Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les surfaces du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois

Lucien Godeaux

Résumé
Comparaison des résultats obtenus par M. Room récemment et ceux obtenus par l'auteur en 1913.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur les surfaces du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Comparaison des résultats obtenus par M. Room récemment et ceux obtenus par l'auteur en 1913.

Le lecture d'un travail récent de M. Room (1) nous a remis en mémoire une note que nous avons publiée autrefois sur le même objet (2). Dans son travail, M. Room étudie les transformations en soi d'une surface du quatrième ordre obtenue en égalant à zéro un déterminant du quatrième ordre dont les seize éléments sont des formes linéaires par rapport aux coordonnées des points de l'espace. Nous avions résolu le même problème pour les surfaces du quatrième ordre assujetties à contenir une sextique gauche de genre trois. Il est aisé de voir que ces surfaces appartiennent à une même famille. M. Room utilise les procédés habituels de la géométrie analytique ; nous avions au contraire employé l'élégante méthode due à M. Severi (3) et d'après laquelle le groupe des transformations birationnelles de la surface en soi est isomorphe au groupe des substitutions unimodulaires

(1) *Self-Transformations of determinantal quartic surfaces* (PROCEEDINGS OF THE LONDON MATH. SOC., 1950, pp. 348-400).

(2) *Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois* (BULL. ACADÉMIE CRACOVIE, 1913, pp. 529-547).

(3) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (REND. CIRC. MATEM. PALERMO, 1910, t. XXX, pp. 265-288). Voir aussi deux mémoires parus dans les MATH. ANNALEN, 1906, t. LXII et dans les ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1908, 3e s., t. XXV.

de la forme quadratique attachée à une base minima de la surface. Nous nous proposons d'indiquer ici quelques remarques que nous suggère la comparaison de la note de M. Room et la nôtre.

1. Désignons par

$$\varphi_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

seize formes linéaires par rapport aux coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 des coordonnées des points de l'espace et d'ailleurs quelconques.

Les équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent une sextique de genre trois la plus générale. Toute surface du quatrième ordre contenant cette sextique a nécessairement une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

La surface précédente est celle qui a été considérée par M. Room ; elle coïncide donc bien avec la surface du quatrième ordre assujettie à contenir une sextique gauche de genre trois. Désignons par F la surface considérée.

Nous avons établi que la surface F dépend de 18 modules ; il y a donc, dans l'espace ordinaire, ∞^{18} familles formées, chacune de ∞^{15} surfaces analogues à F, deux surfaces d'une même famille étant projectivement identiques.

La surface F contient deux systèmes linéaires ∞^3 de sextiques gauches de genre trois. Si les λ, μ sont des constantes, ces familles sont représentées par les équations.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \mu_2 & \varphi_{21} & \cdot & \cdot & \varphi_{24} \\ \mu_3 & \varphi_{31} & \cdot & \cdot & \varphi_{34} \\ \mu_4 & \varphi_{41} & \cdot & \cdot & \varphi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier système, que nous représenterons par $|C_1|$, contient les sextiques dont on obtient les équations en supprimant une colonne dans le déterminant (1). Le second système, qui sera représenté par $|C_2|$, contient les sextiques que l'on obtient en supprimant une ligne dans le déterminant (1).

Une courbe C_1 et une courbe C_2 forment l'intersection complète de la surface F et de la surface cubique

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \mu_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \mu_3 & \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \mu_4 & \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on désigne par $|C_0|$ le système des sections planes de F, on a donc

$$C_1 + C_2 \equiv 3C_0.$$

Ces propriétés s'établissent immédiatement en remarquant que la surface F possède une courbe canonique d'ordre zéro et a donc tous des genres égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$). Il en résulte qu'un système de courbes de genre π, tracées sur F, est linéaire, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π.

2. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux plans d'un espace S'_3. A la surface F correspond une surface F' du quatrième ordre sur laquelle, aux courbes C_0 correspondent des sextiques gauches de genre trois.

On peut construire la surface F' de la manière suivante : Soit $\overline{C}_2$ une courbe irréductible du système $|C_2|$. Les surfaces cubiques passent par $\overline{C}_2$ sont en nombre ∞^3 et formant un système homaloïdal. En rapportant projectivement ces surfaces aux plans de l'espace S'_3, on obtient une transformation birationnelle entre l'espace S_3 de F et S'_3. Aux plans de S_3 correspondent dans S'_3 les surfaces cubiques passant par une sextique gauche $\overline{C}'_2$, de genre trois. A F correspond la surface F', passant par $\overline{C}'_2$. Aux sections planes C_0 de F correspondent les sections C'_0 de F' par les surfaces cubiques passant par $\overline{C}'_2$; aux courbes C_1 correspondent les sections planes C'_1 de F'. A la courbe $\overline{C}_2$ correspond la section de F', en dehors de $\overline{C}'_2$, par la surface du huitième ordre lieu des trisécantes de $\overline{C}'_2$, c'est-à-dire une courbe d'ordre 14.

