

**UNIVERSITE DE LIEGE**  
**FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES**

# **Paramétrisation et simulation des réservoirs souterrains**

**Discrétisation du domaine, préparation statistique  
des données, couplages et non linéarités des paramètres**

par

**Alain DASSARGUES**

Docteur en Sciences appliquées  
de l'Université de Liège

**1994**

Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 134  
Direction : A. Germain, Institut de Chimie, Bât. B6, Sart Tilman, B-4000 LIEGE, BELGIQUE

Thèse défendue, avec succès, le 13 décembre 1991, pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège.

Jury : G. FONDER, Université de Liège, Président  
A. MONJOIE, Université de Liège  
A. LEJEUNE, Université de Liège  
S. CESCOTTO, Université de Liège  
F. DIMANCHE, Université de Liège  
G. de MARSILY, Université de Paris VI, France  
A. VERRUIJT, Technische Universiteit Delft, Pays-Bas  
W. de BREUCK, Université de Gand

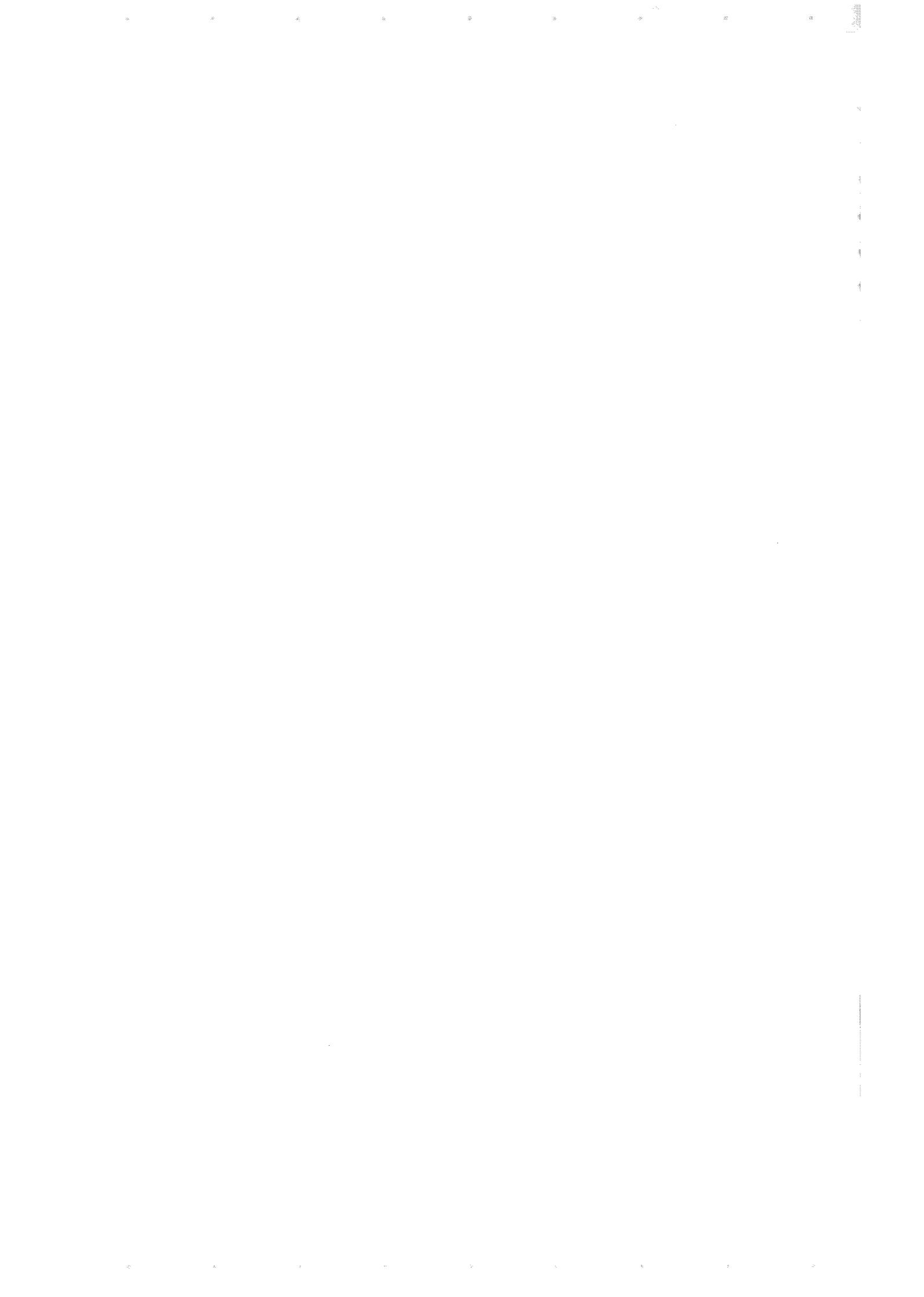
© Tout droit de reproduction réservé à la Collection des publications de la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège.

