

# UN PARCOURS HISTORIQUE DE LA (DES) DÉFINITION(S) DU CONCEPT DE LIMITE

CHRISTOPHE DUBUSSY (UNAMUR)   PIERRE JOB (ICHEC)   KÉVIN BALHAN (ULIÈGE)

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous proposons de montrer comment la définition de limite en  $\varepsilon - \delta$ , telle qu'elle est aujourd'hui enseignée, est le fruit de profondes évolutions mathématiques et philosophiques depuis l'époque des grecs anciens. Nous analyserons trois périodes différentes de l'histoire pour finalement aboutir aux définitions formelles de Cauchy et de Weierstrass. Ce faisant, nous constaterons que ces deux définitions divergent légèrement (l'une étant *pointée* et l'autre *épointée*) et nous analyserons quelques conséquences induites sur l'enseignement des limites dans le secondaire supérieur.

## 1. LES GÉOMÈTRES GRECS

Notre parcours historique commence avec l'antiquité grecque. En effet, ce sont les problèmes de mesure de grandeurs (aires, volumes, centres de masse, ...) posés par les grecs ainsi que les solutions qu'ils tentèrent d'y apporter qui ont donné naissance au calcul infinitésimal et, à terme, au concept contemporain de limite. (Boyer, 1959) Durant le développement de l'école Pythagoricienne, ces questions se précisent et s'orientent vers la comparaison de grandeurs "de même type". D'un point de vue géométrique, cela revient à se demander combien de fois une certaine figure peut "rentrer" dans une autre figure. Un des exemples les plus emblématiques est celui d'un cylindre pouvant contenir exactement trois cônes de même base et même hauteur. S'en suivent les fameux problèmes de *quadrature* : Peut-on à partir d'une surface donnée construire un carré de même aire ?

**1.1. Quadrature relative et proportions.** Face à la difficulté (dont on sait aujourd'hui qu'elle est parfois une réelle impossibilité, cf. la quadrature du cercle) de produire des quadratures exactes avec les moyens de l'époque, les grecs se tournent vers des problèmes de quadrature *relative*. Un exemple est donné avec la proposition 2 du livre 12 des éléments d'Euclide :

*"Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres".*

Cet énoncé sous-entend une certaine théorie des proportions, qui a connu plusieurs évolutions dans le monde grec. Euclide fait ici appel à l'axiomatisation d'Eudoxe de Cnide (408 – 355 av. J.-C.) : *Deux rapports sont égaux s'ils se comportent de manière analogue face aux rapports de naturels.* (La notion de rapport de naturels est elle-même développée à partir de règles de calculs, embryons du calcul moderne des fractions.) Ceci pose un problème pour le mathématicien contemporain : la notion de *rapport* n'est jamais précisément

définie. Tout au plus, le livre 5 des éléments d'Euclide nous permet de lire que "*Un rapport est une relation entre les tailles de deux grandeurs de même type*".

Bien que cette définition ne soit pas formelle et que les grecs n'aient pas l'ensemble  $\mathbb{Q}$  à leur disposition, les règles de calcul des rapports de naturels, puis des grandeurs, permettent d'étudier un certain nombre de propositions. En utilisant des notations plus concises, nous reformulons ainsi la proposition 2 du livre 12 des éléments d'Euclide : Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux disques de diamètre respectif  $d_1$  et  $d_2$  alors

$$C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2.$$

(Dans le membre de gauche, il faut bien entendu voir le rapport entre les aires respectives de  $C_1$  et  $C_2$ .) Pour démontrer cette proposition, Euclide emprunte à nouveau une méthode due à Eudoxe : la méthode d'exhaustion.

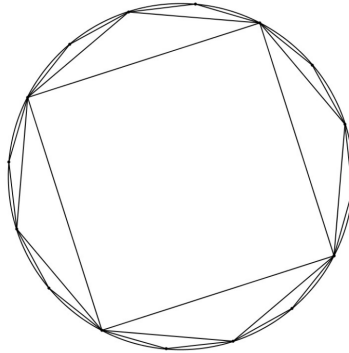
**1.2. La méthode d'exhaustion.** Cette méthode consiste à passer en revue les trois cas possibles :

- 1) Soit il existe des cercles tels que  $C_1 : C_2 > d_1^2 : d_2^2$ .
- 2) Soit il existe des cercles tels que  $C_1 : C_2 < d_1^2 : d_2^2$ .
- 3) Soit  $C_1 : C_2 \approx d_1^2 : d_2^2$  quels que soient les cercles considérés.

et de procéder à une *double réduction par l'absurde* pour démontrer que les cas 1) et 2) ne peuvent jamais se produire, permettant ainsi de valider 3).

