ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
(Extrait des Bulletins, n° 1 [janvier]; 1907.)

CLASSE DES SCIENCES.

Sur une transformation des droites de l'espace en surfaces du quatrième ordre; par Lucien Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« Dans un mémoire intitulé : *Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces géométriques* (1), Saltel a étudié la transformation suivante :

Étant donnés dans un même plan un pôle P *et deux coniques* U *et* U_1 *qui se coupent aux quatre points* A, B, C, D, *on fait correspondre à un point quelconque* M *son conjugué* M′ *dans l'involution déterminée sur la droite* PM *par les couples de points où cette droite est rencontrée par les coniques* U *et* U_1.

Lorsque M parcourt une droite quelconque, le point M′ décrit une cubique passant par A, B, C, D et ayant en P un point double.

On étend la transformation à l'espace en remplaçant les coniques U et U_1 par deux quadriques Q et Q_1.

(1) Voir Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, t. XXII, 1872

M. Godeaux, en s'inspirant de ce travail, a imaginé la transformation suivante :

Étant données une droite d (*axe*) *et deux quadriques* Q *et* Q_1, *on fait correspondre à un point quelconque* M *l'un quelconque des points* M′ *qui sont conjugués avec* M *dans l'involution déterminée par les deux couples de points où une droite menée par* M *et s'appuyant sur* d *rencontre les deux quadriques.*

A un même point M correspondent tous les points de la conique suivant laquelle le plan *d*M rencontre la quadrique du faisceau [Q Q_1] passant par M. Par suite, lorsque M parcourt une droite donnée *c*, le point M′ décrit une surface du quatrième ordre qui est coupée suivant une conique par tout plan mené suivant l'axe *d*. Cette surface est coupée suivant des cubiques par les plans menés suivant la droite *c*.

Ce petit mémoire me paraît offrir un certain intérêt et il est susceptible de développements assez curieux. J'en propose volontiers l'impression dans les *Bulletins* de l'Académie. » — Adopté.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.

Sur une transformation des droites de l'espace en surfaces du quatrième ordre (*); par Lucien Godeaux, étudiant à l'École des mines de Mons.

La transformation que nous allons définir a pour point de départ la propriété qu'ont les quadriques d'un faisceau linéaire de marquer sur une droite quelconque des couples de points d'une involution d'ordre deux et du premier rang; elle peut donc être présentée comme une généralisation de la transformation arguésienne de Saltel (**), avec cette différence que Saltel fait passer la droite MM′, qui joint deux points correspondants par un point fixe, tandis que nous la faisons appuyer sur une droite fixe. Pour abréger le langage, nous dirons encore que M′ est l'*arguésien* de M.

1. Soient deux quadriques Q et Q′

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0$$

ayant en commun une quartique gauche Σ, et soient deux droites d et c ayant respectivement pour équations

$$(d) \qquad \alpha_x = 0, \quad \beta_x = 0,$$

$$(c) \qquad u_x = 0, \quad v_x = 0.$$

Nous nous proposons d'étudier la surface lieu des points M′ arguésiens des points M de la droite c, la droite MM′ s'appuyant constamment sur la droite d.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 1, pp. 28-32, 1907.

(**) *Sur l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces.* (Mémoires in-8° de l'Académie, 1870.)

Le lieu des arguésiens d'un point M de la droite c est la conique suivant laquelle le plan (d, M) coupe la quadrique du faisceau $[\mathrm{Q}, \mathrm{Q}']$ passant par M ; donc les équations de cette conique sont

$$\begin{aligned} b_y^2 a_x^2 - a_y^2 b_x^2 &= 0, \\ \beta_y \alpha_x - \alpha_y \beta_x &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

(y_1, y_2, y_3, y_4) étant les coordonnées du point M.

La seconde de ces équations, jointe aux équations de condition

$$u_y = 0, \quad v_y = 0,$$

montre que les coordonnées y sont les mineurs relatifs à la première colonne du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 & \beta_1\alpha_x - \alpha_1\beta_x \\ 1 & u_2 & v_2 & \beta_2\alpha_x - \alpha_2\beta_x \\ 1 & u_3 & v_3 & \beta_3\alpha_x - \alpha_3\beta_x \\ 1 & u_4 & v_4 & \beta_4\alpha_x - \alpha_4\beta_x \end{vmatrix}.$$

En remplaçant les y par ces valeurs dans l'équation (1), on trouve pour le lieu cherché

$$a_x^2 \,|\, b_1\, u_1\, v_1 \;\; \alpha_1\beta_x - \beta_1\alpha_x \,|^2 - b_x^2 \,|\, a_1\, u_1\, v_1 \;\; \alpha_1\beta_x - \beta_1\alpha_x \,|^2 = 0, \tag{2}$$

où, pour abréger, les déterminants sont dénotés par leur première ligne entre deux traits.

Le lieu cherché est donc une surface S_4 du quatrième ordre passant par la quartique gauche Σ.

2. La surface S_4 admet plusieurs générations remarquables, l'une par des coniques, une autre par des cubiques planes de genre zéro.

A chaque point M de la droite c correspond dans le plan (d, M) une simple infinité de points M' qui sont situés sur une conique s'appuyant en quatre points sur la quartique Σ et passant par M ; donc la surface S_4 est le lieu des coniques en nombre ∞^1 s'appuyant en quatre points sur la quartique gauche Σ, en un point sur la droite c et dont les plans passent par une droite d. Il en résulte que la droite d est une droite double de la surface et que la droite c appartient à la surface. Toute quadrique du faisceau linéaire $[Q, Q']$ rencontre la droite c en deux points P et R ; par suite, elle rencontre S_4 suivant la quartique Σ et suivant deux coniques contenues dans les plans (d, P) et (d, R).

