SUR UNE CONGRUENCE (2, 1) DE CONIQUES

PAR

LUCIEN GODEAUX

Étudiant en Sciences physiques et mathématiques
à Liège.

Extrait des Mémoires et Publications
de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres
du Hainaut
VI[e] série, tome X, 60[e] volume

MONS
IMPRIMERIE DEQUESNE-MASQUILLIER & FILS
1908

SUR UNE CONGRUENCE (2,1) DE CONIQUES

PAR

Lucien GODEAUX

Etudiant en Sciences physiques et mathématiques

à Liège.

Dans ce travail, nous étudions une congruence Σ de coniques jouissant d'un point principal.

1. — Soit A un point, a et b deux droites.

Considérons un faisceau φ de quadriques passant par A et a. Toutes les quadriques de φ ont encore en commun une cubique gauche c_3.

Soit π un plan passant par A. Par le point (π, b) passe une seule quadrique de φ. Cette quadrique a en commun avec le plan π une conique ε. Nous considérons la congruence Σ comme le lieu des coniques ε. Le plan π étant donné, la la conique ε qu'il contient est déterminée par cinq points, à savoir A, (π, a), (π, b) et les points (π, c_3) autres que A.

La congruence Σ possède un point fondamental A ; *le lieu des points singuliers se compose de deux droites* a, b, *et d'une cubique gauche* c_3.

2.— Par un point quelconque P de l'espace, passe une seule quadrique de φ. Les points d'intersection de cette quadrique avec b déterminent, avec P, deux plans de la gerbe (A). Dans chacun de ces plans se trouve une conique de Σ passant par P, donc :

La congruence Σ est d'ordre deux.

Une droite quelconque détermine avec le point A un plan dans lequel se trouve une seule conique de Σ, donc :

La congruence Σ est de classe un.

Les droites passant par A et les droites du plan (A, b) sont les bisécantes d'une infinité de coniques de Σ, donc :

Les cordes singulières de la congruence Σ appartiennent à une congruence linéaire dégénérée en une gerbe et un plan réglés dont les supports sont en situation réunie.

3. — Soit (W, ω) un faisceau-plan. Désignons par w les rayons de ce faisceau.

Par un point Y de b menons le plan passant par A et W. Il y a deux quadriques de tangentes au rayon de (W, ω) situé dans le plan (A, Y, W). Ces quadriques marquent sur la droite b quatre points Y'. Par un point Y' de b, menons une quadrique de φ. Il y a deux rayons du faisceau (W, ω) tangents à cette quadrique. Les plans de la gerbe (A) passant par ces rayons marquent sur b deux points Y. Entre les points Y et Y' existe une correspondance (2, 4). Il y a six coïncidences. Pour chacune de ces coïncidences, il y a une conique tangente à un rayon w de (W, ω), donc :

Les tangentes aux coniques de la congruence Σ engendrent un complexe (6, 6).

Les plans des coniques tangentes à un plan enveloppent un cône de classe six.

Si ce plan est le plan de l'infini, on a le théorème :

Les plans des paraboles de la congruence Σ enveloppant un cône de classe six.

Remarquons qu'il y a deux coniques de Σ tangentes à la droite commune au plan ω et au plan (A, *b*), ce plan est donc tangent double des deux derniers cônes.

4. — Les droites issues du point A sont les cordes d'une infinité de coniques de la congruence Σ. Ces coniques engendrent une surface S dont on peut trouver l'ordre immédiatement.

Soit *d* une droite passant par A. Par un point quelconque de *d* passent deux coniques de Σ, donc la droite *d* est une droite double de la surface. Un plan passant par *d* contient une seule conique de Σ, ce plan a donc en commun avec S une conique et une droite double, donc la surface S est du quatrième ordre.

On pourrait arriver aisément au même résultat au moyen du principe de Chasles, mais la démonstration est plus longue.

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Les coniques de la congruence Σ qui ont pour bisécante une droite passant par A, *engendrent une surface du quatrième ordre* S_4.

