

CLASSE DES SCIENCES.

1^{er}° Sur un complexe du quatrième ordre; 2° Sur un complexe de Grassmann du sixième ordre et de la sixième classe; 3° Construction d'un complexe formé par les plurisécantes d'un système de courbes planes; par Lucien Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« Je réunis dans un même rapport l'examen de ces trois petits mémoires de géométrie réglée. Ils présentent un certain intérêt, parce qu'ils se rapportent à une branche des mathématiques relativement récente et emploient les notations symboliques d'Arionhold et Clebsch.

Le premier travail traite par deux méthodes le complexe des droites passant par un point variable d'un plan α et un point d'une conique d'un autre plan β , la conique étant liée au premier point par une forme biquadratique. Une seule des deux méthodes peut suffire. F. Fr. Deruyts avait déjà étudié dans les *Bulletins* de notre Académie (1892, p. 571) le complexe des droites joignant un point quelconque d'un système plan α à un point quelconque de la droite correspondante d'un second système plan β réciproque avec le premier. M. Godeaux

s'est inspiré de ce travail ; on peut regretter que son étude ne soit pas plus approfondie.

Dans le deuxième travail, l'auteur étudie une généralisation du complexe du troisième ordre que j'ai étudié, sous le nom de *complexe de Grassmann*, dans *Mathesis*, 1902, page 221. Il s'occupe du complexe des droites qui rencontrent quatre groupes de trois plans donnés en des groupes de trois points d'une I^3 . Les éléments remarquables de ce complexe auraient mérité un examen plus développé.

Enfin, le troisième mémoire s'occupe du complexe des droites qui s'appuient sur m courbes planes appartenant chacune à un faisceau. L'auteur trouve l'équation du complexe, mais sans pousser ses recherches plus loin.

Quoi qu'il en soit, ces trois notes pourraient figurer dans les *Bulletins* sous le titre commun : *Sur quelques complexes particuliers*, après que l'auteur en aurait amélioré et simplifié la rédaction. » — Adopté.

Sur quelques complexes particuliers (*);

par Lucien Godeaux, étudiant à l'École des mines
de Mons.

I. — Sur un complexe du quatrième ordre.

M. Fr. Deruyts a étudié le complexe des droites passant par un point A d'un plan α et s'appuyant sur une droite b d'un autre plan β , le point A et la droite b étant liés homographiquement (**).

1. — Je vais considérer la généralisation suivante de ce complexe.

Soient

$$A_x = 0, \quad B_x = 0$$

les équations de deux plans α et β . A un point quelconque X de α , je fais correspondre un point Y dans le plan β au moyen de la forme biquadratique

$$a_x^2 b_y^2 = 0.$$

Mais à tout point X du plan α correspond une conique du plan β et, réciproquement, à tout point Y de β une conique du plan α .

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 17-27, 1907.

(**) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3^e sér., t. XXIV, 1892, p. 571.

Pour trouver l'équation du complexe formé par les droites g joignant deux points homologues X et Y, je suivrai la méthode indiquée par M. Neuberg (*).

Soient (u, u_2, u_3, u_4) , (v_1, v_2, v_3, v_4) les coordonnées de deux points quelconques U, V d'une droite XY du complexe; les coordonnées des points X, Y étant représentées respectivement par

$$mu_i + nv_i, \quad m'u_i + n'v_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on a les équations de condition

$$A_{mu+nv} = 0, \quad B_{m'u+n'v} = 0, \\ a^2_{mu+nv} b^2_{m'u+n'v} = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$mA_u + nA_v = 0, \quad m'B_u + n'B_v = 0, \\ (ma_u + na_v)^2 (m'b_u + n'b_v)^2 = 0.$$

On peut donc prendre

$$m = A_v, \quad n = -A_u, \quad m' = B_v, \quad n' = -B_u,$$

ce qui ramène la dernière équation à

$$(a_u A_v - a_v A_u)^2 (b_u B_v - b_v B_u)^2 = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_u & a_v \\ A_u & A_v \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} b_u & b_v \\ B_u & B_v \end{vmatrix}^2 = 0. \quad (1)$$

Les deux déterminants qui figurent dans cette équation symbolique sont les produits de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right\|$$

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3^e sér., t. XXIV, 1892, p. 5 7.

respectivement par les matrices

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \right\|.$$

Par suite, si p_{12} , p_{15} , ..., p_{54} représentent les coordonnées radiales d'une droite du complexe, celui-ci peut être représenté par l'équation symbolique

$$\Sigma^2 p_{ik} (a_i A_k - a_k A_i) \Sigma^2 p_{ik} (b_i B_k - b_k B_i) = 0.$$

Le complexe considéré est donc du quatrième ordre.