Les surfaces F, F' étant birationnellement identiques, ont mêmes modules et sont par suite projectivement identiques. Il existe donc une homographie faisant correspondre F à F', les courbes C_0 aux courbes C'_1 et les courbes C_1 aux courbes C'_0. Le produit de la transformation cubique par cette homographie est une transformation T_1 de F en soi. Changeons de notations et désignons maintenant par C'_0, C'_1, C'_2 les courbes de F que T_1 fait correspondre respectivement aux courbes C_0, C_1, C_2. On a

$$C'_0 \equiv C_1, \qquad C'_1 \equiv C_0,$$
$$C'_2 \equiv 3C_1 - C_0.$$

Reprenons le raisonnement précédent en intervertissant les rôles des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$. Nous obtenons une transformation birationnelle T_2 de F en soi et si nous désignons par C''_0, C''_1, C''_2 les courbes que T_2 fait correspondre respectivement aux courbes C_0, C_1, C_2, nous obtenons

$$C''_0 \equiv C_2, \qquad C''_2 \equiv C_0,$$
$$C''_1 \equiv 3C_2 - C_0,$$

c'est-à-dire

$$C''_0 \equiv 3C_0 - C_1, \qquad C''_1 \equiv 8C_0 - 3C_1.$$

3. L'existence d'une transformation de F en soi est en quelque sorte matérialisée par M. Room par un procédé ingénieux que nous exposerons ici d'une manière un peu différente.

Considérons la liaison ponctuelle

$$\Sigma a_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha y_\beta z_\gamma = 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4)$$

entre trois espaces (x), (y), (z). A deux points pris chacun dans deux de ces espaces correspondent dans le troisième les points d'un plan.

Les couples de points x, y auxquels correspondent dans l'espace (z) un plan indéterminé sont donnés par les équations

$$\Sigma a_{\alpha\beta 1} x_\alpha y_\beta = 0, \quad \Sigma a_{\alpha\beta 2} x_{\alpha\gamma\beta} = 0, \quad \Sigma_{\alpha\beta 3} x_\alpha y_\beta = 0, \quad \Sigma a_{\alpha\beta 4} x_\alpha y_\beta = 0.$$

Ces points x, y engendrent respectivement les surfaces

$$\left| \Sigma a_{\alpha 1\gamma} x_\alpha \;\; \Sigma a_{\alpha 2\gamma} x_\alpha \;\; \Sigma a_{\alpha 3\gamma} x_\alpha \;\; \Sigma a_{\alpha 4} x_\alpha \right| = 0, \tag{1}$$
$$(\gamma = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$\left| \Sigma a_{1\beta\gamma} y_\beta \;\; \Sigma a_{2\beta\gamma} y_\beta \;\; \Sigma a_{3\beta\gamma} y_\beta \;\; \Sigma a_{4\beta\gamma} y_\beta \right| = 0, \tag{2}$$
$$(\gamma = 1, 2, 3, 4).$$

Désignons par F, F′ ces surfaces ; elles sont liées par une correspondance birationnelle. Appelons C_0 les sections planes de F, C_1 les sextiques formant le système linéaire contenant les sextiques obtenues en effaçant successivement les colonnes du premier déterminant, C_2 les sextiques de l'autre système. Appelons de même C'_0, C'_1, C'_2 les courbes analogues de F′.

Dans la correspondance birationnelle entre les surfaces F, F′, aux courbes C_0 correspondent les courbes C'_1 et aux courbes C_1, les courbes C'_0.

Considérons de même les couples de points y, z auxquels correspondent dans (x) des plans indéterminés. Ces points décrivent respectivement les surfaces

$$\left| \Sigma a_{\alpha\beta 1} y_\beta \;\; \Sigma a_{\alpha\beta 2} y_\beta \;\; \Sigma a_{\alpha\beta 3} y_\beta \;\; \Sigma a_{\alpha\beta 4} y_\beta \right| = 0, \tag{3}$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$|\Sigma a_{\alpha 1\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{\alpha 2\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{\alpha 3\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{\alpha 4\gamma} z_\gamma| = 0, \tag{4}$$
$$(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Le déterminant de l'équation (3) est le transposé de celui de l'équation (2) et par conséquent l'équation (3) représente la surface F'. Nous désignerons par F'' la surface représentée par l'équation (4) et par C_0'' les sections planes, par C_1'' les sextiques parmi lesquelles se trouvent celles qui sont obtenues en effaçant les colonnes du déterminant (4), par C_2'' les autres.