Les plans des coniques s'appuyant sur une droite donnée enveloppent un cône de quatrième classe.

Il y a une conique de Σ située dans le plan (A, *b*) et qui s'appuie une droite donnée, cette conique doit compter pour deux, donc le cône est doublement tangent au plan (A, *b*).

La surface de S_4 possède un point triple A ; en effet : une droite passant par A détermine avec *d* un plan, celui-ci ne contient qu'une conique de la congruence Σ appartenant à S_4, donc la droite ne rencontre plus la surface qu'en un point, par conséquent le point A est triple.

La surface S_4 passe évidemment par les lignes singulières de la congruence Σ.

5. — Il y a huit coniques de la surface S_4 qui dégénèrent. (*R. Sturm, Ueber Flächen mit einer endlichen Zahl von*

(einfachen) geraden, vorzügsweise die der vierten und fünften Ordnüng.-Math. Ann, tome IV, 1871, pp. 249-283; *Murer, Generazione della superficie d'ordinen con retta (n-2) pla, Rendiconti di Palermo*, 1888, tome II, pp. 107-109; *Fouret, Sur le nombre de plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface, Rendiconti di Palermo*, 1894, tome VIII, p. 202-208; *Stuyvaert, Etude de quelques surfaces engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Gand, Hoste*, 1902, p. 13; *J. de Vries, Right lines on surfaces with multiple right lines, Proceedings of Amsterdam*, 1902, pp. 577-583.)

Les plans des coniques dégénérées de la congruence Σ *enveloppent un cône de la huitième classe.*

Il y a trois coniques de la congruence dégénérées dans le plan (A, b), donc ce plan est triplement tangent au cône.

Les coniques de la congruence Σ dégénèrent lorsqu'il y a trois points singuliers co-linéaires ou deux points singuliers en ligne droite avec le point A. Cela a donc lieu pour les coniques dont les plans passent par les bisécantes de c_3 s'appuyant sur b, ou par la droite issue de A et s'appuyant sur a et b, ou enfin par les droites s'appuyant sur a, b et c_3.

Le cône de huitième classe rencontré dans ce numéro dégénère donc. Nous allons énumérer les cônes partiels en lesquels il se décompose.

Les plans passant par A et par les bisécantes de c_3 s'appuyant sur b, enveloppent un cône de quatrième classe qui se décompose en un cône quadratique et deux faisceaux de plans dont les axes sont dans le plan (A, b).

Les plans de la gerbe (A) passant par les droites s'appuyant sur a, b et c_3, enveloppent un cône dequatrièmeclasse qui se décompsoe en un cône de troisième classe et un faisceau de plans dont l'axe passe par A et s'appuie sur a et b.

Dans l'étude des surfaces que nous rencontrerons plus loin, nous nous contenterons d'indiquer le nombre de droites de la surface, le lecteur fixera facilement lui-même la position de ces droites.

6. — Les droites en lesquelles dégénèrent les coniques de la congruence Σ engendrent certaines surfaces que nous allons rechercher.

On sait que les bisécantes de c_3 qui s'appuient sur une droite b engendrent une surface du quatrième ordre. Les droites qui complètent les coniques contenant une génératrice d'une surface passent par A et s'appuient sur a, et alors leur lieu est un faisceau-plan, ou bien elles s'appuient sur a, sur c_3 et sur l'axe de l'un des deux faisceaux de plans signalés au commencement du numéro précédent, et alors leur lieu se compose de deux quadriques de φ.

Les droites qui, avec la droite passant par A et rencontrant a et b, forment des coniques de Σ, engendrent une surface du second ordre. (*F. Deruyts*, *Sur quelques propriétés des polygones inscrits aux courbes gauches*, *Bull. de l'Acad. Royale de Belgique*, 3e série, t. XXXVI, 1898, pp. 553-566.) Cette quadrique fait aussi partie du faisceau φ.

Dans le dernier cas, on obtient une réglée d'ordre quatre et un cône quadratique.

