Bulletin de la Classe des sciences

Sur le calcul des invariants d’une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation

Lucien Godeaux

Résumé

On considère une surface algébrique Φ image d’une involution d’ordre premier, cyclique, appartenant à une surface F et n'ayant qu’un nombre fini de points unis. Les relations entre le genre linéaire, l’invariant de Zeuthen-Segre et le genre arithmétique de F, et les invariants correspondants de Φ, dépendent de la structure des points unis de l’involution et de celle des points de diramation de Φ. On indique comment on peut établir ces relations en utilisant une méthode due à M. F. Severi.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère une surface algébrique Φ image d'une involution d'ordre premier, cyclique, appartenant à une surface F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Les relations entre le genre linéaire, l'invariant de Zeuthen-Segre et le genre arithmétique de F, et les invariants correspondants de Φ, dépendent de la structure des points unis de l'involution et de celle des points de diramation de Φ. On indique comment on peut établir ces relations en utilisant une méthode due à M. F. Severi.

Les relations qui lient les genres linéaires, les invariants de Zeuthen-Segre et les genres arithmétiques de deux surfaces algébriques en correspondance (n, n') ont été établies par M. F. Severi en fonction des courbes de diramation et des éléments fondamentaux [1]. Si une surface F contient une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis et si Φ est une surface image de cette involution, on pourrait déduire des formules très générales de M. Severi les relations qui lient les invariants des surfaces F et Φ. Il nous a paru intéressant de rechercher directement ces relations, mais naturellement en procédant comme M. Severi le fait. On recherche en premier lieu la relation entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $\pi^{(1)}$ de Φ, puis la relation entre les invariants de Zeuthen-Segre I et I' de ces surfaces. On obtient ensuite la relation entre les genres arithmé-

(1) *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (REND IST. LOMB., 1903, pp. 495-511).

tiques p_a de F et π_a de Φ en utilisant la relation de Noether

$$p^{(1)} + \mathrm{I} = 12p_a + 9.$$

Nous considérons en terminant quelques exemples.

Nous utilisons les résultats que nous avons obtenus récemment sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (1).

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous désignerons par Φ une surface image de cette involution et nous supposerons que cette surface est normale et que les points de diramation sont isolés.

Au système $|\Gamma_0|$ des sections hyperplanes de Φ correspond sur F un système linéaire $|\mathrm{C}_0|$, privé de points-base, compris dans un système linéaire plus ample $|\mathrm{C}|$, transformé en lui-même par la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I.

Recherchons la liaison entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $\pi^{(1)}$ de Φ.

Soient A un point uni de l'involution I et A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Appelons C_0' les courbes C_0 assujetties à la seule condition de passer par A et Γ_0' les courbes qui leur correspondent sur Φ, c'est-à-dire les sections de cette surface par les hyperplans passant par A'. Les courbes Γ_0' sont les sections hyperplanes de la surface Φ_1 projection de Φ à partir de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant.

On sait qu'au domaine du point A' sur Φ correspond sur Φ_1 un ensemble comprenant au plus quatre courbes rationnelles $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ dont nous désignerons les ordres par $\lambda_1', \nu_1, \nu_2, \mu_1'$. Chacune des courbes précédentes rencontre la précédente et la suivante chacune en un point et ne rencontre pas les autres.

(1) *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1948, pp. 189-210) ; *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENT., n° 270, Paris, Hermann, 1935).

Le point commun à σ_1, τ_1 est au plus double pour Φ_1 et dans ce cas, il est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles ρ_1', ρ_2', ... de degré virtuel -2. De même, le point commun à τ_1, τ_2 est en plus double pour Φ_1 et est alors équivalent à un ensemble de courbes rationnelles ρ_1, ρ_2... de degré virtuel -2. Enfin, le point commun aux courbes τ_2, σ_2 est au plus double pour Φ_1 et est dans ce cas équivalent à un ensemble de courbes rationnelles ρ_1'', ρ_2'', ... de degré virtuel -2.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \Sigma \rho' + \tau_1 + \Sigma \rho + \tau_2 + \Sigma \rho'' + \sigma_2.$$

Les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ ont respectivement les degrés virtuels $-(\lambda_1' + 1) - (\nu_1 + 2)$, $-(\nu_2 + 2)$, $-(\mu_1' + 1)$.

Les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ représentent les domaines de certains points P_1, R_1, R_2, P_2 appartenant à des domaines d'un certain ordre du point A. Les courbes C_0' ont en A une certaine multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ et passent par quatre suites de points fixes, infiniment voisins successifs, unis de seconde espèce pour l'involution, se terminant respectivement aux points P_1, R_1, R_2, P_2, unis de première espèce et respectivement multiples d'ordres λ_1', ν_1, ν_2, λ_2' par ces courbes.

