Recherches sur les points de diramation des surfaces multiples

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des ordres des composantes du cône tangent en un point de diramation d'une surface multiple lorsque le nombre de composantes est au moins égal à trois.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des ordres des composantes du cône tangent en un point de diramation d'une surface multiple lorsque le nombre de composantes est au moins égal à trois.

Dans nos travaux antérieurs [1], nous avons montré que la structure d'un point de diramation d'une surface multiple cyclique d'ordre premier impair p dépendait des solutions en nombres entiers positifs λ, μ d'une congruence

$$\lambda - a\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

Si λ_1, μ_1 est la solution donnant la plus petite valeur possible pour $\lambda_1 + \mu_1$ et si l'on a $\lambda_1 + a\mu_1 = hp$, où $h > 1$, le cône tangent

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scient., ; n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (MÉM. IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938) ; *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1938, pp. 193-222) ; *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (BULL. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1940, pp. 54-79, 128-137) ; *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ANNALES SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1948, pp. 189-210) ; *Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation* (IDEM., 1949, pp. 1-13) ; *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (ANNALI DI MATEMATHICA, 3e s., t. 28, 1949, pp. 89-106) ; *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, 15-30, 270-292, 532-541, 636-641, 828-840).

à la surface multiple au point de diramation considéré se décompose en trois parties au moins.

Dans cette note, nous construisons les solutions de la congruence en question et établissons dans quelles conditions nous avons $h > 1$. Nous en déduisons les ordres de deux composantes du cône tangent à la surface multiple au point de diramation.

D'une manière précise, *si l'on pose* $\mathrm{p} = \mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}$, *où* $\mathrm{b} < \alpha$ *et s'il existe deux entiers positifs* r, m *satisfaisant aux conditions*

$$(\mathrm{r} - 1)(\mathrm{a} + \mathrm{b}) < \alpha - 1 < \mathrm{r}(\mathrm{a} + \mathrm{b}),$$
$$\mathrm{m}(\mathrm{r} - 1)\mathrm{b} < \mathrm{m}\alpha < (\mathrm{mr} - \mathrm{m} + 1)\mathrm{b},$$
$$(\mathrm{mr} - \mathrm{m} + 1)(\mathrm{a} + \mathrm{b}) - \mathrm{m}(\alpha - 1) < \mathrm{p},$$

le cône tangent à la surface multiple au point de diramation considéré comprend comme parties un cône d'ordre a, *un cône d'ordre* m *et un ou deux autres cônes.*

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I d'ordre premier impair p, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de F une surface normale d'un espace S_R sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre F (aux points unis de l'involution). On peut d'ailleurs choisir ce modèle projectif F de telle sorte que R et la dimension r_0 de σ_0 soient aussi grandes qu'on le veut. En projetant F de l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur σ_0, on obtient un modèle projectif normal Φ de l'image de l'involution I.

Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes de l'homographie H, sauf par σ_i. Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et à ses courbes correspondent les sections hyperplanes Γ_0 de Φ.

Soit A un point uni de I. Supposons que le plan tangent à F en A s'appuie en un point sur σ_1 et en un point sur σ_α, A étant donc un point uni de seconde espèce. Si nous prenons le point A et les points d'appui du plan tangent en A sur σ_1, σ_α comme sommets du triangle de référence dans ce plan, l'homographie déterminée par H dans le plan peut être représentée par

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^\alpha x_3,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité, α étant supérieur à l'unité.

Nous avons défini, dans le système $|C_0|$, une suite de systèmes partiels $|C_0'|$, $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ... dont les dimensions vont en décroissant d'une unité à la fois. Si t_1, t_2 sont les droites passant par A et s'appuyant sur σ_1, σ_α, les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, λ_i tangentes étant confondues avec a_1 et μ_i avec a_α. Les nombres λ_i, μ_i satisfont à la congruence

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0, \qquad \text{(mod. } p)$$

On a, de plus

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \lambda_3 + \mu_3 < \dots < p.$$

Les courbes C_1 passent simplement par A en y touchant la droite t_2 et rencontrent les courbes C_0', C_0'', ... en p points confondus en A. Les courbes C_α passent simplement par A en y touchant t_1 et rencontrent les courbes C_0', C_0'', ... en p points confondus en A.

2. Sur une courbe C_0', le point A est l'origine d'un certain nombre de branches linéaires passant par $\alpha - 1$ points A_{21}, A_{22}, ..., $A_{2,\alpha-1}$ infiniment voisins successifs de A, tangentes à t_α. Les courbes C_1 passent par ces points.

Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp,$$

où $h > 1$. Nous avons montré que sur toute courbe C_0', le point A est l'origine d'un certain nombre de branches superlinéaires passant par les points A_{21}, A_{22}, ..., A_{2x}, puis par une suite de points fixes, infiniment voisins successifs de A_{2x}, se terminant par un point P, les points infiniment voisins de P appartenant à une courbe C_0' étant en général simples et variables avec la courbe. Les points de cette suite sont unis de seconde espèce pour l'involution I, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

Les courbes C'_0 ont également en commun une ou deux suites de points infiniment voisins successifs, situés sur des branches linéaires ou éventuellement superlinéaires d'origine A, tangentes à t_1. Nous n'aurons pas à nous occuper de ces points dans cette note.

Désignons par Φ_1 la projection de Φ à partir du point de diramation A sur un hyperplan de σ_0 ne passant pas par A ; soient Γ'_0 ses sections hyperplanes. Les courbes Γ'_0 correspondent projectivement aux courbes C'_0 et aux domaines des points unis de première espèce $A_{2,\alpha-1}$, P correspondent sur Φ_1 des courbes rationnelles normales ρ_1, τ_1. Les ordres de ces courbes sont égaux aux multiplicités respectives des points $A_{2,\alpha-1}$, P pour les courbes C'_0.

Nous nous proposons de déterminer l'ordre de la courbe τ_1 et celui de la courbe ρ_1.

3. Nous allons tout d'abord rechercher dans quelles conditions h est supérieur à l'unité.

Posons

$$p = a\alpha + b,$$

où b est inférieur à α.

Parmi les solutions de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

se trouvant les nombres $\lambda = b$, $\mu = a$; $\lambda = b + \alpha$, $\mu = a - 1$; ..., pour lesquels $\lambda + \mu$ croît.

On trouve ensuite les solutions $\lambda = 2b$, $\mu = 2a$; $\lambda = 2b + \alpha$, $\mu = 2a - 1$; ... ; $\lambda = 3b$, $\mu = 3a$; ..., pour lesquellles $\lambda + \mu$ est supérieur à $a + b$.

Pour qu'il existe une valeur de h supérieure à l'unité, il faut qu'il existe un entier positif r tel que

$$(r - 1)b < \alpha < rb. \tag{2}$$

On a alors la solution

$$\lambda = rb - \alpha, \quad \mu = ra + 1. \tag{3}$$

Il faut ensuite que cette solution donne $\lambda + \mu$ inférieur à $a + b$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(r-1)(a+b) < \alpha - 1. \tag{4}$$

De l'inégalité (2), on déduit d'ailleurs

$$r(a+b) > \alpha - 1. \tag{5}$$

Les solutions suivantes sont $\lambda = rb$, $\mu = ra$; $\lambda = rb + \alpha$, $\mu = ra - 1$; ...qui donnent $\lambda + \mu > a + b$.

Des inégalités précédentes, on déduit

$$(r+i)b < 2\alpha$$

pour $i = 1, 2, \ldots, r-2$.

La congruence (1) admet la solution

$$\lambda = (r+i)b - \alpha, \quad \mu = (r+i)a + 1.$$

De l'inégalité (5), on tire

$$(r-1+i)(a+b) > \alpha - 1,$$

puisque $i \geqslant 1$. On en conclut

$$(r+i)(a+b) - (\alpha - 1) > a + b$$

et par suite, pour la solution envisagée, $\lambda + \mu > a + b$.

Les autres solutions $\lambda = (r+i)b$, $\mu = (r+i)a$; $\lambda = (r+i)b + \alpha$, $\mu = (r+i)a - 1$; ... donnent également $\lambda + \mu > a + b$.

Si l'on a $(2r-1)b < 2\alpha$, la solution

$$\lambda = (2r-1)b - \alpha, \ \mu = (2r-1)a + 1$$

donne également $\lambda + \mu > a + b$.

Supposons que l'on ait

$$2\alpha < (2r-1)b. \tag{6}$$

La congruence (1) admet la solution

$$\lambda = (2r-1)b - 2\alpha, \ \mu = (2r-1)a + 2,$$

qui donne

$$\lambda + \mu < r(a+b) - (\alpha - 1)$$

en vertu de l'inégalité (4).

La solution suivante,

$$\lambda = (2r - 1)b - a, \quad \mu = (2r - 1)a + 1,$$

donne $\lambda + \mu > a + b$.

En vertu des inégalités précédentes, nous avons

$$(2r - 1 + i)b < 3a$$

pour $i = 1, 2, \ldots, r - 2$. La congruence (1) admet donc la solution

$$\lambda = (2r - 1 + i)b - 2a, \; \mu = (2r - 1 + i)a + 2.$$

On a $\lambda + \mu > a + b$ en vertu de l'inégalité (6).

