Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur la représentation des transformations birationnelles planes

Lucien Godeaux

Résumé
En utilisant une représentation des couples de points homologues dans une transformation birationnelle du plan par les points d'une surface, on indique une méthode pour construire des réseaux homaloïdaux de courbes planes.

GÉOMÉTRIE

Remarques sur la représentation des transformations birationnelles planes,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — En utilisant une représentation des couples de points homologues dans une transformation birationnelle du plan par les points d'une surface, on indique une méthode pour construire des réseaux homaloïdaux de courbes planes.

La représentation des transformations birationnelles du plan que nous avons exposée récemment (¹) consiste à faire correspondre aux couples de points homologues dans une transformation d'ordre n, une surface normale F d'ordre $2n + 2$, dans un espace linéaire à $n + 4$ dimensions, dont les sections hyperplanes D ont le genre $n - 1$. Récemment, M. B. Segre (²) a retrouvé rapidement les propriétés des transformations birationnelles du plan en considérant l'adjoint d'ordre $n - 2$ à un réseau homoloïdal d'ordre n. Cela revient à considérer sur F l'adjoint $|D'|$ au système $|D|$ des sections hyperplanes. Comme M. B. Segre l'a montré, $|D'|$ est composé au moyen d'un faisceau si la transformation est du type de Jonquières. Dans les autres cas, $|D'|$ est irréductible et on peut considérer la surface F' dont les sections hyperplanes sont les courbes D'. Cette surface rationnelle

(¹) *Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace* (MÉM. in-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949). Voir aussi *Sur la représentation des transformations birationnelles planes*. (BULL. SOC. SC. LIÉGE, 1942, pp. 268-270).

(²) *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane* (ANNALI DI MATEMATICA, s. 4, t. 28, 1949, pp. 107-139). Nous avons exposé la méthode de M. B. Segre dans la seconde édition du fascicule sur *les transformations birationnelles du plan*, en cours de publication dans le Mémorial des Sciences Mathématiques.

admet une représentation plane par un système linéaire de courbes $|\gamma|$. Aux courbes D correspondent des courbes du système $|2\gamma - \gamma'|$. Aux réseaux homaloïdaux de la transformation primitive correspondent deux réseaux homaloïdaux $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$ tels que

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma - \gamma'.$$

On peut supposer que $|\gamma|$ a l'ordre minimum et déterminer les transformations dont on fixe le nombre des points fondamentaux ($\nu \leq n + 2$ si l'on exclut les transformations de Jonquières). C'est ce que nous exposons dans cette note. Nous appliquons le procédé au cas $\nu = n + 1$, où les courbes D' sont elliptiques et retrouvons des résultats connus (Cfr B. Segre). Nous considérons ensuite quelques cas où l'on a $\nu = n$, les courbes D' étant alors de genre deux. Nous montrons ensuite que si l'on se donne à priori les réseaux $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$, on peut déterminer $|\gamma|$, ensuite F et la transformation donnant naissance à F. Il y a là un procédé nouveau pour construire des réseaux homaloïdaux.

1. Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ_1, σ_2. Désignons par $|A_1|$ le réseau homaloïdal dans σ_1, par $|A_2|$ le réseau homaloïdal dans σ_2, par a_1 les droites de σ_1, par a_2 celles de σ_2 et considérons dans σ_1 le système linéaire complet

$$|D_1| = |a_1 + A_1|,$$

auquel T fait correspondre dans σ_2 le système complet

$$|D_2| = |a_2 + A_2|.$$

Si n est l'ordre des courbes A_1 et par conséquent celui des courbes A_2, les systèmes $|D_1|$, $|D_2|$ ont le degré $2n + 2$, le genre $n - 1$ et la dimension $n + 4$. En rapportant projectivement les courbes D_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+4} à $n + 4$ dimensions, on obtient une surface F, normale, dont les points représentent les couples de points homologues dans T de σ_1, σ_2.