Si nous désignons par π le genre et le degré de $|\Gamma_0|$, $|C_0|$ et $|C|$ ont le genre $p(\pi - 1) + 1$ et le degré pn. Les courbes Γ_0' ont le genre

$$\pi - (\lambda_1' + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1') + 1$$

et le degré

$$n - (\lambda_1' + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1').$$

Par conséquent, les courbes C_0' ont le genre

$$p\pi - \frac{1}{2}(p + 1)(\lambda_1' + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1') + 1$$

et le degré

$$pn - p(\lambda_1' + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1').$$

2. Supposons qu'il existe sur une surface algébrique une courbe rationnelle γ de degré $-\omega$ et soit $|D|$ un système linéaire de courbes de degré n' et de genre π', suffisamment ample pour que le système $|D - \gamma|$ existe et soit au moins ∞^2. Soient n'' et π'' le degré et le genre de $|D - \gamma|$.

Les courbes canoniques K de la surface rencontrent une courbe D en $2\pi' - 2 - n'$ points et les courbes $D - \gamma$ en $2\pi'' - 2 - n''$ points. Or, si m est le nombre de points de rencontre des courbes $D - \gamma$ avec γ, on a

$$\pi'' + m - 1 = \pi', \qquad n'' - \omega + 2m = n'.$$

On en conclut que les courbes canoniques K rencontrent la courbe γ en $\omega - 2$ points.

Si, sur la surface Φ, γ est l'une des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$, il suffira de prendre pour $|D|$ le système $|\Gamma'_0|$. On voit alors que les courbes canoniques de Φ rencontrent σ_1 en $\lambda'_1 - 1$ points, τ_1 en ν_1 points, τ_2 en ν_2 points et σ_2 en $\mu'_1 - 1$ points. Les transformées sur F des courbes canoniques de Φ passent $\lambda'_1 - 1$ fois par P_1, ν_1 fois par R_1, ν_2 fois par R_2 et $\mu'_1 - 1$ fois par P_2. La structure des courbes C'_0 en A étant connue, il est alors possible de déterminer celle des courbes transformées des courbes canoniques de Φ.

Désignons par k le nombre de points d'intersection de deux courbes de F, transformées de courbes canoniques de Φ, absorbés en A. On a

$$p(\pi^{(1)} - 1) = p^{(1)} - 1 - \Sigma h,$$

$\pi^{(1)}$ étant le genre linéaire de Φ, $p^{(1)}$ celui de F et la sommation étant étendue à tous les points de diramation de la surface Φ.

Les courbes ρ, ρ', ρ'', qui sont de degré -2, ne sont pas rencontrées par les courbes canoniques de Φ.

3. Désignons par I' l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ. Pour calculer cet invariant, considérons un faisceau de courbes Γ_0 et soit δ le nombre de ces courbes ayant un point double.

Parmi les courbes du faisceau considéré, il en est une qui passe par le point A'. Cette courbe comprend, comme nous l'avons rappelé, les composantes rationnelles du point de diramation A', comptées chacune une fois ; elle doit donc être considérée comme une courbe ayant comme points doubles les $\lambda'_1 + \nu_1 + \nu_2 + \mu'_1$ points de rencontre de σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 avec une courbe Γ'_0 et les points communs aux courbes σ_1, ρ'_1, τ_1, ρ, τ_2, ρ'', σ_2. Si r est le nombre total de ces courbes, on obtient ainsi $r - 1$ points doubles. Nous poserons

$$k = \lambda_1' + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1' + r - 1.$$

On a alors

$$\mathrm{I}' = \delta + \Sigma k - n - 4\pi, \tag{1}$$

la sommation étant étendue à tous les points de diramation de Φ.

Au faisceau de courbes Γ_0 considéré correspond sur F un faisceau de courbes C_0 que nous allons utiliser pour calculer l'invariant de Zeuthen-Segre I de F.

A une courbe Γ_0 possédant un point double correspond une courbe C_0 ayant p points doubles.

Le faisceau de courbes C_0 considéré sur F comprend une courbe C_0' passant par A. Cette courbe équivaut à un certain nombre de courbes C_0 ayant un point double. Pour calculer ce nombre, reprenons le raisonnement qui a conduit C. Segre au calcul de l'invariant I. Désignons par $|\overline{C}_0|$ le faisceau considéré et soit $|D|$ un faisceau quelconque de courbes. Segre considère la courbe T lieu des points où une courbe $\overline{C}_0$ et une courbe D se touchent.

