Bulletin de la Classe des sciences

Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique

Lucien Godeaux

Résumé

Si la surface F représente les courbes de points d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique *yp* d'ordre premier impair *p*, il existe sur F une involution cyclique I*p* d'ordre *p*. A un point uni de *yp* compté deux fois correspond un point uni de I*p*. On démontre qu'à ce point est infiniment voisin un point uni de première espèce.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Si la surface F représente les courbes de points d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p, il existe sur F une involution cyclique I_p d'ordre p. A un point uni de γ_p compté deux fois correspond un point uni de I_p. On démontre qu'à ce point est infiniment voisin un point uni de première espèce.

Dans des notes récentes (¹), nous avons considéré l'involution cyclique I_p, d'ordre premier impair p, appartenant à la surface F représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p d'ordre p. Nous nous étions attaché, dans les deux dernières notes citées, à déterminer la structure des points unis de l'involution I_p ; nous avions partagé ceux-ci en trois catégories. Dans cette note, nous allons complètement déterminer la structure des points unis de la troisième catégorie.

D'une manière précise, si V' est un point uni de γ_p, à ce point compté deux fois correspond sur F un point uni U de l'involution I_p. Ce point U est uni de seconde espèce. Nous démontrons qu'*il*

(¹) *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (RENDICONTI ACCAD. NAZ. DEI LINCEI, juin 1949, pp. 694-696) ; *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DE LIÈGE, 1949, pp. 117-195) ; *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1950, pp. 102-112).

possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni de première espèce (1).

Ajoutons que dans nos notes citées, nous avions supposé que l'involution γ_p était irrationnelle ; nous laissons actuellement tomber cette hypothèse.

1. Rappelons brièvement la construction de l'involution I_p. Soient L une courbe algébrique de genre π contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier p impair. Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Un point P de F représente un couple de points P_1, P_2 de L. La transformation birationnelle de L en soi, génératrice de γ_p, fait correspondre à P_1, P_2, deux points P'_1, P'_2, représentés par un point P' de F. Le point P' est rationnellement déterminé par le point P et il existe donc une transformation birationnelle T de F en soi, faisant passer de P à P'. Cette transformation a la période p et engendre sur F une involution I_p d'ordre p.

Par hypothèse, p est impair, donc I_p possède un nombre fini de points unis ; ce sont les points qui représentent les couples de points unis, distincts ou non, de l'involution γ_p.

En particulier, si U' est un point uni de γ_p, le point U de F qui représente le point U' compté deux fois, est un point uni de I_p. Ce sont ces points que nous étudierons ici.

2. Nous pouvons, sans restriction, supposer que la courbe L est gauche ; la surface F représente alors les bisécantes de la courbe.

Aux couples de points de L contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe K. On obtient ainsi sur F un système continu $\{K\}$, de degré un et d'indice deux.

Aux couples de points de L formés de deux points confondus correspondent sur F les points d'une courbe K_0.

Les courbes K représentent les cônes circonscrits à L dont les

(1) Un point uni isolé d'une involution cyclique est de première espèce si tous les points de son domaine du premier ordre sont unis ; il est de seconde espèce dans le cas contraire.

sommets appartiennent à cette courbe. La courbe K_0 représente la développable circonscrite à L. Celle-ci étant l'enveloppe des cônes précédents, la courbe K_0 est l'enveloppe du système $\{K\}$. Une courbe K est donc tangente à la courbe K_0 au point qui représente le sommet, compté deux fois, du cône dont K est l'image.

Nous supposerons dans la suite que L appartient à un espace S_r, où r peut être choisi aussi grand qu'on le veut. On obtiendra un modèle projectif de F en rapportant projectivement les complexes linéaires de droites de S_r aux hyperplans d'un espace linéaire à $\binom{r}{2} - 1$ dimensions.

3. Soient U' un point de L uni pour l'involution γ_p, t la tangente en ce point à la courbe, U le point de K_0 qui représente le point U' compté deux fois et K_1 la courbe K passant par U et représentent donc le cône projetant L de U'.

Les courbes K_0 et K_1 sont évidemment transformées en elles-mêmes par T et U est un point uni de I_p.

