Bulletin de la Classe des sciences

Sur un point de diramation heptuple d'une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé

Étude d'un point de diramation d'une surface multiple d'ordre 83, multiple d'ordre sept pour cette surface, le cône tangent se décomposant en un cône ($\sigma 1$) du quatrième ordre et en trois plans ($\tau 1$), ($\tau 2$),($\sigma 2$). Le cône ($\sigma 1$) et le plan ($\tau 1$) ont une génératrice commune, les plans ($\tau 1$) et ($\tau 2$), ($\tau 2$) et ($\sigma 2$) se rencontrent suivant une droite. Au point de diramation est infiniment voisin un point double coni¬ que sur la droite commune aux plans ($\tau 2$), ($\sigma 2$).

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur un point de diramation heptuple d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'un point de diramation d'une surface multiple d'ordre 83, multiple d'ordre sept pour cette surface, le cône tangent se décomposant en un cône (σ_1) du quatrième ordre et en trois plans (τ_1), (τ_2), (σ_2). Le cône (σ_1) et le plan (τ_1) ont une génératrice commune, les plans (τ_1) et (τ_2), (τ_2) et (σ_2) se rencontrent suivant une droite. Au point de diramation est infiniment voisin un point double conique sur la droite commune aux plans (τ_2), (σ_2).

Dans nos recherches sur les points de diramation isolés des surfaces multiples, nous avons rencontré des points en lesquels le cône tangent à la surface multiple se scinde en quatre cônes rationnels (σ_1), (τ_1), (τ_2), (σ_2) dont chacun a une génératrice en commun avec le précédent et le suivant, mais ne rencontre pas les autres en dehors du sommet [1]. Nous avons observé que le point de diramation peut avoir des points doubles infiniment voisins non seulement sur la droite commune à (τ_1), (τ_2), mais aussi sur les droites communes à (σ_1), (τ_1) ou à (σ_2), (τ_2). Dans cette note, nous donnons un exemple d'un point de diramation possédant un point double infiniment voisin sur la droite commune aux cônes (τ_2), (σ_2).

1. Considérons, sur une surface algébrique F, une involution cyclique I d'ordre 83, ne possédant qu'un nombre fini de points unis.

Conservons les notations de la note citée plus haut et rappelons

[1] *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples*, septième note. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 834-840).

que l'on peut construire sur F un système linéaire $|C|$ contenant 83 systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et dont l'un, $|C_0|$, est privé de points-base. Soit A un point uni de l'involution I. Il existe dans $|C_0|$ une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|,\ |C_0''|,\ |C_0'''|,\ \ldots$$

dont les courbes passent par A et ont en ce point des multiplicités croissantes. Il existe deux tangentes à la surface F en A unies pour l'involution ; désignons-les par a_1, a_2.

Désignons par x_0, x_1, x_2 les coordonnées d'un point du plan tangent à F en A, le triangle de référence étant choisi de telle sorte que a_1, a_2, aient pour équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Supposons que l'involution I détermine dans ce plan l'homographie.

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^{60} x_3\,,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre 83, de l'unité. En posant $\eta = \epsilon^{60}$, on a d'ailleurs

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \eta^{18} x_2 : \eta x_3\,.$$

Les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, où λ_i et μ_i sont des entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + 60\mu = 0, \qquad \mu + 18\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 83).$$

Les courbes $C_0^{(i)}$ ont, en A, λ_i tangentes confondues avec a_1 et μ_i avec a_2.

2. Ces points rappelés, observons que l'on a $\lambda_1 = 9$, $\mu_1 = 4$ et

$$\lambda_1 + 60\mu_1 = 3.83, \qquad \mu_1 + 18\lambda_1 = 2.83.$$

Il en résulte, comme nous l'avons établi dans la note citée plus haut, que A est l'origine, sur chaque courbe C_0', de branches superlinéaires tangentes à a_1 et à a_2.

Observons d'autre part que les solutions de

$$\lambda + 60\mu = 83, \qquad \mu + 18\lambda = 83$$

sont respectivement $\lambda = 23$, $\mu = 1$ et $\lambda = 4$, $\mu = 11$.

