Bulletin de la Classe des sciences

Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
La surface qui représente les couples de points d'une courbe possédant une involution irrationnelle cyclique, possède une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Etude de la structure de ces points unis.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — La surface qui représente les couples de points d'une courbe possédant une involution irrationnelle cyclique, possède une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Étude de la structure de ces points unis.

Soit L une courbe algébrique contenant une involution cyclique γ_p, irrationnelle, d'ordre premier impair p. Sur la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe Γ, on construit une involution cyclique I_p d'ordre p, deux points d'un groupe de I_p ayant pour homologues sur L deux couples de points transformés l'un dans l'autre par la transformation de L en soi, génératrice de γ_p. Nous avons considéré cette involution dans une communication faite au *Colloque de Géométrie algébrique de Liège* [1] et, dans un cas particulier assez général, dans un travail récent [2].

Dans cette note, nous revenons sur le cas général, pour étudier les points unis de l'involution I_p, points qui sont en nombre fini.

Dans nos recherches sur les points unis de seconde espèce

[1] *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DE LIÈGE, en cours d'impression).

[2] *Construction de surfaces algébriques irrégulières* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1950, pp. 14-22).

d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique (1) nous avons établi que la structure d'un tel point dépend d'un certain entier, intervenant dans la définition de l'homographie déterminée par l'involution dans le domaine du premier ordre du point considéré. Nous indiquons une méthode permettant de déterminer cet entier dans chaque cas.

Nous terminons la note par la construction de deux modèles projectifs de la surface image de l'involution.

1. Soit L une courbe algébrique de genre π, non hyperelliptique, contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p, de genre π' au moins égal à l'unité. Nous prendrons comme modèle projectif de L la courbe canonique, d'ordre $2\pi - 2$, de $S_{\pi-1}$. Sur cette courbe, l'involution γ_p est déterminée par une homographie τ de période p, de $S_{\pi-1}$, transformant L en soi et possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier au moins ne rencontre pas la courbe L.

Posons $r = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$. En rapportant projectivement les complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$ aux hyperplans d'un espace S_r, il correspond aux cordes de L les points d'une surface F, image des couples de points non ordonnés de cette courbe. Les sections hyperplanes de F sont les courbes canoniques de cette surface (2).

L'homographie τ détermine une involution cyclique d'ordre p dans la congruence des cordes de L et par conséquent il existe sur F une involution cyclique I_p, d'ordre p. Cette involution est engendrée par une homographie T de S_r, de période p, ayant p axes ponctuels $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{p-1}$. Ils sont déterminés de la manière suivante :

Soit ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous pouvons

(1) *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210) ; *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

(2) Cfr. F. Severi, *Sulle superficie che repprcsentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti dell' Accademia di Torino, 1902-1903, pp. 185-200).

attacher aux axes σ_0, σ_1, ..., σ_{p-1} les nombres 1, ϵ, ..., ϵ^{p-1}, invariants projectifs de l'homographie τ. Nous poserons

$$p = 2\nu + 1.$$

L'espace Σ_0 contient les points de S_r qui représentent les droites de σ_0, les droites joignant un point de σ_1 à un point de σ_{p-1}, un point de σ_2 à un point de σ_{p-2}, ..., un point de σ_ν à un point de $\sigma_{\nu+1}$.

L'espace Σ_1 contient les points de S_r représentant les droites joignant un point de σ_0 à un point de σ_1, un point de σ_2 à un point de σ_{p-1}, ..., un point de σ_ν à un point de $\sigma_{\nu+2}$ et les droites de $\sigma_{\nu+1}$.

Et ainsi de suite.

Nous avons montré que les espaces Σ_0, Σ_1, ..., Σ_{p-1} sont ainsi complètement déterminés et à ces espaces sont respectivement attachés les nombres 1, ϵ, ..., ϵ^{p-1}, invariants projectifs de l'homographie T.

2. Soient U'_1, U'_2, ..., U'_δ les δ points unis de γ_p et t_1, t_2, ..., t_δ les tangentes à la courbe L en ces points. Les points U'_1, U'_2, ..., U'_δ appartiennent chacun à un des espaces σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1} et nous supposerons qu'en un de ces points, l'axe de τ qui le contient ne contient pas la tangente en ce point. Chacune des tangentes t_1, t_2, ..., t_δ est unie pour τ et s'appuie sur deux des espaces σ_0, σ_1, ..., σ_{p-1} dont l'un est l'espace contenant le point de contact.

