Sur une transformation arguésienne dans l'espace (*); par L. Godeaux, étudiant à l'École des mines de Mons.

1. Dans un mémoire (**), Saltel étudie la transformation suivante :

On donne, dans un même plan, un pôle P et deux coniques S, S′ qui se coupent en quatre points A, B, C, D. A un point quelconque M du plan, on fait correspondre son conjugué M′ dans l'involution déterminée par les deux couples de points où la droite PM rencontre S et S′. Chacun des points M et M′ est dit l'*arguésien* de l'autre.

Lorsque M décrit une droite quelconque, M′ décrit une cubique dont A, B, C, D sont des points simples et P un point double. Cette cubique se décompose en une droite et une conique si le pôle P se trouve sur l'un des côtés du quadrilatère ABCD.

2. La transformation (MM′) peut être étendue à l'espace.

Considérons deux quadriques Q, Q′ représentées par les équations

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0,$$

et se coupant suivant une quartique gauche Σ.

Pour abréger le langage, nous dirons que deux points

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 359-364, 1907.

(**) *Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques.* 1870. (Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, t. XXII, publié en 1872.)

M, M′ sont *associés* par rapport à Q et Q′ (ou par rapport au faisceau [Q, Q′]), lorsqu'ils sont conjugués dans l'involution déterminée par les couples de points de rencontre de la droite MM′ avec les deux quadriques Q, Q′. D'après un théorème connu, ces points sont sur une quadrique du faisceau [Q, Q′]; par suite, les coordonnées $(y_1, y_2, y_3, y_4,)$ (x_1, x_2, x_3, x_4) des points M et M′ vérifient l'équation

$$a_x^2 b_y^2 - a_y^2 b_x^2 b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Saltel a déjà étudié la transformation (M,M′) lorsque la droite MM′ est assujettie à passer par un point fixe $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; nous n'en indiquerons ici que les formules générales.

Les coordonnées de M′ étant de la forme

$$x_i \equiv m\alpha_i + ny_i,$$

on aura

$$(ma_\alpha + na_y)^2 b_y^2 - (mb_\alpha + nb_y)^2 a_y^2 0,$$

équation qui se réduit à

$$m^2(a_\alpha^2 b_y^2 - a_y^2 b_\alpha^2) + 2mn. (a_\alpha a_y b_y^2 - b_\alpha b_y a_y^2) = 0.$$

On peut donc prendre

$$m = 2(b_\alpha b_y a_y^2 - a_\alpha a_y b_y^2), \ n = a_\alpha^2 b_y^2 - a_y^2 b_\alpha^2;$$

par conséquent,

$$x_i \equiv 2\alpha_i (b_\alpha b_y a_y^2 - a_\alpha a_y b_y^2) + y_i (a_\alpha^2 b_y^2 - a_y^2 b_\alpha^2), \quad . \quad (2)$$

et inversement

$$y_i \equiv 2\alpha_i (b_\alpha b_x a_x^2 - a_\alpha a_x b_x^2) + x_i (a_\alpha^2 b_x^2 - a_x^2 b_\alpha^2). \quad . \quad (3)$$

Lorsque le point M décrit un plan $A_x = 0$, le point M′ décrit la surface du troisième ordre

$$2A_\alpha (b_\alpha b_x a_x^2 - a_\alpha a_x b_x^2) + A_x (a_\alpha^2 b_x^2 - a_x^2 b_\alpha^2) = 0.$$

3. Donnons-nous maintenant, outre les quadriques Q et Q′, deux droites

$$d \left\{ \begin{array}{l} u_x = 0, \\ v_x = 0, \end{array} \right. \qquad d' \left\{ \begin{array}{l} u'_x = 0, \\ v'_x = 0, \end{array} \right.$$

et assujettissons la droite MM′ à s'appuyer constamment sur les droites d et d'.

Si P $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est le point de rencontre des droites MM′ et d', on peut encore écrire les formules (2) et (3). En exprimant que le point P est situé sur la droite d' et dans le plan dM, on trouve

$$u'_\alpha = 0, \quad v'_\alpha = 0, \quad u_\alpha v_y - v_\alpha u_y = 0, \quad . \quad . \quad (4)$$

Des équations (4), on conclut que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont proportionnels aux mineurs relatifs à la première colonne du déterminant :