L'élément clé de la double réduction par l'absurde d'Euclide réside dans la construction d'une suite de polygones réguliers  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  emboîtés à  $C_2$  tels que

- $P_1$  est un carré.
- Pour tout  $n \geq 1$ , le polygone  $P_{n+1}$  est obtenu à partir de  $P_n$  en doublant ses côtés.



Cette construction étant réalisée, Euclide utilise la propriété cruciale suivante : Qu'elle que soit la surface  $S$  telle que  $S < C_2$  il existe  $n \geq 1$  tel que  $S < P_n < C_2$ . (Bien sûr, si l'on prenait le temps de rigoureusement formaliser cette propriété, on obtiendrait un énoncé exprimant l'idée que la suite des aires des polygones converge vers l'aire du disque.) Il démontre cette propriété en utilisant l'axiome d'Archimède : si une grandeur  $x$

est supérieure à une grandeur  $y$ , elle peut être subdivisée un certain nombre de fois de telle sorte que les subdivisions soient inférieures à  $y$ . En langage contemporain :

$$\forall x \forall y \exists n \in \mathbb{N} : x < ny.$$

Cette même inégalité permettra plus tard aux analystes de démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Archimède va un cran plus loin en montrant que  $C_1 : C_2 \approx r_1^2 : r_2^2$  où  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) est le rayon de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) et en cherchant à approximer la valeur de ce rapport de proportionnalité. En construisant suffisamment de polygones inscrits et circonscrits il montre que ce rapport est compris entre  $3 + 10 : 71$  et  $3 + 1 : 7$ . En langage contemporain, on écrirait

$$3,14 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3,143.$$

Ce processus d'approximation découvert par Archimède a poussé certains auteurs comme Knorr (1982), à attribuer la paternité du concept de limite aux grecs. Nous en sommes pourtant encore bien loin et ce pour au moins trois raisons :

- La méthode d'exhaustion permet de valider un résultat prédit à l'avance par une heuristique de nature géométrique. Elle sert donc à effectuer la *synthèse* d'un résultat. Les grecs conduisaient l'*analyse* par d'autres moyens dont il ne reste que peu de traces. (Job, 2011)
- La rédaction des preuves grecques évite soigneusement toute mention de l'infini. Au mieux l'infini est *potentiel* (autrement dit on peut aller aussi loin que l'on veut dans la subdivision) et non pas *actuel* comme lorsqu'on considère des suites, i.e. des fonctions, définies sur un ensemble de cardinalité infinie :  $\mathbb{N}$ .
- Chaque problème requiert une rédaction inédite de la double preuve par l'absurde. La procédure est donc couteuse et non automatisée. (On peut cependant noter que la réduction par l'absurde sera incorporée, a posteriori, dans la démonstration du théorème d'unicité de la limite.)

## 2. PASSAGE À L'ÉPOQUE MODERNE

Ces différentes raisons expliquent en partie l'abandon progressif de la méthode d'exhaustion au profit du calcul infinitésimal lors du passage à l'époque moderne. À cela il faut ajouter que

- Les philosophes scolastiques dépassent les tabous des grecs en réfléchissant à la notion d'infini actuel et à l'existence des indivisibles, ouvrant le champ à la considération de notions infinitésimales. (Edwards, 1982)
- Le développement de l'algèbre et du raisonnement symbolique (notamment par Viète) permet de prendre de la hauteur par rapport aux considérations purement géométriques.

Ce progrès notationnel permet, en partie, aux mathématiciens du 17<sup>ième</sup> siècle de réaliser que les problèmes de quadrature, de vitesse instantanée, de détermination de tangentes ou

de maximum/minimum sont tous liés entre eux. Ce procédé d'unification atteint un premier aboutissement dans les célèbres travaux de Newton et Leibniz.