Les points unis de l'involution I_p sur F se répartissent en trois catégories :

1) Points unis U_{ik} représentant la droite $U'_i\,U'_k$ lorsque les points U'_i, U'_k appartiennent à un même axe de τ ;

2) Points unis U_{ik} représentant la droite $U'_iU'_k$ lorsque les points U'_i, U'_k appartiennent à des axes distincts de τ ;

3) Points unis U_i représentant les tangentes t_i.

L'involution I_p possède donc $\frac{1}{2}\delta(\delta + 1)$ points unis.

Il résulte de nos recherches récentes, citées plus haut, que dans le plan tangent à la surface F en un point uni de seconde espèce, T détermine une homographie cyclique pouvant être représentée par

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^a x_3,$$

où a est un entier compris entre 1 et $p(1 < a < p)$. Le point uni a pour coordonnées (1, 0, 0) et les directions unies issues de ce point sont $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. La connaissance du nombre a suffit pour déterminer la structure du point uni. C'est à la détermination de a pour les points unis des différentes catégories de l'involution I_p que cette note est consacrée.

3. Envisageons tout d'abord les points unis U_{ik} de la première catégorie. Les points U_i', U_k' appartiennent à un même espace σ_h et deux cas peuvent se présenter suivant que les tangentes t_i, t_k à L en U_i', U_k' s'appuient sur un même axe de τ ou sur deux axes différents.

Supposons en premier lieu que les tangentes t_i, t_k s'appuient en des points P_i, P_k sur un même espace σ_j (évidemment distinct de σ_h). L'espace à trois dimensions $U_i'U_k'P_iP_k$ est uni pour l'homographie τ et dans cet espace, τ détermine une homographie transformant en elle-même la congruence linéaire ayant pour directrices les droites t_i, t_k. Si les droites de cette congruence, infiniment voisines de $U_i'U_k'$ sont unies pour τ, le point U_{ik} est un point uni de première espèce.

Dans l'espace considéré, prenons pour tétraèdre de référence $U_i'U_k'P_iP_k$ et soient x_i, x_k, y_i, y_k les coordonnées courantes. Les droites t_i, t_k ont pour équations $x_k = y_k = 0$, $x_i = y_i = 0$ et l'homographie déterminée par τ est représentée par

$$x_i' : x_k' : y_i' : y_k' = \epsilon^h x_i : \epsilon^h x_k : \epsilon^j y_i : \epsilon^j y_k.$$

Une quadrique passant par les droites $U_i'U_k'$, t_i et t_k a pour équation

$$a x_i y_k + b x_k y_i + c y_i y_k = 0\,;$$

elle est transformée par τ en la quadrique

$$\epsilon^h(a x_i y_k + b x_k y_i) + \epsilon^j c y_i y_k = 0.$$

Ces deux quadriques ont même plan tangent,

$$b x_k Y_i + a x_i Y_k = 0,$$

en un point $(x_i, x_k, 0, 0)$ de la droite U_i', U_k'; elles se raccordent donc le long de cette droite et le point U_{ik} est uni de première espèce.

4. Supposons maintenant que la droite t_i s'appuie en un point P_i sur l'espace σ_j et la droite t_k en un point P_k sur l'espace σ_l.

L'espace à trois dimensions $U_i'U_k'P_iP_k$ est uni pour l'homographie τ et cette homographie transforme en elle-même la congruence linéaire de directrices t_i, t_k. Si nous introduisons des notations analogues aux précédentes, on a cette fois, dans l'espace considéré, l'homographie

$$x_i' : x_k' : y_i' : y_k' = \epsilon^k x_i : \epsilon^k x_k : \epsilon^j y_i : \epsilon^l y_k.$$

La quadrique

$$a x_i y_k + b x_k y_i + c y_i y_k = 0$$

a pour transformée

$$a\epsilon^{h+l} x_i y_k + b\epsilon^{h+j} x_k y_j + c\epsilon^{l+j} y_i y_k = 0.$$