4. Supposons plus généralement qu'il existe un entier positif t tel que l'on ait

$$(tr - t)b < ta < (tr - t + 1)b. \tag{7}$$

La congruence (1) admet la solution

$$\lambda = (tr - t + 1)b - ta, \; \mu = (tr - t + 1)a + t. \tag{8}$$

L'inégalité (7) entraîne l'inégalité

$$(t - 1)a < [(t - 1)r - t + 2]b,$$

de sorte que la congruence (1) admet également la solution

$$\begin{aligned} \lambda &= [(t - 1)r - t + 2]b - (t - 1)a, \\ \mu &= [(t - 1)r - t + 2]a + t - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

La somme $\lambda + \mu$ donnée par la solution (8) est inférieure à la somme $\lambda + \mu$ donnée par la solution (9) en vertu de (4).

Les inégalités précédentes donnent

$$(tr - t + 1 + i)b < (t + 1)a,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, r - 2$. On a la solution

$$\lambda = (tr - t + 1 - i)b - ta, \mu = (tr - t + 1 - i)a + t.$$

En utilisant l'inégalité (7), on trouve $\lambda + \mu > a + b$.

Cela étant, soit m le plus grand entier positif tel que l'on ait

$$(mr - m)b < ma < (mr - m + 1)b,$$
$$(mr - m + 1)(a + b) - m(a - 1) < p.$$

Dans ces conditions, on a

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = (mr - m + 1)b - ma, & \mu_1 = (mr - m + 1)a + m, \\ \lambda_2 = (mr - r - m + 2)b - (m - 1)a, & \\ & \mu_2 = (mr - r - m + 2)a + m - 1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \lambda_m = rb - a, & \mu_m = ra + 1, \\ \lambda_{m+1} = b, & \mu_{m+1} = a, \end{array}\right\} \quad (10)$$

et

$$\lambda_1 + a\mu_1 = (mr - m + 1)p.$$

Réciproquement, *si l'on a*

$$(r - 1)(a + b) < a - 1,$$
$$b < a, \ m(r - 1)b < ma < (mr - m + 1)b,$$
$$(mr - m + 1)(a + b) - m(a - 1) < p,$$

les $m + 1$ *premières solutions de la congruence* (1), *rangées par ordre de croissance de* $\lambda + \mu$, *sont les solutions* (10), *ou encore*

$$\lambda_i = [(m + 1 - i)r - m + i]b - (m + 1 - i)a,$$
$$\mu_i = [(m + 1 - i)r - m + i]a + m + 1 - i,$$
$$i = 1, 2, \dots, m + 1.$$

5. Reprenons la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'. Soit μ_1' l'ordre de la courbe τ_1. Les courbes C_0' ont donc la multiplicité μ_1' au point $A_{2,a-1}$. Les points $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2,a-2}$ ont des multiplicités au moins égales à μ_1'. Désignons-les par $\mu_1' + x_1, \mu_1' + x_2, \dots, \mu_1' + x_{a-2}$. Nous avons

$$\lambda_1 + \mu_1 + (a - 1)\mu_1' + \Sigma x_i = p.$$

Il en résulte que parmi les solutions de la congruence (1), nous trouvons

$$\lambda_j = \lambda_1 + \mu_1 - \mu_1' + \Sigma x_i, \quad \mu_j = \mu_1'.$$

Les courbes $C_0^{(j)}$ qui correspondent à cette solution ont pour homologues, sur Φ_1, des courbes découpées par des hyperplans rencontrant la courbe τ_1 en des points fixes. Ces courbes doivent nécessairement coïncider avec les courbes $C_0^{(m+1)}$, celles-ci étant les premières courbes que l'on rencontre ne passant plus par le point P. On a donc $\mu_1' = a$.

Aux courbes C_0'' correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0'' découpées par les hyperplans passant par un point A_1' de τ_1. Aux courbes C_0''' correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans touchant τ_1 en A_1', car si ces hyperplans passaient par un second point fixe de τ_1, à ce point correspondrait un point infiniment voisin de P, commun à toutes les courbes C_0''', ce qui est impossible, car ces courbes ont des tangentes variables en P..... Aux courbes $C_0^{(m)}$ correspondent sur Φ_1 des courbes $\Gamma_0^{(m)}$ découpées par les hyperplans ayant $m - 1$ points d'intersection avec la courbe τ_1 réunis en A_1'. Enfin, les courbes $\Gamma_0^{(m+1)}$ qui correspondent sur Φ_1 aux courbes $C_0^{(m+1)}$ sont découpées par les hyperplans rencontrant τ_1 en m points confondus en A_1'. Par conséquent, la courbe τ_1 est d'ordre m.