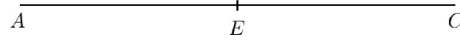
Finalement, d'un point de vue pragmatique, la méthode d'exhaustion et la double preuve par l'absurde sont lourdes et peu maléables. Les mathématiciens modernes sont moins concernés par l'idée de validation rigoureuse que par la production de nouveaux résultats et le développement d'outils performants pour les produire. Ce point de vue est résumé par Huygens (1629–1695) cité dans (Edwards, 1982) :

"Pour obtenir la confiance des experts, il n'est pas très important que nous donnions une démonstration absolue. Je suis prêt à admettre qu'elle doit apparaître sous une forme claire, élégante et ingénieuse, comme dans toutes les œuvres d'Archimède. Mais le plus important est le mode de découverte lui-même car c'est que les hommes de science aiment à connaître. Il semble donc que nous devions avant tout suivre la méthode qui permet de le comprendre et de le présenter de la manière la plus concise et la plus claire. Nous nous épargnons ainsi le travail d'écrire, et les autres celui de lire - ces autres qui n'ont pas le temps de prendre connaissance de l'énorme quantité d'inventions géométriques qui augmentent de jour en jour et qui, dans ce siècle savant, semblent croître au-delà des limites s'ils doivent utiliser la méthode prolix et parfaite des Anciens."

Comme nous le verrons par la suite, les fondations du calcul infinitésimal de l'époque sont incertaines. Cependant l'emphasis mise sur l'heuristique est encouragée, car les résultats obtenus à partir des notions infinitésimales ne conduisent globalement à aucune contradiction majeure (Grabiner, 2005). Les résultats obtenus par ces méthodes sont en accord avec ceux obtenus par les grecs ce qui amène à penser qu'elles sont en réalité des "raccourcis" de la méthode d'exhaustion. Voyons comment ces méthodes peuvent s'appliquer avec un exemple concret.

**2.1. Un exemple de technique infinitésimale.** Pour déterminer les extrema d'une fonction, le mathématicien Pierre de Fermat (1607–1665) utilise une méthode dite "*d'adéquation*". Plus précisément, deux quantités  $x$  et  $y$  sont dites adéquates, ce qui est noté  $x \approx y$ , si  $x$  est *infinitement proche* de  $y$ . (Cette dernière notion n'est, quant à elle, pas formellement définie.) Pour trouver les extrema d'une fonction, l'idée est alors la suivante : Soit  $f$  une fonction dont on cherche les extrema. Si  $x$  est un tel extrema alors la tangente au graphe de  $f$  en  $x$  est plate et ceci vaut pour tous les points infinitement proches de  $x$ . Par conséquent si  $x + e$  est adéquat à  $x$  (i.e. si  $e$  est *infinitement petit*) alors  $f(x + e)$  est adéquat à  $f(x)$ . En écrivant explicitement l'adéquation  $f(x + e) \approx f(x)$ , en simplifiant par la plus haute puissance de  $e$  possible et en faisant finalement disparaître tous les termes en  $e$ , on est amené à résoudre une équation algébrique permettant de trouver la valeur de  $x$ . Cette technique permet de trouver la valeur des extrema dans de nombreux cas pratiques même si le mathématicien contemporain voit bien que ce sont plus généralement les points *stationnaires* que cette méthode permet de détecter.

Un exemple de tel cas pratique est le suivant : Soit à partager le segment  $AC$  en  $E$ , de sorte que  $AE \times EC$  soit maximum.



Posons  $AC = b$ . Soit  $a$  un de ses segments, l'autre sera  $b - a$  et le produit dont on doit trouver le maximum :  $ba - a^2$ . Soit maintenant  $a + e$  le premier segment de  $b$ , le second sera  $b - a - e$ , et le produit des segments :  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ . Il doit être adégué au précédent :

$$ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

En supprimant les termes communs on obtient  $be \approx 2ae + e^2$  et en divisant tous les termes par  $e$  :  $b \approx 2a + e$ . Finalement, le  $e$  étant infiniment petit, il peut *s'évanouir*, ce qui donne :  $b = 2a$ . Pour résoudre ce problème, il faut donc prendre la moitié de  $b$ . "*Il est impossible de donner une méthode plus générale.*" (Oeuvre de Fermat 1896, vol. III, p.122.).