Deux quadriques de ce faisceau touchent c en l'un ou l'autre des points doublés P', R' de l'involution formée sur la droite c par les couples P, R ; ces quadriques touchent S_4 le long d'une conique située respectivement dans l'un des plans (d, P') et (d, R').

L'équation (2) peut se mettre sous une forme qui montre également la génération de S_4 par des coniques. En effet, représentons les déterminants symboliques

$$|\, b_1,\ u_1,\ v_1,\ \beta_1 \,|, \qquad |\, a_1,\ u_1,\ v_1,\ \beta_1 \,|,$$
$$|\, b_1,\ u_1,\ v_1,\ \alpha_1 \,|, \qquad |\, a_1,\ u_1,\ v_1,\ \alpha_1 \,|$$

respectivement par B, A, B', A' ; alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha_x^2(a_x^2 B^2 - b_x^2 A^2) - 2\alpha_x\beta_x(a_x^2 AB - b_x^2 A'B') \\ + \beta_x^2(a_x^2 B'^2 - b_x^2 A'^2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

On voit immédiatement que la droite $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$ est une droite double et que tout plan mené par cette droite coupe S_4 suivant une conique.

Cette forme de l'équation (3) a déjà été indiquée par Kummer dans son célèbre mémoire sur les *Surfaces du quatrième ordre* (*).

3. Tout plan passant par la droite c rencontre la surface suivant une cubique plane ayant un point double sur la droite d et quatre points sur la quartique Σ; de plus, si U_1, U_2 sont les coniques de S_4 situées dans deux plans fixes menés par d, la cubique rencontre U_1 et U_2.

La surface S_4 est donc le lieu des cubiques planes dont les plans passent par une droite c et ayant un point double sur une droite d, quatre points sur une quartique gauche Σ et deux points respectivement sur deux coniques U_1, U_2 dont les plans passent par d.

4. Les bisécantes de la quartique Σ s'appuyant sur les droites d et c ont cinq points communs avec la surface S_4; elles sont donc contenues entièrement dans cette surface.

Recherchons le nombre de ces bisécantes.

Les plans passant par la droite d marquent sur la quartique Σ des groupes d'une involution I_1^4. Il en est de même des plans passant par la droite c. Les groupes de deux points communs à ces deux involutions sont, d'après un théorème de M. C. Le Paige, au nombre de

$$\binom{4-1}{1}^2 = 9.$$

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_9$ ces droites. Dans le rai-

---

(*) *Berliner Monatsberichte*. (*Journal de Crelle*, juillet 1863, t. LXIV, p. 70.)

sonnement qui va suivre, nous désignerons l'une quelconque de ces droites par λ_i.

Le plan passant par les droites d et λ_i rencontre la surface S_4 suivant une droite μ_i s'appuyant en deux points sur la quartique Σ; le couple λ_i, μ_i représente une conique dégénérée de S_4.

Le plan passant par les droites c et λ_i a encore en commun avec la surface une conique ε_i qui n'a aucun point sur la droite c et qui n'en a que deux sur la quartique Σ; la réunion de λ_i et ε_i représente une cubique dégénérée de S_4.

Les plans passant par une des droites λ ou μ rencontrent généralement la surface S_4 suivant une cubique qui n'a pas nécessairement un point double; on obtient donc dix-huit générations de la surface au moyen de cubiques.

5. Résumons les propriétés de la surface.

La surface S_4 possède : 1° comme éléments simples : une quartique gauche Σ, une droite c, neuf droites λ, neuf droites μ et neuf coniques ε; 2° comme éléments doubles, une droite d.

La surface S_4 peut se rapprocher de la surface S_8 étudiée par M. Stuyvaert (*).

Nous remercions M. Neuberg des renseignements dont il nous a honoré pour la rédaction de ce travail.

Mons, 9 janvier 1907.

(*) *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre*. Gand, 1902.

Bruxelles. — HAYEZ, imprimeur.

son sommet qui va passer, nous désignerons l'une quelconque de ces droites par λ.

Le plan passant par les droites d et λ_1 rencontre la surface S_3 suivant une droite ρ, s'appuyant en deux points sur la quartique Σ; le couple λ_1, ρ n'est autre que une conique dégénérée de S_3.

Le plan passant par les droites d et λ a encore en commun avec la surface une conique ε, qui a un point sur la droite ξ et qui n'a que deux sur la quartique Σ; la révolution de λ, ε représente une conique dégénérée de S_3.

Les plans passant par une des droites λ ou ρ rencontrent généralement la surface S_3 suivant une conique qui a [illegible] seulement un point double; on obtient donc les huit générations de la surface au moyen de coniques.

6. Déductions des propriétés de la surface.

La surface S_3 possède [illegible] comme éléments multiples une quartique double Σ, une droite ε, huit droites λ [illegible] et [illegible] ρ comme éléments doubles [illegible] une droite d.

La surface S_3 peut se rapprocher de la surface étudiée par M. Stuyvaert (¹).

Nous remercions M. [illegible] des renseignements dont il nous a honoré pour la rédaction de ce travail.

Mons, 9 janvier 1901.

(¹) Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Gand, 1892.

Bruxelles. — HAYEZ, imprimeur.