Bulletin de la Classe des sciences

Étude de certains points de diramation isolés de surfaces multiples

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'un point de diramation en lequel le cône tangent à la surface multiple se scinde en deux cônes et est suivi d'un point double biplanaire suivi lui-même d'un point double conique. Formation de cette singularité.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Étude de certains points de diramation isolés de surfaces multiples,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'un point de diramation en lequel le cône tangent à la surface multiple se scinde en deux cônes et est suivi d'un point double biplanaire suivi lui-même d'un point double conique. Formation de cette singularité.

Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p ne présentant qu'un nombre fini de points unis. On peut toujours supposer que cette surface est normale dans un espace S_r, de dimension aussi grande qu'on le veut, l'involution étant déterminée par une homographie de S_r présentant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface. Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes appartenant à l'involution et l'un d'eux, $|C_0|$ est dépourvu de points-base (1).

Soient A un point uni de seconde espèce et α le plan tangent à F en ce point. Dans ce plan, l'homographie génératrice de l'involution I détermine une homographie cyclique que l'on peut écrire sous la forme

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^a x_2,$$

(1) Voir sur cet objet les travaux suivants : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1948, pp. 189-210) ; *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, α un entier compris entre 1 et p, le point A coïncidant avec le point (1, 0, 0). La structure du point uni A dépend de l'entier α, ou de l'entier β inférieur à p tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. Si Φ est une surface image de l'involution dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0, la structure du point de diramation A' homologue de A est déterminée par celle de A et revient donc à la connaissance de α et β.

Pour étudier la structure du point uni A, nous avons construit une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., appartenant à $|C_0|$, dont les courbes ont des multiplicités croissantes au point A. Il existe en ce point deux tangentes a_1, a_2 à F unies pour l'homographie génératrice de l'involution. Le système $|C_0^{(i)}|$ a la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$ en A, λ_i tangentes coïncidant avec a_1 et μ_i avec a_2. Les entiers λ_i, μ_i satisfont aux congruences

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0, \quad \mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\, p).$$

Aux systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... correspondent sur Φ des systèmes $|\Gamma_0'|$, $|\Gamma_0''|$, ... dont le comportement en A' fixe la structure de ce point.

Nous avons montré que si la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ des courbes C_0' en A est telle que

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = p,$$

le cône tangent à Φ en A' se scinde en deux cônes rationnels se rencontrant suivant une droite.

Plaçons-nous dans ce cas. Il peut exister une suite de points doubles biplanaires de la surface Φ, infiniment voisins successifs de A', terminée soit par un point double biplanaire ordinaire, soit par un point double conique. Nous avons déterminé d'une manière précise la nature de ces singularités (1).

Les sections de Φ par les hyperplans passant par A' sont les courbes Γ_0'. Désignons par $\bar{\Gamma}_0''$ les sections de Φ par les hyperplans passant par A' et par le premier point double infiniment voisin de A', par $\bar{\Gamma}_0'''$ les sections de Φ par les hyperplans qui

(1) *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUP., 1938, pp. 193-222).

passent en outre par le deuxième point double infiniment voisin de A', et ainsi de suite. Nous sommes en possession de deux suites de systèmes linéaires : $|\Gamma_0'|$, $|\Gamma_0''|$, $|\Gamma_0'''|$, ... et $|\Gamma_0'|$, $|\bar{\Gamma}_0''|$, $|\bar{\Gamma}_0'''|$, ... Eh bien, ces deux suites peuvent être distinctes et c'est précisément le cas dans l'exemple que nous traitons dans cette note (¹).

1. Considérons, sur une surface algébrique F, une involution cyclique I, d'ordre 31 et soit A un point uni de cette involution pour lequel on a $\alpha = 25$, $\beta = 5$.

