Bulletin de la Classe des sciences

# Construction de surfaces algébriques irrégulières

Lucien Godeaux

**Résumé**
Construction d'une surface algébrique irrégulière image d'une involution appartenant à la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique contenant une involution cyclique irrationnelle.

## COMMUNICATION DES MEMBRES

### GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Construction de surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — Construction d'une surface algébrique irrégulière image d'une involution appartenant à la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique contenant une involution cyclique irrationnelle.

Dans une communication faite au *Colloque de Géométrie algébrique* tenu à Liége du 19 au 21 décembre (1), nous avons indiqué un procédé de construction de surfaces irrégulières que nous nous proposons d'appliquer dans cette note. Soit L une courbe algébrique de genre $\pi$ contenant une involution cyclique $\gamma_p$ d'ordre premier impair $p$ et de genre $\pi'$ supérieur à zéro. La surface F, qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L, contient une involution cyclique d'ordre $p$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Une surface $\Phi$, image de cette involution, a l'irrégularité au moins égale à $\pi'$ et on peut en construire un modèle projectif dont les sections hyperplanes constituent le système canonique.

Dans une note antérieure (2), nous avons considéré une courbe algébrique contenant une involution irrationnelle d'ordre $p$ telle que les séries canoniques partielles appartenant à l'involution ont pour homologues, sur la courbe image de l'involution, respectivement la série canonique, la série bicanonique, la série tricanonique,... de cette courbe. En prenant pour courbe L

(1) Les communications faites au Colloque seront publiées prochainement.

(2) *Sur certaines involutions cycliques appartenant aux courbes algébriques*, (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1929, pp. 25-36).

une courbe de cette espèce, nous parvenons à déterminer le genre arithmétique de la surface $\Phi$.

Nous commencerons par rappeler brièvement les résultats établis dans notre communication au Colloque qui nous sont utiles ici.

**1.** Soit L une courbe algébrique de genre $\pi$, contenant une involution cyclique $\gamma_p$, d'ordre premier impair $p$ et de genre $\pi' > 0$. Considérons la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Si à un point P de F correspondent les points $P_1$, $P_2$ de L et si $P'_1$, $P'_2$ sont les points de L que la transformation génératrice de $\gamma_p$ fait correspondre à $P_1, P_2$, au couple $P'_1$, $P'_2$ de L correspond un point $P'$ de F que nous ferons correspondre à P. Cette correspondance est déterminée par une transformation birationnelle T de F en soi, de période $p$, engendrant une involution $I_p$ d'ordre $p$.

Les points unis de l'involution $I_p$ sont les points de F qui représentent les couples de points unis de $\gamma_p$ sur L ou chacun de ces points compté deux fois

Pour construire une surface $\Phi$ image de l'involution $I_p$, prenons pour modèle projectif de la courbe L, supposée non hyperelliptique, la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$ de $S_{\pi-1}$. Sur cette courbe L, $\gamma_p$ engendrée par une homographie $\tau$, de période $p$, présentant $p$ axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont l'un, $\sigma_0$, ne rencontre pas L [1]. Les points unis de $\gamma_p$ sont situés sur les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$.

On peut prendre, pour modèle projectif de F, une surface de l'espace $\Sigma$ à $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$ dimensions, tracée sur la grassmannienne des droites de $S_{\pi-1}$, dont les sections hyperplanes représentent les réglées formées de cordes de L appartenant à des complexes linéaires de $S_{\pi-1}$. On sait que les sections hyperplanes de ce modèle projectif F sont précisément les courbes canoniques de la surface [2].

---

[1] Si $\pi' > 0$, il y a nécessairement $p$ axes ponctuels de $\tau$. Cfr. P. Defrise, *Les courbes multiples abéliennes avec points de diramation* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1938, pp. 372-388).

[2] F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti dell' Accademia di Torino, 1902-1903, pp. 185-200).

L'espace $\sigma_0$ a la dimension $\pi' - 1$ et nous désignerons par $s_1$, $s_2$, ..., $s_{p-1}$ les dimensions de $\sigma_1$, $\sigma_2$, ..., $\sigma_{p-1}$.

