NOTES

DE

GÉOMÉTRIE

SYNTHÉTIQUE

PAR

L. GODEAUX

Élève-ingénieur a l'École des Mines du Hainaut

Extrait des Mémoires et Publications
de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut,
t. IX, 6e série.

MONS
IMPRIMERIE DEQUESNE-MASQUILLIER & FILS
1907

NOTES
DE
GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

PAR

L. GODEAUX

Élève-ingénieur a l'École des Mines du Hainaut

Dans ces quelques notes, nous exposons des générations de courbes, de surfaces et de complexes, et nous déterminons l'ordre de ces figures à l'aide du principe de *Chasles* généralisé. Plus loin, nous donnons une application d'une formule de *F. Deruyts* et une extension à la géométrie réglée du théorème de *Pascal*.

1. — **Génération des courbes planes.** — Soient a_2, a_3, deux courbes unicursales respectivement d'ordre m_2, m_3 et b_1, b_2 b_3 des courbes de classes respectivement n_1, n_2, n_3.

Proposons-nous de rechercher l'ordre de la courbe décrite par le sommet A_1 du triangle A_1 A_2 A_3 dont les sommets A_2, A_3 décrivent respectivement les courbes a_2, a_3, tandis que les côtés A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2 enveloppent les courbes b_1, b_2, b_3.

Par un point D d'une droite d quelconque, menons les n_2 tangentes à la courbe b_2. Ces tangentes marquent sur la courbe a_3, n_2 m_3 points. Par ces points, menons les tangentes à la courbe b_1. Ces droites déterminent sur la courbe a_2,

$m_2\, m_3\, n_2\, n_1$ points. Les tangentes menées par ces points à la courbe b_3 marquent sur la droite d, $n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$ points que nous désignerons par D′. Inversement, à un point D′ correspondent $n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$ points D. Entre les points D et D′ existe donc une correspondance ($n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$, $n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$). Il y a, d'après *Chasles*, $2n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$ coïncidences. L'ordre du lieu cherché est donc $2n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$. Donc :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses sommets décrivent des courbes données respectivement d'ordres m_2, m_3, *tandis que les trois côtés enveloppent des courbes de classes respectives* n_1, n_2, n_3, *le troisième sommet décrira une courbe d'ordre* $2\, n_1\, n_2\, n_3\, m_2\, m_3$.

Le cas où n_1, n_2, n_3 et m_3 sont égaux à l'unité, a été étudié par *M. Schoute*.

2. — **Génération de la surface cubique.** — Soit un trièdre de sommet S et dont les faces sont α, β et γ. Donnons-nous encore un plan π et trois droites a, b, c. Nous supposons que ces éléments n'ont aucune relation entre eux.

Proposons-nous de calculer l'ordre du lieu du sommet d'un trièdre mobile dont les faces passent par trois droites fixes a, b, c, et rencontrent les faces du trièdre donné en trois droites telles que la quadrique qu'elles déterminent admette une génératrice perpendiculaire au plan π.

Sur une droite d quelconque, prenons les points D et D′. Les plans (a, D) et (b, D′) rencontrent respectivement les plans α et β suivant les droites α_1 et β_1. Il n'existe qu'une droite s'appuyant sur ces deux droites et perpendiculaire au plan π. Cette droite rencontre le plan γ en un point qui, avec la droite c, détermine un plan. Ce plan marque sur la droite d'un point D″.

Inversement, au couple D, D″ correspond un point D, et au couple D′, D″ un point D. Entre les points D, D′, D″ existe donc la correspondance (1, 1, 1). D'après le principe de *Chasles*, généralisé par *F. Deruyts*[1], il y a trois coïncidences. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si un trièdre se déforme de telle manière que ses faces passent par trois droites fixes et rencontrent les faces correspondantes d'un trièdre fixes en des droites d'une quadrique dont une génératrice du second mode est perpendiculaire à un plan fixe, le sommet de ce trièdre décrira une surface du troisième ordre.

Il est évident que cette surface contient les droites a, b, c.