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & u'_1 & v'_1 & u_1 v_y - v_1 u_y \\ 1 & u'_2 & v'_2 & u_2 v_y - v_2 u_y \\ 1 & u'_3 & v'_3 & u_3 v_y - v_3 u_y \\ 1 & u'_4 & v'_4 & u_4 v_y - v_4 u_y \end{array} \right| ;$$

par suite, les symboles a_α, b_α peuvent être remplacés par

$$\left| \begin{array}{cccc} a_1 & u'_1 & v'_1 & u_1 v_y - v_1 u_y \\ a_2 & u'_2 & y'_2 & u_2 v_y - v_2 u_y \\ a_3 & u'_3 & v'_3 & u_3 v_y - v_3 u_y \\ a_4 & u'_4 & v'_4 & u_4 v_y - v_4 u_y \end{array} \right| , \quad \left| \begin{array}{cccc} b_1 & u'_1 & v'_1 & u_1 v_y - v_1 u_y \\ b_2 & u'_2 & v'_2 & u_2 v_y - v_2 u_y \\ b_3 & u'_3 & v'_3 & u_3 v_y - v_3 u_y \\ b_4 & u'_4 & v'_4 & u_4 v_y - v_4 u_y \end{array} \right| .$$

En substituant les valeurs de α_i, a_α, b_α dans les formules (2), on voit que les x_i sont des fonctions du cinquième degré en y_i; par analogie, les y_i sont des fonctions du même degré en x_i.

Un plan quelconque π se transforme maintenant en une surface du cinquième ordre que nous désignerons dans la suite par S_5.

4. Tout plan λ passant par la droite d rencontre d' en un point γ et π suivant une droite c. La transformée arguésienne de cette droite c, le point γ étant pris comme pôle, est une cubique plane ayant un point double en γ et passant par les quatre points d'intersection du plan λ avec la quartique gauche Σ. Nous pouvons dire que le lieu des cubiques planes dont les plans passent par une droite d, qui ont quatre points simples sur une quartique gauche Σ, un point double sur une droite d' et qui sont les arguésiennes de droites du plan π, est une surface du cinquième ordre.

On établirait une seconde génération de la surface S_5 au moyen de cubiques planes en considérant les plans du faisceau ayant d' comme axe.

De ces deux générations, il résulte que les droites d et d' sont des droites doubles de la surface S_5 et que la quartique gauche Σ appartient à cette surface.

5. Les huit bisécantes de la quartique Σ s'appuyant sur les droites d et d' appartiennent à la surface S_5, car elles rencontrent S_5 en six points.

Désignons par l_1, l_2, ... l_8 ces bisécantes.

Le plan déterminé par les droites d et l rencontre la surface S_5 suivant une conique ε_i. Le plan passant par les droites d' et l_i rencontre également la surface S_5 suivant une conique ε'.

Nous découvrons ainsi huit droites simples et seize coniques appartenant à la surface S_5.

6. Désignons par D et D′ les points où les droites d et d' rencontrent le plan π.

La droite DD′ appartient à la surface, car l'arguésien d'un point quelconque de cette droite est situé sur elle-même.

Le plan mené par la droite d et le point D′ rencontre encore la surface suivant une conique δ.

De même le plan déterminé par la droite d' et le point D rencontre la surface suivant une autre conique δ'.

7. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre points communs au plan π et à la quartique gauche Σ.

Le plan (d, A_i) rencontre la droite d' au point B_i. La droite A_iB_i appartient à la surface (*) et le reste de l'intersection du plan considéré avec la surface est une conique β_i.

De même le plan (d', A_i) a en commun avec la surface S_5, outre la droite d', la droite A_iB_i et une conique β'.

Nous nous trouvons donc en présence de quatre droites et de huit coniques appartenant à la surface S_5.

8. Nous allons donner une application des résultats trouvés ci-dessus.

(*) Saltel, *loc. cit.*

Soit à déterminer la classe de l'enveloppe des plans contenant les cubiques planes ayant un point double sur une droite d, quatre points simples sur une quartique gauche Σ, intersection des quadriques Q, Q′ et trois autres points simples sur une cubique gauche unicursale C_3.

Pour cela, recherchons le nombre de plans contenant des cubiques du système et passant par une droite quelconque d' de l'espace.

Les surfaces S_5 correspondant aux plans d'une gerbe L dans la transformation (Q, Q', d, d') marquent sur la cubique gauche des points d'une I_2^{15}.

Les plans passant par d' marquent sur C_3 une I_1^3.

Les groupes de trois points communs à ces involutions sont au nombre de

$$\binom{15-2}{1}\binom{3-1}{2}=13.$$

En remarquant que la transformée du plan de la gerbe L passant par d dégénère, on trouve pour la classe de l'enveloppe cherchée le nombre 12.

En terminant, nous remercions M. Neuberg des conseils dont il nous a honoré pour la rédaction définitive de ce travail.

Mons, 12 janvier 1907.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.