Bulletin de la Classe des sciences

Sur le plan double dont la courbe de diramation se compose de trois coniques

Lucien Godeaux

Résumé
Nous nous proposons, dans cette courte note, de montrer que le plan double, de genres *pa* = P4 = 1, dont la courbe de diramation se compose de trois coniques situées dans la position la plus générale possible est birationnellement équivalent à une surface d'ordre huit, de l'espace à cinq dimensions, possédant trois points doubles coniques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le plan double dont la courbe de diramation se compose de trois coniques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Nous nous proposons, dans cette courte note, de montrer que le plan double, de genres $p_a = P_4 = 1$, dont la courbe de diramation se compose de trois coniques situées dans la position la plus générale possible est birationnellement équivalent à une surface d'ordre huit, de l'espace à cinq dimensions, possédant trois points doubles coniques.

1. Soit F le plan double dont la courbe de diramation se compose de trois coniques γ_1, γ_2, γ_3, situées dans la position la plus générale possible. Désignons par σ le plan support.

Considérons les quartiquesduplan σ passant par les 12 points communs à deux des coniques γ_1, γ_2, γ_3 et soit r la dimension du système qu'elles forment. Chacune de ces quartiques rencontre γ_1 en huit points fixes ; les ∞^{r-1} quartiques passant par un neuvième point de γ_1 contiennent cette conique comme partie et sont complétées par des coniques passant par les points communs à γ_2, γ_3. On en conclut $r = 2$.

Si

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$$

sont les équations des coniques γ_1, γ_2, γ_3, les quartiques en question sont représentées par

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0.$$

2. Désignons par Γ une des quartiques considérées, par C la courbe qui lui correspond sur la surface F. Parmi les courbes C, c'est-à-dire parmi les courbes Γ comptées deux fois, se trouvent les courbes formées de la courbe de diramation $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ et des droites du plan σ, comptées deux fois. On en conclut que sur la surface F, le système complet $|C|$ a la dimension cinq.

Le système $|\Gamma|$ a le degré quatre, donc $|C|$ a le degré huit. D'autre part, les courbes Γ ont le genre trois, donc les courbes C ont le genre cinq. $|C|$ a donc le genre et la dimension cinq, le degré huit, ce qui correspond bien au fait que le plan double F a les genres égaux à l'unité :

$$p_a = P_4 = 1.$$

Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions. Au plan double F correspond une surface d'ordre huit, simple, que nous désignerons par F_0.

Aux courbes Γ contenant γ_1 correspondent sur F_0 les courbes C découpées par les hyperplans passant par un point A_1 de cette surface. De même, en partant des coniques γ_2, γ_3, on obtient sur F_0 deux points A_2, A_3.

A une droite du plan σ correspond sur F_0 une courbe C, que nous désignerons par C_0, d'ordre huit, de genre deux, découpée sur la surface par un hyperplan passant par les points A_1, A_2, A_3.

Désignons par A_{ik} un des points communs aux coniques γ_i, γ_k. Au domaine de ce point correspond sur F_0 une courbe χ_{ik}, rationnelle, du second ordre, passant par les points A_i, A_k.

On obtient ainsi sur F_0 douze coniques : Quatre coniques χ_{23} passant par les points A_2, A_3 ; quatre coniques χ_{31}, passant par les points A_3, A_1 et quatre coniques χ_{12} passant par les points A_1, A_2.

Aux points de la conique γ_1 correspondent sur F_0 les points infiniment voisins de A_1. Une droite de σ coupant γ_1 en deux points, la courbe C_0 correspondante à un point double en A_1. De même, les courbes C_0 ont des points doubles en A_2, A_3.

A une conique passant par les points communs à γ_2, γ_3 correspond sur F_0 une courbe C ayant un point quadruple en A_1 et rencontrant encore une courbe C_0 en quatre points. On en conclut que le point A_1 est double pour la surface F_0. C'est d'autre part un point double conique si, comme nous le supposerons, la conique γ_1 est irréductible.

On voit ainsi que la surface F_0 possède trois points doubles coniques A_1, A_2, A_3.

Le cône tangent à F_0 en A_1 appartient à un espace linéaire à trois dimensions ; aux hyperplans contenant cet espace correspondent dans σ les coniques passant par les points d'intersection de γ_2, γ_3.

Observons qu'aux courbes C correspondent sur F les courbes

$$(\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2)^2 + \varphi_i\varphi_2\varphi_3(\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3)^2 = 0.$$

Aux sections de F_0 par les hyperplans passant par A_1 correspondent donc les courbes

$$\varphi_1(\lambda_2\varphi_3 + \lambda_3\varphi_2)^2 + \varphi_2\varphi_3(\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3)^2 = 0.$$

3. Aux points de σ correspondent sur F_0 des couples de points homologues dans une homographie H de S_5 transformant F_0 en soi. Cette homographie est biaxiale, ses axes ponctuels sont le plan σ_0 déterminé par les points A_1, A_2, A_3 et un plan σ. En projetant F_0 de σ_0 sur σ, on retrouve le plan double F.

Par un choix convenable des coordonnées de S_5, les équations de F_0 peuvent s'écrire

$$x_4x_5 = \varphi_1, \qquad x_5x_3 = \varphi_2, \qquad x_3x_4 = \varphi_3.$$

Les équations de l'homographie H sont alors

$$\frac{x'_2}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{-x_3} = \frac{x'_4}{-x_4} = \frac{x'_5}{-x_5}.$$

Le 16 septembre 1950.