Nous désignerons par D les sections hyperplanes de F, qui correspondent à la fois aux courbes D_1 de σ_1 et aux courbes D_2 de σ_2. Aux droites a_1 de σ_1 et aux courbes A_2 de σ_2 correspondent sur F des courbes rationnelles normales C_1, d'ordre $n + 1$, formant un réseau homaloïdal $|C_1|$; aux droites a_2 de σ_2 et aux courbes A_1 de σ_1 correspondent sur F des courbes rationnelles normales C_2, d'ordre $n+1$, formant un réseau homaloïdal $|C_2|$. On a évidemment

$$|D| = |C_1 + C_2|.$$

Supposons que les réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ ne possèdent que des points-base ordinaires, à tangentes variables, et soit ν le nombre de ces points. A un point-base O_{1i} multiple d'ordre s_{1i} de $|A_1|$ correspond sur F une courbe rationnelle normale G_{1i}, d'ordre s_{1i}, fondamentale pour le réseau $|C_1|$. De même, à un point-base O_{2i}, multiple d'ordre s_{2i} de $|A_2|$, correspond sur F une courbe rationnelle normale G_{2i}, d'ordre s_{2i}, fondamentale pour le réseau $|C_2|$. On obtient ainsi, sur F, ν courbes G_{11}, G_{12}, ..., $G_{1\nu}$, d'ordres s_{11}, s_{12}, ..., $s_{1\nu}$, qui correspondent à la fois aux points-base de $|A_1|$ et aux courbes fondamentales de $|A_2|$; ces courbes ne se rencontrent pas deux à deux. On obtient également ν autres courbes G_{21}, G_{22}, ..., $G_{2\nu}$, d'ordres s_{21}, s_{22}, ..., $s_{2\nu}$, homologues des points-base de $|A_2|$ et des courbes fondamentales de $|A_1|$, ne se rencontrant pas deux à deux.

2. Considérons l'adjoint $|D'|$ à $|D|$; il correspond à la fois à l'adjoint $|D'|$ à $|D'_1|$ et à l'adjoint $|D'_2|$ à $|D_2|$. Le système $|D'|$ a le degré $2n-\nu-1$, le genre $n-\nu+2$ et la dimension $n-2$; ses courbes ont l'ordre $2n-4$.

M. B. Segre a démontré (loc. cit.) que le système $|D'_1|$ et par conséquent le système $|D'|$ sont dépourvus de composantes fixes. De plus, $|D'_0|$ et $|D'|$ sont irréductibles sauf si T est une transformation de Jonquières ($\nu = 2n-1$). Écartons ce cas ; on a alors $\nu \leq n+2$.

Rapportons projectivement les courbes D' aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n-2}, à $n-2$ dimensions. A la surface F correspond dans cet espace une surface F', normale, d'ordre $2n-\nu-1$, en correspondance birationnelle avec F.

Sur F', les courbes D sont des courbes canoniques normales, d'ordre $2n-4$, par conséquent dépourvues de points multiples.

Les courbes D'_1 ne passent pas par les points-base simples de $|A_1|$, par conséquent les courbes D' ne rencontrent pas les droites qui se trouvent parmi les courbes $G_{11}, G_{12}, \ldots, G_{1\nu}$. Pour la même raison, elles ne rencontrent pas les droites qui se trouvent parmi les courbes $G_{21}, G_{22}, \ldots, G_{2\nu}$. A ces droites éventuelles, correspondent sur F' des points simples qui appartiennent aux courbes D considérées comme tracées sur cette surface.

Pour préciser, supposons que $|A_1|$ possède un point fondamental simple O_1. Il lui correspond dans le plan σ_2 une droite ω_2, fondamentale pour $|A_2|$ et sur la surface F, une droite G_1. Plaçons-nous dans le cas général en supposant que la droite fondamentale ω_2 ne contient que deux points-base de $|A_2|$, par exemple les points O_{21}, O_{22}, respectivement multiples d'ordres s_{21}, s_{22}. On a

$$s_{21} + s_{22} = n.$$

Sur F, la droite G_1 s'appuie sur les courbes G_{21}, G_{22}. A cette droite G_1 correspond sur F' un point simple P qui appartient aux courbes d'ordres $s_{21} - 1$, $s_{22} - 1$ homologues des courbes G_{21}, G_{22} (que nous désignerons par les mêmes symboles).