L'ordre de la courbe ρ_1 est égal au nombre de fois que α est compris dans p.

L'ordre de la courbe τ_1 est égal au nombre de solutions de la congruence (1) *telles que*

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \quad h > 1, \quad \lambda + \mu < \mathrm{a} + \mathrm{b}.$$

6. Désignons par $a + x_{ij}$ la multiplicité du point A_{2j} pour les courbes $C_0^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. En exprimant que les courbes C_a rencontrent les courbes $C_0^{(i)}$ en p points confondus en A, on obtient

$$\sum_j x_{ij} = (m + 1 - i)[\alpha - 1 - (r - 1)(a + b)],$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \alpha - 2).$$

Les premiers des points A_{21}, A_{22}, ... ont la multiplicité

$$\mu_i = (m + 1 - i)[(r - 1)a + 1] + a\,;$$

le point suivant a une multiplicité supérieure à a et les courbes $C_0^{(i)}$

ont en commun une suite de points qui lui sont infiniment voisins successifs, se terminant au point P.

Posons

$$a - 1 - (r - 1)(a + b) = \eta[(r - 1)a + 1] + \zeta.$$

On a

$$x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{i\eta} = \mu_i - a,$$
$$x_{i\eta+1} = (m + 1 - i)\zeta,$$
$$x_{i\eta+2} = \dots = x_{ia-2} = 0.$$

Envisageons les courbes $C_0^{(m)}$; elles passent $ra + 1$ fois par les points $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2\mu}$, $a + \zeta$ fois par le point $A_{2\mu+1}$ et a fois par les points suivants. Posons

$$(r - 1)a + 1 = (m_1 + 1)\zeta + \zeta_1, \quad (\zeta_1 < \zeta)$$

Les courbes $C_0^{(m)}$ ont en commun m_1 points infiniment voisins successifs multiples d'ordre ζ, suivis d'un point multiple d'ordre ζ_1.

Posons ensuite

$$\zeta = m_2\zeta_1 + \zeta_2, \qquad (\zeta_2 < \zeta_1)$$

Au point multiple d'ordre ζ_1 font suite m_2 points multiples d'ordre ζ_1 suivis d'un point multiple d'ordre ζ_2. Et ainsi de suite. On arrivera finalement au point P, qui est simple pour les courbes $C_0^{(m)}$. Il en résulte que les nombres $(r - 1)a + 1$ et ζ doivent être premiers entre eux, car pour la détermination de la suite des points infiniment voisins de $A_{2\mu+1}$ aboutissant au point P, on doit faire les mêmes opérations que pour la recherche du plus grand commun diviseur des nombres en question.

Considérons maintenant les courbes $C_0^{(m-1)}$. Elles passent $(2r - 1)a + 2$ fois par les points $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2\mu}$, $2a + 2\zeta$ fois par le point $A_{2\mu+1}$ et a fois par les points $A_{2\mu+2}, \dots, A_{2\mu-1}$. En répétant le raisonnement qui vient d'être fait, on voit que ces courbes passent 2ζ fois par les m_1 points infiniment voisins successifs de $A_{2\mu+2}$ communs aux courbes $C_0^{(m)}$, $2\zeta_1$ fois par le point suivant, et ainsi de suite. Elles passent finalement deux fois par P.

D'une manière générale, on voit que les courbes $C_0^{(i)}$ $(i = 1,$

2, ..., m) passent par la même suite de points compris entre A_{2n+1} et P que les courbes $C_0^{(m)}$, avec les multiplicités de ces courbes multipliées par $m + 1 - i$.

7. Dans ce qui précède, nous avons supposé $\zeta > 0$; nous allons montrer que l'on ne peut avoir $\zeta = 0$.

Supposons $\zeta = 0$. Nous avons

$$a - (r - 1)b = (\eta + 1)[(r - 1)a + 1].$$

Multiplions par a les deux membres de cette équation et remplaçons $a\alpha$ par $p - b$; nous obtenons

$$p = [(r - 1)a + 1][a(\eta + 1) + b].$$

Comme $r > 1$ et $\eta \geqslant 0$, p ne serait pas un nombre premier. Nous avons donc $\zeta > 0$.

Nous avons remarqué plus haut que $(r - 1)a + 1$ et ζ doivent être premiers entre eux. On en conclut que les trois nombres

$$\alpha - (r - 1)b, \quad (r - 1)a + 1, \quad \zeta$$

sont deux à deux premiers entre eux.

Liège, le 10 janvier 1951.