3. — **Extension d'un théorème de Grassmann.** — Il s'agit du théorème très connu sur la génération des cubiques planes de Grassmann :

Un point décrit une cubique plane si les droites qui le joignent à trois points fixes rencontrent trois droites fixes co-planaires avec les points en trois points co-linéaires.

Nous avons déjà généralisé ce théorème de la manière suivante :

Un point décrit une surface du quatrième ordre si les plans qu'il détermine avec quatre droites données rencontrent quatre droites données en quatre points co-planaires[2].

Nous allons maintenant rechercher le lieu du point tel que les droites qui le joignent à quatre points fixes A_1, A_2, A_3, A_4, rencontrent quatre plans fixes correspondants a_1, a_2, a_3, a_4, en quatre points co-planaires.

Soit d une droite de l'espace. Prenons, sur cette droite, trois points D, D', D'', et menons les droites A_1 D, A_2 D', A_3 D''. Les points où elles rencontrent respectivement les plans a_1, a_2, a_3, déterminent un plan rencontrant le plan a_4 suivant une droite qui, avec le point A_4, détermine un plan qui marque sur la droite d un point D'''. Entre les points D, D',

[1] *Mémoire sur la théorie de l'involution. Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 2e série, tome XVII, 1890.

[2] *Archives de mathématiques pures et appliquées*, 1907.

D'', D''', on a donc la correspondance (1, 1, 1, 1), c'est-à-dire qu'à trois de ces points il en correspond un quatrième, et un seul. Il y a quatre coïncidences, donc la surface est du quatrième ordre et on peut énoncer le théorème suivant :

Un point décrit une surface du quatrième ordre si les droites qui le joignent à quatre points fixes rencontrent quatre plans fixes correspondants en quatre points co-planaires.

Si les quatre points donnés étaient eux-mêmes co-planaires, il est évident que les points de leur plan appartiendraient au lieu. On a donc une nouvelle génération de la surface cubique.

4. — **Génération d'une surface biquadratique.** — Soient G_1, G_2, deux congruences linéaires dont les directrices sont respectivement a_1, a_2 et a_3, a_4. Soient encore deux plans α_1, α_2 et une complexe linéaire K.

Par un point D d'une droite d quelconque de l'espace, menons la droite g_1 appartenant à la congruence G_1. Par le point (α_1, g_1), menons le plan polaire par rapport au complexe linéaire K. Le plan rencontre le plan α_2 suivant une droite qui, avec les directrices de la congruence G_2, détermine une quadrique. Celle-ci marque sur la droite d deux points D'. Inversement, à un point D' correspondent deux points D.

Ces points sont donc liés par une correspondance (2,2). Il y a quatre coïncidences, donc la surface engendrée par ces coïncidences est du quatrième ordre. Donc :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés appartiennent à deux congruences linéaires données, tandis que les sommets opposés décrivent deux plans donnés et le troisième côté un complexe linéaire également donné, le troisième sommet décrira une surface du quatrième ordre.

Cette surface passe évidemment par les droites a_1, a_2, a_3, a_4. Ce n'est donc pas la surface la plus générale.

5. — **Génération d'une surface sextique.** — Soient trois congruences linéaires G_1, G_2, G_3 dont les directions sont respectivement a_1, a_2 ; a_3, a_4 et a_5, a_6.

Si d'un point O quelconque de l'espace, nous menons les droites appartenant à ces trois congruences, ces droites marquent sur un plan α quelconque trois points. Proposons-nous de rechercher le lieu du point O lorsque ces trois points sont en ligne droite.

Par les points D, D′ d'une droite d quelconque de l'espace, menons les droites g_1, g_2 appartenant respectivement aux congruences G_1, G_2. Ces droites déterminent sur le plan α une droite k. Les droites de la congruences G_3 qui s'appuient sur k déterminent une quadrique qui marque sur d deux points D″. Entre les points D, D′, D″, on a donc la correspondance (2, 2, 2). Il y a six coïncidences, donc on peut énoncer le théorème suivant :

Le sommet d'un faisceau-plan, dont trois droites décrivent des congruences linéaires données, décrit une surface du sixième ordre.