Aux droites fondamentales des réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ correspondent donc sur F' des points simples de cette surface appartenant aux courbes D.

3. Désignons par $|D''|$ l'adjoint au système $|D'|$ des sections hyperplanes de F'. Il a pour homologue dans le plan σ_1 le second adjoint $|D_1''|$ au système $|D_1|$. L'existence de $|D''|$ implique l'hypothèse que les courbes D' ne sont pas rationnelles, c'est-à-dire que l'on a $\nu < n + 1$. C'est ce que nous supposerons dans la suite.

Considérons, dans σ_1, le système $|2D_1'|$; il a la dimension au moins égale à $8(n - 1) - \nu$, c'est-à-dire à $7n - 9$. Ses courbes découpent sur une courbe D_1 une série d'ordre $4n - 8$, certainement non spéciale, donc de dimension $3n - 7$. On en conclut qu'il existe des courbes du système $|2D_1'|$ qui contiennent des courbes D_1, c'est-à-dire que le système $|2D_1' - D_1|$ existe.

Si O est un point-base de $|A_1|$, multiple d'ordre s pour les courbes A_1 ; il est multiple d'ordre $2s - 2$ pour les courbes $2D_1'$, donc multiple d'ordre $s - 2$ pour les courbes $2D_1' - D_1$. Ces dernières courbes sont donc les secondes adjointes D_1'' aux courbes D_1.

Sur la surface F', les hyperquadriques contenant une courbe D coupent encore la surface suivant les courbes D'' et inversement, les hyperquadriques passant par une courbe D'' découpent sur la surface le système $|D|$.

Reprenons la droite ω_2 fondamentale du réseau $|A_2|$ considérée plus haut. Cette droite rencontre les courbes D''_2 en $s_{21} - 1 + s_{22} - 1 = n - 2$ points, donc est fondamentale pour le système $|D'_2|$. La droite ω_2 rencontre les courbes D''_2 en $s_{21} - 2 + s_{22} - 2 = n - 4$ points. Or, les courbes D''_2 sont d'ordre $n - 5$, donc la droite ω_2 est une partie fixe de $|D''_2|$. Comme le système $|D''_2|$ correspond au système $|D''|$, on en conclut que sur F, les courbes G_{1i}, G_{2i} qui sont des droites sont des composantes fixes de $|D''|$, si les deux courbes fondamentales sur lesquelles elles s'appuient ont des ordres supérieurs à l'unité.

Cette conclusion résulte d'ailleurs de l'égalité fonctionnelle

$$D + D'' = 2D',$$

valable évidemment sur F et sur F'.

4. La surface F' est rationnelle et supposons que nous en connaissions une représentation quelconque sur un plan σ, de telle sorte qu'aux courbes D' correspondent des courbes γ d'ordre m.

Aux courbes D correspondent sur σ les courbes du système $|2\gamma - \gamma'|$. Aux courbes C_1 correspondent des courbes γ_1 formant un réseau homaloïdal $|\gamma_1|$; aux courbes C_2 correspondent des courbes d'un réseau homaloïdal $|\gamma_2|$ et on doit avoir

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma - \gamma'.$$

Cette remarque donne un procédé pour déterminer les transformations birationnelles dont le nombre ν des points fondamentaux est fixé ; nous l'appliquerons au cas $\nu = n + 1$ et formerons quelques exemples dans le cas $\nu = n$.

Nous pouvons toujours supposer sans restriction que le système $|\gamma|$ ne possède que des points-base ordinaires, à tangentes variables. Il est alors facile de former le système $|2\gamma - \gamma_1|$, mais les réseaux $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$ ne peuvent être obtenus aussi facilement. Supposons qu'ils soient connus.

Aux courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ correspondent sur F′ des courbes fondamentales de $|C_1|$, considérée sur cette surface.

A un point-base de $|\gamma|$ correspond une courbe sur F′. Ce point-base sera un point-base d'un au moins des réseaux $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$. Si le point en question n'est point-base que pour un seul de ces réseaux, par exemple pour $|\gamma_1|$, la courbe correspondante est une courbe fondamentale de $|C_2|$; dans le cas opposé, la courbe n'est fondamentale pour aucun des réseaux $|C_1|$, $|C_2|$.

