Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques surfaces algébriques de diviseur trois

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de quelques surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est égal à trois, comme images d'involutions cycliques de période trois, privées de points unis, appartenant à des surfaces algébriques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques surfaces algébriques de diviseur trois,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de quelques surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est égal à trois, comme images d'involutions cycliques de période trois, privées de points unis, appartenant à des surfaces algébriques.

On sait que M. Severi, dans ses recherches sur la base des courbes tracées sur une surface algébrique, a été conduit à introduire le diviseur σ d'une surface, maximum du nombre de systèmes linéaires distincts dont les multiples appartiennent à un même système linéaire (1). Nous avons établi un procédé de construction de surfaces de diviseur quelconque comme images d'involutions cycliques privées de points unis appartenant à des surfaces algébriques (2).

Dans cette note, nous utilisons ce procédé de construction pour étudier plusieurs surfaces de diviseur $\sigma = 3$. A cet effet, nous partons d'une homographie cyclique de période trois, ayant trois axes ponctuels, dans un espace linéaire à r dimensions

(1) F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (MATH. ANNALEN, 1906, t. 62, pp. 194-225) ; *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (ANNALES SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1908, pp. 449-468) ; *Complementi alla teoria della base par la totalità delle curve di una superficie algebrica* (REND. CIRC. MATEM. DI PALERMO, 2e sem. 1910, pp. 265-288).

(2) *Sur certaines surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (BULL. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE CRACOVIE, 1914, pp. 362-368) ; *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (BULL. DES SCIENCES MATH., 1915, pp. 182-185).

et nous considérons des surfaces unies pour cette homographie, ne rencontrant pas les axes ponctuels de celle-ci. Les images des involutions existant sur ces surfaces sont les surfaces de diviseur $\sigma = 3$ étudiées. Le procédé peut s'étendre en considérant une homographie de période quelconque.

Nous supposons connus les résultats que nous avons établis sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [3].

1. Considérons, dans un espace linéaire S_r, à r dimensions, une homographie H de période trois. Nous désignerons les coordonnées ponctuelles de S_r par

$x_{1i}(i = 0, 1, \ldots, r_1)$, $x_{2i}(i = 0, 1, \ldots, r_2)$, $x_{3i}(i = 0, 1, \ldots, r_3)$,
où $r_1 + r_2 + r_3 = r - 2$. Les équations de H s'écriront

$$\begin{aligned} \rho x'_{1i} &= x_{1i}, & (i &= 0, 1, \ldots, r_i), \\ \rho x'_{2i} &= \epsilon x_{2i}, & (i &= 0, 1, \ldots, r_2), \\ \rho x'_{3i} &= \epsilon^2 x_{3i}, & (i &= 0, 1, \ldots, r_3), \end{aligned}$$

où ϵ est une racine primitive cubique de l'unité.

Les axes ponctuels de H sont l'espace σ_1, à r_1 dimensions, d'équations $x_{2i} = 0$, $x_{3i} = 0$, l'espace σ_2 à r_2 dimensions, d'équations $x_{3i} = 0$, $x_{1i} = 0$ et enfin l'espace σ_3, à r_3 dimensions, d'équations $x_{1i} = 0$, $x_{2i} = 0$.

Dans le système linéaire $|V|$ des hypersurfaces cubiques de S_2, il y a trois systèmes linéaires partiels d'hypersurfaces appartenant à l'involution I_3 engendrée par H ; ils ont pour équations

$$\begin{gathered} \Sigma \lambda_{ijk} x_{1i} x_{1j} x_{1k} + \Sigma \mu_{ijk} x_{2i} x_{2j} x_{2k} + \Sigma \nu_{ijk} x_{3i} x_{3j} x_{3k} \\ + \Sigma \chi_{ijk} x_{1i} x_{2j} x_{3k} = 0, \\ \Sigma \lambda_{ijk} x_{1i} x_{1j} x_{2k} + \Sigma \mu_{ijk} x_{2i} x_{2j} x_{3k} + \Sigma \nu_{ijk} x_{3i} x_{3j} x_{1k} = 0, \\ \Sigma \lambda_{ijk} x_{1i} x_{1j} x_{3k} + \Sigma \mu_{ijk} x_{2i} x_{2j} x_{1k} + \Sigma \nu_{ijk} x_{3i} x_{3j} x_{2k} = 0. \end{gathered}$$

Nous les désignerons respectivement par $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$. Le système $|V_0|$ a la dimension