Si dans l'équation (1), nous introduisons les hypothèses

$$A_u = 0, \quad A_v = 0 \quad \text{ou} \quad B_u = 0, \quad B_v = 0,$$

elle est vérifiée, donc les plans α et β sont des plans principaux du complexe.

2. — Si l'on suppose que le point U se trouve dans le plan α et est fixe, la même équation (1) montre que le cône du complexe se décompose en un cône du second ordre et en un plan double α . Il s'ensuit que les points se trouvant sur la droite d'intersection des plans α et β ont un cône décomposé en deux plans doubles.

Il y a cependant des points principaux sur cette droite, ils sont situés sur la surface

$$a_x^2 b_x^2 = 0$$

et sont donc au nombre de quatre. Ces points jouissent de cette propriété qu'ils sont situés sur la conique qui leur correspond.

3. — Pour simplifier les calculs, posons

$$B_x \equiv x_4 = 0,$$

ce qui équivaut à prendre le plan β pour une des faces du tétraèdre de référence.

L'équation de la conique correspondant à un point U du plan α par rapport à cette face du tétraèdre de référence s'obtiendra en faisant $x_4 = 0$ dans l'équation

$$a_u^2 b_x^2 = 0.$$

Soient (w_1, w_2, w_3) les coordonnées d'une droite w du plan β ; proposons-nous de rechercher le lieu des points U du plan α tels que les coniques qui leur correspondent dans le plan β soient tangentes à la droite w .

Écrivons les équations de condition, (x_1, x_2, x_3) étant les coordonnées du point de contact, ρ un facteur de proportionnalité :

$$\rho w_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial a_u^2 b_x^2}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$w_x = 0.$$

Éliminons les x entre ces quatre équations, il vient une équation du sixième degré en u , à savoir :

$$\begin{vmatrix} w_1 & a_u^2 b_1^2 & a_u^2 b_1 b_2 & a_u^2 b_1 b_3 \\ w_2 & a_u^2 b_2 b_1 & a_u^2 b_2^2 & a_u^2 b_2 b_3 \\ w_3 & a_u^2 b_3 b_1 & a_u^2 b_3 b_2 & a_u^2 b_3^2 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0;$$

la courbe cherchée est donc du sixième ordre.

Si w est la droite de l'infini, on a le lieu des points U du plan α auxquels correspondent dans β des paraboles. Cette courbe partage le plan α en deux régions. Aux points de l'une de ces régions, il correspond dans β des ellipses, aux points de l'autre des hyperboles.

On peut aussi rechercher le lieu des points U pour lesquels les coniques du plan β sont dégénérées. On obtient ce lieu en éliminant les x entre les équations

$$\frac{\partial a_u^2 b_i^2}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

C'est donc une courbe du sixième ordre dont l'équation symbolique est

$$\begin{vmatrix} a_u^2 b_1^2 & a_u^2 b_1 b_2 & a_u^2 b_1 b_3 \\ a_u^2 b_2 b_1 & a_u^2 b_2^2 & a_u^2 b_2 b_3 \\ a_u^2 b_3 b_1 & a_u^2 b_3 b_2 & a_u^2 b_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

II. — Sur un complexe du sixième ordre.

M. Neuberg a étudié sous le nom de complexe de Grassmann le complexe des droites qui coupent trois couples de plans de l'espace en trois couples de points conjugués d'une involution Γ_1^2 (*).

Je me propose d'étudier le complexe des droites qui rencontrent quatre groupes de trois plans donnés $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') , $(\gamma, \gamma', \gamma'')$, $(\delta, \delta', \delta'')$, en quatre groupes de trois points d'une involution du troisième ordre et du second rang.

(*) *Mathesis* (3), t. II, 1902, p. 221.

1. Soient

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0, & a'_x &= 0, & a''_x &= 0; \\
 b_x &= 0, & b'_x &= 0, & b''_x &= 0; \\
 c_x &= 0, & c'_x &= 0, & c''_x &= 0; \\
 d_x &= 0, & d'_x &= 0, & d''_x &= 0
 \end{aligned}$$

les équations des plans $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \dots$ Nous supposons que les plans $(\alpha, \beta, \gamma, \delta), (\alpha', \beta', \gamma', \delta'), (\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$ forment trois tétraèdres proprement dits ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D''.