Les cordes de L s'appuyant sur un espace linéaire S_{r-2} rencontrant t en un point, formant une réglée représentée sur F par une courbe passant par U. Cette courbe n'est pas en général transformée en soi par T, donc U est un point uni de seconde espèce.

Appelons U_1 le point infiniment voisin de U appartenant aux courbes K_0, K_1 ; ce point est uni pour l'involution I_p. Supposons qu'il soit un point uni de seconde espèce.

Dans cette hypothèse, l'involution I_p possède, dans le domaine du second ordre de U, deux points unis U_{11}, U_{12}, infiniment voisins de U_1. La courbe K_0 étant unie pour T, doit passer par l'un des points U_{11}, U_{12} ; supposons qu'elle passe par le premier U_{11}. La courbe K_1, qui est également transformée en soi par T et qui ne peut osculer K_0 en U, doit alors passer par le point U_{12}.

Le point U étant simple pour chacune des courbes K_0, K_1 est, sur chacune de celles-ci, l'origine d'une branche linéaire. Or, il résulte de la théorie des points unis isolés des involutions cycliques (1), que si U_{11} se trouve sur une branche linéaire d'origine U,

(1) Voir nos notes *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (Bull. de

le point U_{12} se trouve sur une branche superlinéaire, et inversement. Nous parvenons donc à une contradiction et les courbes K_0, K_1 doivent passer soit par U_{11}, soit par U_{12}. Elles s'osculeraient alors en U, ce qui est impossible. On en conclut que le point U_1 est uni de première espèce pour l'involution I_p.

Nous avons déterminé la structure des points unis U possédant un point uni de première espèce dans son domaine du premier ordre. Si nous posons $p = 2\nu + 1$, il existe une suite de ν points unis infiniment voisins successifs de U, dont le premier est distinct de U_1 et dont le dernier est uni de première espèce, les autres étant unis de seconde espèce [1].

4. Nous allons maintenant, en utilisant le résultat qui vient d'être obtenu, faire une remarque sur le n° 6 de notre note citée plus haut, parue dans le Bulletin de février 1950 de l'Académie. Nous conservons les notations de ce travail.

Nous avons considéré un point uni U'_i de γ_p et supposé que la tangente t_i à L en ce point coupe en P_i l'espace σ_j Le point U'_i appartient à l'espace σ_h et σ_j, σ_h sont deux axes de l'homographie τ engendrant γ_p sur L. On suppose que cette courbe est la courbe canonique, d'ordre $2\pi - 2$ de $S_{\pi-1}$. Désignons par ξ le plan osculateur à la courbe L au point U'_1. D'après ce que nous avons vu, la droite passant par U'_i, infiniment voisine de t_i dans ξ est unie pour l'homographie τ. Ce résultat est obtenu si le plan ξ rencontre l'axe σ_j de τ suivant une droite, car τ détermine alors dans ξ une homologie de centre U'_i. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; le plan ξ s'appuie sur un troisième axe σ_k de τ. Si P'_i est le point d'appui, τ détermine dans ξ une homographie non homologique ayant pour points unis U'_i, P_i, P'_i. Pour notre objet, le point infiniment voisin de P_i sur la droite $P_iP'_i$ doit être uni de première espèce pour cette homographie.

Rapportons le plan ξ au triangle U'_i P_i P'_i et soient (1, 0, 0)

L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 837-840) ; *Osservazioni sui punti uniti delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* (en cours d'impression dans les RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DI ROMA).

[1] *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1930, pp. 450-467).

les coordonnées de P_i, (0, 1, 0) celles de P'_i et (0, 0, 1) celles de U'_i. Nous avons attaché aux espaces σ_h, σ_j, σ_k les nombres ϵ^h, ϵ^j, ϵ^k, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. L'homographie déterminée par τ dans ξ a donc comme équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \epsilon^j x_1 : \epsilon^k x_2 : \epsilon^h x_3,$$

ou encore

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon^{k+p-j} x_2 : \sigma^{h+p-j} x_3. \tag{1}$$

Pour que le point infiniment voisin de P_i sur la droite $x_3 = 0$ soit uni de première espèce pour l'homographie (1), il faut et il suffit que l'on ait

$$h + p - j = 2(k + p - j), \qquad (\text{mod. } p).$$

Liège, le 10 avril 1950.