[3] *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. Scient., n° 270), Paris, Hermann, 1935.

$$R = \binom{r_1+3}{3} + \binom{r_2+3}{3} + \binom{r_3+3}{3} + (r_1+1)(r_2+1)(r_3+1) - 1;$$

le système $|V_1|$ a la dimension

$$R_1 = \binom{r_1+2}{2}(r_2+1) + \binom{r_2+2}{2}(r_3+1) + \binom{r_3+2}{2}(r_1+1) - 1;$$

enfin, la dimension du système $|V_2|$ est

$$R_2 = \binom{r_1+2}{2}(r_3+1) + \binom{r_2+2}{2}(r_1+1) + \binom{r_3+2}{2}(r_2+1) - 1.$$

2. Pour obtenir une variété image de l'involution I_3, rapportons projectivement les hypersurfaces de $|V_0|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_R à R dimensions. A cet effet posons

$$X^{(1)}_{ijk} = x_{1i}x_{1j}x_{1k}, \qquad (i, j, k = 0, 1, \ldots, r_1),$$
$$X^{(2)}_{ijk} = x_{2i}x_{2j}x_{2k}, \qquad (i, j, k = 0, 1, \ldots, r_2),$$
$$X^{(3)}_{ijk} = x_{3i}x_{3j}x_{3k}, \qquad (i, j, k = 0, 1, \ldots, r_3),$$
$$X_{ijk} = x_{1i}x_{2j}x_{3k}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r_1; j = 0, 1, \ldots, r_2; k = 0, 1, \ldots, r_3),$$

et interprétons les X comme coordonnées des points de S_R. L'élimination des x entre les équations précédentes fournira les équations de la variété Ω_r, image de l'involution I_3.

Désignons par Σ_1 l'espace à $\binom{r_1+3}{3} - 1$ dimensions d'équations $X^{(2)}_{ijk} = 0$, $X^{(3)}_{ijk} = 0$, $X_{ijk} = 0$, par Σ_2 l'espace à $\binom{r_2+3}{3} - 1$ dimensions d'équations $X^{(1)} = 0$, $X^{(3)} = 0$, $X = 0$, par Σ_3 l'espace à $\binom{r_3+3}{3} - 1$ dimensions d'équations $X^{(1)} = 0$, $X^{(3)} = 0$, $X = 0$, enfin par Σ_0 l'espace à $(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1) - 1$ dimensions d'équations $X^{(1)} = 0$, $X^{(2)} = 0$, $X^{(3)} = 0$.

Parmi les équations de Ω, on trouvera les équations d'une variété de Veronese généralisée, Ω_1, représentant dans Σ_1 les hypersurfaces cubiques de σ_1. De même, on trouvera les équations d'une variété de Veronese Ω_2 représentant dans Σ_2 les hypersurfaces cubiques de σ_2 et les équations d'une variété de Veronese Ω_3 représentant dans Σ_3 les hypersurfaces cubiques de

σ_3. D'autre part, on trouvera les équations de la variété de Segre Ω_0 représentant dans Σ_0 les termes de points pris un dans chacun des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ou, en d'autres termes les équations de la variété Ω_0, à $r_1 + r_2 + r_3$ dimensions, produit des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

La variété Ω appartient aux variétés projetant Ω_1 de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_0$; projetant Ω_2 de l'espace de dimension minimum contenant $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_0$; projetant Ω_3 de l'espace de dimension minimum contenant Σ_1, Σ_2, Σ_0 ; projetant enfin Ω_0 de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Les autres équations de Ω seront de la forme

$$X^{(1)}_{ijk}X^{(2)}_{lmn}X^{(3)}_{pqr} = X_{ilp}X_{jmq}X_{knr}.$$

Le système linéaire $|V_0|$ est de degré 3^r, par conséquent la variété Ω est d'ordre 3^{r-1}.

3. Considérons une hypersurface V n'appartenant pas aux systèmes $|V_0|, |V_1|, |V_2|$. A cette hypersurface correspond sur Ω une variété V'. Lorsque la variété V tend d'une manière continue vers une variété V_0, la variété V' tend vers une section hyperplane V'_0 de Ω comptée trois fois. Il en résulte que V' appartient au système $|3V'_0|$.

Lorsque la variété V tend d'une manière continue vers une variété V_1, la variété V' tend vers une variété V'_1, homologue de V_1, comptée trois fois, augmentée d'une variété d'ordre zéro formée par les variétés de diramation de Ω.