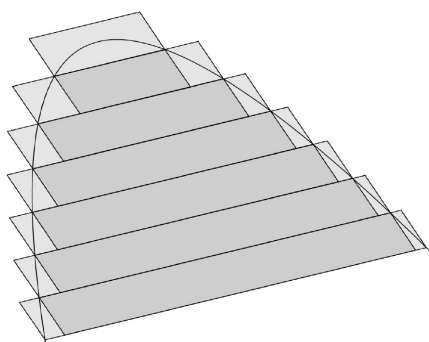
Dans la suite de ce texte, nous n'allons pas expliquer comment cette idée "d'infiniment petit" mène à terme au calcul différentiel et intégral de Newton/Leibniz. Ces considérations sont classiques et trouvables dans de nombreux ouvrages, e.g. (Edwards, 1982). Nous préférons plutôt mettre l'accent sur le concept contemporain de limite, subtilement présent lors de l'époque infinitésimale. Ceci nous invite à parler de mathématiciens, certes moins connus que Newton et Leibniz, mais dont les contributions ont permis, en arrière-plan, l'émergence progressive de la notion de limite.

Passons en revue quelques moments clés de ce cheminement intellectuel.

**2.2. Simon Stevin (1548-1620 ; Pays-Bas).** Stevin se départ de la double preuve par l'absurde des grecs mais conserve l'idée archimédienne selon laquelle l'aire du disque peut être approchée aussi près que l'on veut par une suite de figures polygonales. Se faisant, il met en évidence que la possibilité "*d'approcher aussi près que l'on veut*" se suffit à elle-même. Boyer (1959) considère que Stevin ouvre la possibilité d'extirper le concept de limite hors de la méthode d'exhaustion des grecs.

Néanmoins, on ne peut lui attribuer la paternité du concept de limite. En effet, sans les démonstrations formelles des grecs, Stevin doute lui-même de la validité de ses résultats. Sa méthode est alors plutôt considérée comme une "illustration" que comme un substitut rigoureux à la méthode grecque.

**2.3. Luca Valerio (1552-1618 ; Italie).** Valerio tente de donner une plus grande instrumentalité à la méthode d'exhaustion en déterminant des conditions suffisantes pour qu'elle puisse s'appliquer. De cette façon, il n'est pas nécessaire de réécrire une preuve complète pour chaque problème. Il affirme notamment que, dans une figure dont les longueurs des diamètres peuvent être rendus aussi petits que l'on souhaite, on peut inscrire et circonscrire deux suites de polygones, de sorte que la différence entre les deux suites puisse être rendue arbitrairement petite.



En version contemporaine, on écrirait ceci : Pour toute figure  $F$  satisfaisant une certaine hypothèse de régularité sur ses diamètres, on peut construire une suite de polygones inscrits  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  et une suite de polygones circonscrits  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  tels que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq 1 : \text{Aire}(C_n) - \text{Aire}(I_n) < \varepsilon.$$

De ceci, il conclut que l'aire de la figure peut être approchée aussi près que l'on veut par  $\text{Aire}(C_n)$  et  $\text{Aire}(I_n)$ .

Bien entendu, Valerio ne propose pas réellement de définition du concept de limite mais applique un théorème, similaire au théorème du sandwich, permettant d'affirmer l'existence d'un phénomène limite.

**2.4. Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667 ; Pays-Bas).** De Saint-Vincent continue dans la direction ouverte par Steven et Valerio en tentant de développer des théorèmes permettant de se passer de la double preuve par l'absurde. Il va cependant plus loin en intégrant les réflexions scolastiques sur l'infini et le continu, donnant crédit à la notion d'infini actuel. Il considère, par exemple, que l'aire du cercle est véritablement "épuisée" par la suite des aires des polygones inscrits (Boyer, 1959).

Cette approche actuelle de l'infini l'autorise, sans doute pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, à parler de la somme d'une série infinie et, se faisant, à **nommer** l'objet que nous appelons aujourd'hui limite.

A cet égard, il est intrigant de constater que c'est la notion d'infini actuel, fort développée durant la période infinitésimale, qui permettra au concept de limite d'émerger, alors que celui-ci est davantage "potentiel" par nature. En effet, la définition contemporaine affirme que pour chaque  $\varepsilon > 0$  on peut trouver un  $\delta > 0$  donnant lieu à une certaine approximation et ce processus peut être poursuivi autant qu'on le souhaite en sélectionnant des  $\varepsilon$  de plus en plus petits.

**2.5. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783 ; France).** D'Alembert, après analyse des oeuvres de Newton et Leibniz, en vient à penser que la véritable "métaphysique" du calcul différentiel repose sur la notion de limite. Dans le tome II de son *Encyclopédie* il définit la notion comme suit :

"On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, **sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche** ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. [...] **À proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite** ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra."