Aux espaces $\sigma_0$, $\sigma_1$, ..., $\sigma_{p-1}$ nous pouvons attacher les nombres $1$, $\epsilon$, ..., $\epsilon^{p-1}$, où $\epsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité, c'est-à-dire les invariants projectifs de l'homographie $\tau$ (en changeant éventuellement la nomenclature de ces espaces).

Sur le modèle projectif de la surface F considéré, l'involution $I_p$ est déterminée par une homographie de période $p$ de $\Sigma$. Soient $\Sigma_0$ $\Sigma_1$, ..., $\Sigma_{p-1}$ les axes de cette homographie. L'espace $\Sigma_0$ par exemple contient les points de $\Sigma$ (ou de la grassmannienne des droites $S_{\pi-1}$) représentant les droites de $\sigma_0$, les droites s'appuyant sur $\sigma_1$ et $\sigma_{p-1}$, sur $\sigma_2$ et $\sigma_{p-2}$. .... Et de même pour $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, ..., $\Sigma_{p-1}$.

Nous avons démontré que les sections de F par les hyperplans passant par $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, ..., $\Sigma_{p-1}$ correspondaient aux courbes canoniques de la surface $\Phi$, et que le système de ces hyperplans avait la dimension

$$r_0 = \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1) + (s_1 + 1)(s_{p-1} + 1) + \ldots + (s_\nu + 1)(s_{\nu+1} + 1) - 1,$$

où $p = 2\nu + 1$.

En rapportant projectivement ces hyperplans à ceux d'un espace à $r_0$ dimensions, on obtient un modèle projectif de la surface $\Phi$ dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.

Les points unis de l'involution $I_p$ sont de trois sortes :

1) Les points unis qui représentent les cordes de L joignant deux points unis de $\gamma_p$ appartenant à un même axe de $\tau$. Ces points sont unis de première espèce, c'est-à-dire que dans le domaine du premier ordre d'un de ces points sur F, T donne l'identité.

2) Les points unis qui représentent les cordes de L joignant deux points unis de $\gamma_p$ situés dans des axes ponctuels distincts de $\tau$.

3) Les points unis qui représentent les tangentes à la courbe L aux points unis de $\gamma_p$.

Les points unis de la seconde et de la troisième sorte sont de seconde espèce, c'est-à-dire que dans le domaine du premier ordre d'un de ces points sur F, l'homographie T engendre une homographie d'ordre $p$.

**2.** Prenons pour L une courbe non hyperelliptique. Soit L' la courbe de genre $\pi' > 1$ représentant l'involution $\gamma_p$. Désignons par $|G|$ la série canonique de L et par $|G'|$ celle de L'. Il existe dans $|G|$ un certain nombre de séries partielles $|G_0|$, $|G_1|$ ..., $|G_k|$ appartenant à l'involution $\gamma_p$ ; ces séries ont comme points fixes les points unis de $\gamma_p$. L'une $|G_0|$, est la transformée de $|G'|$ (et a comme points fixes les points unis comptés $p-1$ fois). Supposons que $|G_1|$ soit la transformée de $|2G'|$, $|G_2|$ la transformée de $|3G'|$, ... (1). On a alors $k = p - 1$,

$$\pi - 1 = p^2(\pi' - 1)$$

et le nombre des points unis de $\gamma_p$ est

$$\delta = 2p(\pi' - 1).$$

Prenons pour modèle projectif de L la courbe canonique, d'ordre $2\pi - 2$, de $S_{\pi-1}$. Sur cette courbe, $\gamma_p$ est engendrée par une homographie $\tau$ présentant $p$ axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Seul, l'espace $\sigma_{p-1}$ coupe L aux $\delta$ points unis de $\gamma_p$. Soient $U'_1$, $U'_2, \ldots, U'_\delta$ ces points unis.

Les tangentes à L en $U'_1, U'_2, \ldots, U'_\delta$ s'appuient sur $\sigma_{p-2}$ ; les plans osculateurs à L aux points unis s'appuient sur $\sigma_{p-3}$ ; ... ; les espaces linéaires ayant un contact d'ordre $p-2$ aux points unis de $\gamma_p$ s'appuient sur $\sigma_1$.