La surface passe évidemment par les six directrices des congruences données.

Il est de plus visible que les six droites qui appartiennent à la fois à deux des congruences G_1, G_2 ou G_3, sont situées sur la surface.

Comme le plan α est pris d'une manière arbitraire, on peut dire qu'*une surface du sixième ordre est complètement déterminée par six de ses droites.*

6. — **Génération du complexe quadratique.** — Soient deux congruences linéaires G_1 et G_2 et deux plans α_1 et α_2.

Par un point P d'un plan π, menons une droite p de ce plan. Par le point où cette droite rencontre le plan α_1, menons la droite g_1 de la congruence G_1. Les droites de la congruence G_2 qui s'appuient sur g_1 déterminent une quadrique qui marque, sur la droite (π, α_2), deux points qui, joints au point P, déterminent deux droites p'. Inversement, à une droite p' correspondent deux droites p. Entre ces droites, on a donc une correspondance (2, 2). Il y a quatre coïncidences, mais il est facile de voir que deux de ces coïncidences se confondent avec la droite issue de P et passant par le point de rencontre des plans α_1, α_2 et π. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés décrivent deux congruences linéaires données, tandis que les sommets opposés décrivent deux plans donnés, le troisième côté décrit un complexe du second ordre et de la seconde classe.

7. — **Seconde génération du complexe quadratique.** — Soient deux plans α_1, α_2 ; deux complexes linéaires C_1, C_2 et une droite a.

Par le point P du plan π, menons une droite arbitraire p. Il existe une seule droite du complexe C_1 issue du point $(p_1\ a_1)$ qui s'appuie sur la droite a. Par le point ainsi déterminé sur la droite a, il ne passe qu'une droite du complexe C_2 qui s'appuie sur la droite $(\pi_1\ a_2)$. Par le point ainsi déterminé sur cette dernière droite, menons la droite p' passant par P. Entre les droites p et p', il existe une correspondance (1, 1). Il y a deux coïncidences, donc :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés décrivent deux complexes linéaires donnés, tandis que les sommets opposés décrivent deux plans donnés et le troisième sommet une droite donnée, le troisième côté décrira un complexe du second ordre et de la seconde classe.

8. — **Génération d'un complexe du quatrième ordre.** — Soient deux congruences linéaires G_1, G_2, deux plans a_1, a_2, et un faisceau-plan de pôle A et de plan a.

Par le point P du plan π, menons une droite p de ce plan, et par le point $(p,\ a_1)$ la droite g_1 de la congruence G_1. Les droites de la congruence G_2 qui s'appuient sur la droite du faisceau (A, a) passant par le point (g_1, a) engendrent une quadrique qui marque sur la droite (π, a_2) deux points qui déterminent deux droites p' du faisceau (P, π). Inversement, à une droite p' correspondent deux droites p.

Il existe donc, entre les droites p, p', une correspondance (2, 2). Il y a quatre coïncidences, donc :

Si un quadrilatère gauche se déforme de telle manière que deux côtés opposés décrivent des congruences linéaires données, tandis que le troisième côté décrit un faisceau plan donné, et les sommets non-adjacents des plans donnés, le quatrième côté décrira un complexe du quatrième ordre.

Il est visible que ce complexe possède les plans a_1, a_2, comme plans principaux.

Les droites du faisceau-plan (A, a), appartiennent au complexe.

9. — **Applications d'une formule de F. Deruyts.** — En 1898, *F. Deruyts* a établi le théorème suivant :

Une involution I_k^n *possède des groupes de* $2k - 2$ *éléments neutres de première espèce en nombre*

$$\binom{n-k+1}{k-1}^2 \frac{n-2k+2}{k(n-k+1)}.$$ [1]

Le savant géomètre en a déduit le nombre des quartiques gauches de première espèce passant par p points et s'appuyant sur une courbe gauche rationnelle en $16 - 2p$ points.

Voici d'autres applications de cette formule.