Bien qu'exprimée dans un langage discursif, la définition est incroyablement proche de celle des analystes contemporains. Seules les contraintes "jamais surpasser" et "jamais égale" sont en trop puisque, par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

alors que cette fonction prend la valeur 0 une infinité de fois. Dans la foulée, d'Alembert se sert de sa notion de limite pour calculer des tangentes et démontre deux théorèmes :

- L'unicité de la limite.
- La limite d'un produit est égale au produit des limites.

De surcroît, il clame le rôle central de la notion de limite et ébauche sa constitution comme concept fondateur du calcul infinitésimal. Il affirme notamment que les infinitésimaux sont des fictions utiles et que, in fine, tout calcul les utilisant peut être réécrit plus rigoureusement avec des limites. Cependant, tout ceci reste à l'état de déclaration d'intentions car d'Alembert écrit très peu sur le sujet et laisse le soin aux autres d'effectuer le travail. En effet, son approche reste en définitive celle d'un philosophe dont le but est surtout de débroussailler de nouveaux chemins plutôt que de s'occuper de la mise en oeuvre. Par ailleurs, il n'utilise pas le concept de fonction (pourtant déjà employé à l'époque) et ne parle que de limites de "quantités" ce qui rend ses arguments moins clairs sur le plan déductif que ceux qui seront utilisés par Cauchy et Weierstrass.

Ceci explique en partie pourquoi d'Alembert "ne franchit pas le cap" quant à une étude aboutie des limites alors qu'il avait a priori toutes les cartes en main pour le faire.

### 3. VERS LA FORMALISATION CONTEMPORAINE

La transition progressive du calcul infinitésimal vers ce que l'on appelle aujourd'hui *l'analyse* s'opère pour plusieurs raisons.

- 1) Les progrès réalisés en algèbre permettent à une nouvelle notion mathématique d'émerger, la notion de fonction.
- 2) Cette émergence permet de reformuler les problématiques géométrique et physique, d'où le calcul infinitésimal est issu, de manière interne aux mathématiques, ce qui permet d'envisager le calcul infinitésimal comme discipline autonome (l'analyse) sur laquelle seraient fondées la géométrie et la physique, renversant ainsi l'ordre jusqu'alors établi (Job, 2011).

- 3) Il faut donc pouvoir justifier le calcul infinitésimal avec un niveau de rigueur égal à celui des grecs, mais sans avoir recours à la méthode fastidieuse de la double preuve par l'absurde.

C'est dans ce contexte historique que le mathématicien Lagrange formule un appel à formaliser l'analyse.

**3.1. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 ; France).** D'un côté Lagrange acte l'efficacité du calcul infinitésimal mais considère qu'il repose sur des fondations branlantes. D'un autre, la théorie des limites telle qu'elle commence déjà à émerger avec d'Alembert lui semble trop complexe que pour pouvoir être enseignée à des débutants. Ainsi, suite à l'obtention d'un poste d'enseignant à l'école polytechnique, il écrit un traité intitulé "*Théorie des fonctions analytiques*" dans lequel il fait reposer l'étude des phénomènes limites sur des considérations purement algébriques. Autrement dit, il se restreint à étudier des polynômes et des séries de puissances naturelles.

Lagrange est particulièrement explicite concernant le but recherché :

"La théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel, **dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites**, et je démontrerai par cette théorie le théorème de Taylor, qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites." (Lagrange, 1797)

Malheureusement sa démonstration "purement algébrique" du théorème de Taylor échoue pour au moins deux raisons :

- Il admet le TVI sans le démontrer.
- A un certain moment, il considère qu'une fonction  $i \mapsto V(i)$  **s'évanouit** avec  $i$  ce qui signifie aujourd'hui que  $\lim_{i \rightarrow 0} V(i) = 0$ . Il n'arrive donc pas totalement à faire disparaître la notion de limite.

Cette incapacité à produire des preuves formelles de théorèmes centraux de l'analyse (TVI, Taylor, etc.) permet de mieux comprendre le contexte mathématique dans lequel émerge l'oeuvre de Cauchy.

**3.2. Augustin Louis Cauchy (1789-1857 ; France).** Cauchy est au fait des travaux de Lagrange car son père le connaissait personnellement et celui-ci a soutenu Cauchy lors de ses études. Dugac (2003) relate que Cauchy a emporté le "*Traité des fonctions analytiques*" pour son premier poste à Cherbourg en 1810. Cependant, Cauchy note les failles du paradigme lagrangien. Il étudie notamment la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et démontre qu'elle n'est pas égale à sa série de Taylor en 0. Elle échappe donc aux considérations algébriques de Lagrange.