On en conclut que les courbes C_0' ont en A la singularité représentée par le schéma

$$\begin{array}{llll} & & \mathrm{A}^{13}, (2,1)^4, (2,2)^4, (2,3)^4, (2,4)^3, (2,5)^1, \dots, (2,59)^1. & \\ (1,1,2)^1, & (1,1,1)^2, & (1,1)^6, & (2,4,1)^1, \ (2,4,1,1)^1. \\ (1,1,2,1)^1, & & (1,2)^4, & \\ & & \vdots & \\ & & (1,17)^4, & \end{array}$$

Si l'on rapporte projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace linéaire de même dimension que $|C'_0|$ on obtient une surface Φ_1, image de l'involution I. Au domaine du point (1,17) correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle normale σ_1 du quatrième ordre ; à ceux des points (1,1,2,1), (2,4,1,1), (2,59) correspondent respectivement des droites τ_1, τ_2, σ_2.

On sait que la courbe σ_1 rencontre la droite τ_1 en un point, mais ne rencontre pas τ_2 et σ_2 ; τ_1 rencontre τ_2 en un point et τ_2 rencontre σ_2 en un point. Les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ne se rencontrent pas deux à deux en d'autres points. Comme nous l'avons remarqué, ces points peuvent être simples, ou doubles pour la surface Φ_1.

Soit Φ la surface image de l'involution I dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. En projetant Φ du point de diramation A' homologue de A sur un hyperplan, on obtient une surface projectivement identique à Φ_1 et au domaine de A' sur Φ correspond sur Φ_1 l'ensemble des courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2. Le point A' est donc multiple d'ordre sept pour Φ et le cône tangent en ce point se compose d'un cône du quatrième ordre et de trois plans.

Si n est l'ordre de Φ, la surface Φ_1 a l'ordre $n - 7$. On vérifie sans peine que deux courbes C'_0 ont 7.83 points d'intersection absorbés en A.

3. Les courbes C''_5 ont en A la multiplicité 15 et leur comportement en ce point est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A}^{15}, & (2,1)^{10}, & (2,1)^1 & \dots, (2,59)^1. \\ (1,1)^4, & (2,1,1)^1, & (2,1,1,1)^1, & \dots, (2,1,1,8)^1. \\ \vdots & & & \\ (1,17)^4. & & & \end{array}$$

Si nous désignons par Γ_0' les sections hyperplanes de Φ_1, qui correspondent aux courbes C_0' et par Γ_0'' les courbes qui correspondent aux courbes C_0'', on voit que les courbes Γ_0'' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A_1' commun aux droites τ_1, τ_2, puisque les courbes C_0'' ne passent plus par les points (1,1,2,1), (2,4,1,1).

Deux courbes C_0'' ont 8.83 points d'intersection absorbés en A, par conséquent le système $|\Gamma_0''|$ a le degré effectif $n-8$ et le point A_1' est simple pour la surface Φ_1.

4. Les courbes C_0''' ont la multiplicité 24 en A ; leur comportement en ce point est fixé par le schéma

$$\begin{array}{lll} & & A^{24},\ (2,1)^1,\ \ldots,\ (2,59)^1. \\ (1,1,2)^4, & (1,1,1)^8, & (1,1)^{11}, \\ (1,1,2,1)^4 & & (1,2)^3, \\ & & \vdots \\ & & (1,17)^3. \end{array}$$

On en conclut qu'à ces courbes correspondent sur Φ_1 les courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans contenant la droite τ_1.

Le degré effectif du système $|\Gamma_0'''|$ est $n-12$. Les courbes Γ_0''' rencontrent la droite τ_1 en quatre points variables, la courbe σ_1 en trois points variables, la droite σ_2 en un point variable, mais elles ne rencontrent plus la droite τ_2.

5. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 26 en A et ne peuvent par conséquent plus passer par le point (2,59) ; les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ qui leur correspondent sur Φ_1 doivent donc être découpées par des hyperplans passant par la droite τ_2. Ces hyperplans passent déjà par la droite τ_1, car les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont des courbes Γ_0''' particulières.

Supposons que le point P, commun aux droites τ_2, σ_2, soit simple pour la surface Φ_1. On a alors

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2\,.$$

Les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont respectivement pour degrés virtuels -5, -3, -3, -2.

Les courbes Γ_0'''' sont données par

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + 2\tau_1 + \tau_2 + \sigma_2 .$$

et on vérifie que ces courbes rencontrent σ_1 en trois points, τ_1 en quatre points, σ_2 en un point, mais ne rencontrent pas τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ doivent être données par

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + \sigma_2 .$$

Mais ces courbes rencontreraient alors la droite σ_2 en trois points, ce qui est absurde. L'absurdité provint de notre hypothèse que P est simple pour Φ_1. Ce point est donc double pour cette surface et il est équivalent à t courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, rationnelles, de degré — 2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point et ne rencontrant pas les autres. De plus, ρ_1 rencontre τ_2 en un point et ρ_t rencontre σ_2 en un point.

