Bulletin de la Classe des sciences

Sur les courbes tracées sur une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé
En utilisant certaines propriétés des courbes tracées sur une surface multiple n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation, on obtient certaines relations entre les ordres et le nombre des courbes dont l'ensemble équivaut à un point de diramation.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les courbes tracées sur une surface multiple,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — En utilisant certaines propriétés des courbes tracées sur une surface multiple n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation, on obtient certaines relations entre les ordres et le nombre des courbes dont l'ensemble équivaut à un point de diramation.

Soit Φ une surface multiple d'ordre p n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation. Si A' est l'un de ces points, il existe deux systèmes linéaires de courbes tracées sur la surface et passant simplement par A' ; le long de chacune de ces courbes, il y a une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec Φ. En utilisant cette propriété, on obtient une relation entre les ordres et le nombre des courbes rationnelles à l'ensemble duquel le point A' est équivalent. Nous traitons ici le cas où le cône tangent à Φ en A' se décompose en quatre cônes ou en trois cônes [1] ; dans le cas où ce cône se décompose en deux parties, nous avons déjà utilisé la méthode [2].

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, ne présentant qu'un nombre fini de points unis. On peut construire, sur F, un système linéaire complet $|C|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I et dont le premier soit dépourvu de points-base.

---

[1] Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACT. SCIENT. ET INDUS., n° 270 ; Paris, Hermann, 1935) et nos notes *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840). Nous supposons connus les résultats établis dans ces travaux.

[2] *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1938, pp. 193-222).

Si A est un point uni de seconde espèce de I, il existe deux tangentes a_1, a_2 à F en A contenant des points (1,1), (2,1) unis pour l'involution. Il existe dans $|C|$ un système, soit $|C_1|$, dont les courbes passent simplement par A en y touchant a_1 et un système, soit $|C_2|$, dont les courbes passent simplement par A en y touchant a_2.

Appelons C_0' les courbes C_0 passant par A ; elles ont en ce point une certaine multiplicité et leurs tangentes y sont confondues avec a_1, a_2.

Une courbe C_1 et une courbe C_0' ont p points d'intersection confondus en A. Elles ont en commun une suite de points infiniment voisins successifs de A dont le dernier est uni de première espèce pour I.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0 et par A' le point de diramation qui correspond à A. Soient $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent à $|C_1|$, $|C_2|$.

Au point uni de première espèce commun aux courbes C_0', C_1 correspond sur Φ une courbe rationnelle σ_1, infiniment petite, infiniment voisine de A', rencontrée en un point par les courbes Γ_1.

La courbe Γ_1 satisfait à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \Delta_1,$$

où Δ_1 est une combinaison à coefficients entiers des composantes des points de diramation de Φ.

On parvient de même à l'existence d'une courbe rationnelle σ_2, infiniment petite, infiniment voisine de A', rencontrée en un point par les courbes Γ_2. On a également une relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_2 + \Delta_2,$$

avec, pour Δ_2, une signification analogue à celle de Δ_1.

2. Supposons que le point A' soit équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_1, \rho_1', \dots, \rho_r', \tau_1, \rho_1, \dots, \rho_t, \tau_2, \rho_1'', \dots, \rho_s'', \sigma_2,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On sait (voir notre septième note citée plus haut), que les courbes $\rho_1', \ldots, \rho_r', \rho_1, \ldots, \rho_t, \rho_1'', \ldots, \rho_s''$ sont de degré virtuel — 2. Nous désignerons par $-\xi_1, -\eta_1, -\eta_2, -\xi_2$ les degrés virtuels respectifs de $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$.

La relation fonctionnelle rappelée plus haut s'écrit

$$\begin{aligned} p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + a_1\sigma_1 + m_1\rho_1' + \ldots + m_r\rho_r' + b_1\tau_1 + \\ + k_1\rho_1 + \ldots + k_t\rho_t + b_2\tau_2 + n_1\rho_1'' + \ldots + n_s\rho_s'' + a_2\sigma_2 + \Delta, \end{aligned}$$

où les a, b, m, k, n sont des entiers et Δ un terme provenant des autres points de diramation de Φ.

Pour déterminer les coefficients a, b, m, k, n, il suffit de considérer les intersections de la courbe précédente avec les courbes $\sigma, \tau, \rho, \rho', \rho''$. La courbe σ_2 par exemple rencontre ρ_s'' en un point, mais ne rencontre pas les autres courbes. On a donc

$$n_s - a_2\xi_2 = 0.$$

En considérant successivement les courbes $\rho_{s-1}'', \ldots, \rho_1'', \tau_2, \rho_t, \ldots, \rho_1, \tau_1, \rho_r', \ldots, \rho_1'$ on a de même

$$\begin{aligned} &n_{s-1} - 2n_s + a_2 = 0, \\ &n_{s-2} - 2n_{s-1} + n_s = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_2 - 2n_1 + n_2 = 0, \\ &k_t - b_2\eta_2 + n_1 = 0, \\ &k_{t-1} - 2k_t + b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_1 - 2k_1 + k_2 = 0, \\ &m_r - b_1\eta_1 + k_1 = 0, \\ &m_{r-1} - 2m_r + b_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1 - 2m_1 + m_2 = 0. \end{aligned}$$

Ces différentes relations permettent de déterminer $a_1, m_1, \ldots, n_s$ en fonction de a_2, ce nombre étant en facteur.

La courbe σ_1 ne rencontre pas Γ_0, mais rencontre Γ_1 en un point. On a donc

$$p - a_1\xi_1 + m_1 = 0.$$

Observons que des relations précédentes, on tire $\xi_1 = Aa_2$, $m_1 = Ma_2$, par conséquent a_2 doit diviser p, donc $a_2 = 1$ ou $a_2 = p$, puisque p est un nombre premier.

3. Pour résoudre les équations précédentes, nous poserons

$$A_1 = (r+1)\xi_1 - r, \qquad A_2 = (s+1)\xi_2 - s,$$
$$B_1 = r\xi_1 - r + 1, \qquad B_2 = s\xi_2 - s + 1.$$

On obtient facilement

$$n_1 = B_2 a_r, \quad b_2 = A_2 a_2, \quad k_t = (A_2\eta_2 - B_2)a_2,$$

et ensuite

$$k_1 = tk_t - (t-1)b_2, \qquad b_1 = (t+1)k_t - tb_2,$$
$$m_r = [(t+1)\eta_1 - t[k_t - (t\eta_1 - t + 1)b_2.$$

Enfin, on obtient

$$m_1 = rm_r - (r-1)b_1, \quad a_1 = (r+1)m_2 + rb_1.$$

La dernière relation nous donne enfin

$$p = Ha_2,$$

où

$$H = (t+1)(A_1\eta_1 - B_1)(A_2\eta_2 - B_2)$$
$$+ t[(A_1\eta_1 - B_1)A_2 + (A_2\eta_2 - B_2)A_1] + (t-1)A_1A_2.$$

H étant certainement supérieur à l'unité, on a $a_2 = 1$ et

$$H = p.$$

On arrive donc à la relation suivante entre les nombres ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, r, t, s et p.

$$t[(A_1\eta_1 - B_1)(A_2\eta_2 - B_2) + (A_1\eta_1 - B_1)A_2 + (A_2\eta_2 - B_2)A_1 + A_1A_2]$$
$$+ (A_1\eta_1 - B_1)(A_2\eta_2 - B_2) - A_1A_2 = p.$$