Les quadriques passant par une courbe gauche du troisième ordre marquent sur une courbe gauche unicursale c_n, une

[1] *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1898, 3[e] série, tome XXXV, p. 885.

involution I_2^{2n}. Deux quelconques de ces quadriques ont encore en commun une bisécante de la cubique gauche.

On en déduit qu'une cubique gauche et une courbe c_n *ont en commun* $(2n - 1)(n - 1)$ *bisécantes.*

Les quadriques passant par une conique ε marquent sur c_n une I_4^{2n}. Deux de ces quadriques ont en commun une conique qui rencontre ε en deux points. On peut donc dire que *le nombre de coniques qui s'appuient en deux points sur une conique et en six points sur une courbe gauche unicursale d'ordre* n, *est*

$$\binom{2n-3}{3}^2 \frac{n-4}{2(2n-3)}.$$

De même, on trouverait que *le nombre de cubiques gauches qui ont une droite donnée comme bisécante et qui s'appuient en dix points sur une courbe gauche* c_n *est*

$$\binom{2n-5}{5}^2 \frac{n-5}{3(2n-5)}.$$

10. — **Extension du théorème de Pascal.** — La méthode suivie ici pour étendre le théorème de *Pascal* à l'espace réglé, est la même que celle qui a été employée par *Sautraux* pour l'extension à l'espace ordinaire [1].

Deux complexes cubiques ont en commun une congruence du neuvième ordre. Supposons que cette congruence se décompose en deux congruences : l'une du sixième ordre, l'autre du troisième ordre. Si la congruence du sixième ordre peut appartenir à un complexe quadratique, la congruence cubique sera contenue dans un complexe linéaire.

[1] *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 2e série, tome XLV, 1878, p. 426.

Supposons maintenant une figure formée par six complexes linéaires et telle que la congruence commune à deux complexes consécutifs appartienne à un complexe quadratique. On pourra dire que les congruences linéaires communes aux complexes opposés sont situées dans un même complexe linéaire.

11. — Sur les droites d'une surface cubique. — Soient a_1, a_2, a_3, a_4, quatre sections planes d'une surface cubique S_3. Les courbes ont évidemment deux à deux trois points communs.

Considérons la surface réglée engendrée par les droites qui s'appuient sur les trois premières sections planes.

D'un point quelconque de a_1, projettons les courbes a_2, a_3. Les surfaces coniques ainsi obtenues ont en commun six droites qui rencontrent les courbes a_2 et a_3 en des points distincts. Les courbes a_1, a_2, a_3 sont donc multiples d'ordre six de la surface réglée considérée.

Dans le plan de la courbe a_1, il y a encore neuf droites qui appartiennent à la surface réglée. Ces droites sont celles qui joignent deux à deux les points que a_1 a en commun avec les courbes a_2 et a_3. La surface est donc d'ordre 27. Soit R_{27} cette surface.

La surface R_{27} rencontre la courbe a_4 en 3×27 points.

En chacun des points où la courbe a_4 rencontre une des courbes a_1, a_2, a_3, il y a six points confondus.

Les points d'intervention de R_{27} et de a_4 non situés sur une des trois premières courbes, sont au nombre de $3 \times 27 - 3 \times 3 \times 6$.

Par chacun de ces points, on peut mener une droite rencontrant les trois premières courbes en des points distincts.

La surface cubique S_3 contient donc vingt-sept droites, car chacune des transversales trouvées plus haut ayant quatre points communs avec S_3, sont situées entièrement sur S_3.

Soit d une des droites de S_3. La réglée formée par les droites s'appuyant sur d, a_1 et a_2 est d'ordre neuf. La droite d est quintuple et les courbes a_1, a_2, sont doubles.

On en déduit qu'il existe dix points de a_3 par lesquels on peut mener des droites rencontrant a_1, a_2 et d en des points distincts. Donc, sur une droite d'une surface cubique s'appuyent dix droites de la surface.

On trouverait de même qu'il y a cinq droites qui s'appuyent sur deux autres droites et trois droites sur trois autres droites.

Mons, 29 mai 1907.