Les solutions des congruences

$$\lambda + 25\mu \equiv 0, \qquad \mu + 5\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 31)$$

telles que $\lambda + \mu < 31$, sont :

$\lambda_1 = 6, \mu_1 = 1$; $\lambda_2 = 5, \mu_2 = 6$; $\lambda_3 = 12, \mu_3 = 2$; $\lambda_4 = 4, \mu_4 = 11$; $\lambda_5 = 11, \mu_5 = 7$; $\lambda_6 = 3, \mu_6 = 16$; $\lambda_7 = 18, \mu_7 = 3$; $\lambda_8 = 10, \mu_8 = 12$; $\lambda_9 = 2, \mu_9 = 21$; $\lambda_{10} = 17, \mu_{10} = 8$; $\lambda_{11} = 9, \mu_{11} = 17$; $\lambda_{12} = 1, \mu_{12} = 26$; $\lambda_{13} = 24, \mu_{13} = 4$; $\lambda_{14} = 16, \mu_{14} = 13$; $\lambda_{15} = 8, \mu_{15} = 22$.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 7 et puisque, pour $\lambda = 6$, $\mu = 1$, on a $\lambda + 25\mu = 31$, $\mu + 5\lambda = 31$, le point A est, sur chaque courbe C_0' générique, l'origine de sept branches linéaires. Le point A est précisément l'origine de deux suites de points infiniment voisins successifs, l'une formée de quatre points (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), multiples d'ordre six, l'autre de

(¹) La courbe γ, d'équation

$$a_1 x_1^\nu x_2 + a_2 x_2^\nu x_3 + a_3 x_3^\nu x_1 = 0$$

possède une involution cyclique d'ordre $p = \nu^2 - \nu + 1$, présentant trois points unis 0_1, 0_2, 0_3, sommets du triangle de référence. Supposons p premier et considérons la surface F représentant les couples de points non ordonnés de la courbe γ. Sur F, nous avons une involution cyclique d'ordre p présentant six points unis homologues des couples de points distincts ou non pris parmi 0_1, 0_2, 0_3. Soit par exemple A le point uni qui représente le couple $0_1\,0_2$. La structure du point uni A est déterminée par le nombre $\alpha = (\nu - 1)^2$ et on a $\beta = \nu - 1$. C'est cette remarque qui nous a conduit à l'étude actuelle. Nous avons, pour éviter des complications d'écriture, supposé $\nu = 6$. Les autres cas (où p est bien entendu premier) se traiteront de la même manière.

24 points (2,1), (2,2), ..., (2,24), simples pour les courbes. Ces courbes ont donc pour schéma en A

$$(1,4)^6, \ldots, (1,1)^6, A^7, (2,1)^1, \ldots, (2,24)^1.$$

Désignons par Φ la surface image de l'involution I dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. Le point de diramation A′ qui correspond à A sur Φ est multiple d'ordre sept pour cette surface, le cône tangent en ce point se décomposant en un cône du sixième ordre et un plan coupant le cône suivant une droite. En projetant Φ du point A′ sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0. Au domaine du point A′ correspond sur Φ_1 l'ensemble d'une sextique et d'une droite se coupant en un point. D'une manière précise, au domaine du point (1,4) correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle du sixième ordre σ_1 et au domaine du point (1,24), une droite σ_2. La courbe σ_1 et la droite σ_2 ont en commun un point A'_1.

Si nous désignons par n l'ordre de Φ, par π le genre des courbes Γ_0, la surface Φ_1 est d'ordre $n - 7$ et les courbes Γ'_0 sont de genre $\pi - 6$. La dimension r de l'espace contenant Φ peut être supposée aussi grande qu'on le veut.

2. Avant d'étudier les courbes C''_0, considérons les courbes C'''_0 ; elles ont en A la multiplicité 14 ; en ce point, 12 de leurs tangentes coïncident avec la tangente a_1 aux courbes C'_0 contenant le point (1,1) et deux avec la tangente a_2 aux mêmes courbes, contenant le point (2,1).

Les courbes C'''_0 passent nécessairement deux fois par les points (2,1), (2,2), ..., (2,8), une fois par le point (2,9) et une fois par un point (2, 9, 1), infiniment voisin du précédent, uni de première espèce par l'involution.

Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité 11, avec cinq de leurs tangentes coïncidant avec a_1 et six avec a_2. On en conclut tout de suite que ces courbes passent cinq fois par chacun des points (1,1), (1,2), (1,3), (1,4). A ces courbes correspondent sur Φ_1 des courbes Γ''_0 découpées par les hyperplans passant par un point appartenant à σ_1. D'autre part, les courbes C''_0 ne peuvent plus passer par le point (2,24), donc les hyperplans découpant les courbes Γ_0'' sur Φ_1 passent par le point A_1', appartenant à σ_1 et à σ_2.

Les courbes C_0''' passent au plus quatre fois par le point (1,4) et par conséquent, elles passent nécessairement cinq fois par (1,1) et quatre fois par les points (1,2), (1,3), (1,4). Elles passent en outre une fois par sept points (1, 1, 1), (1, 1, 2), ..., (1, 1, 7), infiniment voisins successifs de (1,1). Le point (1, 1, 7) est uni de première espèce pour l'involution.

Aux courbes C_0''' correspondent sur Φ des courbes Γ_0''' formant un système linéaire de degré $n - 10$ et de genre $\pi - 7$.

On conclut de ce qui précède que le point A_1' est simple ou double pour la surface Φ_1. Supposons qu'il soit simple. Sur une courbe C_0'', le point A est alors l'origine d'une seule branche tangente à a_2. Il est facile de voir que dans ces conditions, les courbes C_0'' passent six fois par les points (2,1), (2,2), (2,3), deux fois par le point (2,4) et par suite deux fois par des points (2, 4, 1), (2, 4, 2) infiniment voisins successifs de (2,4). Le dernier de ces points serait uni de première espèce pour l'involution et le point A_1' serait double conique pour Φ_1.

Le point A_1' ne pouvant être simple pour Φ_1, peut être double conique ou biplanaire. Dans le premier cas, le système $|\Gamma_0''|$ a le degré $n - 9$. Les courbes C_0''' devraient passer au moins une fois par le point (2, 4, 2), ce qui n'a pas lieu, donc A_1' ne peut être double conique pour Φ_1. Il en résulte que les courbes C_0'' doivent passer par le point (2, 9, 1). On voit alors facilement que ces courbes passent cinq fois par le point (2, 1), deux fois par les points (2,2), ..., (2,8), une fois par les points (2,9), (2, 9, 1), une fois par un point (2, 1, 1) infiniment voisin de (2,1) et une fois par deux points (2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2) infiniment voisins successifs du point (2, 1, 1). Le point (2, 1, 1, 2) est uni de première espèce pour l'involution et les courbes C_0'' ont en A le schéma

$$
\begin{array}{lllll}
A^{11}, & (2,1)^5, & (2,2)^2, \ldots, (2,8)^2, & & (2,9)^1, \\
(1,1)^5, & (2,1,1)^1, & (2,1,1,1)^1, & (2,1,1,2)^1. & (2,9,1)^1. \\
\cdots & & & & \\
(1,4)^5. & & & &
\end{array}
$$

Le point A_1' est donc double biplanaire pour Φ_1. En projetant cette surface de A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_2, d'ordre $n - 9$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0'''.

A la sextique σ_1 correspond sur Φ_2 une quintique qui sera encore désignée par σ_1. Au domaine du point (2, 1, 1, 2) correspond une droite τ_1, au domaine du point (2, 9, 1) correspond une droite τ_2. A la droite σ_2 correspond un point singulier appartenant à la droite τ_2. De plus, τ_1 rencontre σ_1 en un point A_2' et τ_2 rencontre τ_1 en un point A_0'.

Les courbes Γ_0''' ont le genre $\pi - 7$.

D'après ce que nous venons d'établir, les courbes C_0''' ont pour schéma, au point A_1

$$\begin{array}{lcr} & A^{14}, (2,1)^2, \ldots, (2,8)^2, (2,9)^1, & \\ (1,1,7)^1, \ldots, (1,1,1)^1, (1,1)^5, & & (2,9,1)^1. \\ & (1,2)^4, & \\ & (1,3)^4, & \\ & (1,4)^4. & \end{array}$$

Il en résulte que les courbes Γ_0'''' sont découpées sur la surface Φ_2 par les hyperplans passant par le point A_2' commun aux courbes σ_1, τ_2. Comme nous l'avons vu, $|\Gamma_0''''|$ a le degré $n - 10$ et par conséquent le point A_2' est simple pour la surface Φ_2 ; il représente le domaine du point (1, 1, 7).

3. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 15 en A, quatre tangentes en ce point coïncidant avec a_1 et onze avec a_2. Ces courbes passent nécessairement quatre fois par chacun des points (1,1), (1,2), (1,3), (1,4). D'autre part, elles ne peuvent plus passer par le point (2, 9, 1), car alors la somme des multiplicités de la courbe aux points A, (2, 1), (2, 2), ..., (2, 24) serait supérieure à 31. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, qui correspondent sur Φ_2 aux courbes $C_0^{(4)}$, sont découpées par les hyperplans passant par A_2' et par un point de τ_2.

Projetons la surface Φ_2 du point A_2' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_3 d'ordre $n - 10$, dont les courbes Γ_0'''' sont les sections hyperplanes. A la courbe σ_1 correspond une quartique rationnelle que nous désignerons encore par σ_1 ; au point A_2' correspond une droite exceptionnelle

g_1 ; à τ_2 correspond une droite τ_2 et à τ_1, le point commun aux droites g_1, τ_2. Aux courbes $C_0^{(4)}$ correspondent sur Φ_3 des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ qui ne doivent plus rencontrer g_1 en un point variable, puisque les courbes $C_0^{(4)}$ ne passent pas par le point (1, 1, 7). Il en résulte que sur Φ_3, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point commun à g_1, τ_2 ; par conséquent, sur Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1.

Les courbes $C_0^{(4)}$ doivent donc passer par le point (2, 1, 1, 2). Elles ne peuvent passer trois fois par ce point, car alors, elles passeraient trois fois par le point (2, 1, 1) et au moins 9 fois par le point (2, 1), alors que la somme de leurs multiplicités en ces points ne peut dépasser 11, nombre de tangentes aux courbes $C_0^{(4)}$ confondues avec a_2. Mais alors, le point A'_0, commun aux droites τ_1, τ_2 sur Φ_2, est au moins double pour cette surface. Il ne peut avoir une multiplicité supérieure à deux, car en retournant à la surface Φ_1, il donne un point infiniment voisin à un point double biplanaire A'_1.

On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ rencontrent τ_1 en deux points variables et passent par le point A'_0. Par suite, les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A le schéma suivant :

$$\begin{array}{lllll} & & (2,1,1)^2, & (2,1,1,1)^2, & (2,1,1,2)^2. \\ & A^{15}, & (2,1)^9, \ (2,2)^3, & (2,3)^3, & (2,4)^1, \\ (1,1)^4, & & & & (2,4,1)^1, \\ \ldots & & & & (2,4,2)^1. \\ (1,4)^4. & & & & \end{array}$$

Le point (2, 4, 2) est uni de première espèce pour l'involution et il lui correspond, sur Φ_2, le domaine du point A'_0.

Projetons la surface Φ_2 de la droite τ_1 sur l'intersection de deux hyperplans ; nous obtenons une surface Φ_4, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$. Cette surface a l'ordre $n - 13$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(4)}$ ont le genre $\pi - 9$.

A la courbe σ_1 correspond sur Φ_4 une quartique gauche σ_1 ; à la droite τ_1 correspond une conique τ_1 rencontrant σ_1 en un point A'_4, au point A'_0 ou au point (2, 4, 2) correspond une droite τ_0 rencontrant τ_1 en un point. Aux droites τ_2, σ_2 correspondent un même point (singulier) de Φ_4 appartenant à la droite τ_0.

4. Ce qui précède montre que la singularité de la surface Φ au point de diramation A′ est équivalente à l'ensemble des courbes rationnelles σ_1, τ_1, τ_0, τ_2, σ_2. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_0 + \tau_2 + \sigma_2$$

et par conséquent les courbes en question ont respectivement les degrés virtuels — 7, — 2, — 2, — 2, — 2. Comme on l'a vu, chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Les courbes Γ_0'' satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \tau_0 + \tau_2) + \sigma_2.$$

Les courbes Γ_0''' satisfont à la même relation fonctionnelle, car ce sont des courbes Γ_0'' passant par un point simple A_2' de la surface Φ_2.

Quant aux courbes $\Gamma_0^{(4)}$, elles satisfont à la relation

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 3\tau_1 + 3\tau_0 + 2\tau_2 + \sigma_2.$$

L'analyse de la structure du point A′ pourrait se limiter à ce qui précède ; il nous a cependant paru utile d'étudier les courbes $C_0^{(5)}$, $C_0^{(6)}$, ..., $C_0^{(14)}$ et les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, $\Gamma_0^{(6)}$, ..., $\Gamma_0^{(14)}$ qui leur correspondent sur Φ.

5. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 18 en A, 11 tangentes en ce point coïncidant avec a_1 et sept avec a_2.

Ces courbes ne peuvent plus passer plus de trois fois par le point (1,4). D'autre part, si elles passaient deux fois par le point (2, 1, 1, 2). elles passeraient deux fois par (2, 1, 1) et au moins six fois par (2,1), alors que la somme de leurs multiplicités en ces deux points ne peut excéder le nombre sept de leurs tangentes en A confondues avec a_2. Il en résulte que sur Φ, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A_4' commun à σ_1, τ_1.

Le schéma des courbes $C_0^{(5)}$ en A est par conséquent

$$\begin{array}{lll}
 & & (2,1,1)^1,\ (2,1,1,1)^1,\ (2,1,1,2)^1. \\
 & A^{18}, & (2,1)^6,\ (2,2)^3,\ (2,3)^3,\ (2,4)^1, \\
(1,1,7)^1, \dots,\ (1,1,1)^1, & (1,1)^4, & \qquad\qquad\qquad\quad (2,4,1)^1, \\
 & (1,2)^3, & \qquad\qquad\qquad\quad (2,4,2)^1. \\
 & (1,3)^3, & \\
 & (1,4)^3. &
\end{array}$$

Le système $|\Gamma_0^{(5)}|$ a le degré $n - 14$ et le genre $\pi - 9$ Le point A_4' est donc simple pour la surface Φ_4 et les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ satisfont à la même relation fonctionnelle que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$.

6. Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 19 fois par A et ont en ce point trois de leurs tangentes confondues avec a_1, seize avec a_2 Ces courbes passent nécessairement trois fois par les points (1,1), (1,2), (1,3) et (1,4).

Si l'on projetait Φ_4 du point A_4' sur un hyperplan, on obtiendrait une surface Φ_5 sur laquelle à σ_1 correspondrait une cubique gauche, à A_4' une droite exceptionnelle g_1 rencontrant σ_1, à la conique τ_1 une droite τ_1 rencontrant g_1. Comme les courbes $C_0^{(6)}$ ne passent plus par le point (1, 1, 7), les hyperplans découpant sur Φ_5 les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ ne peuvent rencontrer g_1 en un point variable. Ils rencontrent d'autre part σ_1 en trois points variables, donc ils doivent passer par le point commun à g_1, τ_1. En d'autres termes, sur la surface Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A_4' et y touchant la conique τ_1.

On en conclut que le système $|\Gamma_0^{(6)}|$ a le degré $n - 15$ et le genre $\pi - 9$. Ses courbes satisfont à la même relation fonctionnelle que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$.

Les courbes $C_0^{(6)}$ ont pour schéma en A,

$$
\begin{array}{llllll}
 & A^{19}, & (2,1)^5, & (2,2)^3, & (2,3)^3, & (2,4)^1, \\
(1,1)^3, & & (2,1,1)^2 & & & (2,4,1)^1, \\
\ldots & & \ldots & & & (2,4,2)^1. \\
\ldots & & \ldots & & & \\
(1,4)^3. & & (2,1,5)^2, & & & \\
 & & (2,1,6)^1, & (2,1,6,1)^1. & &
\end{array}
$$

Au domaine du point (2, 1, 6, 1), uni de première espèce pour l'involution, correspond sur Φ_4 le point simple infiniment voisin de A_4' sur la conique τ_1.

7. Les courbes $C_0^{(7)}$ ont la multiplicité 21 en A, 18 tangentes en ce point coïncidant avec a_1 et trois avec a_2. Ces courbes ne peuvent plus passer trois fois par le point (1, 4), sans quoi la somme de leurs multiplicités en A (1, 1), ..., (1, 4) serait supérieure à 31. Il en résulte que, sur la surface Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées par des hyperplans touchant en A'_4 la courbe σ_1. Comme ces hyperplans touchent déjà en ce point la conique τ_1, ils contiennent le plan tangent à Φ_4 en A'_4. Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ ont donc un point double à tangentes variables en ce point.

Cela étant, les courbes $C_0^{(7)}$ ont pour schéma en A

$$\begin{array}{lll} & A^{21}, (2,1)^3, (2,2)^3, (2,3)^3, & (2,4)^1, \\ (1,1,7)^2, \ldots, (1,1,1)^2, & (1,1)^4, & (2,4,1)^1, \\ & (1,2)^2, & (2,4,2)^1. \\ & (1,3)^2, & \\ & (1,4)^2. & \end{array}$$

Le système $|\Gamma_0^{(7)}|$ a le degré $n - 17$ et le genre $\pi - 10$.

8. Passons aux courbes $C_0^{(8)}$. Elles ont la multiplicité 22 en A, dix tangentes en ce point confondues avec a_1 et douze avec a_2. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (2, 4, 2). D'autre part, elles ne peuvent plus passer qu'une fois par le point (1, 1, 7), car elles passent deux fois par (1, 3) et trois fois par (1, 1).

Sur la surface Φ_7 dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$, la courbe σ_1 est une conique, la courbe exceptionnelle g_1, qui représente le point A'_4, est une conique rencontrant σ_1, la courbe τ_0 est une droite qui rencontre g_1 en un point (singulier) qui représente τ_1. Il en résulte que, sur cette surface, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point commun à g_1, τ_0. Par conséquent, sur la surface Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la conique τ_1. Ces courbes rencontrent τ_1 en quatre points, dont l'un est le point A'_4, les trois autres étant variables.

Les courbes $C_0^{(8)}$ ont pour schéma en A,

$$\begin{array}{ll} & A^{22}, \quad (2,1)^9, \\ (1,1,7)^1, \ldots, (1,1,1)^1, (1,1)^3, & (2,1,1)^3, (2,1,1,1)^3, (2,1,1,2)^3. \\ (1,2)^2, & \\ (1,3)^2, & \\ (1,4)^2. & \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(8)} + \sigma_1 + 4\tau_1 + 3\tau_0 + 2\tau_2 + \sigma_2,$$

mais ce ne sont pas les courbes les plus générales satisfaisant à cette relation. Celles-ci rencontrent σ_1 en trois points variables et τ_1 en quatre points variables, alors que les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ doivent passer par le point commun aux courbes σ_1, τ_1.

Le système $|\Gamma_0^{(8)}|$ a le degré $n - 20$ et le genre $\pi - 12$.

9. Les courbes $C_0^{(9)}$ ont la multiplicité 23 en A, deux tangentes confondues avec a_1 et 21 avec a_2. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (1, 1, 7), car le point (1, 1) est double, de même que les points (1,2), (1,3), (1,4).

Sur la surface Φ_8, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0^8, la courbe σ_1 est une conique, la courbe exceptionnelle g_1 une droite, la courbe τ_1 une cubique gauche. La droite exceptionnelle g_1 s'appuie sur σ_1 et sur τ_1. De plus, aux courbes τ_0, τ_2, σ_2 correspondent un point singulier pour la surface, appartenant à la courbe τ_1.

Référons-nous à une surface Φ_8' dont Φ_9 est la projection à partir d'un point A_8''. Sur cette surface Φ_8', σ_1 est une cubique gauche, τ_1 une quartique coupant σ_1 en A_8'' et les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées par les hyperplans passant par A_8''. Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont découpées par les hyperplans touchant en A_8'' la courbe τ_1 et par conséquent les courbes $C_0^{(9)}$ passent simplement par le point (1, 1, 6, 1).

