Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches (*); par Lucien Godeaux, étudiant à l'Université de Liége.

Nous nous proposons d'étudier la congruence des cubiques gauches ayant quatre bisécantes communes a_1, a_2, a_3, a_4 et un point commun A. Cette congruence, que nous désignerons par Γ, est un cas particulier d'une autre plus générale signalée par M. Veneroni (**) et étudiée d'une manière plus complète par M. Stuyvaert (***); mais la méthode employée par ce dernier géomètre est purement algébrique, alors que la nôtre est surtout synthétique. Cette différence donnera peut-être quelque intérêt à notre travail.

1. — Par le point A menons la droite b_1 qui s'appuie sur a_1 et a_2 respectivement en A_1 et A_2, et la droite b_2

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 531-540, 1908.

(**) *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe.* (RENDICONTI DI PALERMO, 1902, t. XVI, pp. 209-229.)

(***) *Une congruence linéaire de cubiques gauches.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], 1907, pp. 470-514.)

qui s'appuie sur a_3 et a_4 en A_3 et A_4. Ces droites déterminent un plan α.

Soit d une droite quelconque du plan α. Les deux quadriques $(a_1\ a_2\ d)$, $(a_3\ a_4\ d)$ (*) ont en commun, outre la droite d, une cubique gauche k passant par A et ayant pour bisécantes les cinq droites a_1, a_2, a_3, a_4, d.

Ainsi, *à toute droite* d *du plan* α *correspond une cubique* k *de* Γ *dont* d *est une bisécante.*

Soit k une cubique de la congruence Γ; cette courbe rencontre le plan α en trois points dont l'un est A. Désignons par A′ et A″ les deux autres. La droite d du plan α, à laquelle correspond la cubique k, s'il existe une telle droite, doit passer par deux des trois points A, A′, A″. Supposons en premier lieu qu'elle passe par A et A′. Alors les quadriques $(a_1\ a_2\ d)$, $(a_3\ a_4\ d)$ sont tangentes au plan α en A et leur intersection k est aussi tangente à α en A, donc le point A″ serait confondu avec A, ce qui nous mène à une contradiction qui provient de ce que nous avons supposé que la droite d passait par A. On doit donc prendre pour d la droite A′A″, si la cubique n'est pas tangente au plan α; dans le dernier cas, on prendra pour d la droite AA′.

On obtient une simple infinité de cubiques de la congruence Γ en prenant pour droite d successivement tous les rayons d'un faisceau (O, α) (**).

Ces courbes engendrent une surface cubique. Ce mode

(*) Nous désignons par (mnp) la surface engendrée par une droite y qui se meut en s'appuyant sur les trois directrices m, n, p.

(**) Nous désignons ainsi un faisceau de rayons situé dans le plan α et ayant pour centre le point O.

de génération a été étudié par Fr. Deruyts (*), et c'est la lecture de son travail qui nous a inspiré les recherches actuelles.

2. — Désignons par l_1, l_2 les droites qui s'appuient sur les quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4.

Les surfaces du troisième ordre engendrées par les cubiques de Γ qui correspondent aux rayons des faisceaux (O, α), (O_1, α), ... passent toutes par les droites a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 et par le point A. Les quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4 et le point A comptant pour dix-sept conditions linéaires, les surfaces forment, comme on le sait, un réseau R. A chaque point O du plan α correspond une surface de R. Deux surfaces quelconques de R ont encore en commun une cubique de Γ, celle qui correspond à la droite OO_1.

On voit que *les cubiques de la congruence* Γ *sont les intersections partielles des surfaces cubiques du réseau* R.

Par un point arbitraire P passent ∞^1 surfaces de R; ces surfaces forment un faisceau et ont toutes en commun une courbe de Γ; donc par un point passe une seule courbe de la congruence.

Les surfaces de R marquent sur une droite g quelconque une involution I_2^3.

On sait qu'une telle involution possède un couple neutre, c'est-à-dire que sur la droite g existent deux points P′, P″ par lesquels passent ∞^1 surfaces de R; ces surfaces ont en commun une cubique de Γ passant par P′ et P″.

(*) *Sur un procédé de génération de la surface cubique.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1891, 3e sér., t. XXII, pp. 35-55.)

Donc *la congruence* Γ *est du premier ordre et de la première classe.*

L'ordre et la classe de Γ avaient déjà été déterminés au moyen d'autres méthodes par MM. Cremona (*), Sturm (**), Schröter (***), Stuyvaert (IV), etc.

On peut encore démontrer que Γ est du premier ordre de la manière suivante :

Par un point P menons la droite s'appuyant sur a_1, a_2 et la droite s'appuyant sur a_3, a_4. Ces droites déterminent un plan π. A la droite (α, π) correspond évidemment une cubique gauche de Γ passant par P et cette courbe est unique.

3. — La droite d peut occuper différentes positions particulières; nous allons étudier l'influence de ces positions sur les cubiques correspondantes de Γ; nous trouverons ainsi les cubiques dégénérées de Γ.

Supposons que d rencontre l'une des droites a_1, a_2, a_3, a_4, c'est-à-dire passe par l'un des points A_1, A_2, A_3, A_4.

