UNIVERSITÉ DE LIÉGE

Bulletin Scientifique

DE

L'Association des Élèves des Écoles Spéciales

PARAISSANT TOUS LES MOIS
PENDANT LE COURS DE L'ANNÉE ACADÉMIQUE

Année 1907-1908

Comité de Rédaction :

Martial BIDAINE, directeur.

Léon DELCOMMUNE.

Paul CHANTRAINE.

André GÉRARD.

Pierre GILLARD.

Imprimerie Moderne
23, Rue Agimont, Liége

Bulletin Scientifique de l'Association des Ecoles Spéciales, tome X, 1907-1908.

verre en lames, mécaniquement et les interruptions de production ne sont plus qu'accidentelles.

Mais le verre garde encore ses secrets. Et le jeune ingénieur qui entre au service d'une verrerie doit s'armer de patience et de courage pendant les années d'apprentissage qu'exigera son métier.

G. DELPLACE
(5e mines).

Sur un complexe du quatrième degré associé au tétraèdre

1. Soit un triangle A_1 A_2 A_3. On sait que le lieu d'un point tel que les droites qui joignent ses projections sur les côtés du triangle aux sommets opposés soient concourantes est une cubique circonscrite au triangle. Cette cubique a été rencontrée une première fois par M. Van Aubel dans la Nouvelle Correspondance de Catalan (tome IV). Nous en avons donné une généralisation dans le plan dans une note qui paraîtra prochainement dans Mathesis. (Nov. 07).

Lorsqu'on étend cette question au tétraèdre, on rencontre un complexe de droites qui paraît jouir de propriétés intéressantes. Nous en donnons quelques unes ici.

2. Soit A_1 A_2 A_3 A_4 un tétraèdre. Appelons (y_1, y_2, y_3, y_4) et (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées normales de deux points Y, Z d'une droite g par rapport au tétraèdre. Les coordonnées pluchériennes de la droite g sont alors

$$p_{ij} = y_i z_j - y_j z_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Ces coordonnées sont liées par la relation

$$p_{13}\, p_{42} + p_{12}\, p_{34} + p_{14}\, p_{23} = 0.$$

Désignons par g_i la projection orthogonale de la droite g sur la face du tétraèdre opposée au sommet A_i. Nous allons chercher le lieu des droites g telles que les plans $(A_i\, g_i)$ aient un point commun.

On trouve immédiatement l'ordre du complexe au moyen du principe de Chasles généralisé par F. Deruyts.

Soient (P_1, π_1), ... (P_4, π_4) quatre faisceaux-plans superposés de rayons p_1, ... p_4. Projettons orthogonalement les rayons p_1, p_2, p_3, pris arbitrairement en p'_1, p'_2, p'_3 sur les faces opposées aux sommets A_1, A_2, A_3. Les plans (p'_1, A_2), ... (p'_3, A_3) ont en commun un point 0. Par les points P_4 et $(A_4\ O,\ T_4)$, T_4 désignant la force du tétraèdre opposée à A_4, menons un plan perpendiculaire à T_4. Ce plan marque sur (P_4, π_4) un rayon p_4. On voit donc que les faisceaux-plans sont liés par une corresponeance (1, 1, 1, 1). Il y a quatre coïncidences, donc le complexe est du quatrième degré (ordre et classe).

Il est visible que les sommets du tétraèdre et les points tels que les droites qui joignent leurs projections sur les faces du tétraèdre aux sommets opposés soient concourantes sont des points principaux du complexe.

Soit a_{ij} l'angle dièdre dont l'arête est $A_i\ A_j$ ($i, j = 1,2,3,4$; $i \gtrless j$).

Les coordonnées des projections des points Y et Z sur la face $A_2\ A_3\ A_4$ sont :

$$(0,\ y_2 + y_1 \cos a_{34},\ y_3 + y_1 \cos a_{24},\ y_4 + y_1 \cos a_{23})$$

$$(0,\ z_2 + z_1 \cos a_{34},\ z_3 + z_1 \cos a_{24},\ z_4 + z_1 \cos a_{23})$$

Le plan (A_1, g_1) a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 + y_1 \cos a_{34} & y_3 + y_1 \cos a_{24} & y_4 + y_1 \cos a_{23} \\ 0 & z_2 + z_1 \cos a_{34} & z_3 + z_1 \cos a_{24} & z_4 + z_1 \cos a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$x_2 (p_{34} + p_{31} \cos a_{23} + p_{14} \cos a_{24}) + x_3 (p_{42} + p_{12} \cos a_{23} + p_{41} \cos a_{34}) + x_4 (p_{23} + p_{21} \cos a_{24} + p_{13} \cos a_{34}) = 0.$$

Les équations des autres plans $(A_i\ g_i)$ s'obtiennent symétriquement.

Pour avoir l'équation du complexe, il suffit d'écrire que ces quatre équations ont une solution commune

$$\begin{vmatrix} 0 & p_{34}+p_{14}\cos\alpha_{24}-p_{13}\cos\alpha_{32} & p_{42}+p_{12}\cos\alpha_{23}-p_{14}\cos\alpha_{34} & p_{23}+p_{13}\cos\alpha_{34}-p_{12}\cos\alpha_{24} \\ p_{34}-p_{42}\cos\alpha_{14}-p_{23}\cos\alpha_{12} & 0 & -p_{14}-p_{12}\cos\alpha_{13}+p_{42}\cos\alpha_{34} & -p_{13}-p_{23}\cos\alpha_{34}+p_{12}\cos\alpha_{14} \\ -p_{42}+p_{34}\cos\alpha_{14}+p_{23}\cos\alpha_{12} & -p_{14}+p_{13}\cos\alpha_{12}-p_{34}\cos\alpha_{24} & 0 & -p_{12}+p_{23}\cos\alpha_{24}+p_{13}\cos\alpha_{14} \\ p_{23}-p_{34}\cos\alpha_{13}-p_{42}\cos\alpha_{12} & -p_{13}+p_{14}\cos\alpha_{12}+p_{34}\cos\alpha_{23} & -p_{12}-p_{42}\cos\alpha_{23}+p_{14}\cos\alpha_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Aux ∞^3 droites du complexe considéré correspondent les ∞^3 points de l'espace. A tout point de l'espace correspondent deux droites du complexe.

En effet soit 0 un point quelconque. Désignons par 0_i les points d'intersection des droites $A_i\,0$ avec les faces opposées à A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Aux points A_i élevons des perpendiculaires aux faces du tétraèdre. Il est évident qu'à une droite s'appuyant sur ces quatre perpendiculaires correspond le point 0. Recherchons le lieu du point 0 lorsque les droites correspondantes font partie d'un complexe linéaire φ Soient quatre ponctuelles (X_1), (X_2), (X_3), (X_4) placées sur un même support (droite) λ. Prenons trois points x_1, x_2, x_3 et joignons-les au sommet correspondant. Au point de rencontre de $A_i X_i$ avec T_i ($i = 1, 2, 3$), élevons des perpendiculaires à T_i. Il y a deux droites s'appuyant sur ces trois perpendiculaires et appartenant à φ, donc aux points x_1, x_2, x_3 correspondent deux points x_4. Les ponctuelles sont donc liées par une correspondance (2, 2, 2, 2). Il y a huit coïncidences, dont le lieu du point 0 est une surface du huitième ordre. Elle passe évidemment par les six arêtes du tétraèdre.

16 Octobre 1907. L. GODEAUX.

Math.