On a [1]

$$T \equiv K + 2\overline{C}_0 + 2D,$$

où $|K|$ est le système canonique de F. On en déduit

$$T \equiv \overline{C}_{0a} + \overline{C}_0 + 2D,$$

où $\overline{C}_{0a}$ est une adjointe à $|C_0|$. Par conséquent, T se comporte au point A comme une adjointe à $\overline{C}_0'$.

Cela étant, on considère les différentes branches de T d'origine A et on compte le nombre des intersections de chacune de ces branches avec C_0' absorbés en A. Si une des branches en question rencontre C_0' en un point confondu en A, le point A équivaut, sur cette branche, à $m - 1$ contacts simples des courbes $\overline{C}_0$

(1) F. Severi, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.* (Rome, Cremonese, 1942). Voir p. 199 et suiv.

avec T. En faisant la somme des nombres ainsi obtenus pour les différentes branches de T d'origine A, on obtient un nombre k' exprimant que la courbe C_0' équivaut à autant de courbes C_0 ayant un point double.

Cela étant, on a (la sommation étant étendue à tous les points unis)

$$I = p\delta + \Sigma\, k' - pn - 4p\pi + 4p - 4. \qquad (2)$$

Des relations (1), (2), on déduit

$$I + 4 = p(I' + 4) + \Sigma\,(k' - pk).$$

4. Utilisons maintenant la relation de Noether,

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9$$

et désignons par p_a le genre arithmétique de F, par π_a celui de Φ.

On obtient ainsi la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) + \Sigma\,(k' - pk + h),$$

entre les genres arithmétiques p_a de F et π_a de Φ.

Le nombre $k' - pk + h$ est l'apport d'un point de diramation déterminé. Nous allons le calculer dans quelques cas particuliers.

5. Commençons par considérer le cas où l'on a, en un point uni A,

$$p = (2t + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1,$$
$$\alpha = (2t + 1)\lambda_1 + 1, \qquad \beta = (2t + 1)\mu_1 + 1.$$

Le point A' est multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ pour la surface Φ et cette surface possède t points doubles biplanaires infiniment voisins successifs de A', le dernier de ces points étant ordinaire. Actuellement, les courbes τ_1, τ_2 manquent ; les courbes σ_1, σ_2 ont les ordres λ_1, μ_1 et le point A' est équivalent à un ensemble de $2t + 2$ courbes

$$\sigma_1, \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1b}, \rho_{2b}, \ldots, \rho_{21}, \sigma_2.$$

La première est de degré virtuel $-(\lambda_1 + 1)$, la dernière de degré virtuel $-(\mu_1 + 1)$, les autres, de degrés virtuels -2.

Les courbes de F transformées des courbes canoniques de Φ, ont en A la structure

$$\begin{array}{l} A^{\lambda_1+\mu_1-2},\ (2,\,1)^{\mu_1-1},\ \ldots,\ (2,\,\alpha-1)^{\mu_1-1}, \\ (1,\,1)^{\lambda_1-1}, \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ (1,\,\beta-1)^{\lambda_1-1}. \end{array}$$

On a par conséquent

$$h = p(\lambda_1 + \mu_1 - 4) + (2t + 1)(\lambda_1 + \mu_1) + 4$$

On a d'autre part

$$k = \lambda_1 + \mu_1 + 2t + 1.$$

La courbe T passe $\lambda_1 + \mu_1 - 1$ fois par A, $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1,\,1)$, ..., $(1,\,\beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par les points $(2,\,1)$, ..., $(2,\,\alpha - 1)$. Le point A est donc, sur cette courbe, l'origine de $\lambda_1 + \mu_1 - 1$ branches et on a

$$k' = (p - 1)(\lambda_1 + \mu_1 - 2) + \lambda_1 + \mu_1 - 1.$$

On en conclut que l'influence du point considéré est

$$k' - pk + h = p(\lambda_1 + \mu_1 - 2t - 7) + (2t + 1)(\lambda_1 + \mu_1) + 5.$$

6. Supposons maintenant que l'on ait, pour un point uni A,

$$p = 2(t + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1,$$

$$\alpha = 2(t + 1)\lambda_1 + 1, \quad \beta = 2(t + 1)\mu_1 + 1$$

Le point de diramation A' est équivalent à l'ensemble de $2t + 3$ courbes rationnelles

$$\sigma_1,\ \rho_{11},\ \rho_{12},\ \ldots,\ \rho_{1t},\ \rho_0,\ \rho_{2t},\ \ldots,\ \rho_{22},\ \rho_{21},\ \sigma_2.$$