Le plan tangent

$$b x_k y_i + a x_i y_k = 0$$

au point $(x_i, x_k, 0, 0)$ de $U_i'\,U_k'$ a la première quadrique, a pour transformé le plan tangent

$$b\epsilon^j x_k Y_i + a\epsilon^l x_i Y_k = 0$$

au même point à la seconde. Ces deux plans sont en général distincts (ils ne sont confondus que pour $a = 0$ ou $b = 0$), par conséquent les droites infiniment voisines de $U_i'U_k'$ et s'appuyant sur t_i, t_k ne sont pas en général unies pour τ et le point U_{ik} est uni de seconde espèce de I_p.

Il existe deux droites s'appuyant sur t_i, t_k, infiniment voisines de $U_i'U_k'$, unies pour l'involution I_p : ce sont la droite située dans le plan projetant t_k de U_i' et la droite située dans le plan projetant t_i de U_k'.

Dans le plan tangent à F en U_{ik}, plan qui est déterminé par les points U_{ik}, U_i, U_k T détermine une homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = \epsilon^{j+l} x_1 : \epsilon^{h+l} x_2 : \epsilon^{h+j} x_3,$$

ou encore

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon^{p+h-j} x_2 : \epsilon^{p+h-l} x_3.$$

L'entier α compris entre 1 et p est déterminé par la congruence

$$(p + h - j)\alpha \equiv p + h - l, \qquad (\text{mod. } p).$$

Observons que dans cette congruence, $p + h - j$, $p + h - l$ peuvent éventuellement être remplacés par des nombres compris entre 1 et p, congrus aux précédents par rapport au module p.

5. Passons maintenant aux points unis de la seconde catégorie.

Supposons que U'_i appartienne à l'espace σ_h, U'_k à l'espace σ_l et qu'en outre la droite t_i s'appuie en un point P_i sur σ_j et la droite t_k en un point P_k sur l'espace σ_m.

L'espace à trois dimensions $U'_iU'_kP_iP_k$ est uni pour τ. En adoptant des notations analogues aux précédentes, l'homographie déterminée dans cet espace par τ a pour équations

$$x'_i : x'_k : y'_i : y'_k = \epsilon^h x_i : \epsilon^l x_k : \epsilon^j y_i : \epsilon^m y_k.$$

La quadrique

$$a x_i y_k + b x_k y_i + c y_i y_k = 0$$

a pour transformée

$$a\epsilon^{h+m} x_i y_k + b\epsilon^{l+j} x_k y_i + c\epsilon^{j+m} y_i y_k = 0.$$

En un point $(x_i, x_k, 0, 0)$ de la droite $U'_iU'_k$, ces quadriques ont pour plans tangents respectifs

$$b x_k Y_i + a x_i Y_k = 0,$$
$$b\epsilon^{l+j} x_k Y_i + a\epsilon^{h+m} x_i Y_k = 0.$$

Ces deux quadriques se raccordent le long de la droite $U'_iU'_k$ si l'on a

$$l + j \equiv h + m. \qquad (\text{mod. } p)$$

Le point U_{ik} est alors un point uni de première espèce de l'involution I_p.

Si la congruence précédente n'est pas vérifiée, les droites infiniment voisines de $U'_iU'_k$ s'appuyant sur t_i, t_k ne sont pas en général unies pour τ et U_{ik} est un point uni de seconde espèce de l'involution I_p. Il existe deux telles droites : l'une est située dans le plan projetant t_k de U'_i et l'autre dans le plan projetant t_i de U'_k.

Dans le plan tangent $U_{ik}U_iU_k$ à F en U_{ik}, T détermine l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \epsilon^{j+m}x_1 : \epsilon^{h+m}x_2 : \epsilon^{l+j}x_3 ,$$

ou encore

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon^{p+h-m}x_2 : \epsilon^{p+l-j}x_3 .$$

Il en résulte que le nombre α est déterminé par la congruence

$$(p + h - m)\alpha \equiv p + l - j, \qquad \text{(mod. } p)$$

Si l'un des nombres $p + h - m$, $p + l - j$ est supérieur à p, on peut le remplacer par le reste de sa division par p, ce qui ne modifie évidemment pas la valeur de α.