En dehors des points-base de $|\gamma|$, les réseaux $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$ ne peuvent posséder que des points-base simples, distincts pour les deux réseaux, car autrement le système $|2\gamma - \gamma'|$ aurait des points-base multiples en dehors des points-base du système $|\gamma|$.

5. Commençons par examiner le cas $\nu = n + 1$. Les courbes D′ sont alors elliptiques et les courbes γ sont :

a) des cubiques passant par un certain nombre de points fixes, ou

b) des quartiques ayant deux points doubles fixes.

Supposons en premier lieu que les courbes γ soient les cubiques passant par six points P_1, P_2, ..., P_6 du plan. F′ est alors une surface cubique et on a $n = 5$, $\nu = 6$.

Le système $|\gamma'|$ se réduit à une courbe d'ordre zéro et $|2\gamma - \gamma'|$ est le système des sextiques passant doublement par P_1, P_2, ..., P_6.

On peut prendre pour $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$ des réseaux de cubiques :

$$\gamma_1 : P_1^2 P_2^0 P_3^1 P_4^1 P_5^1 P_6^2, \qquad \gamma_2 : P_1^0 P_2^2 P_3^1 P_4^1 P_5^1 P_6^1.$$

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5, P_1P_6 et la conique $P_1P_3P_4P_5P_6$. Ces courbes sont rencontrées chacune en deux points par les courbes γ_2. Sur F′, il leur correspond des droites. Au domaine de P_2 correspond également une droite de F′. Sur cette surface, les courbes C_2 rencontrent six droites chacune en deux points ; ces droites correspondent à six coniques de F, fondamentales pour $|C_1|$. On en conclut facilement que $|A_1|$ et $|A_2|$ sont constitués par des quintiques ayant six points doubles.

On arrive à la même transformation T en prenant pour les courbes γ_1 des coniques et pour les courbes γ_2 des quartiques telles que

$$\gamma_1 : P_1^1 P_2^1 P_3^1 P_4^0 P_5^0 P_6^0, \qquad \gamma_2 : P_1^1 P_2^1 P_3^1 P_4^2 P_5^2 P_6^2.$$

6. Supposons maintenant que les courbes γ soient des cubiques passant pour cinq points fixes P_1, P_2, ..., P_5. On a $n = 6$, $\nu = 7$.

Les courbes $2\gamma - \gamma'$ sont des sextiques passant doublement par P_1, P_2, ..., P_5. On peut prendre pour γ_1, γ_2 des cubiques

$$\gamma_1 : P_1^2 P_2^0 P_3^1 P_4^1 P_5^1 P_6', \qquad \gamma_2 : P_1^0 P_2^2 P_3^1 P_4^1 P_5^1 P_6'',$$

P_6 étant un point-base simple pour $|\gamma_1|$ et P_6'' un point-base simple pour $|\gamma_2|$.

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5, rencontrées chacune en deux points par les courbes γ_2, la droite P_1P_6', rencontrée en trois points par les courbes γ_2, la conique $P_1P_3P_4P_5P_6'$, rencontrée, en trois points par les courbes γ_2. Au point P_2 correspond sur F' une droite rencontrée en deux points par les courbes C_2 et au point P_6'' correspond un point simple appartenant à toutes les courbes C_2.

On en conclut facilement que les courbes A_1 (ou A_2), d'ordre six, ont deux points-base triples, quatre doubles et un simple.

On peut également prendre pour les courbes γ_1 des coniques et pour les courbes γ_2 des quartiques telles que

$$\gamma_1 : P_1^1 P_2^1 P_3^0 P_4^0 P_5^0 P_6' ; \qquad \gamma_2 : P_1^1 P_2^1 P_3^2 P_4^2 P_5^2 P_6'',$$

P_6' étant un point simple pour les coniques γ_1 et P_6'' un point simple pour les quartiques γ_2. On retrouve les mêmes systèmes que précédemment.

7. Supposons que les courbes γ soient les cubiques passant par quatre points fixes P_1, P_2, P_3, P_4. On a $n = 7$, $\nu = 8$.