La première est de degré virtuel $-(\lambda_1 + 1)$, la dernière de degré virtuel $-(\mu_1 + 1)$ et les autres de degrés virtuels -2. Les courbes canoniques de Φ rencontrent σ_1 en $\lambda_1 - 1$ points et σ_2 en $\mu_1 - 1$ points. On a

$$h = p(\lambda_1 + \mu_1 - 4) + 2(t + 1)(\lambda_1 + \mu_1) + 4.$$

On trouve cette fois

$$k = \lambda_1 + \mu_1 + 2t + 2$$

et on a encore

$$k' = (p - 1)(\lambda_1 + \mu_1 - 2) + \lambda_1 + \mu_1 - 1.$$

L'influence du point A est donc

$$k' - pk + h = p(\lambda_1 + \mu_1 - 2t - 8) + 2(t + 1)(\lambda_1 + \mu_1) + 5.$$

7. Nous allons maintenant envisager le cas où le point A est celui que nous avons étudié dans la cinquième note sur les points de diramation isolés d'une surface multiple. On a $p = 41$, $\alpha = 25$, $\beta = 23$.

Les courbes C'_0 ont en A le comportement fixé par le schéma

$$\begin{array}{llllllll}
A^{10}, & (2, 1)^3, & (2, 2)^3, & (2, 3)^3, & (2, 4)^2, & (2, 5)^1, & \dots, & (2,24)^1 \\
(1, 1)^7, & & & & (2, 4, 1)^1. & & & \\
(1, 2)^4, & (1, 2. 1)^3. & & & & & & \\
(1, 3)^1, & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & \\
(1, 22)^1. & & & & & & &
\end{array}$$

Le point A' est équivalent à quatre courbes rationnelles, une droite σ_1 correspondant au domaine du point (1, 22), une cubique gauche τ_1, correspondant au domaine de (1, 2, 1), une droite τ_2, correspondant au domaine de (2, 4, 1) et une droite σ_2, correspondant au domaine de (2, 24).

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2$$

et les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ ont respectivement les degrés virtuels -2, -5, -3 et -2.

Les courbes canoniques de Φ ne rencontrent pas les courbes σ_1, σ_2, mais rencontrent τ_1 en trois points et τ_2 en un point. Le comportement de leurs transformées sur F a donc le schéma

$$A^8,\ (2, 1)^2,\ (2, 2)^2,\ (2, 3)^2,\ (2, 4)^1,$$
$$(1, 1)^6, \qquad (2, 4, 1)^1.$$
$$(1, 2)^3,\ (1, 2, 1)^3.$$

On a par conséquent $h = 132$.

On a d'autre part $k = 9$.

Le comportement de la courbe T au point A a le schéma

$$A^9,\ (2, 1)^2,\ (2, 2)^2,\ (2, 3)^2,\ (2, 4)^1.$$
$$(1, 1)^6,$$
$$(1, 2)^3,\ (1, 2, 1)^2.$$

On a par suite $k' = 75$.

L'influence du point A est donc

$$k' - 41k + h = -162.$$

8. Considérons enfin le point uni considéré dans notre sixième note. On a $p = 61$, $\alpha = 37$, $\beta = 33$. Les courbes C'_0 ont en A le schéma

$$A^{14},\ (2, 1)^3,\ \ldots\ (2, 5)^3,\ (2, 6)^2,\ (2, 7)^1,\ \ldots,\ (2, 36)^1.$$
$$(1, 1)^{11}, \qquad (2, 6, 1)^1,$$
$$(1, 2)^6,\ (1, 2, 1)^5.$$
$$(1, 3)^1,$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(1, 32)^1.$$

Le point A' est équivalent à quatre courbes rationnelles : une droite σ_1, de degré virtuel -2, une quintique τ_1, de degré virtuel -7, une droite τ_2, de degré virtuel -3 et une droite σ_2, de degré virtuel -2.

Les courbes canoniques de Φ rencontrent τ_1 en cinq points, τ_2 en un point, mais ne rencontrent pas σ_1 et σ_2. Leurs transformées sur F ont en A le schéma

$$A^{12},\ (2, 1)^2,\ \ldots,\ (2, 5)^2,\ (2, 8)^1,$$
$$(1, 1)^{10}, \qquad (2, 6, 1)^1.$$
$$(1, 2)^5,\ (1, 2, 1)^5.$$

Par conséquent, on a $h = 316$.
On a d'autre part $k = 11$.
La courbe T a en A le comportement fixé par le schéma

$$A^{13},\ (2,1)^2,\ \ldots,\ (2,5)^2,\ (2,6)^1.$$
$$(1,1)^{10},$$
$$(1,2)^5,\ (1,2,1)^4.$$

On en conclut $k' = 183$.
L'influence du point A est par conséquent

$$k' - 61k + h = -172.$$

Liège, le 14 février 1950.