La série $|G_0|$ est découpée sur L par les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et a la dimension $\pi' - 1$ ; la série $|G_1|$ est découpée par les hyperplans passant par $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et a la dimensions $3\pi' - 4$ ; ... ; la série $|G_i|$ est découpée par les hyperplans passant par $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$ et a la dimension $(2i+1)(\pi' - 1) - 1$, ....

Si nous désignons par $|\overline{G}_0|, |\overline{G}_1|, \ldots, |\overline{G}_{p-1}|$ les parties variables des séries $|G_0|, |G_1|, \ldots, |G_{p-1}|$, nous avons

$$G_0 \equiv \overline{G}_0 + (p-1)D, \quad G_1 \equiv \overline{G}_1 + (p-2)D, \quad \ldots,$$
$$G_{p-2} \equiv \overline{G}_{p-2} + D, \quad G_{p-1} \equiv \overline{G}_{p-1},$$

(1) *Sur certaines involutions...* (loc. cit.).

D représentant le groupe des points unis de $\gamma_p$. On en conclut que l'on peut attacher aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ les nombres $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$ dans l'ordre indiqué.

**3.** Ce qui précède permet de déterminer immédiatement le genre géométrique $p_g$ de la surface $\Phi$. On a en effet

$$s_i = (2i + 1) - 1,$$

donc

$$p_g = \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1) + \sum_{i=1}^{\nu} (2i + 1)(2p - 2i + 1)(\pi' - 1)^2,$$

c'est-à-dire

$$p_g = \frac{1}{6}p(2p^2 + 6p - 5)(\pi' - 1)^2 + \frac{1}{2}(\pi' - 1).$$

La surface $\Phi$ contient une involution d'ordre $p$, non cyclique, dont l'image est la surface F′ représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L′. A une courbe canonique de F′ correspond sur $\Phi$ une courbe appartenant à une courbe canonique de $\Phi$. La surface F′ est de genre géométrique $\frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1)$. Or, on a

$$p_g > \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1)$$

quel que soit $p$ entier positif. On en conclut que le système canonique de $\Phi$ est simple et que l'on peut prendre, pour modèle projectif de cette surface, une surface d'un espace projectif à $p_g - 1$ dimensions, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.

**4.** Les points unis de l'involution $I_p$ sont actuellement de deux sortes :

1) Points unis représentant les droites joignant deux des points $U'_1, U'_2, \ldots, U'_\delta$. Comme ces derniers points appartiennent tous à l'espèce $\sigma_{p-1}$, les points unis correspondants sur F sont de première espèce.

2) Points unis représentant les tangentes à L aux points $U'_1$, $U'_2, \ldots, U'_\delta$. Ces points unis sont de seconde espèce.

Désignons par $U_{ik}$ le point qui représente sur F le couple $U'_i$, $U'_k$ de L ; ce point est donc uni de première espèce pour l'involution $I_p$. Il appartient à l'espace $\Sigma_{p-2}$, qui contient les points de $\Sigma$ qui représentent les droites de $\sigma_{p-1}$.

Nous avons démontré que les courbes canoniques de $\Phi$ avaient pour transformées sur la surface F des courbes canoniques ayant la multiplicité $p-2$ en un point uni de pemière espèce ([1]). On en conclut que les courbes découpées sur F par les hyperplans passant par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$ ont la multiplicité $p-2$ aux points unis de première espèce $U_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \ldots, \delta$ ; $i \neq k$).

Au domaine du point $U_{ik}$ correspond sur $\Phi$ une courbe rationnelle $\chi_{ik}$, d'ordre $p-2$. Le nombre des points $U_{ik}$ est

$$\alpha = \frac{1}{2}\delta(\delta-1) = 2p^2(\pi'-1)^2 - p(\pi'-1).$$

Il y a donc, sur la surface $\Phi$, $\alpha$ courbes rationnelles d'ordre $p-2$, ne se rencontrant pas deux-à-deux.

**5.** Désignons par $U_i$ le point uni de $I_p$ qui représente la tangente à la courbe L au point $U'_i$. Cette tangente s'appuie en un point $P_i$ sur l'espace $\sigma_{p-2}$ et par conséquent les points $U_i (i = 1, 2, \ldots, \delta)$ appartiennent à l'espace $\Sigma_{p-3}$.