On peut prendre pour γ_1, γ_2 des cubiques

$$\gamma_1 : P_1^2 P_2^0 P_3^1 P_4^1 P_5' P_6' ; \qquad \gamma_2 : P_1^0 P_2^2 P_3^1 P_4^1 P_5'' P_6'',$$

P_5', P_6' étant des points-base simples pour $|\gamma_1|$, P_5'', P_6'' des points-base simples pour $|\gamma_2|$.

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites P_1P_3, P_1P_4 rencontrées chacune en deux points par les courbes γ_2 ; les droites

$P_1P'_5$, $P_1P'_6$ rencontrées chacune en trois points par les courbes γ_2 ; la conique $P_2P_3P_4P'_5P'_6$, rencontrée en quatre points par les courbes γ_2.

Au point P_2 correspond sur F' une droite rencontrée en deux points par les courbes γ_2.

On conclut facilement de ce qui précède que les réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ ont tous deux un point-base quadruple, deux points-base triples, trois doubles et deux simples.

On parvient aux mêmes réseaux homaloïdaux si l'on suppose que les courbes γ_1 sont des coniques passant par P_1 et par deux autres points P'_5, P'_6, les courbes γ_2 étant des quartiques passant doublement par P_2, P_3, P_4, simplement par P_1 et par deux autres points P''_5, P''_6.

8. Supposons que les courbes γ soient les cubiques passant par trois points fixes P_1, P_2, P_3. On a $n = 8$, $\nu = 9$.

Prenons pour γ_1, γ_2 des cubiques telles que

$$\gamma_1 : P_1^2P_2^0P_3^1P'_4P'_5P'_6 \; ; \qquad \gamma_2 : P_1^0P_2^2P_3^1P''_4P''_5P''_6.$$

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont la droite P_1P_3, rencontrée en deux points par les courbes γ_2 ; les droites $P_1P'_4$, $P_1P'_5$, $P_1P'_6$, rencontrées en trois points par les courbes γ_2 ; la conique $P_1P_3P'_4P'_5P'_6$, rencontrée en cinq points par les courbes γ_2. En tenant compte du point-base double P_2 et des points-base simples P''_4, P''_5, P''_6 de $|\gamma_2|$, on voit que les réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ possèdent un point-base quintuple, trois points-base triples, deux points-base doubles et trois simples.

Prenons maintenant pour γ_1 des coniques passant par trois points P'_4, P'_5, P'_6 et pour γ_2, des quartiques passant deux fois par P_1, P_2, P_3 et une fois par trois points P''_4, P''_5, P''_6 :

$$\gamma_1 : P_1^0P_2^0P_3^0P'_4P'_5P'_6, \qquad \gamma_2 : P_1^2P_2^2P_3^2P''_4P''_5P''_6,$$

Les droites fondamentales de $|\gamma_1|$ rencontrent chacune les courbes γ_2 en quatre points. Si l'on tient compte des points doubles P_1, P_2, P_3 et des points-simples P''_4, P''_5, P''_6, on voit que le système $A|_1|$ possède trois points quadruples, trois points doubles et trois points simples comme grande-base.

La considération des courbes fondamentales de $|\gamma_2|$ conduit à un réseau $|A_2|$ possédant les mêmes propriétés.

9. Supposons que les courbes γ soient les cubiques passant par deux points fixes P_1, P_2. On a $n = 9$, $\nu = 10$.

Les courbes γ_1, γ_2 sont nécessairement des cubiques :

$$\gamma_1 : P_1^2 P_2^0 P'_3 P'_4 P'_5 P'_6 \, ; \qquad \gamma_2 : P_1^0 P_2^2 P''_3 P''_4 P''_5 P''_6.$$

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites $P_1P'_3$, $P_1P'_4$, $P_2P'_5$, $P_1P'_6$, rencontrées chacune en trois points par les courbes γ_2 et la conique $P_1P'_3P'_4P'_5P'_6$, rencontrée en six points par les courbes γ_2. En tenant compte du point-base double P_2 et des quatre points-base simples de $|\gamma_2|$, on croit que les réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ ont chacun pour groupe-base un point sextuple, quatre points triples, un point double et quatre points simples.