Dans la transformation birationnelle entre F' et F'', aux courbes C_0' correspondent les courbes C_1'' et au courbes C_2' les courbes C_0''.

Considérons enfin les couples de points x, z auxquels correspondent dans (y) des plans indéterminés. En raisonnant comme plus haut, on obtient les surfaces

$$|\Sigma a_{1\beta\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{2\beta\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{3\beta\gamma} z_\gamma \quad \Sigma a_{4\beta\gamma} z_\gamma| = 0, \tag{5}$$
$$\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

et

$$|\Sigma a_{\alpha\beta 1} x_\alpha \quad \Sigma a_{\alpha\beta 2} x_\alpha \quad \Sigma a_{\alpha\beta 3} x_\alpha \quad \Sigma a_{\alpha\beta 4} x_\alpha| = 0, \tag{6}$$
$$(\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Le déterminant de l'équation (5) est le transposé de celui de l'équation (4) et le déterminant de l'équation (6), celui de l'équation (1). Les équations (5), (6) représentent donc les surfaces F'', F.

Dans la transformation birationnelle entre F'' et F, aux courbes C_0'' correspondent les courbes C_2 et aux courbes C_2'', les courbes C_0.

Le produit des transformations permettent de passer de F à F', de F' à F'', de F'' à F, est une transformation birationnelle T de F en soi. Cette transformation fait correspondre à la courbe C_0 la courbe $21C_0 - 8C_1$ et à la courbe C_1, la courbe $8C_0 - 3C_1$.

4. Rappelons maintenant les résultats que nous avons obtenus. Les courbes C_0, C_1 forment, sur la surface F, une base-minima de déterminant — 20. Une courbe C, tracée sur F (dépourvue de points doubles), satisfait à la relation fonctionnelle

$$C \equiv \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1,$$

λ_0 et λ_1 étant des entiers. Cette courbe est de genre $2\xi + 1$, où ξ est donné par

$$\xi = \lambda_0^2 + 3\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1^2.$$

Les solutions λ_1, λ_2 de cette équation s'obtiennent en posant

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(t - 3u), \quad \lambda_1 = u,$$

u et t satisfaisant à l'équation

$$t^2 - 5u^2 = 4\xi.$$

Considérons une transformation birationnelle θ de F en soi, faisant correspondre aux courbes C_0, C_1 des courbes

$$C_0' \equiv \alpha C_0 + \beta C_1,$$
$$C_1' \equiv \gamma C_0 + \delta C_1,$$

où α, β, γ, δ sont des entiers. M. Severi (loc. cit.) a montré que la substitution

$$\lambda_0' = \alpha\lambda_0 + \gamma\lambda_1,$$
$$\mu_0' = \beta\lambda_0 + \delta\lambda_1$$

est unimodulaire ($\lambda\delta - \beta\gamma = \pm 1$) et transforme en soi la forme quadratique

$$\lambda_0^2 + 3\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1^2.$$

Les transformations

$$C_0' \equiv C_1, \quad C_1' \equiv C_0, \qquad (T_1),$$
$$C_0' \equiv 3C_0 - C_1, \quad C_1' = 8C_0 - 3C_1, \qquad (T_2)$$

sont involutives. La transformation T_1 T_2 est non périodique. D'une manière générale, les transformations non périodiques de F en soi sont de la forme $(T_1 T_2)^k$ et les transformations involutives de la forme $(T_1 T_2)^k T_2$.

On peut également représenter une transformation non périodique par les formules

$$C_0' \equiv \alpha_i \; C_0 - \alpha_{i-1} \; C_1,$$
$$C_1' \equiv \alpha_{i-i} \; C_0 - \alpha_{i-2} \; C_1,$$

où les α sont des entiers définis par la relation récurrente

$$\alpha_i = 3\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2},$$

avec

$$\alpha_0 = 1, \; \alpha_1 = 3.$$

Pour $i = 3$, on retrouve la transformation rencontrée en appliquant le procédé de M. Room (n° 3).

Liège, le 1er mai 1951.