Bulletin de la Classe des sciences

Concours annuel 1951. Première question. Rapports des Commissaires

Lucien Godeaux, Florent Bureau, Théophile Henri Joseph Lepage

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien,Bureau Florent,Lepage Théophile Henri Joseph. Concours annuel 1951. Première question. Rapports des Commissaires. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 37, 1951. pp. 1100-1103;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1951_num_37_1_70764;

Fichier pdf généré le 21/06/2023

CONCOURS ANNUEL 1951

PREMIÈRE QUESTION.

RAPPORT DU PREMIER COMMISSAIRE.

L'Académie avait mis au Concours pour l'année 1951 la question suivante : *On demande de nouvelles recherches sur les surfaces algébriques irrégulières.* En réponse à cette question. M. Andreotti a envoyé une courte note parue en 1951 dans les *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL* et un travail manuscrit auquel la note précédente sert d'introduction.

On sait que si F est une surface algébrique d'irrégularité $q = p_g - p_a$, il existe sur cette surface des systèmes continus de courbes formés de ∞^q systèmes linéaires. Ceux-ci sont représentés par les points d'une variété V'_q, introduite par M. Castelnuovo et appelée par lui variété de Picard associée à F. D'autre part, M. Severi, à propos d'un théorème d'inversion des intégrales de Picard de première espèce appartenant à la surface F, a introduit la variété abélienne V_q relative à la matrice de Riemann ω des périodes de ces intégrales. M. Andreotti commence par étudier les relations entre les variétés V_q et V'_q ; il montre que l'on peut obtenir sur V_q des systèmes continus formés de ∞^q systèmes linéaires de variétés à $q-1$ dimensions et que ces systèmes linéaires sont représentés par les points de la variété V'_q. La variété V'_q représente une involution appartenant à la variété V_q. Les variétés coïncident si tous les diviseurs de la matrice ω sont égaux à l'unité ; dans les autres cas, elles ne coïncident que si la matrice ω est à multiplication complexe. Ces considérations font l'objet de la note imprimée.

Il existe d'assez nombreux exemples de surfaces irrégulières ; mais, comme le remarque l'auteur, ces exemples ne permettent pas de faire avancer la théorie générale, parce qu'il s'agit de surfaces appartenant à des espaces projectifs, c'est-à-dire à des variétés d'irrégularité superficielle nulle et que, d'après un théorème de Castelnuovo-Enriques, les surfaces appartenant à de telles variétés sont en général régulières. Il faut donc chercher à construire des surfaces irrégulières sur des variétés d'irrégularité superficielle positive. Or, précisément, M. Severi a montré qu'une surface irrégulière privée de faisceau irrationnel de courbes est représentée par une surface simple ou multiple appartenant à sa variété de Picard V_q, c'est-à-dire à sa variété de Picard construite à la manière de Severi, en partant de la matrice de Riemann ω. Dans ses cours de l'Université de Rome, M. Conforto a, à plusieurs reprises, appelé l'attention de ses auditeurs sur le fait qu'il faut étudier les surfaces contenues dans une variété de Picard. C'est là le programme que s'est fixé M. Andreotti.

Dans la première partie de son Mémoire, M. Andreotti étudie les théorèmes d'inversion des intégrales de Picard de première espèce attachées à une surface irrégulière. C'est Picard qui s'est le premier proposé d'étendre aux surfaces le théorème d'inversion de Jacobi relatif aux courbes. D'une manière précise, il s'est demandé s'il était possible de trouver un entier n tel que la variété des groupes de n points d'une surface F d'irrégularité $q > 0$ soit une variété abélienne. On sait que la réponse est négative, sauf si F est une surface de Picard (et alors on a $n = 1$). L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème de Picard dont l'une, géométrique, est particulièrement simple. M. Severi a plus tard considéré un théorème d'inversion sous une forme plus restreinte mais qui a l'avantage de conduire à un résultat positif. M. Andreotti reprend le théorème d'inversion de Severi en l'étendant au cas où il existe un système régulier d'intégrales réductibles.

L'auteur considère, sur une surface F d'irrégularité $q > 0$, un système régulier ∞^{p-1} d'intégrales réductibles ($p \leqslant q$) et les groupes de points en lesquels ces intégrales prennent des valeurs congrues par rapport aux périodes. Dans ces conditions, ou bien la surface F contient un faisceau irrationnel de genre $\pi (p \leqslant \pi \leqslant q)$ de courbes, ou bien les groupes de points en question forment sur F une involution d'irrégularité $\pi (p \leqslant \pi \leqslant q)$ et il existe une image de cette involution tracée sur la variété de

Picard construite en partant de la matrice de Riemann des périodes des intégrales réductibles considérées. L'auteur démontre ce théorème en utilisant les fonctions Θ.

M. Andreotti donne plusieurs applications intéressantes de ce théorème ; il détermine notamment dans quelles conditions une surface d'irrégularité $q > 3$ se représente simplement sur la variété de Picard-Severi.

Dans la seconde partie du Mémoire, M. Andreotti aborde la classification des surfaces irrégulières appartenant à une variété de Picard. D'une manière précise, il se propose de classer les familles de surfaces d'irrégularité q dont l'image sur la variété de Picard V_q est simple. Ce problème, comme l'auteur le remarque, ne présente de l'intérêt que pour $q \geqslant 3$. De plus, il exclut de ses considérations les surfaces possédant un faisceau de genre q de courbes, cas qui ne présente en somme que peu d'intérêt. La méthode utilisée par l'auteur est basée sur l'emploi des fonctions Θ et du théorème de la base de Hilbert.

Dans un premier paragraphe, M. Andreotti détermine les surfaces d'irrégularité $q = 3$; elles sont découpées sur la variété de Picard V_3 par la variété des zéros d'une fonction intermédiaire. Il en détermine les genres ainsi que le nombre des modules dont elles dépendent.

Pour aborder ensuite la théorie, beaucoup plus difficile, des surfaces d'irrégularité $q \geqslant 4$, l'auteur considère l'anneau homogène formé par les fonctions Θ attachées à une matrice de Riemann (qu'il suppose réduite à la forme canonique introduite par Krazer) et le théorème de la base d'Hilbert pour ces fonctions. Après avoir développé les éléments essentiels de cette théorie, il étudie les idéaux de fonctions Θ attachés à une surface irrégulière. Il considère ensuite plus particulièrement les surfaces d'irrégularité 4 de V_4 qui sont intersection complète de deux hypersurfaces de cette variété et les surfaces qu'il appelle de résiduel ρ fini. Une telle surface fait partie de l'intersection de deux hypersurfaces de V_4, intersection qui est complétée par une seconde surface ; celle-ci fait à son tour partie de l'intersection de deux hypersurfaces, complétée par une troisième surface, et ainsi de suite. Après ρ opérations, on obtient une dernière surface intersection complète de deux hypersurfaces. Dans chaque cas, M. Andreotti détermine les genres des surfaces envisagées et le nombre des modules dont elles dépendent. Il montre enfin comment on peut étendre ses résultats au cas où l'irrégularité est supérieure à quatre.

Nous estimons que M. Andreotti a fait faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces irrégulières ; nous proposons à l'Académie de couronner son Mémoire et de décider l'impression de la partie manuscrite dans les Mémoires in-8°.

Lucien GODEAUX.

Je me rallie aux conclusions du rapport de mon savant Confrère, M. L. Godeaux. FL. BUREAU.

Nous nous rallions volontiers aux conclusions de notre savant confrère M. Lucien Godeaux. Th. LEPAGE.