Si d passe par A_1, la quadrique $(a_1 a_2 d)$ dégénère en deux plans $a_1 d$ et $a_2 A$ (V).

(*) *Notes sur les cubiques gauches.* (Journal de Crelle, 1862, t. LX, pp. 188-192.)

(**) *Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumcurven.* (Journal de Crelle, t. LXXIX, p. 99.)

(***) *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung,* p. 257.

(IV) *Étude de quelques surfaces algébriques.* Gand, Hoste, 1907. — *Congruences de triangles, de cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices.* (Journal de Crelle, 1907, t. CXXXII, pp. 216-237). — *Cinq études de géométrie analytique (Prix Fr. Deruyts)* (Mémoires de Liége, 1907, 3e sér., t. VII).

(V) Les droites s'appuyant à la fois sur a_1, a_2, d sont maintenant : 1° les droites tracées dans le plan $a_1 d$ par le point où ce plan rencontre la droite a_2; 2° les droites menées par A_1 et s'appuyant sur a_2.

La quadrique (a_3a_4d) a en commun avec le plan a_1d, outre la droite d, une droite h de la quadrique $(a_1a_3a_4)$; la même quadrique (a_3a_4d) rencontre le plan a_2 A suivant une conique γ qui passe par A et A_1, s'appuie sur a_3, a_4 en des points Q_{32}, Q_{42}, et sur h.

Ainsi, *aux rayons du faisceau* (A_1, α) *correspondent des cubiques de* Γ *dégénérées en une droite* h *et une conique* γ; *les droites* h *sont les génératrices de l'hyperboloïde* $(a_1a_3a_4)$ *et les coniques* γ *engendrent un faisceau-plan dont deux points fondamentaux sont* A, A_1 *et dont les deux autres sont* Q_{32} *et* Q_{42}.

Les faisceaux (A_2, α), (A_3, α), (A_4, α) donnent lieu à des remarques analogues.

4. — Soient L_1, L_2 les points de rencontre des droites l_1, l_2 avec le plan α.

Prenons pour droite d un rayon quelconque du faisceau (L_1, α). Les quadriques (a_1a_2d), (a_3a_4d), qui ont deux droites communes, d et l_1, se coupent encore suivant une conique λ. Lorsque la droite d décrit le faisceau (L_1, α), la conique λ décrit une surface cubique passant par A, a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 (théorème de Fr. Deruyts). Dans le cas actuel, la droite l_1 est double. Soit, en effet, x une droite s'appuyant sur l_1. Par un point X_1 de x passe une quadrique passant également par a_1, a_2, l_1 et A. Cette quadrique a en commun avec le plan α, outre b_1, une droite d qui passe par L_1. La quadrique (da_3a_4) marque sur x deux points dont l'un est sur l_1 et l'autre est X_2. Entre les points X_1 et X_2 existe une correspondance (1, 1); il y a deux coïncidences, mais l'une de celles-ci est dans le plan α, donc la surface cubique lieu des coniques λ ne rencontre plus la droite x qu'en un point, par conséquent l_1 est une droite double.

Ainsi, *aux rayons du faisceau* (L_1, α) *correspondent des cubiques de* Γ *dégénérées en une droite fixe* l_1 *et une conique* λ *qui appartient à une surface cubique passant par* a_1, a_2, a_3, a_4, l_2 *et ayant une droite double* l_1.

Le faisceau (L_2, α) donne un résultat analogue.

5. — Il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autres cubiques de Γ dégénérées que celles énumérées dans les n^os 3 et 4. On peut donc énoncer ce théorème :

Une droite quelconque de l'espace rencontre dix-huit cubiques de Γ *dégénérées en une droite et une conique, huit sur la droite, dix sur la conique.*

Remarquons qu'à une droite d passant par deux des points A_1, A_2, A_3, A_4, L_1, L_2 correspond une cubique de Γ dégénérées en trois droites, donc :

Il y a quinze cubiques de Γ *dégénérées en trois droites.*

Nous avons vu plus haut que les cubiques de Γ correspondant aux droites du faisceau (A, α) sont tangentes à α en A ; le théorème de Deruyts nous permet de conclure que *le lieu des cubiques de* Γ *tangentes à* α *en* A *est une surface du troisième ordre.*

6. — Avant d'aller plus loin, nous donnerons une généralisation du théorème de Fr. Deruyts qui nous sera utile dans la suite.

Considérons dans le plan α une courbe k_n de classe n. Les cubiques gauches qui correspondent aux tangentes de cette courbe engendrent une surface S dont nous allons rechercher l'ordre.

Soit y une droite quelconque. Les quadriques (a_1a_2y), (a_3a_4y) ont en commun, outre y, une développable de troisième classe. Il y a $3n$ plans osculateurs à cette développable qui contiennent des tangentes à la courbe k_n, donc la surface S est d'ordre $3n$.

Par un point de la quadrique $(a_1 a_3 a_4)$ situé dans α, on peut mener n tangentes à k_n, donc a_1 est multiple d'ordre n sur la surface S. Il en est de même de a_2, a_3 et a_4.