On obtient un résultat analogue pour les variétés V'_2 qui correspondent sur Ω aux variétés V_2.

Il en résulte qu'une variété V'_1 oscule la variété Ω en tout point d'intersection. Il en est de même des variétés V'_2.

4. Soit F la surface d'ordre 3^{r-2} commune à $r - 2$ hypersurface V_0 linéairement indépendantes. Supposons que la surface F ne rencontre pas les axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de l'homographie H, ce qui est toujours possible si chacun des nombres r_1, r_2, r_3 est au plus égal à $r - 3$.

La surface F contient ∞^2 groupes de l'involution I_3 et ceux-ci forment sur la surface une involution privée de points unis. Cette involution est représentée par une surface Φ, d'ordre 3^{r-2}, appartenant à la variété Ω. Aux $r-2$ hypersurfaces V_0 définissant F correspondent dans S_R, $r-2$ hyperplans. La surface Φ est donc découpée sur la variété Ω par un espace linéaire à $R-r+2$ dimensions.

Désignons par C_0, C_1, C_2 les courbes découpées sur F par les hypersurfaces V_0 qui ne contiennent pas la surface, par les hypersurfaces V_1 et par les hypersurfaces V_2, par C'_0, C'_1, C'_2 les courbes qui leur correspondent sur Φ.

Les courbes C'_0 sont les sections hyperplanes de Φ. Il existe d'autre part des hypersurfaces de S_R osculant la surface Φ le long de chacune des courbes C'_1, C'_2. La surface Φ étant dépourvue de point de diramation, on a, sur Φ,

$$|3C'_0| = |3C'_1| = |3C'_2|$$

et cette surface a le diviseur de Severi $\sigma = 3$.

Les courbes C'_1, C'_2 ont le même ordre, 3^{r-2}, que la surface Φ.

5. Dans une note antérieure [1], nous avons déterminé les genres de la surface F et des courbes C découpées sur F par les hypersurfaces cubiques V. Nous avons précisément

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(3r^2 - 19r + 32) \cdot 3^{r-2} - 1,$$

$$p^{(1)} = (2r-7)^2 \cdot 3^{r-2} + 1.$$

Le genre π des courbes C est donné par

$$\pi = (r-3) \cdot 3^{r-1} + 1.$$

Il en résulte, d'après les formules de correspondance entre les surfaces F et Φ [2], que nous avons, pour Φ, les genres

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(3r^2 - 19r + 32) \cdot 3^{r-3} - 1,$$

$$p^{(1)} = (2r-7)^2 \cdot 3^{r-3} + 1.$$

(1) *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1944, pp. 301-317).

(2) Voir par exemple notre exposé sur *Les involutions cycliques...* (*loc. cit.*).

Les courbes C'_0, C'_1, C'_2 ont, par la formule de Zeuthen, le genre

$$(r - 3) \, . \, 3^{r-2} + 1.$$

Ces courbes sont de degré 3^{r-2} égal à l'ordre de Φ.

6. On peut construire d'autres surfaces de diviseur $\sigma = 3$. Supposons que chacun des nombres r_1, r_2, r_3 soit en plus égal à $r - 4$ et considérons la variété à trois dimensions W intersections de $r - 3$ hypersurfaces V_0 linéairement indépendantes. La variété W ne rencontre aucun des espaces σ_1, σ_2, σ_3 et I_3 détermine donc, sur cette variété, une involution cyclique dépourvue de points unis. Il lui correspond une variété W' section de Ω par un espace linéaire à $R - r + 3$ dimensions.

Soient F_0, F_1, F_2 les surfaces découpées sur W par les hypersurfaces V_0 ne contenant pas W, V_1 et V_2 ,par Φ_0, Φ_1, Φ_2 les surfaces correspondantes sur W'. On a

$$3 \, \Phi_0 \equiv 3 \, \Phi_1 \equiv 3 \, \Phi_2.$$

La surface Φ rencontrée plus haut appartient au système $|\Phi_0|$.

Une surface F_1 est l'intersection de W et d'une hypersurface V_1. Sur cette surface, il existe ∞^2 groupes de l'involution I_3 formant une involution privée de points unis. Il en résulte que les surfaces Φ_1 et de même les surfaces Φ_2 sont de diviseur $\sigma = 3$.

Ces surfaces ont d'ailleurs les mêmes genres que les surfaces Φ_0, c'est-à-dire que la surface Φ.

Liège, le 28 octobre 1950.