Bulletin de la Classe des sciences

Sur les homographies cycliques dont la période est une puissance de deux

Lucien Godeaux

Résumé
Nous considérons, dans un espace linéaire à 2n - 1 dimensions, une homographie de période 2n possédant 2n points unis isolés. Nous formons les systèmes linéaires d'hyperquadriques invariantes pour l'homographie en utilisant 2n-1 homographie biaxiales. Nous en déduisons l'existence d'une surface algébrique de diviseur

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1950.70491;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Sur les homographies cycliques dont la période est une puissance de deux,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Nous considérons, dans un espace linéaire à $2^n - 1$ dimensions, une homographie de période 2^n possédant 2^n points unis isolés. Nous formons les systèmes linéaires d'hyperquadriques invariantes pour l'homographie en utilisant 2^{n-1} homographie biaxiales. Nous en déduisons l'existence d'une surface algébrique de diviseur $\sigma = 2^n$.

1. Considérons, dans un espace linéaire à $2^n - 1$ dimensions, une homographie H de période 2^n, possédant 2^n points unis isolés.

Pour simplifier les notations, nous poserons $m = 2^{n-1}$. L'homographie H aura alors la période $2m$ dans un espace S_{2m-1} et pourra être représentée par les équations

$$\rho x'_i = \epsilon^i x_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, 2m - 1)$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre $2m = 2^n$ de l'unité. Cette homographie possède comme points unis les sommets $O_0, O_1, \ldots, O_{2m-1}$ de la pyramide fondamentale.

L'homographie H^2 sera représentée par les équations

$$\rho x'_i = \epsilon^{2i} x_i,$$

où l'on remplace $2i$ par le reste de sa division par $2m$. Ces équations précédentes peuvent alors s'écrire

$$\left.\begin{aligned} \rho x'_i &= \epsilon^{2i} x_i, \\ \rho x'_{m+i} &= \epsilon^{2i} x_i, \end{aligned}\right\} \; (i = 0, 1, \ldots, m - 1).$$

On en conclut que l'homographie H^2 possède $m = 2^{n-1}$ axes ponctuels, à savoir les droites O_0O_m, O_1O_{m+1}, ..., $O_{m-1}\,O_{2m-1}$. Par conséquent, parmi les systèmes d'hyperquadriques invariantes pour l'homographie H, il y en aura m dont l'équation contiendra deux carrés et m dont l'équation ne contiendra que des produits de deux coordonnées d'indices distincts. L'équation des premiers se reproduira, après avoir effectué H, multipliée par une puissance paire de ϵ, l'équation des secondes par une puissance impaire de ϵ.

2. Occupons-nous en premier lieu des seconds systèmes.

Le premier membre de l'équation

$$\Sigma\, \lambda_i x_{2i} x_{2m-2i+1} = 0, \quad (i = 0,\ 1\ \ldots,\ m-1),$$

où l'on convient de remplacer $2m - 2i + 1$ par le reste de sa division par $2m$, se reproduit multiplié par ϵ lorsque l'on effectue H.

Plus généralement, considérons le système linéaire d'hyperquadriques

$$\Sigma\, \lambda_i x_{2i} x_{2m+2k-2i+1} = 0, \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1) \qquad (1)$$

où nous faisons toujours la convention de remplacer $2m + 2k - 2i + 1$ par le reste de sa division par $2m$ (cette convention reste valable dans la suite).

Lorsque l'on effectue H, le premier membre de cette équation se reproduit multiplié par ϵ^{2k+1}.

Pour $k = 0$, on retrouve le premier système considéré. Pour $k = 1, 2, \ldots, m-1$, on obtient $m - 1$ systèmes linéaires d'hyperquadriques invariantes pour H. Nous désignerons le système d'hyperquadriques représenté par l'équation (1) par $|V_{2k+1}|$; nous obtenons ainsi m systèmes linéaires

$$|V_1|,\ |V_3|,\ \ldots,\ |V_{2m-1}|.$$

Observons que le système $|V_{2m-1}|$ a une équation qui pourrait s'écrire, avec la convention sur les indices, sous la forme

$$\Sigma\, \lambda_i x_{2i} x_{2m-2i-1} = 0, \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

3. L'homographie θ_k, d'équations

$$\left.\begin{aligned}\rho x'_{2i} &= x_{2m+2k-2i+1},\\ \rho x'_{2m+2k-2i+1} &= x_{2i},\end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

est harmonique et transforme chaque hyperquadrique du système $|V_{2k+1}|$ en elle-même.