6. Examinons enfin les points unis de la troisième catégorie. Supposons que le point U'_i appartienne à l'espace σ_h et que la tangente t_i en ce point à L coupe σ_j en un point P_i.

Considérons un espace $S_{\pi-3}$, à $\pi - 3$ dimensions, passant par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{h-1}, \sigma_{h+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$, uni pour l'homographie τ, ce qui suppose que σ_h a au moins la dimension deux. Désignons-le par ξ_h. L'espace ξ_h rencontre en général σ_h, mais ne contient pas cet espace. Les droites s'appuyant sur ξ_h forment un complexe linéaire transformé en soi par τ. Ce complexe contient les droites s'appuyant sur $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{h-1}, \sigma_{h+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$, en particulier la droite t_i ; il contient également les droites des espaces précédents. Il lui correspond par conséquent dans S_r un hyperplan uni pour T, passant par les axes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{h-1}, \Sigma_{h+1}, \ldots, \Sigma_{p-1}$ de cette homographie et par le point U_i. La réglée des cordes de L appartenant au complexe linéaire envisagé contient une seule droite, infiniment voisin de t_i, passant par U'_i. Par conséquent, l'hyperplan correspondant dans S_r coupe le plan tangent à F en U_i suivant une seule droite.

Considérons d'autre part un espace ξ_j, à $\pi - 3$ dimensions, passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$. On peut reprendre un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. Au complexe linéaire des droites s'appuyant sur ξ_j correspond dans S_r un hyperplan passant par $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{j-1}, \Sigma_{j+1}, \ldots, \Sigma_{p-1}$ et par U_i, coupant le plan tangent en ce point à la surface F suivant une seule droite,

Le point U_i appartient à l'espace Σ_{h+j} (ou à Σ_l si l est le reste de la division de $h+j$ par p si cette division est possible). Il en résulte que dans le plan tangent à F en U_i, T détermine l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \epsilon^{h+j}x_1 : \epsilon^h x_2 : \epsilon^j x_3,$$

car le plan tangent s'appuie en un point sur chacun des espaces Σ_h, Σ_j.

Cette homographie peut s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon^{p-j}x_2 : \epsilon^{p-h}x_3.$$

Le nombre α compris entre 1 et p, attaché au point U_i, est donné par la congruence

$$(p-j)\alpha \equiv p-h, \qquad (\text{mod. } p).$$

Le point U_i est uni de seconde espèce pour I_p.

7. Nous pouvons résumer ce qui précède dans l'énoncé suivant :

Désignons par h_i l'indice de l'axe σ de τ contenant U'_i et par l_i l'indice de l'espace σ sur lequel la tangente t_i à L en U'_i s'appuie en un point.

Le point U_{ik} *est un point uni de première espèce si l'on a*

$$h_i + l_k \equiv h_k + l_i, \qquad (\text{mod. } p)$$

c'est un point uni de seconde espèce dans le cas contraire et le nombre α *qui en détermine la structure est donné par*

$$\alpha(p + h_i - l_i) \equiv p + h_k - l_k, \qquad (\text{mod. } p)$$

ou par

$$\alpha(p - l_i) \equiv p - l_k \qquad (\text{mod. } p)$$

si $h_i \equiv h_k$.

Le point U_i *est un point uni de seconde espèce et le nombre* α *qui en détermine la structure est donné par*

$$\alpha(p - l_i) \equiv p - h_i \qquad (\text{mod. } p).$$

8. L'espace σ_0 a la dimension $\pi' - 1$. Désignons par $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ les dimensions respectives de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Nous avons démontré que Σ_0 a la dimension

$$r_0 = \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1) + (s_1 + 1)(s_{p-1} + 1) + \ldots + \\ + (s_\nu + 1)(s_{\nu+1} + 1) - 1.$$

C'est également la dimension du système linéaire découpé sur F par les hyperplans passant par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$. Ce système linéaire est le transformé du système canonique de la surface Φ image de l'involution I_p.