10. Les cas où $|\gamma|$ est un système linéaire de cubiques planes ayant un seul point-base ou dépourvu de point-base ne peut évidemment rien donner. Il nous reste à examiner le cas où $|\gamma|$ est le système de quartiques ayant deux points-base doubles P_1, P_2 que, restant dans le cas général, nous supposerons distincts. On a alors $n = 10$, $\nu = 11$.

Il existe une seule courbe γ' : la droite P_1P_2 et le système $|2\gamma - \gamma'|$ est constitué par les courbes du septième ordre ayant des points triples en P_1, P_2.

Les courbes γ_1 sont des cubiques ayant un point double en P_1 et passant simplement par quatre points P'_3, P'_4, P'_5, P'_6 ; les courbes γ_2 sont les quartiques passant trois fois par P_2, une fois par P_1 et par cinq autres points P''_3, P''_4, P''_5, P''_6, P''_7.

Les courbes fondamentales du réseau $|\gamma_1|$ sont les droites $P_1P'_3$, $P_1P'_4$, $P_1P'_5$, $P_1P'_6$, rencontrées chacune en trois points par les courbes γ_2 ; la conique $P_1P'_3P'_4P'_5P'_6$, rencontrée en sept points par les courbes γ_2. Si l'on tient compte du point P_2, triple pour les courbes γ_2 et des points simples $P''_3, \ldots, P''_7$, on voit que le réseau $|A_1|$ possède un point-base heptuple, cinq points-base triples et cinq points-base simples.

Les courbes fondamentales du réseau $|\gamma_2|$ sont les droites P_2P_1, rencontrées en un point par les courbes γ_1, $P_2P''_3, \ldots, P_2P''_7$, rencontrées chacune en trois points par les courbes γ_1 et la cubique passant deux fois par P_2, une fois par P_1, $P''_3, \ldots, P''_7$, rencontrées en sept points par les courbes γ_1. On en conclut que $|A_2|$ présente le même groupe-base que $|A_1|$.

11. Nous allons maintenant supposer $\nu = n$. Les courbes D′ sont alors de genre deux. Nous nous limiterons d'ailleurs à considérer trois exemples.

En premier lieu, supposons que $|\gamma|$ soit formé des quartiques planes de σ ayant un point double P_0 et cinq points simples P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. On a $n = 8$, $\nu = 8$ et les courbes γ' sont les droites passant par P_0 ; les courbes $2\gamma - \gamma'$ sont d'ordre sept, passent trois fois par P_0 et deux fois par $P_1, P_2, \ldots, P_5$.

Prenons en premier lieu pour courbes γ_1 les cubiques ayant un point double en P_0, passant par P_1, P_2 et par deux autres points P'_6, P'_7. Les courbes γ_2 sont les quartiques passant simplement par P_0, P_1, P_2 et doublement par P_3, P_4, P_5.

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites P_0P_1, P_0P_2, rencontrées chacune en deux points variables par les courbes γ_2 ; les droites $P_0P'_6$, $P_0P'_7$, rencontrées chacune en trois points variables par les courbes γ_2 ; enfin la conique $P_0P_1P_2P'_6P'_7$, rencontrée en cinq points variables par les courbes γ_2. En tenant compte des points P_3, P_4, P_5, doubles pour les courbes γ_2, on voit que le réseau $|A_1|$ possède un point-base quintuple, deux points-base triples et cinq points-base doubles. On peut le représenter par le symbole

$$8(1^5,\ 2^3,\ 5^2).$$

Les courbes fondamentales du réseau $|A_2|$ sont les trois droites P_3P_4, P_4P_5, P_3P_5, rencontrées chacune en trois points variables par les courbes γ_1, les coniques $P_0P_1P_3P_4P_5$, $P_0P_2P_3P_4P_5$, rencontrées chacune en trois points variables par les courbes γ_1 ; enfin la conique $P_1P_2P_3P_4P_5$, rencontrée en quatre points par les courbes γ_1. En tenant compte des points-base simples P'_6, P'_7, on voit que le réseau $|A_2|$ possède comme groupe-base un point quadruple, cinq points triples et deux points simples. Il a le symbole

$$8(1^4,\ 5^3,\ 2^1).$$

Dans le plan σ_1, le système $|D''_1|$ est constitué par les cubiques passant trois fois par un point et une fois par deux points ; elles se décomposent donc en deux droites fixes joignant le point triple aux points simples, et en une droite variable passant par le point triple.

