » à une surface algébrique d'ordre n, en considérant les quadriques polaires $(n - 2)^{es}$ de la surface par rapport à quatre points non co-planaires.

Liège, 18 juin 1908.