7. — Par un point d'une ligne singulière passent une infinité de coniques engendrant une surface.

On a immédiatement le théorème suivant :

Les coniques de la congruence Σ *qui passent par un point de la droite* b *engendrent une quadrique du faisceau* φ.

Recherchons l'ordre de la surface engendrée par les coniques qui passent par un point fixe B de a ou de c_3.

Par un point Y_1 d'une droite quelconque y, menons la quadrique du faisceau φ, et par les points où cette quadrique rencontre b, menons les plans passant par A et B. Ceux-ci déterminent sur y deux points Y_2. Inversement, à un point Y_2 correspondent deux points Y_1. Ces points sont donc liés par une correspondance biquadratique. Il y a donc quatre coïncidences ; comme à chacune de celles-ci correspond une conique de Σ passant par B et s'appuyant sur y, on a le théorème :

Les coniques de la congruence Σ qui passent par un point de la droite a *ou de la cubique gauche* c_3, *engendrent une surface du quatrième ordre.*

Cette surface possède évidemment une droite double AB et deux points triples A et B.

Outre les droites a et b, la surface contient douze droites simples formant six coniques dégénérées.

8. — Soient d_1, d_2, deux droites quelconques ; recherchons le nombre de coniques de Σ qui s'appuient sur ces droites.

Par un point X de d_1 passe une quadrique du faisceau φ. Par les points où cette quadrique rencontre les droites b et d_2 et par A, on peut mener quatre plans qui marquent sur d quatre points X'. Par un point X' passent ∞^1 plans de la gerbe (A). Par un point Y de d_2 passe un de ces plans. Par le point où ce plan rencontre b passe une quadrique de φ qui marque sur d_2 deux points Y'. Par un point Y', menons la quadrique de φ ; par les points où elle rencontre la droite b passent deux plans passant par X' et A. Ces plans marquent sur d_2 deux points Y. Entre les points Y et Y' existe une correspondance (2, 2). Il y a quatre coïncidences. Les quadriques de φ qui passent par ces coïncidences, marquent sur d_1 huits points X. Entre les points X et X' existe une correspondance (8, 4), donc il y a douze coïncidences ; de là :

Il y a douze coniques de la congruence Σ qui s'appuient sur deux droites données.

Les coniques de la congruence Σ qui s'appuient sur une droite, engendrent une surface du douzième ordre S_{12}.

Nous avons vu tantôt que les plans des coniques qui s'appuient sur une droite enveloppent un cône de quatrième classe doublement tangent au plan (A, b). Deux pareils cônes ont en commun seize plans tangents, mais le plan (A, b) compte pour quatre de ces plans ; il n'y a donc que douze coniques de Σ qui s'appuient sur deux droites.

9. — Etudions la surface S_{12} engendrée par les coniques de Σ qui s'appuient sur d_2.

Il y a quatre coniques s'appuyant sur d_2 qui ont une corde passant par A, donc ce point est multiple d'ordre huit de S_{12}.

Dans la correspondance sur la droite d_1 du numéro précédent, on voit facilement qu'il y a dégénérescence lorsquo la droite s'appuie sur a ou sur c_3. A un point X correspondent encore quatre points X′, mais à un point X′ ne correspondent que quatre points X. Le nombre des coïncidences est alors de huit, donc a et c_3 sont multiples d'ordre quatre de la surface.

Par un point de b passent deux coniques de S_{12}, donc cette droite est multiple d'ordre deux.

Supposons que d_1 s'appuie sur la conique de Σ qui a pour corde la droite. Il est facile de vérifier qu'il y a deux coïncidences (X, X′) confondues au point de rencontre de cette conique et de d_1, donc cette conique est double.

La surface S_{12} contient $8 \times 4 - 2 \times 3$ coniques dégénérées, donc 52 droites.

La surface S_{12} *possède un point octuple, une droite et une cubique gauche quadruples, une droite et une conique double et cinquante-deux droites simples.*

10. — Soient d *et* ω une droite et un plan quelconques.