Par la suite, Cauchy devient aussi professeur à l'école Polytechnique et souhaite utiliser le concept de limite qu'il définit comme suit :

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus." (Cauchy, 1821)

On peut remarquer que cette définition continue de faire appel à des notions géométriques et cinématiques. Des expressions telles que "s'approchent indéfiniment" laissent penser que Cauchy reste dans une perspective infinitésimale. Ceci est confirmé par la définition que Cauchy donne de la continuité :

"Soit  $f(x)$  une fonction de la variable  $x$ . Si, en partant d'une valeur de  $x$ , on attribue à la variable  $x$  un accroissement **infiniment petit**  $\alpha$ , la fonction recevra elle-même pour accroissement la différence  $f(x + \alpha) - f(x)$ , qui dépendra en même temps de la nouvelle variable  $\alpha$  et de la valeur de  $x$ . Cela posé, la fonction  $f(x)$  sera, entre les deux limites assignées à la variable  $x$ , fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de  $x$  intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence  $f(x + \alpha) - f(x)$  décroît indéfiniment avec celle de  $\alpha$ ."

Cependant, l'utilisation d'infinitésimaux par Cauchy pourrait n'être qu'un leurre. Gilain (1989) souligne que la présence du langage infinitésimal est une concession faite suite à des pressions exercées à différents niveaux, notamment par les Conseils de l'Ecole. Pour y voir plus clair, il vaut donc mieux regarder la façon dont Cauchy utilise la notion de limite dans ses écrits.

Cauchy définit la dérivée comme étant la limite

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Dans sa démonstration du théorème de Lagrange (Taylor à l'ordre 1), il traduit cette définition de la façon suivante :

"Désignons par  $\delta$  et  $\varepsilon$  deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques  $i$  inférieures à  $\delta$ , et pour une valeur quelconque de  $x$  comprise entre  $x_0$  et  $X$ , le rapport  $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$  reste toujours supérieur à  $f'(x) - \varepsilon$  et inférieur à  $f'(x) + \varepsilon$ ."

Par "valeurs numériques", Cauchy entend la valeur absolue de  $i$ . C'est d'ailleurs lui qui introduit la notation  $|i|$ . Avec les notations actuelles, Cauchy affirme donc que pour  $\varepsilon > 0$

il existe  $\delta > 0$  de sorte que si  $|i| < \delta$  alors pour tout  $x \in [x_0, X]$

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, dans **ses preuves**, les connotations cinématiques et infinitésimales disparaissent complètement au profit d'une définition très contemporaine de la notion de limite. Les encadrements et les raisonnements à coup de  $\varepsilon - \delta$  sont donc conçus par Cauchy comme étant des outils de démonstration. L'épistémologue Imre Lakatos (2015) parle de *proof-generated concept*.

**3.3. Karl Weierstrass (1815-1897 ; Allemagne).** Quelques années plus tard, Weierstrass donne une définition du concept de limite, suffisamment explicite pour figurer dans un manuel d'analyse contemporain (Edwards, 1982) :

" $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  lorsqu'étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre  $\delta > 0$  tel que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  si  $0 < |x - a| < \delta$ ."

On peut considérer que cette définition de Weierstrass est à présent totalement *statique*. La formulation ne repose en effet que sur les nombres réels, toutes les considérations liées au mouvement ou à la géométrie étant évacuées.

Il est à noter que la définition de Weierstrass diffère de celle utilisée par Cauchy dans ses preuves en ce qu'il impose la condition  $0 < |x - a| < \delta$  alors que Cauchy demande simplement  $|x - a| < \delta$ . A l'heure actuelle, on dit que Cauchy utilise une limite *pointée* alors que Weierstrass utilise une limite *épointée*.

#### 4. LIMITE POINTÉE VS LIMITE ÉPOINTÉE

Examinons plus en détails les différences qui résultent de ces deux définitions. Soit  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Les deux façons de donner une définition de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  sont les suivantes :

1) La façon pointée (avec  $a$  adhérent à  $D$ ) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

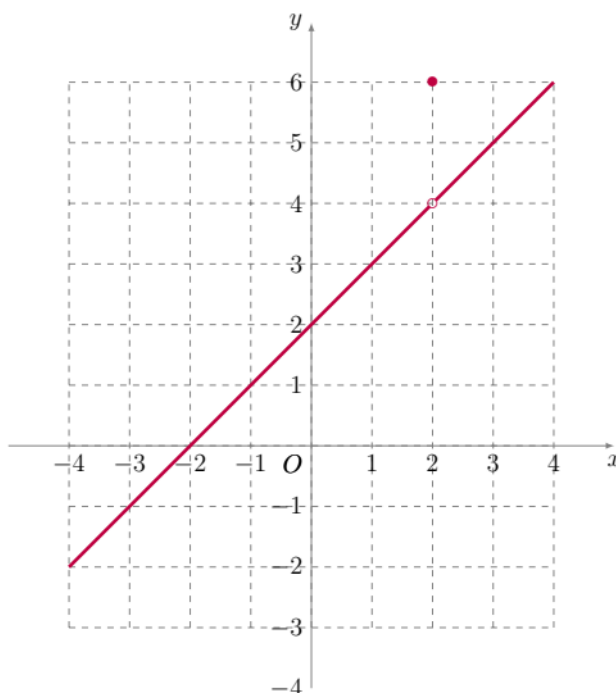
2) La façon épointée (avec  $a$  adhérent à  $D \setminus \{a\}$ ) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

La seconde définition est bien entendu équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{a\}, \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

De façon informelle, on peut dire que la façon épointée exige de tendre vers  $a$  "uniquement par l'extérieur" alors que la façon pointée autorise à "passer par  $a$ ". Cette nuance a des répercussions sur les exercices les plus basiques qu'un professeur peut donner à ses élèves. En effet, que vaut  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  si  $f$  est la fonction représentée ci-dessous ?



Réponse : La limite épointée vaut 4 alors que la limite pointée n'existe pas ! De fait, si elle existait, elle devrait nécessairement valoir 6 en prenant  $x = 2$  dans la définition, or c'est clairement impossible.

Remarquons néanmoins que si  $a$  n'appartient pas au domaine de définition, il n'y a aucune différence entre la limite pointée et la limite épointée puisque, dans ce cas,  $D = D \setminus \{a\}$ . Ceci suffit déjà à comprendre que la nuance entre les deux notions n'interviendra pas dans la plupart des calculs de limite travaillés en secondaire. Si on pense par exemple à un quotient différentiel

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

les limites pointées et épointées pour  $h$  tendant vers 0 sont égales puisque 0 est, de fait, exclu du domaine de définition.

En revanche, le choix d'une définition plutôt qu'une autre a un impact sur "l'architecture déductive" globale. Par exemple les hypothèses de certains théorèmes doivent être modifiées en fonction de la définition choisie. Considérons par exemple le théorème suivant :

**Théorème 4.1** (Composition des limites). *Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D' \rightarrow D$  deux fonctions réelles. Soit  $a$  un réel adhérent à  $D'$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ . Supposons de plus que*

$$\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L.$$

Ce théorème est vrai en version pointée et faux en version épointée. En effet, considérons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et  $g = 0$ . Alors il est clair, au sens épointé, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0.$$

Or  $f \circ g = 1$  donc sa limite épointée en 0 vaut 1. (Il est cependant à noter que le théorème de composition des limites est valide en version épointée si l'on exige que la fonction  $f$  soit continue.)