Écrivons les équations de θ_k sous la forme plus simple

$$\frac{x'_0}{x_{2k+1}} = \frac{x'_2}{x_{2k-1}} = \dots = \frac{x'_{2k}}{x_1} = \frac{x'_{2k+2}}{x_{2m-1}} = \dots = \frac{x'_{2m-2}}{x_{2k+3}} =$$

$$= \frac{x'_1}{x_{2k}} = \frac{x'_3}{x_{2k-2}} = \dots = \frac{x'_{2k+1}}{x_0} = \frac{x'_{2k+3}}{x_{2m-2}} = \dots = \frac{x'_{2m-1}}{x_{2k+2}}.$$

On peut donc encore écrire ces équations sous la forme

$$\rho x'_i = x_{2k+1-i}, \qquad (i = 0,\ 1,\ \dots,\ 2m-1)$$

en convenant d'ajouter $2m$ à l'indice du terme du second membre lorsque $i > 2k+1$.

Formons maintenant l'homographie

$$\theta_k \mathrm{H} \theta_k = \mathrm{H}'.$$

Les équations de H' sont

$$\rho x'_i = \epsilon^{2k+1-i} x_i, \qquad (i = 0,\ 1,\ \dots,\ 2m-1)$$

où l'on convient d'ajouter $2m$ à l'exposant de ϵ si $i \geqslant 2k+1$.

On peut multiplier les coefficients des x dans le second membre par $\epsilon^{2m-2k-1}$; les équations de H' deviennent alors

$$\rho x'_i = \epsilon^{2m-i} x_i.$$

En posant $\eta = \epsilon^{2m-1}$, ces équations deviennent

$$\rho'_i x = \eta^i x_i$$

et comme η est une racine primitive d'ordre $2m = 2^n$ de l'unité, on voit que H' coïncide avec H.

On en conclut que les homographies H et θ_k sont permutables.

Par conséquent, les systèmes $|V_1|$, $|V_3|$, ..., $|V_{2k-1}|$, $|V_{2k+3}|$, ..., $|V_{2m-1}|$ sont échangés entre eux par θ_k.

Il est facile de voir que θ_k fait correspondre au système $|V_{2h+1}|$, le système $|V_{4k-2h+1}|$. Il est sous-entendu que si $4k - 2h + 1$ est supérieur à $2m$, on remplace cet indice par le reste de sa division par $2m$.

4. Le système d'hyperquadriques

$$\mu_0 x_0^2 + \mu_m x_m^2 + \mu_1 x_1 x_{2m-1} + \mu_2 x_2 x_{2m-2} + \dots + \mu_{m-1} x_{m-1} x_{m+1} = 0$$

est transformé en soi par H et son premier membre se reproduit lorsque l'on effectue H. Nous le désignerons par $|V_0|$.

L'homographie θ_k étant permutable avec H, transforme $|V_0|$ en un système linéaire d'hyperquadriques invariantes pour H. On trouve précisément le système

$$\mu_0 x_{2k+1}^2 + \mu_m x_{m+2k+1}^2 + \mu_1 x_{2k} x_{2k+2} +$$
$$+ \mu_2 x_{2k-1} x_{2k+3} + \dots + \mu_{m-1} x_{m+2k+2} x_{m+2k} = 0.$$

Lorsque l'on opère H, le premier membre de cette équation se reproduit multiplié par ϵ^{4k+2} ; nous le désignerons par $|V_{4k+2}|$.

Pour $k = 0$, l'homographie θ_0 transforme $|V_0|$ das le système $|V_2|$ d'équation

$$\mu_0 x_1^2 + \mu_m x_{m+1}^2 + \mu_1 x_0 x_2 + \mu_2 x_{2m-1} x_3 + \dots + \mu_{m-1} x_{m+2} x_m = 0.$$

Appliquons θ_k à ce nouveau système ; nous obtenons

$$\mu_0 x_{2k}^2 + \mu_m x_{m+2k}^2 + \mu_1 x_{2k+1} x_{2k-1} + \mu_2 x_{2k+2} x_{2k-2} +$$
$$+ \dots + \mu_{m-1} x_{m+2k-1} x_{m+2k+1} = 0.$$

Si l'on effectue H, le premier membre de cette équation se reproduit multiplié par ϵ^{4k}. Nous désignerons ce système par $|V_{4k}|$.

Nous obtenons ainsi une nouvelle série de systèmes linéaires d'hyperquadriques invariantes pour H, mais ces systèmes ne sont pas tous distincts. Si en effet dans l'équation du système $|V_{4k+2}|$, nous remplaçons k par $\frac{1}{2} m + k'$, nous retrouvons le même système aux notations près. De même, si dans l'équation de $|V_{4k}|$, nous remplaçons k par $\frac{1}{2}m + k$, nous obtenons également le même système. Les systèmes distincts seront donc obtenus en posant $k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}m - 1$; ce sont les m systèmes.

$$|V_0|, |V_2|, |V_4|, \ldots, |V_{2m-2}|.$$

Nous avons ainsi construit les $2m$ systèmes linéaires d'hyperquadriques invariantes pour l'homographie H.

