SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE DU SIXIÈME ORDRE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX,

à Liége.

M. F. Deruyts a étudié la transformation suivante ([1]) :

Soient φ un faisceau de quadriques Q, et P un point non commun à toutes les quadriques de φ. A un point M correspond le point M′ où la droite MP rencontre une seconde fois la quadrique du faisceau φ passant par M.

1. Dans cette Note, nous allons considérer une transformation analogue. Au lieu des droites passant par un point, nous considérons les droites d'une congruence linéaire G de directrices a_1 et a_2. Nous supposons que les droites a_1, a_2 n'ont aucun point commun à toutes les quadriques de φ.

Cela posé, recherchons l'ordre de la transformée d'un plan π.

Soit y une droite quelconque. Par un point Y_1 de cette droite passe une droite g appartenant à la congruence G. Par le point (π, g) passe une quadrique de φ. Cette quadrique marque sur la droite y deux points Y_2. Par un point Y_2 de y passe une quadrique Q

([1]) FRANÇOIS DERUYTZ, *Sur quelques transformations géométriques* (*Mémoires de Liége,* 2e série, t. XIV, 1887).

G.

de φ. Les droites qui s'appuient sur les droites a_1, a_2, y et sur la courbe (Q, π) sont au nombre de quatre et marquent sur y quatre points Y_1. Les points Y_1 et Y_2 sont donc liés par une correspondance $(4, 2)$. Il y a six coïncidences; donc :

La transformée d'un plan est une surface du sixième ordre S_6.

2. A un point commun à toutes les quadriques de φ correspondent les points de la droite de la congruence G_1 passant par le point considéré, la surface S_6 passe donc par tous les points communs à toutes les quadriques du faisceau φ. Dans le cas le plus général, celui que nous considérerons ici, ces points appartiennent à une courbe gauche du quatrième ordre c_4 de première espèce.

La surface fondamentale des points communs à toutes les surfaces de φ est formée par les droites s'appuyant sur la courbe c_4 et appartenant à la congruence G. On sait qu'une telle surface est du huitième ordre.

A un point de la droite a_1 correspondent les points communs à la quadrique de φ passant par le point considéré et un plan passant par ce point et a_2.

Les droites a_1 et a_2 sont donc doubles sur la surface S_6.

La surface fondamentale de la droite a_1 est le lieu des coniques qui s'appuient en quatre points sur une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce, en deux points sur une droite et en un point sur une autre droite. Nous avons démontré ailleurs que cette surface est du quatrième ordre [1].

---

[1] *Sur une transformation des droites de l'espace en surfaces*

En résumé :

La surface S_6 *possède deux droites doubles* a_1, a_2 *et une biquadratique gauche* c_4 *simple.*

La surface fondamentale de c_4 *est une surface du huitième ordre* S_8.

La surface fondamentale de a_1 (*ou de* a_2) *est une surface du quatrième ordre* S_4.

3. La droite de la congruence G qui est située dans le plan π appartient évidemment à la surface S_6.

Il en est de même des droites qui s'appuient en deux points sur la courbe c_4 et qui font partie de la congruence G.

On sait que les bisécantes d'une quartique gauche de première espèce forment une congruence d'ordre deux et de classe quatre. D'après le théorème de Halphen, le nombre de droites qui font encore partie de la surface S_6 est $1 \times 2 + 1 \times 4 = 6$.

Donc, *la surface* S_6 *possède sept droites simples.*

4. A une droite d correspond une courbe c. Cette courbe est entièrement tracée sur un hyperboloïde réglé H_2 dont trois génératrices d'un même mode sont d, a_1 et a_2.

Cette courbe est l'intersection de H_2 et d'une surface S_6 correspondant à un plan passant par d. Ces surfaces ont en commun deux droites doubles a_1, a_2 et une droite simple appartenant à G et située dans le plan choisi. La courbe est donc de l'ordre

$$2 \times 6 - 2 \times 2 - 1 = 7.$$

Désignons-la par c_7.

---

du quatrième ordre (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique,* janvier 1907).

Il est facile de voir que c_7 passe par les huit points d'intersection de H_2 et de c_4 et qu'elle rencontre quatre fois chacune des droites a_1, a_2.

Donc : *la transformée d'une droite est une courbe c_7 d'ordre sept rencontrant quatre fois chacune des droites a_1, a_2 et en huit points la courbe c_4.*

On a ainsi sur une surface S_6 une double infinité de courbes c_7 et sur une quadrique H_2 une simple infinité de courbes c_7.

5. Recherchons le lieu des points doubles de la transformation, c'est-à-dire le lieu des points de contact des quadriques du faisceau φ et des droites de la congruence G.

Nous avons vu que la surface S_6 possédait une droite située dans le plan π. L'intersection de S_6 avec π se compose donc d'une droite et d'une quintique s'appuyant sur a_1, a_2, et c_4, en quatre points. De là :

Le lieu des points doubles de la transformation est une surface du cinquième ordre S_5 *passant par* a_1, a_2 *et la courbe* c_4.

On peut en conclure :

La courbe c_7 s'appuie en cinq points sur la droite d.

Liège, Décembre 1907

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. VIII ; février 1908.)

41389 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.