Soient $(y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4)$ les coordonnées de deux points quelconques Y, Z d'une droite g de l'espace. Les coordonnées du point de rencontre de g avec le plan α étant représentées par $my_i + nz_i$, on a $a_{my} + na_z = 0$, ou $ma_y + na_z = 0$; par suite, on peut prendre

$$m = a_z, \quad n = -a_y.$$

On détermine de la même manière les points de rencontre de g avec les autres plans $\alpha', \alpha'', \beta, \dots$ Cela posé, pour que ces points de g fassent partie d'une involution du troisième ordre et du second rang I^3_2 , on doit avoir :

$$\begin{vmatrix}
 a_y a'_y a''_y & \Sigma a_y a'_y a''_z & \Sigma a_y a'_z a''_z & a_z a'_z a''_z \\
 b_y b'_y b''_y & - & - & - \\
 c_y c'_y c''_y & - & - & - \\
 d_y d'_y d''_y & - & - & d_z a'_z d''_z
 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

où $\Sigma a_y a'_y a''_z$, par exemple, désigne la quantité $a_y a'_y a''_z + a_z a'_y a''_y + a_y a'_z a''_y$.

Si l'on suppose le point Y fixe et le point Z variable,

cette équation représente un cône du sixième ordre, donc le complexe considéré est du sixième ordre.

2. — Examinons les éléments remarquables du complexe. L'équation (1) est vérifiée par $a_y = 0, a_z = 0$; il en résulte que toute droite située dans le plan α appartient au complexe. Ainsi, les douze plans donnés sont des plans principaux du complexe.

Par le sommet D du tétraèdre ABCD passent trois plans principaux, α, β, γ ; si l'on introduit les hypothèses $a_y = 0, b_y = 0, c_y = 0$, qui font coïncider les points Y et D, l'équation (1) se réduit à

$$d_y d'_y d''_y \begin{vmatrix} a_x a'_y a''_y & a_x (a'_y a''_z + a'_z a''_y) & a_x a'_z a''_z \\ b_x b'_y b''_y & b_x (b'_y b''_z + b'_z b''_y) & b_x b'_z b''_z \\ c_x c'_y c''_y & c_x (c'_y c''_z + c'_z c''_y) & c_x c'_z c''_z \end{vmatrix} = 0;$$

après l'avoir débarrassée des facteurs a_x, b_x, c_x , on obtient l'équation d'un cône du troisième ordre. Par conséquent, les sommets des tétraèdres ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' sont généralement des points singuliers.

Cependant, si le point D était situé dans les plans δ', δ'' , il deviendrait point principal.

Si le point Y est la droite CD, on a $a_y = 0, b_y = 0$, et l'équation (1) devient

$$\begin{vmatrix} 0 & a_x a'_y a''_y & a_x (a'_y a''_z + a'_z a''_y) & a_x a'_z a''_z \\ 0 & b_x b'_y b''_y & b_x (b'_y b''_z + b'_z b''_y) & b_x b'_z b''_z \\ c_y c'_y c''_y & \Sigma c_y c'_y c''_y & \Sigma c_y c'_z c''_z & c_x c'_z c''_z \\ d_y d'_y d''_y & \Sigma d_y d'_y d''_y & \Sigma d_y d'_z d''_z & d_x d'_z d''_z \end{vmatrix} = 0;$$

on en peut séparer les solutions $a_z = 0$, $b_z = 0$, et il reste l'équation d'un cône du quatrième ordre.

Il convient encore de signaler l'exception qui se présente pour les points d'intersection de la droite CD avec l'un des plans γ' , γ'' , δ' , δ'' . Par exemple si Y est le point commun aux plans α , β , γ' , toutes les droites menées par ce point dans l'un de ces plans font partie du complexe, et les autres rayons du complexe passant par y appartiennent à un cône du troisième ordre.

Si quatre des plans donnés avaient un point commun, le cône du complexe qui a ce point pour sommet est constitué par les quatre plans et par un cône proprement dit du second ordre.

Si cinq des plans donnés avaient un point commun, le cône du complexe qui a ce point pour sommet est constitué par six plans dont l'un n'est pas un des plans donnés.

3. — Pour obtenir l'équation du complexe en coordonnées radiales, on peut décomposer le déterminant (1) en une somme de produits de six binômes de la forme

$$a_y a'_z - a_z b'_y \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\ = \Sigma p_{12} (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Ce développement est assez compliqué, nous ne nous y arrêtons pas.

4. — Si l'on remplace les ternes de plans $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') , $(\gamma, \gamma', \gamma'')$, $(\delta, \delta', \delta'')$ par des surfaces du

troisième ordre

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0, \quad d_x^3 = 0,$$

le complexe des droites coupant ces surfaces en des ternes de points appartenant à une même I_2^3 est encore représenté par l'équation (1) pourvu qu'après avoir développé, les symboles (a, a', a'') , (b, b', b'') , ... soient considérés comme équivalents.

Corrélativement, on peut rechercher le complexe des droites g telles que les quatre groupes de trois plans tangents menés par g à quatre surfaces données de la troisième classe appartiennent à une même I_2^3 .