Dans le plan σ_2, le système $|D''_2|$ est constitué par les cubiques ayant un point double et cinq points simples.

On pourrait également supposer que les courbes γ_1 sont des coniques passant par P_0 et par deux points P'_6, P'_7, les courbes γ_2 étant des quintiques passant doublement par $P_0, P_1, \ldots, P_5$. Cela conduit aux mêmes réseaux $|A_1|$, $|A_2|$ que dans le premier cas.

12. Supposons que le système $|\gamma|$ soit formé par les quartiques ayant un point double P_0 et quatre points simples P_1, P_2, P_3, P_4. On a $n = \nu = 9$.

Les courbes γ' sont les droites passant par P_0 et les courbes $2\gamma - \gamma'$ sont des courbes du septième ordre passant trois fois par P_0 et deux fois par P_1, P_2, P_3, P_4.

Prenons pour courbes γ_1 les quartiques ayant un point triple en P_0, passant simplement par P_2, P_3, P_4 et par trois autres points P'_5, P'_6, P'_7. Les courbes γ_2 sont alors des cubiques passant deux fois par P_1, une fois par P_2, P_3, P_4 et par un autre point P''_5.

Les courbes fondamentales de $|\gamma_1|$ sont les droites P_0P_2, P_0P_3, P_0P_4, rencontrées en deux points variables par les courbes γ_2 ; les droites $P_0P'_5$, $P_0P'_6$, $P_0P'_7$, rencontrées en trois points variables par les courbes γ_2 ; enfin la cubique ayant un point double en P_0 et passant simplement par P_2, P_3, P_4, P'_5, P'_6, P'_7, rencontrée en six points variables par les courbes γ_2.

En tenant compte du point double P_1 et du point simple P''_5, on voit que le réseau $|A_1|$ possède un point sextuple, trois points triples, quatre points doubles et un point simple comme groupe-base. Il est représenté par le symbole

$$9(1^6,\ 3^3,\ 4^2,\ 1^1).$$

Les courbes fondamentales de $|\gamma_2|$ sont les droites P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, rencontrées en trois points variables par les courbes γ_1, la droite $P_1P''_5$, rencontrée en quatre points variables par les courbes γ_1 et enfin la conique $P_1P_2P_3P_4P''_5$, rencontrée en cinq points variables par les courbes γ_1. Si l'on tient compte du point P_0, triple pour les courbes γ_1 et des points P'_5, P'_6, P'_7, on voit que le groupe-base, du réseau $|A_2|$ est formé d'un point quintuple, d'un point quadruple, de quatre points triples et de trois points simples. $|A_2|$ a pour symbole

$$9(1^5, 1^4, 4^3, 3^1).$$

Dans le plan σ_1, le système $|D''_1|$ est formé de quartiques ayant un point quadruple et trois points simples ; ce système comprend donc trois composantes fixes : les droites joignant le point quadruple aux trois points simples et est complété par les droites passant par le point quadruple.

Dans le plan σ_2, le système $|D''_2|$ est formé de quartiques ayant un point triple, un point double et quatre points simples. La droite joignant les deux premiers points est une composante fixe du système, qui est complété par les cubiques ayant un point double et cinq points simples.

13. Nous allons maintenant supposer que le système $|\gamma|$ est formé des quintiques ayant un point triple P_1 et un point double P_2. On a alors $n = \nu = 13$.

Les courbes γ' sont formées de la droite P_1P_2 et des droites passant par P_1 ; les courbes $2\gamma - \gamma'$ sont du huitième ordre et passent quatre fois par P_1, deux fois par P_2.

Nous prendrons pour γ_1 les quintiques ayant un point quadruple en P_1, passant par P_2 et par sept points $P'_1, P'_2, \dots, P'_7$. Les courbes γ_2 sont alors des cubiques ayant un point double en P_2 et passant par quatre points P''_1, P''_2, P''_3, P''_4.