Entre la surface F′, image des couples non ordonnés de la courbe L′ représentant l'involution γ_p et la surface Φ, nous avons une correspondance $(1, p)$. Le genre géométrique de F′ est $\frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1)$ et aux courbes canoniques de cette surface correspondent des courbes appartenant à des courbes canoniques de Φ. Comme on a

$$r_0 + 1 > \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1),$$

le système canonique de Φ est simple. En rapportant projectivement les courbes canoniques de Φ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, on obtient un modèle projectif canonique de Φ.

Le genre géométrique de Φ est $p_g = r_0 + 1$.

Aux points unis de I_p qui appartiennent aux espaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$, correspondent sur Φ des courbes rationnelles. On en conclut que les points unis de I_p appartenant à Σ_0, s'il en existe, n'ont pas d'influence sur le système canonique de Φ ; ce sont nécessairement des points unis symétriques, caractérisés par $a = p - 1$.

9. On peut obtenir un autre modèle projectif de la surface Φ en procédant de la manière suivante :

Considérons sur la courbe L une série linéaire $|H_1|$, simple, infinie et soient $|H_2|, |H_3|, \ldots, |H_p|$ les séries que $\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{p-1}$ lui font correspondre. La série complète

$$|G| = |H_1 + H_2 + \dots + H_{p-1}|$$

est simple et transformée en soi par τ. Elle contient une série linéaire partielle $|G_0|$ appartenant à γ_p et dépourvue de points fixes.

On peut choisir la dimension de $|H_1|$ suffisamment grande pour que celle de $|G|$ soit aussi grande qu'on le veut et que, de plus, cette série comprenne, outre $|G_0|$, $p-1$ autres séries linéaires partielles $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_{p-1}|$, appartenant à γ_p. Ces $p-1$ dernières séries auront en général des points fixes, parmi les points unis de γ_p.

Prenons pour modèle projectif de L la courbe dont les sections hyperplanes sont les groupes de $|G|$. Si ρ est la dimension de cette série, L est donc normale dans un espace S_ρ. La transformation τ est alors déterminée sur L par une homographie τ' de S_ρ possédant p axes ponctuels σ'_0, σ'_1, ..., σ'_{p-1}. Les groupes G_0 sont découpés sur L par les hyperplans passant par σ'_1, σ'_2, ..., σ'_{p-1} et par conséquent, ces axes ne rencontrent pas la courbe. Les points unis de γ_p appartiennent tous à σ'_0, mais les tangentes à la courbe L en ces points s'appuient chacune sur un des espaces σ'_1, σ'_2, ..., σ'_{p-1}.

Rapportons projectivement les complexes linéaires de droites de S_ρ aux hyperplans d'un espace à $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ dimensions. Il correspond aux cordes de L les points d'un modèle projectif de la surface F que nous désignerons encore par F.

Sur cette surface F, l'involution I_p est engendrée par une homographie T' de l'espace ambiant, ayant p axes ponctuels Σ'_0, Σ'_1, ..., Σ'_{p-1}. Ces axes peuvent être construits comme dans le cas précédent et Σ'_0 contient les points images des droites de σ'_0.

Il en résulte que l'espace Σ'_0 contient les $\frac{1}{2}\delta(\delta-1)$ points unis U_{ik} de l'involution I_p.

Par contre, les points unis U_i appartiennent à d'autres axes de T'.

Supposons, pour fixer les idées, que la tangente t_1 à L en U'_1 s'appuie en un point P_1 sur σ'_1. Le point U_1 appartiendra à l'espace Σ'_1.

Pour déterminer la structure du point uni U_1, c'est-à-dire le nombre α qui lui est attaché, on peut reprendre un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut (n° 6). Actuellement, les dimensions des espaces σ'_0, σ'_1 sont, par un choix convenable de $|H_1|$, aussi grandes qu'on le veut et le raisonnement ne souffre plus d'exceptions (σ'_0 et σ'_1 doivent avoir la dimension au moins égale à deux).

On obtiendra un modèle projectif de Φ en projetant sur Σ'_0 la surface F à partir de l'espace de dimension minimum contenant Σ'_1, Σ'_2, ..., Σ'_{p-1}. Sur cette surface Φ, aux points U_{ik} correspondront des points singuliers et aux points U_i, des courbes rationnelles.

Liége, le 14 janvier 1950.