Par le point L_1, on peut mener n tangentes à k_n, donc l_1 est multiple d'ordre n sur la surface S et cette surface possède n coniques λ. De même pour l_2.

Par un des points A_1, A_2, A_3, A_4, on peut mener n tangentes à k_n ; on trouve ainsi $4n$ droites et $4n$ coniques de S.

Il n'est pas difficile de voir que si u est une droite passant par A et non située dans α, le lieu des droites d, telles que les cubiques gauches de Γ qui leur correspondent rencontrent u, est une conique k_2. On en conclut que le point A est multiple d'ordre n sur la surface S.

En résumé : *Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième côté enveloppe une courbe de classe* n, *le troisième sommet décrira une surface d'ordre* 3n.

Cette surface possède un point et six droites multiples d'ordre n, 4n *droites simples et* 6n *coniques.*

Il est évident qu'à une tangente multiple d'ordre m de k_n il correspond sur S une cubique gauche multiple d'ordre m.

7. — Soit P un point quelconque de la droite a_1. Par ce point, menons la droite qui s'appuie sur a_3, a_4 et désignons par P_1 le point de rencontre de cette droite avec α. Il est évident qu'à une droite du faisceau (P_1, α) correspond une cubique de Γ passant par P. Ces cubiques décrivent une surface cubique qui possède un point double en P, car autrement il y aurait des cubiques ayant trois points communs avec une droite quelconque issue de P. De là :

Les droites a_1, a_2, a_3, a_4 *sont des cordes fondamentales d'ordre trois.*

8. — Soit y une droite quelconque de l'espace. Par les points de y menons les droites qui s'appuient sur les couples a_1, a_2 et a_3, a_4. Les plans déterminés par ces droites marquent sur le plan α des droites qui enveloppent une courbe k_3 de troisième classe. En effet, les cubiques de Γ qui correspondent aux droites d'un faisceau (O, α) engendrent une surface cubique qui rencontre y en trois points. Par chacun de ces points passe une seule cubique gauche, donc par O on peut mener trois tangentes à k_3. La courbe k_3 possède une tangente double correspondant à la cubique de Γ bisécante de la droite y.

Le théorème précédent donne, en tenant compte du numéro 5 :

Les cubiques de Γ *qui s'appuient sur une droite engendrent une surface du neuvième ordre qui possède un point* A *et six droites* a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 *multiples d'ordre trois, une cubique gauche double, treize droites et dix-huit coniques simples.*

9. — Les cubiques de Γ marquent sur un plan quelconque π une involution du troisième ordre et de la première classe. Lorsque l'on se donne une droite y dans ce plan, les points conjugués des points de cette droite décrivent une courbe du huitième ordre. Les points

d'intersection de cette courbe avec la droite sont situés ou bien sur la cubique de Γ dont y est une bisécante, ou bien sur des cubiques tangentes au plan π; donc :

Le lieu des points de contact des cubiques de Γ *tangentes à un plan est une courbe du sixième ordre.*

10. — Nous avons vu tantôt que les droites d du plan α auxquelles correspondent des courbes de Γ s'appuyant sur une droite u issue du point A, enveloppent une courbe de seconde classe. De là :

Le lieu des cubiques de Γ *qui s'appuient en un second point sur une droite passant par* A *est une surface du sixième ordre possédant un point* A *et six droites* a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 *doubles, huit droites et douze coniques simples.*

Soit π un plan passant par la droite u. L'intersection de ce plan avec la surface rencontrée ci-dessus se compose de u et d'une quintique plane passant par A ; donc :

Le lieu des points de contact des cubiques de Γ *qui touchent un plan passant par* A *est une quintique plane passant par* A.

Les cubiques de Γ qui correspondent à des droites de α passant par A, sont tangentes au plan α en A ; elles engendrent une surface cubique tangente à α en A, donc le plan α a en commun avec cette surface une cubique plane ayant un point double en A. Par A on peut mener deux tangentes à cette cubique plane ; donc :

Il y a deux cubiques de Γ *qui osculent* α *en* A.

11. — La congruence étudiée ici contient comme cas particulier la gerbe de Reye. Il suffit de considérer les droites a_1 et a_2, a_3 et a_4 comme les côtés opposés d'un quadrilatère gauche. Les cubiques devant avoir ces quatre droites comme bisécantes, passent par les sommets du quadrilatère.

12. — Il nous reste à répondre à une objection que l'on pourrait faire à notre raisonnement : Les droites a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être partagées de trois façons en deux couples, à savoir :

$$a_1,\ a_2 \qquad a_3,\ a_4.$$
$$a_1,\ a_3 \qquad a_2,\ a_4.$$
$$a_1,\ a_4 \qquad a_2,\ a_3.$$

Mais la symétrie des résultats obtenus dans le cours du travail montre que cette objection n'est pas fondée.

En terminant, nous tenons à remercier M. Neuberg des conseils dont il nous a honoré pour la rédaction de ce travail.

Liége, le 5 mars 1908.

Bruxelles. — Imprimerie Hayez, rue de Louvain, 112.