Note sur une transformation géométrique (*)

PAR

L. GODEAUX

Étudiant à l'Université de Liége

La transformation que nous allons définir ressemble beaucoup à celles étudiées par MM. Saltel (**), Le Paige (***) et F. Deruyts (IV).

Nous espérons pouvoir énoncer bientôt des propriétés plus nombreuses de cette transformation.

1. Soient, dans un plan, huit points $A_1, A_2, \dots A_8$. Par ces points, il passe une ∞^1 de cubiques planes. Je désigne par A_9 le neuvième point commun à ces cubiques. Je prends les points A_1, A_2, A_3, A_4 comme base d'un faisceau de coniques.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nos 9-10, pp. 898-900, 1907.

(**) *Mém. in-8° de l'Acad roy de Belgique*, t. XII, 1870.

(***) *Bull de l'Acad. roy de Belgique* (3), t. III et t. IV, 1882.

(IV) *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége* (2), t. XIV, 1888.

Par un point P, distinct des neuf points A, on peut faire passer une seule cubique et une seule conique. Ces courbes ont encore en commun, outre les points A_1, A_2, A_3, A_4, un point P'. On obtient donc une transformation [P, P'].

Recherchons l'ordre de la transformée d'une droite Δ qui est supposée n'avoir aucune relation avec les données.

Par un point D d'une droite quelconque d, faisons passer une cubique du faisceau. Cette cubique marque sur la droite Δ trois points. Par ces points, faisons passer des coniques du faisceau donné. Ces courbes marquent sur la droite d six points D'. Inversement, à un point D' correspondent six points D. Si l'on remarque que le point (Δ, d) présente une coïncidence dans la correspondance (D, D'], on en conclura que la transformée de Δ est une courbe c_{11} d'ordre onze.

2. Soient B_1, B_2 les points où la conique déterminée par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 rencontre la droite Δ. Par définition, le point A_5 correspond à la fois aux points B_1, B_2. On voit donc que les points A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 sont des points doubles de la courbe c_{11}.

Soit C_1 un point de la droite Δ en ligne droite avec les points A_1 et A_2, par exemple. La conique passant par le point C_1 dégénère en deux droites et le point correspondant à C_1 se trouve sur la droite $A_3 A_4$.

Prenons sur la droite $A_3 A_4$ un point autre que le correspondant de C_1 et que les points A_3, A_4. Le point correspondant se trouve évidemment sur la droite $A_1 A_2$ et ne se confond pas avec C_1.

On peut en conclure que les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des points quintuples de la courbe c_{11}.

3. Recherchons le lieu des points doubles de la transformation, c'est-à-dire le lieu des points de contact des cubiques et des coniques tangentes.

La droite Δ a onze points communs avec sa transformée c_{11}.

Parmi ces onze points se trouvent des points doubles de la transformation et des couples de points tels que la conique et la cubique passant par un de ces points passent également par le second.

Le nombre de ces couples est facile à calculer. Les cubiques du faisceau marquent sur Δ une I_1^3, les coniques une I_1^2.

Ces deux involutions ont deux couples communs (théorème de M. Le Paige) ; il en résulte que dans les onze points de c_{11} situés sur le Δ, il y a cinq points doubles de la transformation. Le lieu cherché est dans une courbe du cinquième ordre c_5.

Cette courbe passe évidemment par les points A_5, ... A_9.

Les points A_1, ... A_4 sont des points singuliers tels qu'il y a une infinité de contacts.

Mons, 17 mai 1907.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.