Ces courbes ont en A le schéma

	A^{23}, $(2,1)^8$,
$(1,1)^2$,	$(2,1,1)^4$, $(2,1,1,1)^2$, $(2,1,1,2)^2$.
$(1,2)^2$,	$(2,1,2)^2$,
$(1,3)^2$,	...
$(1,4)^2$	$(2,1,5)^2$
	$(2, 1, 6)^1$, $(2,1,6,1)^1$.

Le système $|\Gamma_0^{(9)}|$ a le degré $n - 21$ et le genre $\pi - 12$.

10. Les courbes $C_0^{(10)}$ passent 25 fois par A, 17 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 8 avec a_2. Ces courbes ne peuvent plus passer qu'une fois par le point (1, 4).

Les courbes $C_0^{(11)}$ passent 26 fois par A, 9 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 17 avec a_2.

On peut recommencer, pour ces courbes, sur la surface Φ'_8, le même raisonnement qui a été fait pour les courbes $\Gamma_0^{(7)}$, $\Gamma_0^{(8)}$ sur la surface Φ_4. Les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont découpées sur Φ'_8 par les hyperplans contenant le plan tangent à cette surface en A''_8. Les courbes $C_0^{(10)}$ ont par conséquent en A le schéma

$$\begin{array}{lcl} & A^{25}, (2,1)^6, & \\ (1,1,7)^2, \ldots, (1,1,1)^2, & (1,1)^3 & (2,1,1)^2, (2,1,1,1)^2, (2,1,1,2)^2. \\ & (1,2)^1, & \\ & (1,3)^1, & \\ & (1,4)^1. & \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ ont un point double à tangentes variables en A''_8. Elles forment un système de degré $n - 23$ et de genre $\pi - 13$.

Les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ sont découpées sur Φ'_8 par les hyperplans contenant le plan tangent à la surface en A''_8 et osculant la courbe τ_1 en ce point. Il en résulte que les courbes $C_0^{(11)}$ ont le schéma

$$\begin{array}{lcl} & A^{26}, (2,1)^5, & \\ (1,1,7)^1, \ldots, (1,1,1)^1, & (1,1)^2, & (2,1,1)^3, (2,1,1,1)^1, (2,1,1,2)^1 \\ & (1,2)^1, & (2,1,2)^2, \\ & (1,3)^1, & \ldots \\ & (1,4)^1. & \ldots \\ & & (2,1,5)^2, \\ & & (2,1,6)^1, (2,1,6,1)^1. \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ ont un point double en A''_8 et une de leurs tangentes en ce point coïncide avec la tangente à τ_1. Elles forment un système linéaire de degré $n - 24$ et de genre $\pi - 13$.

11. Les courbes $C_0^{(12)}$ passent 27 fois par A et ont en ce point une tangente confondue avec a_1 et 26 avec a_2. Il en résulte que ces courbes passent une fois par les points (1,1), (1,2), (1,3) et (1,4).

Sur la surface Φ_{10}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(10)}$, la courbe σ_1 est une droite, la courbe exceptionnelle g_1 une conique rencontrant σ_1 en un point, la courbe τ_1 est également une conique, rencontrant g_1 en un point. Les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par le point commun à g_1 et τ_1, point simple pour la surface.

Sur la surface Φ_{11}, σ_1 est une droite, g_1 une droite rencontrant σ_1 en un point. Au point (2,1,6,1) correspond une droite exceptionnelle g_2 rencontrant g_1 ; enfin τ_1 est une droite rencontrant g_2. Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par le point commun aux droites exceptionnelles g_1, g_2.