5. L'homographie H^m est biaxiale harmonique et ses équations peuvent s'écrire

$$\rho x'_i = (-1)^i x_i, \ (i = 0, 1, \ldots, 2m - 1).$$

Ses axes ponctuels sont les espaces à $m - 1$ dimensions $O_0O_2 \ldots O_{2m-2}$ et $O_1O_3 \ldots O_{2m-1}$.

Considérons la variété W_{m-1}, à $m - 1$ dimensions, intersection de m hyperquadriques prises une dans chacun des systèmes $|V_0|, |V_2|, \ldots, |V_{2m-2}|$.

Cette variété n'a aucun point commun avec l'espace $O_0O_2 \ldots O_{2m-2}$. Dans les équations des hyperquadriques choisies, posons en effet

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0.$$

Nous avons

$$\mu_0 x_0^2 + \mu_m x_m^2 + \mu_2 x_2 x_{2m-2} + \ldots + \mu_{m-2} x_{m-2} x_{m+2} = 0,$$
$$\mu'_0 x_2^2 + \mu'_m x_{m+2}^2 + \mu'_2 x_4 x_0 + \ldots + \mu'_{m-2} x_{m+4} x_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu''_1 x_{m-2}^2 + \mu''_m x_{2m-2}^2 + \mu''_2 x_m x_{m-4} + \ldots + \mu''_{m-2} x_{2m-4} x_0 = 0,$$
$$\nu_1 x_0 x_2 + \nu_3 x_{2m-2} x_4 + \ldots + \nu_{m-1} x_{m+2} x_m = 0,$$
$$\nu'_1 x_2 x_4 + \nu'_3 x_0 x_6 + \ldots + \nu'_{m-1} x_{m-4} x_{m+2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu''_1 x_{m-2} x_m + \nu'_3 x_{m4-} x_{m+2} + \ldots + \nu''_{m-1} x_{2m} x_{2m-2} = 0.$$

Ces équations n'ont aucune solution commune et par conséquent la variété W_{m-1} ne rencontre pas l'espace $O_0O_2 \ldots O_{2m-2}$. On démontre de même que la variété W_{m-1} ne rencontre pas l'espace $O_1O_3 \ldots O_{2m-1}$.

Cela étant, choisissons $m-3$ hyperquadriques appartenant une à chacun des systèmes $|V_1|, |V_3|, \ldots, |V_{2m-7}|$. L'intersection de ces hyperquadriques et de la variété W_{m-1} est une surface F d'ordre 2^{2m-3}. L'homographie H détermine sur cette surface une involution d'ordre 2^n, privée de points unis. Nous désignerons par Φ une surface image de cette involution.

Soit $|C_i|$ le système de courbes découpées sur F par les hyperquadriques du système $|V_i|$.

Les systèmes $|V_0|, |V_2|, \ldots, |V_{2m-2}|$ ont la dimension m et par conséquent, les systèmes $|C_0|, |C_2|, \ldots, |C_{2m-2}|$ ont la dimension $m-1$.

Les systèmes $|V_1|, |V_3|, \ldots, |V_{2m-1}|$ ont la dimension $m-1$; par suite, les systèmes $|C_1|, |C_3|, \ldots, |C_{2m-7}|$ ont la dimension $m-2$ et les systèmes $|C_{2m-5}|, |C_{2m-3}|, |C_{2m-1}|$ la dimension $m-1$.

Désignons par $|\Gamma_i|$ le système linéaire complet qui correspond sur la surface Φ au système $|C_i|$.

D'après la théorie des involutions, on a

$$|2m\Gamma_0| = |2m\Gamma_1| = |2m\Gamma_2| = \ldots = |2m\Gamma_{2m-1}|$$

et *la surface Φ a le diviseur de Severi $\sigma = 2^n$.*

En rapportant projectivement les courbes Γ_{2m-1} aux hyperplans d'un espace S_{m-1} à $m-1$ dimensions, on obtient une surface normale d'ordre $2^{2m-2n-1}$. Sur cette surface, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2m-2}$ sont d'ordre $2^{2m-2n-1}$ et il existe une hypersurface d'ordre $2m$ ayant un contact d'ordre $2m-1$ avec Φ le long d'une quelconque de ces courbes.

Liège, le 24 novembre 1950.