Le cône projetant la courbe L d'un de ses points est représenté sur F par une courbe K qui, lorsque le cône varie, engendre un système continu $\{K\}$, $\infty^1$, d'indice deux, ayant comme enveloppe la courbe $K_0$ représentant les couples de points de L formés de deux points confondus. Les points $U_1, U_2, \ldots, U_\delta$ appartiennent donc à la courbe $K_0$. Désignons par $K_1, K_2, \ldots, K_\delta$ les courbes K passant respectivement par les points $U_1, U_2, \ldots, U_\delta$. Ces courbes appartiennent à l'involution $I_p$ et les courbes $K_i$, $K_k$ se coupent au point $U_{ik}$.

Le point de la courbe $K_i$, infiniment voisin de $U_i$, est uni pour $I_p$.

Considérons d'autre part un espace linéaire $S_{\pi-3}$ uni pour $\tau$, ne contenant pas $\sigma_{p-2}$ mais passant par $P_i$. Les cordes de L s'ap-

([1]) *Recherches sur les involutions cycliques douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1919, pp. 1-16).

puyant sur cet espace $S_{\pi-3}$ forment une réglée transformée en soi par $\tau$, contenant la droite $U'_iP_i$, mais ne touchant pas en général le long de cette droite le cône projetant L de $U'_i$. A cette réglée correspond sur F une courbe canonique passant par $U_i$, transformée en soi par T. Le point de cette courbe infiniment voisin de $U_i$ est uni pour l'involution $I_p$. Nous avons ainsi déterminé les deux points du domaine du premier ordre de $U_i$, unis pour l'involution $I_p$.

Nous pouvons prendre, pour l'espace $S_{\pi-3}$ qui vient d'être considéré, un espace passant par $\sigma_0$, $\sigma_1$, ..., $\sigma_{p-3}$, $\sigma_{p-1}$ et coupant $\sigma_{p-2}$ suivant un espace linéaire à $(2p-3)(\pi'-1)-3$ dimensions contenant $P_i$. Le complexe linéaire lieu des droites de $S_{\pi-1}$ s'appuyant sur cet espace $S_{\pi-4}$ ne contient pas toutes les droites de $\sigma_{p-2}$ ; il lui correspond, dans $\Sigma$, un hyperplan contenant les espaces $\Sigma_0$, $\Sigma_1$, ..., $\Sigma_{p-5}$, $\Sigma_{p-3}$, $\Sigma_{p-2}$, $\Sigma_{p-1}$. On en conclut que les hyperplans passant par ces espaces coupent F suivant des courbes passant simplement par $U_i$. En d'autres termes, le plan tangent à F en $U_1$ s'appuie en un point sur $\Sigma_{p-4}$.

Prenons maintenant un espace linéaire $S_{\pi-3}$ pressant par $\sigma_0$, $\sigma_1$, ..., $\sigma_{p-2}$ et coupant $\sigma_{p-1}$ suivant un espace linéaire à $(2p-1)(\pi'-1)-3$ dimensions contenant $U'_i$. Au complexe lieu des droites de $S_{\pi-1}$ s'appuyant sur cet espace $S_{\pi-3}$ correspond dans $\Sigma$ un hyperplan passant par $\Sigma_0$, $\Sigma_1$, ..., $\Sigma_{p-3}$, $\Sigma_{p-1}$, coupant F suivant une courbe passant simplement par $U_i$ en y touchant $K_i$. Par suite, le plan tangent à F en $U_i$ s'appuie en un point sur $\Sigma_{p-2}$.

Les invariants attachés à $U_i$ sont par conséquent $\epsilon^{p-4}$ et $\epsilon^{p-2}$ ou, si nous posons $\eta = \epsilon^{p-2}$, les nombres $\eta^2$, $\eta$. On en conclut que le point de $K_i$ infiniment voisin de $U_i$ ,est uni de première espèce pour $I_p$ (¹).