Enfin, au lieu d'une I_2^3 , on peut prendre une involution d'ordre n et de rang $n - 1$. Le complexe est alors d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$.

III. — Sur le complexe des pluriséchantes de m courbes planes d'une homographie H_{m-1}^m .

Soient m plans

$$\alpha_{1,x} = 0, \quad \alpha_{2,x} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{i,c} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{m,x} = 0$$

et m couples de surfaces d'ordre n

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,x}^n = 0, \\ \gamma_{1,x}^n = 0, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2,x}^n = 0, \\ \gamma_{2,x}^n = 0, \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \beta_{m,x}^n = 0, \\ \gamma_{m,x}^n = 0; \end{array} \right.$$

où les symboles $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ désignent des lettres simples.

Appelons G_i la courbe représentée par le système d'équations

$$\alpha_{i,x}^n = 0, \quad \mu_i \beta_{i,x}^n + \mu'_i \gamma_{i,x}^n = 0.$$

Nous dirons que les courbes G_1, G_2, \dots, G_m appartiennent à une homographie H_{m-1}^m , lorsque leurs paramètres μ, μ' sont liés par l'équation symbolique

$$(1) \quad (q_1\mu_1 + q'_1\mu'_1)(q_2\mu_2 + q'_2\mu'_2) \dots (q_m\mu_m + q'_m\mu'_m) = 0.$$

Proposons-nous d'étudier le complexe des droites g qui s'appuient sur m courbes G_i associées dans cette homographie.

A cet effet, désignons par $(y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4)$ les coordonnées de deux points quelconques y, z , d'un rayon du complexe; celles du point M_i où g rencontre G_i étant représentées par $ly_i + l'z_i$, on doit avoir

$$l\alpha_{i,y} + l'\alpha_{i,z} = 0, \quad \mu_i(l\beta_{i,y} + l'\beta_{i,z})^n + \mu'_i(l\gamma_{i,y} + l'\gamma_{i,z})^n = 0.$$

On peut prendre $l = \alpha_{i,z}, l' = -\alpha_{i,y}$, ce qui ramène la dernière équation à

$$\mu_i \begin{vmatrix} \alpha_{i,y} & \alpha_{i,z} \\ \beta_{i,y} & \beta_{i,z} \end{vmatrix}^n + \mu'_i \begin{vmatrix} \alpha_{i,y} & \alpha_{i,z} \\ \gamma_{i,y} & \gamma_{i,z} \end{vmatrix}^n = 0.$$

Posons

$$B_i \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{i,y} & \alpha_{i,z} \\ \beta_{i,y} & \beta_{i,z} \end{vmatrix}, \quad C_i \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{i,y} & \alpha_{i,z} \\ \beta_{i,y} & \beta_{i,z} \end{vmatrix}.$$

Ces déterminants symboliques B_i, C_i étant transformés comme ci-dessus en des produits de deux systèmes rectangulaires, on obtient

$$B_i \equiv \sum p_{12}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2),$$

$$C_i \equiv \sum p_{12}(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_1\gamma_1),$$

où $p_{12}, p_{15}, \dots, p_{34}$ sont les coordonnées radiales de y .

Puisque $\mu_i B_i^n + \mu'_i C_i^n = 0$, on peut faire $\mu_i = C_i^n$, $\mu'_i = -B_i^n$; portons ces valeurs dans l'équation (1). Il vient

$$(q_1 C_1^n - q'_1 B_1^n) (q_2 C_2^n - q'_2 B_2^n) \dots (q_m C_m^n - q'_m B_m^n) = 0 \quad (2)$$

Le complexe considéré est donc d'ordre mn .

Si les points Y et Z sont dans le plan $\alpha_{i,x} = 0$, on a

$$B_i = 0, \quad C_i = 0,$$

donc les plans donnés sont des plans principaux.

Supposons que u des plans α donnés ont un point commun Y, le cône du complexe se décompose en u plans et en un cône d'ordre $mn-u$.

Si les surfaces $\beta_{i,x}^n = 0$, $\gamma_{i,x}^n = 0$ étaient respectivement d'ordre $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_m$, l'ordre du complexe serait $m(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$.

De plus, si au lieu de prendre l'équation (1) linéaire en $(\mu_1, \mu'_1), (\mu_2, \mu'_2), \dots$, on la supposait de degré k_i en μ_i et μ'_i , le degré du complexe serait

$$m(n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots + n_m k_m).$$

En terminant, nous tenons à remercier M. Neuberg des renseignements qu'il a bien voulu nous donner pour la rédaction définitive de ce travail.

Décembre 1906.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY



