Le regard didactique d'un professeur de mathématiques sur l'apprentissage des élèves en « autonomie »

Kevin BALHAN

ULiège
Didactique des mathématiques
Centre interfacultaire de formation des enseignants (Cifen)
UR DIDACTIfen

Athénée Royal d'Esneux

kevin.balhan@uliege.be

Rendre les élèves capables de prendre en charge leur apprentissage des mathématiques de manière « autonome », au sens commun du terme, n'est pas l'un des objectifs que je poursuis dans ma pratique professionnelle d'enseignant. Toutefois, les cadres théoriques de la didactique me semblent pouvoir mettre en lumière certains ingrédients essentiels, sans lesquels former nos élèves à devenir autonomes ne peut réussir. C'est ce que je voudrais brièvement montrer dans ces quelques pages.

Les cadres théoriques auxquels je me réfère sont la *Théorie des situations didactiques* de Brousseau (1998), d'une part, et la *Théorie anthropologique du didactique* de Chevallard (1992), d'autre part. La première s'est constituée en cherchant à déterminer les conditions minimales de fonctionnement des pratiques socio-constructivistes en situation scolaire. Elle permet de penser un certain travail collectif des élèves en « autonomie », dans le sens où elle épingle les conditions nécessaires pour que les élèves construisent par eux-mêmes le savoir que le professeur souhaite leur enseigner. Ce sera l'objet d'une première section. Quant à la seconde théorie didactique, elle permet une modélisation de l'activité mathématique, qui met en évidence certains éléments à travailler dans les classes pour conduire les élèves vers une autonomie plus individuelle. Ce sera l'objet d'une seconde section.

1. La nécessité d'un milieu et d'un caractère fondamental

Dans sa *Théorie des situations didactiques*, Brousseau (1998) a montré qu'il était possible pour l'enseignant de confier aux élèves la responsabilité de la construction du savoir, et d'abdiquer toute intention d'enseigner, mais pour un temps et en apparence seulement !

Sa thèse (Brousseau, 1986) offrait déjà un exemple d'une telle situation : elle consiste à demander à des élèves de l'école élémentaire (âgés d'environ 10 ans) de construire un agrandissement d'un puzzle semblable à un modèle reçu (figure 1), tout en respectant la contrainte que le côté mesurant 4 cm sur le puzzle reçu mesure 7 cm dans leur reproduction. Cette demande de l'enseignant est accompagnée de consignes : « Répartissez-vous en équipes de quatre ou cinq élèves », « Chacun d'entre vous doit construire une pièce au moins » ; et les enfants disposent de matériel : feuilles de papier quadrillé, ciseaux, règles graduées.

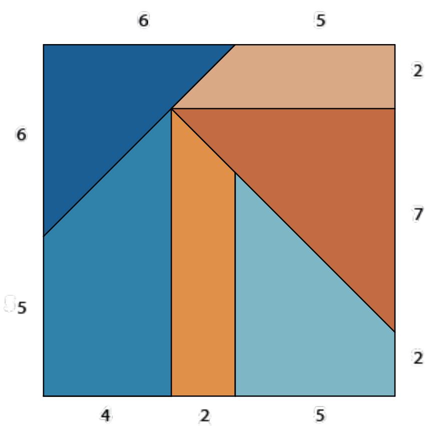

Figure 1 : Modèle du puzzle initial.

Il s'agit d'une première situation d'apprentissage des applications linéaires, singulière à plus d'un titre. D'une part, sans prendre conscience de cette condition de linéarité, l'agrandissement demandé du puzzle ne peut être réalisé. Or, cette condition de linéarité est précisément le savoir visé par Brousseau à travers la confrontation des élèves à cette situation. C'est là une première condition nécessaire au fonctionnement du socio-constructivisme en situations scolaires, que Brousseau appelle « le caractère fondamental » de la situation : le savoir visé doit être la seule réponse à la question posée ou, du moins, si elle n'est pas la seule réponse possible, elle doit être la réponse optimale (la plus performante). Ce caractère fondamental de la situation garantit donc un minimum d'apprentissage aux élèves, pourvu qu'ils viennent à bout du problème en question.

D'autre part, la situation mise en place par Brousseau est en elle-même un substitut à l'enseignant qui s'est retiré de l'action, laissant les élèves « seuls » face au problème posé. En effet, les élèves ont les moyens de valider ou invalider eux-mêmes les mathématiques nouvelles qu'ils auront construites, sans avoir à guetter l'approbation ou la désapprobation de leur professeur. Ici, les différentes pièces réalisées par les élèves s'emboîteront pour constituer l'agrandissement du puzzle voulu, ou non. L'intuition première des enfants est d'imaginer qu'il leur faut ajouter 3 cm à toutes les longueurs en jeu. Cette stratégie dictée par un modèle mathématique additif est invalidée ici par le fait que les pièces ne s'emboîtent pas au moment de la reconstitution du puzzle. *A contrario*, le modèle multiplicatif qui consiste à multiplier toutes les longueurs par 7/4, sous-tendu par une condition de linéarité, est validé par l'emboîtement des différentes pièces et l'obtention d'une reproduction semblable au puzzle initial.

Ce substitut au professeur, que Brousseau nomme le « milieu », ne renvoie pas seulement aux pièces du puzzle. Il est tout ce sur quoi le professeur peut s'appuyer pour renvoyer à l'élève la responsabilité de la construction d'une part de savoir. Ce milieu est composé de différentes « facettes ».

Celles-ci peuvent être « matérielles », en un sens qui ne se réduit pas au matériel mis à la disposition des élèves et évoqué *supra*. Les pièces du puzzle constituent en effet des facettes matérielles du milieu, mais les choix faits par l'enseignant en sont aussi. Brousseau aurait par exemple pu imposer un autre rapport d'agrandissement. L'impact eût été différent : passer de 4 à 8 est plus simple, passer de 4 à 7 plus complexe et nécessite de se ramener à l'unité. La formulation même de la question est une facette dont l'impact sur les élèves n'est pas négligeable. Schneider (1988) observe, par exemple, que si l'on pose aux élèves la question de la vitesse instantanée d'un mobile à un instant *t* donné, bon nombre d'entre eux ne s'engagent pas dans une réponse, faute d'y trouver un sens : « Ça [une vitesse instantanée] n'existe pas, il n'y a pas moyen de la mesurer, car le temps de regarder sa montre et du temps s'est déjà écoulé », ou encore : « En un temps nul, aucune distance n'est parcourue et on ne peut pas avoir une vitesse avec une distance nulle. » Mais cette chercheuse observe également que, lorsque la formulation est inversée en posant la question sur le temps (qui devient l'inconnue) et non plus sur la vitesse, les élèves s'engagent alors dans la question en mobilisant leur connaissance antérieure de la vitesse moyenne. Ce n'est qu'à la fin de leurs constructions mathématiques qu'ils se poseront la question de l'annulation de l'intervalle de temps considéré, pour répondre à la question de l'existence d'une vitesse instantanée. Ce qui est tout l'enjeu du problème.

Mais les facettes du milieu peuvent également être « sociales » : les échanges entre élèves bien entendu, mais également les interventions du professeur. En effet, bien que ce dernier se retire du jeu en apparence dans un premier temps, il reste néanmoins à l'écoute, observe, et intervient lorsque les élèves semblent être dans une impasse, tout en prenant garde à chaque instant de ne pas « vendre la mèche » aux élèves. Car aussitôt qu'il intervient, il y a toujours un risque que les élèves formulent effectivement la réponse attendue par leur professeur, mais parce qu'ils auront réussi à décoder dans son attitude ce qu'il attendait d'eux, et non pas par des moyens de rationalité intrinsèques à la situation. Une intervention opportune consiste ici à injecter un second puzzle (figure 2), plus particulier, dont la spécificité est de mettre en évidence la condition de linéarité dont les élèves doivent prendre conscience pour réaliser l'agrandissement du puzzle.

L'introduction de ce nouveau puzzle par l'enseignant permet aux élèves de prendre conscience que le modèle additif ne fonctionnera pas. Ajoutez 3 cm à chacun des côtés, vous obtiendrez en haut 10 cm et en bas 7 cm : le côté « supérieur » de la pièce verte dans l'agrandissement mesurera 10 cm tandis que le côté « inférieur » de la pièce bleue

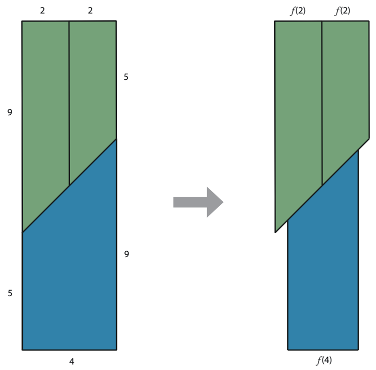

Figure 2 : Second puzzle injecté dans la situation par le professeur.

n'en mesurera que 7. Or, ils doivent forcément avoir la même longueur pour que leur reproduction soit fidèle à l'original. Mais ce puzzle permet également de suggérer à lui seul la condition linéaire : *a* et *b* désignant ici les côtés supérieurs des pièces vertes, et *c* le côté inférieur de la pièce bleue. Cette facette sociale du milieu va permettre une évolution du moyen de validation en « acte » (celui consistant à rassembler les pièces pour le reconstituer) vers une validation plus intellectuelle.

Enfin, le milieu se décline également selon une troisième facette, « cognitive » : celle des connaissances antérieures des élèves. Dans l'exemple du puzzle, il s'agit principalement du « modèle additif » dont Brousseau cherche à éprouver les limites en confrontant les élèves à cette situation. Car, tant que cette connaissance antérieure n'est pas « rejetée » par les élèves, ils ne remettent pas en cause leur stratégie première et continuent de prétendre que, si les pièces ne s'emboîtent pas, ce doit être parce que leurs camarades n'ont pas été suffisamment soigneux dans leurs découpages en construisant les pièces qu'ils avaient à charge de reproduire.

On voit ici le rôle à la fois allié et antagoniste que *doit* avoir le milieu de ces situations. D'une part, dans la situation du puzzle, la question a tout de suite un sens pour les élèves, ce qui a pour conséquence que les élèves s'engagent d'emblée dans la question. Mais, d'autre part, ce milieu est également un concurrent qui va résister aux intuitions premières des élèves.

Moyennant que ces situations, dites « adidactiques » par Brousseau, possèdent un milieu pertinent et un caractère fondamental, elles permettent aux élèves de s'investir dans un travail de construction du savoir en « autonomie », dans le sens où le professeur ne prend pas en charge son enseignement et laisse à ses élèves la responsabilité de la construction de ce savoir. Cette autonomie est dans un premier temps « collective » puisque les élèves ne sont pas seuls face à la tâche qui leur est proposée, le milieu étant constitué d'une facette sociale importante.

2. Investiguer le champ d'opérationnalité des mathématiques construites

Ces situations adidactiques particulières doivent être suivies de ce que Brousseau appelle une phase d'« institutionnalisation », car le seul détenteur du savoir en jeu est le professeur. Il doit donc mettre en évidence, dans les investigations que les élèves auront menées, ce qui possède une valeur institutionnelle et sera essentiellement remobilisé par la suite. L'élève ne peut l'identifier sans l'enseignant, et si l'on veut armer l'élève pour favoriser une future autonomie individuelle dans les divers contextes qu'il rencontrera ultérieurement, il me semble qu'on ne peut ni ne doit couper à cette phase d'institutionnalisation.

Toutefois, celle-ci ne suffit pas. Il me semble également important de confronter les élèves au champ d'application des techniques mathématiques qu'ils auront construites lors de ces situations adidactiques, ou du moins de le situer en présentant les avantages et inconvénients. Dans sa *Théorie anthropologique du didactique*, Chevallard (1998) postule d'ailleurs que « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot praxéologie ». Le terme « praxéologie » renvoie, si l'on se réfère à son étymologie, à la fois à la pratique (*praxis*) et au discours sur la pratique (*logos*). L'un et l'autre sont indispensables pour décrire l'activité mathématique. Dans le bloc « pratique », on étudie l'usage que l'homme fait de certaines techniques pour répondre à des questions auxquelles il se trouve confronté. Mais l'activité mathématique ne peut s'y réduire et nécessite un « discours » qui légitime la technique au regard des tâches données et qui la rende intelligible, un « discours » qui *explore son champ d'opérationnalité et en éprouve les limites*.

C'est là un point important qui n'est que peu travaillé au niveau de l'enseignement secondaire en mathématique. Les travaux de Rouy (2007) ont en effet montré que cet enseignement se focalise presque exclusivement sur des procédures de calcul, sans que leur champ d'application soit particulièrement discuté. Le cas de l'enseignement de l'algèbre est éclairant à ce titre. Au cycle inférieur, l'algèbre est enseignée pour elle-même, comme discipline à part entière. Et les tâches que l'on demande aux élèves d'accomplir sont du type « développer » tel polynôme, « factoriser » tel autre…

> À l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser). (Chevallard, 1988, cité par Schneider, 2012, p. 5.)

Tandis qu'au cycle supérieur, l'algèbre n'est plus enseignée pour elle-même, mais devient un outil au service d'autres disciplines comme l'analyse, la géométrie ou la trigonométrie. L'élève n'est alors plus guidé par une consigne imposée par le professeur ; il doit désormais prendre lui-même une décision sur ce qu'il convient de faire dans la situation à laquelle il se voit confronté. Il lui faudra, par exemple (Schneider, 2012), choisir entre les expressions équivalentes d'une même fonction :

$$2x^2-3x+1$$

$$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

celle dont il devra faire usage, ou transformer l'une en l'autre, selon qu'il faudra les dériver, en déterminer les racines ou effectuer certains calculs de limites.

Il y a là une rupture dans le comportement qu'attend de ses élèves l'enseignant du cycle supérieur, par rapport aux demandes des collègues du cycle inférieur. L'adaptation des élèves à cette rupture est bien souvent considérée comme allant de soi par l'enseignant, consciemment ou non. Peut-être partons-nous du principe que nos élèves savent factoriser, qu'ils savent développer, etc., mais être capable de le faire est une chose, être capable d'identifier les situations dans lesquelles ces actions sont pertinentes ou nécessaires en est une autre.

3. Conclusion

À travers ces quelques outils théoriques choisis, issus de la didactique des mathématiques, j'ai tâché de montrer que l'autonomie ne devait pas être pensée comme quelque chose d'inné, dont certains élèves disposeraient (les « meilleurs », et pas les autres), mais qu'il fallait la penser comme une acquisition possible, qui suppose une formation des élèves à celle-ci. En effet, le concept de praxéologie de Chevallard met en lumière ce que le discours du professeur doit prendre en charge pour outiller l'élève des connaissances mathématiques sans lesquelles l'autonomie ne pourrait être envisagée. Quant aux concepts de milieu et de situation fondamentale, ils montrent ce que les choix didactiques de l'enseignant doivent nécessairement prendre en compte pour permettre à l'élève de s'engager dans un travail de construction du savoir visé, sans plus pouvoir compter sur l'enseignant pour prendre en charge une partie de ce savoir. En outre, ce caractère fondamental des situations adidactiques garantit un minimum d'apprentissage du savoir visé par les élèves, puisque ces derniers ne peuvent contourner sa construction pour répondre à la question posée. Sans vouloir amoindrir l'importance des autres conditions discutées, c'est peut-être là l'élément le plus important à garder à l'esprit, sans quoi on risque de privilégier par-dessus tout un travail en autonomie qui ne déboucherait sur aucune acquisition de connaissances par l'élève.

Bibliographie

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1988), *Notes sur la question de l'échec scolaire*. Publication n° 13 de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12(1)*, 73–112.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives.* Thèse de doctorat. Université catholique de Louvain, Belgique.

Schneider, M. (2012). *Quelle fonctionnalité pour l'algèbre au niveau de l'enseignement secondaire ? La piste de la modélisation fonctionnelle.* Exposé préparatoire à la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire. Paris.