Nous avons démontré qu'aux courbes canoniques de la surface $\Phi$ correspondent, sur la surface F, des courbes canoniques ayant un point multiple d'ordre $\nu-1$ auquel est infiniment voisin un point de même multiplicité, situé actuellement sur la

(¹) *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210).

courbe $K_i$ [1]. Au domaine de ce point correspond, sur la surface $\Phi$, une courbe rationnelle $\chi_i$ d'ordre $\nu - 1$. Nous avons donc, sur la surface $\Phi$, $\delta$ courbes rationnelles d'ordre $\nu - 1$, ne se rencontrant pas deux à deux et ne rencontrant pas les courbes $\chi_{ik}$.

**6.** Le genre arithmétique de la surface F est

$$P_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi = \frac{1}{2}[p^4(\pi' - 1)^2 - p^2(\pi' - 1) - 2].$$

Entre le genre $P_a$ et le genre arithmétique $p_a$ de $\Phi$, nous avons la relation

$$12(P_a + 1) = 12p(p_a + 1) + \Delta,$$

$\Delta$ étant un terme qui dépend des points unis de l'involution. Précisément, un point uni du type de $U_{ik}$ intervient dans $\Delta$ pour $(p - 1)\ (p - 5)$ unités et un point uni du type de $U_i$ pour $\frac{1}{2}(p - 1)\ (p - 11)$ unités [2]. On a donc

$$\Delta = \alpha(p - 1)(p - 5) + \frac{1}{2}\delta(p - 1)(p - 11).$$

On en déduit

$$p_a = \frac{1}{6}p(2p^2 + 6p - 5)(\pi' - 1)^2 - \frac{1}{2}(\pi' - 1) - 1.$$

Par conséquent, l'irrégularité de la surface $\Phi$ est

$$p_g - p_a = \pi'.$$

Entre le genre linéaire $P^{(1)}$ de F et celui $p^{(1)}$ de $\Phi$, on a la relation [3]

$$P^{(1)} - 1 = p(p^{(1)} - 1) + \alpha(p - 2)^2 + \frac{1}{2}(p - 3)^2\delta.$$

---

(1) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (quatrième communication). (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1925, pp. 338-344).

(2) *Recherches sur les involutions...* (quatrième communication), (loc. cit.).

(3) *Recherches sur les involutions...* (quatrième communication), (loc. cit.).

Or, on a

$$P^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5) = 4p^4(\pi' - 1)^2 - 5p^2(\pi' - 1) + 1$$

et par suite

$$p^{(1)} = 2p(p^2 + 4p - 4)(\pi' - 1)^2 - (3p + 5)(\pi' - 1) + 1.$$

L'ordre de la surface $\Phi$ est $p^{(1)} - 1$.

Nous avons donc construit

*Une surface $\Phi$, d'irrégularité $\pi'$, appartenant à un espace linéaire à*

$$\frac{1}{6}p(2p^2 + 6p - 5)(\pi' - 1)^2 + \frac{1}{2}(\pi' - 1) - 1,$$

*d'ordre*

$$2p(p^2 + 4p - 4)(\pi' - 1)^2 - (3p + 5)(\pi' - 1),$$

*dont les sections hyperplanes constituent le système canonique. La surface contient* $2p^2(\pi' - 1)^2 - p(\pi' - 1)$ *courbes rationnelles d'ordre* $p - 2$ *et* $2p(\pi' - 1)$ *courbes rationnelles d'ordre* $\frac{1}{2}(p - 3)$, *ne se rencontrant pas deux à deux.*

**7.** Prenons comme exemple une courbe de genre $\pi = 10$, contenant une involution $\gamma_3$ d'ordre $p = 3$ et de genre $\pi' = 2$. [1]

La surface $\Phi$ appartient à un espace linéaire à 15 dimensions, elle est d'ordre 88 et a les genres

$$p_g = 16, \quad p_a = 14, \quad p^{(1)} = 89.$$

Elle contient 15 droites provenant des points $U_{ik}$.

Actuellement, on a $\nu = 1$ ; les points $U_i$ sont des points unis symétriques et les points de diramation correspondants sont sans influence sur les courbes canoniques de $\Phi$.

Liège, le 2 janvier 1950.

[1] *Sur certaines involutions cycliques...* (loc. cit).