Les courbes fondamentales du réseau $|\gamma_1|$ sont la droite P_1P_2, rencontrée en un point variable par les courbes γ_2, les sept droites $P_1P'_1$, $P_2P'_2, \dots,$ $P_1P'_7$, rencontrées chacune en trois points variables par les courbes γ_2, la quartique passant trois fois par P_1 et une fois par $P_1, P'_1, \dots, P'_7$, rencontrée en dix points variables par les courbes γ_2. On en déduit que le groupe-base du réseau $|A_1|$ est formé d'un point multiple d'ordre 10, de sept points triples et de cinq points simples. Le réseau $|A_1|$ a pour symbole

$$13(1^{10}, 7^3, 5^1).$$

Les courbes fondamentales du réseau $|\gamma_2|$ sont les droites $P_2P''_1$, $P_2P''_2$, $P_2P''_3$, $P_2P''_4$, rencontrées chacune en quatre points variables par les courbes γ_1 et la conique $P_1P''_1P''_2P''_3P''_4$, rencontrée en neuf points variables pour les courbes γ_1. On en conclut que le groupe-base du réseau $|A_2|$ est formé d'un point multiple d'ordre 9, de cinq points quadruples et de sept points-simples. $|A_2|$ a donc pour symbole.

$$13(1^9, 5^4, 7^1).$$

Dans le plan σ_1, le système $|D_1''|$ est constitué par les courbes d'ordre 8 ayant un point multiple d'ordre huit et sept points simples ; il est donc formé des sept droites fixes joignant le point octuple aux sept points simples et des droites passant par le point octuple.

Dans le plan σ_2, le système $|D_2''|$ est formé des courbes d'ordre huit ayant un point heptuple et cinq points doubles ; il comprend donc comme partie fixe les cinq droites joignant le premier de ces points à chacun des cinq autres et sa partie variable est constituée par les cubiques ayant un point double et cinq points simples.

14. On peut inversement se servir du procédé qui vient d'être indiqué pour construire des réseaux homaloïdaux.

Soient $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$ deux réseaux homaloïdaux d'ordres n_1, n_2, choisis à priori. Si les courbes γ ont l'ordre m, les courbes γ' ont l'ordre $m-3$ et les courbes $2\gamma - \gamma' = \gamma_1 + \gamma_2$ l'ordre $m + 3 = n_1 + n_2$. On a donc

$$m = n_1 + n_2 - 3.$$

Si O est un point-base de $|\gamma|$, multiple d'ordre s pour les nombres γ, d'ordre s_1 pour les courbes γ_1 et d'ordre s_2 pour les courbes γ_2, ce point est multiple d'ordre $2s - (s-1) = s + 1$ pour les courbes $2\gamma - \gamma'$ et d'ordre $s_1 + s_2$ pour les courbes $\gamma_1 + \gamma_2$. On doit donc avoir

$$s = s_1 + s_2 - 1.$$

Si nous désignons par n le nombre de points variables communs à deux courbes γ_1, γ_2, le système $|\gamma_1 + \gamma_2|$ a le degré $2n + 2$ et le genre $n - 1$. Si sa dimension est égale à $n + 4$, on peut considérer la surface F représentation de ce système dans un espace S_{n+4}. Sur cette surface, aux courbes γ_1, γ_2 correspondent des courbes C_1 et C_2 formant des réseaux homaloïdaux et on peut en déduire les systèmes $|A_1|$, $|A_2|$.

Soit r la dimension du système complet $|\gamma_1 + \gamma_2|$. Les courbes $\gamma_1 + \gamma_2$ coupent une courbe γ_1 en $n + 1$ points variables ; il y a donc ∞^{r-n-2} courbes $\gamma_1 + \gamma_2$ contenant une courbe γ_1 déterminée ; elles sont complétées par les ∞^2 courbes γ_2 et on a bien $r = n + 4$.

Si l'on rapporte projectivement les courbes γ_1 aux droites de σ_1 et les courbes γ_2 aux droites de σ_2, on obtient deux transformations birationnelles T_1, T_2. Il clair que la transformation représentée par F n'est autre que la transformation T_1T_2.

Liège, le 6 août 1951.