Q2. SUR UNE EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME DE GRASSMANN;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Grassmann a établi le théorème suivant :

Les droites qui rencontrent les côtés correspondants de deux triangles donnés dans un même plan en des couples d'une involution enveloppent une courbe de troisième classe (1).

Nous nous proposons d'étendre ce théorème à l'espace à $r-1$ dimensions. A vrai dire, pour $r=4$, cette généralisation a été commencée par M. Neuberg (2) et par nous (3), mais dans l'article de M. Neuberg et l'un des nôtres, la forme qui lie les éléments envisagés est une involution, alors qu'ici nous nous proposons de considérer une forme quelconque.

Soit, dans un espace linéaire à $r-1$ dimensions, un groupe de k espaces linéaires à $r-n$ dimensions.

Chacun de ces k espaces est l'intersection de $n-1$ espaces linéaires à $r-2$ dimensions qui ont pour équations

$$a_{ijx}=0, \qquad (i=1,\ldots,n-1; j=1,\ldots,k.),$$

(1) NEUBERG, *Sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques* (*Mathesis*, 3e série, t. II, 1902).

(2) NEUBERG, *Sur le complexe de Grassmann* (*Mathesis*, 3e série, t. II, 1902).

(3) L. GODEAUX, *Sur un complexe du sixième ordre et de la sixième classe* (*Bul. de l'Académie royale de Belgique*, janvier 1907). — L. GODEAUX, *Sur un mode de génération des surfaces* (Adressé à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en août 1906).

a_x désignant une forme linéaire homogène à ~~deux~~ 2 variables.

Dans la suite, nous désignerons ce groupe par la lettre A.

n points donnés dans un espace linéaire à $r - 1$ dimensions déterminent un espace linéaire ξ à $n - 1$ dimensions.

Soient x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ces n points, leurs coordonnées étant respectivement

$$(xi_1, xi_2, \ldots, xi_r).$$

Un point quelconque de l'espace ξ a pour coordonnées

$$\begin{aligned}
&\mu_1 x1_1 + \mu_2 x2_1 + \ldots + \mu_n xn_1, \\
&\mu_2 x1_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\mu_1 x1_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n xn_r.
\end{aligned}$$

Pour que ce point soit situé sur le $j^{\text{ième}}$ espace à $r - n$ dimensions du groupe A, les valeurs μ doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
&\mu_1 a_{1jx1} + \mu_2 a_{1jx2} + \ldots + \mu_n a_{1jxn} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\mu_1 a_{(n-1)jx1} + \ldots + \mu_n a_{(n-1)jxn} = 0.
\end{aligned}$$

Les μ sont donc fournis par la matrice

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{1jx1} & \ldots & a_{1jxn} \\ a_{2jx1} & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{(n-1)jx1} & \ldots & a_{(n-1)jxn} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Nous désignerons ces valeurs μ par $\mu j'_1, \mu j'_2, \ldots$

Lorsque j est successivement égal à $1, 2, \ldots, k$, nous obtenons k groupes de valeurs μ.

Supposons ces k groupes liés par une relation de la forme

$$\alpha_{1\mu 1}\alpha_{2\mu 2}\dots\alpha_{k\mu k} = 0, \tag{2}$$

α_μ désignant une forme linéaire homogène à n variables.

Remarquons que les valeurs déduites de la matrice (1) sont linéaires en $x\,1$, sauf l'une d'elles qui ne contient pas ces variables.

Si nous remplacons dans (2) les μ par leurs valeurs respectives, il nous viendra un polynome à n^k termes.

On peut trouver aisément le nombre de termes qui sont du degré i en $x\,1$.

Prenons, dans $k-i$ systèmes de valeurs de μ, les $k-i$ valeurs qui sont de degré zéro en $x\,1$. Il est visible que le nombre de termes de degré i en $x\,1$ et dans lesquels entrera le produit des $k-i$ valeurs choisies est $(n-1)^i$. Comme on peut prendre dans les k groupes de μ, c_k^{k-i} produits différents et de degré zéro en $x\,1$, le nombre total des termes de degré i en $x\,1$ est

$$c_k^{k-i}(n-1)^i$$

ou

$$c_k^i(n-1)^i.$$

Remarquons que ce nombre est le $i^{\text{ième}}$ terme du développement de

$$[1+(n-1)]^k.$$

Si, en outre du groupe A, nous considérons n^k-1 groupes analogues B, C, . . ., H, mais dont les paramètres μ déterminés comme précédemment satisfont toujours à la relation (2), nous obtenons n^k équations entre lesquelles nous pouvons facilement éliminer les coefficients α. Il nous reste alors une équation écrite sous forme d'un déterminant à n^k lignes et homogènes en $x\,1, x\,2, x\,3, \dots, xn$.

Le degré du déterminant en $x\,1$ est

$$\nu = 0\,c_k^0 + 1\,c_k^1(n-1) + 2\,c_k^2(n-1)^2 + \ldots + k\,c_k^k(n-1)^k.$$

Supposons les coordonnées des points $X_2, X_3, \ldots, X_n$ constantes et prenons celles de X_1 comme coordonnées courantes. L'équation représente maintenant un cône de l'ordre ν et ayant pour sommet l'espace à $n-2$ dimensions déterminé par les points $X_2, \ldots, X_n$.

Nous disons un cône, car on voit aisément que, dans chacun des termes du développement du déterminant, il entre des facteurs de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{1jx1} & \ldots & a_{1jxn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(n-1)jx1} & \ldots & a_{(n-1)jxn} \end{vmatrix},$$

provenant de la matrice (1) et qui s'annulent pour

$$x\,2 = x\,1,$$

par exemple.

On peut donc dire que les espaces tels que ξ qui passent par un espace linéaire à $n-2$ dimensions sont tangents à un cône d'ordre ν, par conséquent on peut dire que le lieu des espaces ξ est une variété algébrique de classe ν.

Pour $n = r - 1$, le cône se décompose en ν espaces linéaires à $r-2$ dimensions passant par un espace linéaire à $n-3$ dimensions.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. VII; septembre 1907.)

Worlamovitz, Août 1906

40602 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.