Le schéma des courbes $C_0^{(12)}$ au point A est

$$
\begin{array}{ll}
 & A^{27},\ (2,1)^4, \\
(1,1)^1, & (2,1,1)^2,\ (2,1,1,1)^1,\ (2,1,1,2)^1. \\
(1,2)^1, & (2,1,2)^1, \\
(1,3)^1, & \\
(1,4)^1. & \\
 & (2,1,21)^1.
\end{array}
$$

Le système $|\Gamma_0^{(12)}|$ est de degré $n = 25$ et de genre $\pi = 13$. Il en résulte que le point commun à g_1, g_2 est simple pour la surface Φ_{11} et qu'au domaine du point (2, 1, 21), uni de première espèce pour l'involution, correspond sur la surface Φ_{12} une droite exceptionnelle g_2'.

Sur cette surface Φ_{12}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$, σ_1 est une droite rencontrant g_2' en un point simple et τ_1 est également une droite, rencontrant g_2' en un point simple également.

Les courbes $C_0^{(13)}$ ont en A la multiplicité 28, 24 tangentes confondues avec a_1 et quatre avec a_2. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (1,4) et elles ont en A le schéma

$$
\begin{array}{ll}
 & A^{28},\ (2,1)^3, \\
(1,1)^3, & (2,1,1)^1,\ (2,1,1,1)^1,\ (2,1,1,2)^1. \\
(1,1,1)^3, & \\
\dots & \\
(1,1,7)^3. &
\end{array}
$$

Sur la surface Φ_{13}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(13)}$, il correspond à g_1 une cubique gauche et à τ_1 une droite rencontrant g_1 en un point. A σ_1 correspond un point singulier situé sur g_1 et à τ_0 τ_2 σ_2 un point singulier situé sur τ_1.

Le système $|\Gamma_0^{(12)}|$ a le degré $n - 28$ et le genre $\pi - 15$.

12. Il est facile de déterminer les schémas des courbes $C_0^{(14)}$ et $C_0^{(15)}$ au point A. On trouve pour les courbes $C_0^{(14)}$.

$$\begin{array}{ll} & A^{29},\ (2,1)^2, \\ (1,1), & (2,1,1)^2, \\ (1,1,1)^2, & \dots \\ \dots & (2,1,5)^2, \\ (1,1,7)^2. & (2,1,6)^1,\ (2,1,6,1)^1. \end{array}$$

Pour les courbes $C_0^{(15)}$, on trouve,

$$\begin{array}{ll} & A^{30},\ (2,1)^1, \\ (1,1)^1, & (2,1,1)^1, \\ (1,1,1)^1, & \dots \\ \dots & \dots \\ (1,1,7)^1. & (2,1,21)^1. \end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ forment un système linéaire de degré $n - 29$ et de genre $\pi - 15$. Les courbes $\Gamma_0^{(15)}$ forment un système linéaire de degré $n - 30$ et de genre $\pi - 15$.

Sur la surface Φ_{15}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(15)}$, on a deux droites exceptionnelles g_1, g_2', se coupant en un point.

13. Observons que les courbes

$$\Gamma_0 - \sigma_1 - 2\tau_1 - 3\tau_0 - 2\tau_2 - \sigma_2,$$

sur la surface Φ, rencontrent la courbe σ_1 en 5 points, la courbe τ_0 en deux points, mais ne rencontrent pas les courbes τ_1, τ_2, σ_2. Il leur correspond sur F des courbes appartenant au système $|C|$, ayant en A le schéma

A^{11}. $(2,1)^6$, $(2,2)^6$, $(2,3)^6$,	$(2,4)^2$,
$(1,1)^5$,	$(2,4,1)^2$
$(1,2)^5$,	$(2,4,2)^2$.
$(1,3)^5$,	
$(1,4)^5$.	

Les sommes des multiplicités de ces courbes aux points A, (1,1), ..., (1,4) d'une part, aux points A, (2,1), ..., (2,4) d'autre part, sont égales à 31. Ces courbes appartiennent comme cas particulier au système $|C_0''|$.

On vérifie de même qu'aux courbes

$$\Gamma_0 - \sigma_1 - 4\tau_1 - 3\tau_0 - 2\tau_2 - \sigma_2$$

correspondent sur F des courbes, particulières, appartenant au système $|C_0^{(4)}|$.

Liège, le 6 avril 1950.