Les plans des coniques de Σ qui s'appuient sur d enveloppent un cône de quatrième classe doublement tangent à (A, b).

Les plans des coniques tangentes à ω enveloppent un cône de la sixième classe doublement tangent à (A, b).

Ces cônes ont en commun vingt-quatre plans tangents, quatre de ces plans sont confondus en (A, b), donc :

Il y a vingt coniques de la congruence Σ *qui s'appuient sur une droite et sont tangentes à un plan.*

Les coniques de la congruence Σ *qui sont tangentes à un plan, engendrent une surface du vingtième ordre* S_{20}.

Il y a six coniques de S_{20} qui ont pour corde une droite passant par A, donc ce point est multiple d'ordre quatorze.

De même, il y a six coniques de S_{20} qui passent par un point de c_3 ou de a, donc ces lignes sont multiples d'ordre six.

La droite b est une droite double de la surface.

Il y a sur S_{20}, $6 \times 8 - 3 \times 2 = 42$ coniques dégénérées.

En résumé : *La surface* S_{20} *possède un point multiple d'ordre quatorze, une droite et une cubique gauche sextuples, une droite double et 84 droites simples.*

11. — Nous avons trouvé tantôt que le complexe des tangentes aux coniques de Σ était du sixième degré (ordre et classe).

Le point A et le plan (A, b) sont visiblement des éléments principaux de ce complexe. Le plan (A, b) est même doublement principal, car toute droite de ce plan est tangente à deux coniques de la congruence Σ.

Soit P un point quelconque de l'espace. Une conique de la congruence Σ dont une tangente passe par P, admet pour corde la droite A P. Le lieu de telles coniques est une surface du quatrième ordre. La tangente menée par P à une conique de cette surface, est tangente à la surface, donc :

Le cône du complexe des tangentes par rapport à un point est le cône tangent à une surface du quatrième ordre possédant une droite double passant par le point donné.

Par le point P passent deux coniques de Σ, donc le lieu des points de contact des tangentes aux coniques de Σ possède un point double en P ; de là :

Le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point aux coniques de Σ est une courbe gauche du huitième ordre possédant un point double au point donné.

On peut encore énoncer le théorème suivant :

Le lieu des coniques de la congruence Σ tangentes aux droites d'une gerbe, est une surface du quatrième ordre.

12. — Soient ω un plan, d une droite de ce plan. Cherchons le nombre de coniques de Σ tangentes au plan ω en un point de d.

Par un point X de b passe une quadrique de φ. Par les points où cette quadrique rencontre d, menons les tangentes dans le plan ω. Le point A et ces tangentes déterminent des plans qui marquent sur b les deux points X'. Inversement, par un point X' de b passent ∞^1 plans de la gerbe (A). Il y a trois quadriques de φ dont les intersections avec le plan ω sont tangentes en des points de d à des plans passant par A et X'. Ces quadriques marquent sur b six points X. Les points X et X' étant liés par une correspondance (6,2), il y huit coïncidences ; donc :

Il y a huit coniques de la congruence Σ tangentes à un plan en des points d'une droite.

La courbe du complexe des tangentes dans un plan est du huitième ordre et de la sixième classe.

Cette courbe est doublement tangente au plan (A, b).

NOTE. — Une surface du quatrième ordre à droite double possède huit coniques dégénérées, donc seize droites. Si la surface possède deux points triples, ceux-ci sont évidemment sur la droite double et la surface ne possède plus que douze droites simples. Huit de ces droites passent par un point triple, les huit autres par le second point triple.

En effet, si d est la droite double, A, B étant les points triples, et ε_1, ε_2 deux sections planes, dont l'une passe par B, le nombre de droites de la surface passant par A sera évidemment égal au nombre de droites passant par A et s'appuyant en des points distincts sur ε_1 et ε_2. Le nombre de ces droites est évidemment égal à $4 \times 4 - 4 - 2 \times 3 = 6$, *c. q. f. d.*

Liège, 30 octobre 1907.