On a actuellement

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \rho_1 + \ldots + \rho_t + \sigma_2$$

et les courbes Γ_0' ne rencontrent pas les courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$.

Il en est de même des courbes Γ_0'''' données par

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'''' + \sigma_1 + 2\tau_1 + \tau_2 + \rho_1 + \ldots + \rho_t + \sigma_2.$$

On aura cette fois

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\rho_1 + \ldots + 2\rho_t + \sigma_2.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ rencontrent σ_1 en trois points, τ_1 en trois points, τ_2 en deux points, ρ_t en un point, mais elles ne rencontrent pas $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{t-1}, \sigma_2$.

6. Dans le système $|C|$, il existe un système appartenant à l'involution I et dont les courbes passent simplement par les points A, (1,1), (1,2), ..., (1,17) ; appelons-le $|C_1|$ et soit $|\Gamma_1|$ le système qui lui correspond sur Φ_1. Les courbes Γ_1 rencontrent σ_1 en un point, mais ne rencontrent pas les autres courbes τ_1, $\tau_2, \rho_1, \ldots, \rho_t, \sigma_2$.

Les courbes Γ_1 satisfont à une relation fonctionnelle de la forme

$$83\Gamma_0 \equiv 83\Gamma_1 + a_1\sigma_1 + b_1\tau_1 + b_2\tau_2 + c_1\rho_1 + \ldots + c_t\rho_t + a_2\sigma_2 + \Delta,$$

où les a, b, c sont des entiers et où Δ est un terme qui provient des autres points de diramation de Φ.

En prenant les intersections de la courbe précédente avec σ_2, $\rho_t, \ldots, \rho_1, \tau_2, \tau_1, \sigma_1$, on a successivement

$$c_t - 2a_2 = 0,\ c_{t-1} - 2c_t + a_2 = 0,\ \ldots,\ b_2 - 2c_1 + c_2 = 0,$$
$$b_1 - 3b_2 + c_2 = 0,\ a_1 - 3b_1 + b_2 = 0,\ 83 - 5a_1 + b_1 = 0.$$

On en déduit

$$c_t = 2a_2,\ c_{t-1} = 3a_2,\ \ldots,\ c_2 = ta_2,\ c_1 = (t+1)a_2,$$
$$b_2 = (t+2)a_2,\ b_1 = (2t+5)a_2,\ a_1 = (5t+13)a_2$$

et enfin

$$(23t + 60)a_2 = 83.$$

On en déduit $a_2 = 1$, $t = 1$. Par conséquent, le point P, commun aux droites τ_2, σ_2, est double conique pour Φ_1.

On a

$$83\Gamma_0 \equiv 83\Gamma_1 + 18\sigma_1 + 7\tau_1 + 3\tau_2 + 2\rho + \sigma_2 + \Delta.$$

Observons qu'il existe également sur Φ_1 un système $|\Gamma_2|$ dont les courbes rencontrent en un point σ_2 mais ne rencontrent pas σ_1, τ_1, τ_2, ρ. On a

$$83\Gamma_0 \equiv 83\Gamma_2 + \sigma_1 + 5\tau_1 + 14\tau_2 + 37\rho + 60\sigma_2 + \Delta'.$$

7. Nous avons donc

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\rho + \sigma_2.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ rencontrent σ_1 en trois points, τ_1 en trois points, τ_2 en deux points, ρ en un point ; elles ne rencontrent pas σ_2. Il en résulte que les courbes $C_0^{(4)}$ doivent passer trois fois par le point (1,17), trois fois par le point (1,1,2,1), deux fois par le point (2,4,1,1), donc deux fois par le point (2,4,1). Le schéma du comportement des courbes $C_0^{(4)}$ en A est

$$\begin{array}{llll}
 & A^{26}, (2,1)^8, ., (2,3)^8, & (2,4)^6, (2,5)^2, \ldots, (2,17)^2, & (2,18)^1, \\
(1,1,2)^3, (1,1,1)^6, & (1,1)^9 & (2,4,1)^2, (2,4,1,1)^2. & (2,18,1)^1. \\
(1,1,2,1)^3, & (1,2)^3, & & \\
 & (1,17)^3. & &
\end{array}$$

Liège, le 26 juillet 1950.