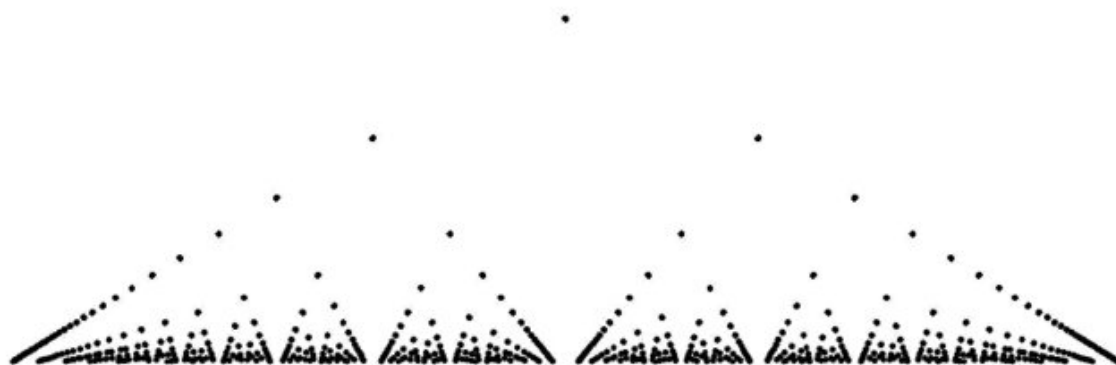
Ce n'est pas tout puisque le rapport à la notion de continuité elle-même est modifié selon la définition choisie. Pour le comprendre, rappelons qu'une fonction  $f$  est continue en un point  $a$  de son domaine si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Cette notion n'a de réelle plus-value qu'avec une définition épointée de la limite. En effet si  $a \in D$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe au sens pointé alors nécessairement  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  et on a la continuité. (Prendre  $x = a$  dans la définition.) Autrement dit, en version pointée, la notion de continuité se confond avec la notion "d'existence de limite" alors que dans la version épointée, la notion de continuité est un véritable ajout. (C'est précisément ce phénomène qui est à l'oeuvre dans l'exemple précédemment mentionné.) On peut même pousser le vice jusqu'à construire une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui possède une limite épointée en chaque point et qui est discontinue sur un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}$ . Il s'agit de la fonction de Thomae définie par

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q, \text{ fraction irréductible non nulle.} \end{cases}$$

En effet, cette fonction est discontinue sur  $\mathbb{Q}$  mais a une limite épointée nulle en tout point de  $\mathbb{R}$ . Ci-dessous une représentation graphique de cette fonction, appelée parfois "*fonction popcorn*", sur l'intervalle  $]0, 1[$ .



D'où viennent ces différences, parfois si exacerbées ? Le problème est, qu'en version pointée, le comportement chaotique d'un seul point fait perdre toute l'information (puisque la limite n'existe pas) alors qu'en version époincée, on préserve l'information sur le voisinage (époincé). On comprend donc mieux pourquoi la limite époincée fait échouer certains théorèmes classiques comme celui de composition des limites. Comme elle dit "plus de choses", elle est moins stable. En résumé on n'a rien sans rien.

Que le lecteur se rassure, le choix d'une définition plutôt qu'une autre n'a au final pas d'impact sur les développements de l'analyse. D'ailleurs, un analyste définira sans doute directement la notion de limite restreinte à un sous-ensemble  $A \subset D$  et énoncera ces théorèmes dans ce cadre général. Il récupérera alors la définition pointée dans le cas où  $A = D$  et la définition époincée dans le cas où  $A = D \setminus \{a\}$ .

Le choix d'une définition pointée ou époincée semble lié à l'environnement culturel. On remarque en effet que les pays anglo-saxons utilisent presque exclusivement la définition de Weierstrass alors que la Belgique et la France ont tendance à privilégier celle de Cauchy. Nous pensons que cette altérité n'est pas dérangeante mais peut bien au contraire être source d'apprentissage pour les élèves du secondaire supérieur. En effet, en leur proposant différentes définitions et en leur montrant les impacts que ces choix ont sur une architecture déductive globale, nous pouvons les introduire pleinement à l'esprit des mathématiques contemporaines. De plus, porter sa réflexion sur les différences culturelles et les conséquences que ces différences peuvent impliquer dans la construction des curricula fait partie intégrante de la didactique. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Schneider (2008) pour une introduction à cette discipline.

## RÉFÉRENCES

- [1] Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover.
- [2] Cauchy A.-L. (1821). *Analyse algébrique*, Cours de l'école polytechnique, Paris.
- [3] D'Alembert et al. (1751-1772). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Tome II, Paris.

- [4] Dugac P. (2003). *Histoire de l'Analyse*, Vuibert.
- [5] Edwards C. H. (1982). *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag.
- [6] Gilain, G. (1989). *Cauchy et le cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, Bulletin de la Sabix, 5, 1-46.  
DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.569>
- [7] Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover.
- [8] Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse de Doctorat. Université de Liège.
- [9] Knorr W. R. (1982). *Infinity and continuity in ancient and medieval thought*, Ithaca.
- [10] Lagrange J.-L. (1797) *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, Imprimerie de la République.
- [11] Lakatos, I. (2015). *Proofs and Refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.
- [12] Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques*, Presses universitaires de Liège.

Adresse e-mail : [christophe.dubussy@unamur.be](mailto:christophe.dubussy@unamur.be)

Laboratoires : <http://www.ladimath.ulg.ac.be/> et <https://www.ichec.be/fr/les-laboratoires>