Liège (Belgique) - Décembre 1994

Dépôt légal : D/1990/0480/8

ISSN 0075-9333

... pour qu'une simulation par ordinateur soit fiable, il est non seulement nécessaire que les méthodes numériques utilisées soient précises, mais surtout que la description physique, convertie en données mathématiques, soit correcte.



## TABLE DES MATIERES

---

### REMERCIEMENTS

### I. INTRODUCTION

### II. PARAMETRES ET MODELES HYDROGEOLOGIQUES D'ECOULEMENT

#### II.1. INTRODUCTION - MILIEU POREUX

II.1.1. REPRESENTATION D'UN MILIEU POREUX ET ELEMENT DE VOLUME REPRESENTATIF

II.1.2. POROSITE

II.1.3. PRESSIONS ET HAUTEURS PIEZOMETRIQUES

II.1.4. VITESSES D'ECOULEMENT EN MILIEU POREUX

II.1.5. EQUATION DE CONTINUITE EN MILIEU POREUX SATURE

II.1.6. SIMPLIFICATION ET INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

II.1.7. LOI DE DARCY

#### II.2. ECOULEMENT EN MILIEU POREUX. NOTION DE PERMEABILITE

II.2.1. GENERALISATION DE LA LOI DE DARCY

II.2.2. MILIEU POREUX ANISOTROPE ET TENSEUR DE PERMEABILITE

II.2.3. MILIEU POREUX FISSURE

II.2.4. LIMITATIONS ET VALIDITE DE LA LOI DE DARCY

II.2.5. EQUATION DE L'ECOULEMENT EN MILIEU POREUX, EN REGIME PERMANENT

II.2.6. TRANSMISSIVITE ET HYPOTHESE DE DUPUIT

II.2.7. MESURES DE LA PERMEABILITE

II.2.8. APPROCHE STATISTIQUE DE LA PERMEABILITE

## II.3. STOCKAGE EN MILIEU POREUX. NOTION D'EMMAGASINEMENT

### II.3.1. INTRODUCTION

### II.3.2. PRINCIPE DES CONTRAINTES EFFECTIVES

### II.3.3. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT SPECIFIQUE EN NAPPE CAPTIVE

### II.3.4. EQUATION GENERALE DE L'ECOULEMENT EN NAPPE CAPTIVE

### II.3.5. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT EN NAPPE CAPTIVE ET EN NAPPE LIBRE

### II.3.6. EQUATION GENERALE DE L'ECOULEMENT EN NAPPE LIBRE

### II.3.7. MESURES DU COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT SPECIFIQUE

### II.3.8. APPROCHE STATISTIQUE DU COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT

## II.4. METHODES NUMERIQUES UTILISEES DANS LES MODELES HYDROGEOLOGIQUES D'ECOULEMENT

### II.4.1. INTRODUCTION

### II.4.2. PRINCIPES DES DIFFERENTES METHODES

## III. INTERACTIONS ENTRE PARAMETRES, NON LINEARITES ET COUPLAGES

### III.1. PHENOMENES COUPLES AUX ECOULEMENTS, EN MILIEU POREUX SATURE

### III.2. COUPLAGE ET NON LINEARITE DANS LES PROBLEMES ECOULEMENT - TASSEMENT

#### III.2.1. MECANISMES DE LA SUBSIDENCE DUE AUX POMPAGES

#### III.2.2. ELEMENTS DE RHEOLOGIE DES MILIEUX POREUX MEUBLES

#### III.2.3. SYNTHESE DES TRAVAUX ANTERIEURS

#### III.2.4. EQUATION COUPLEE ET HYPOTHESES

#### III.2.5. NON LINEARITE DES PARAMETRES

COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT SPECIFIQUE,  $S_s$   
COEFFICIENT DE PERMEABILITE,  $K$

#### III.2.6. CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES ET SCHEMAS NUMERIQUES

III.2.7. INFLUENCE DE LA PRISE EN COMPTE DES  
COUPLAGES ET DES NON LINEARITES

IV. REPRESENTATION, IDEALISATION ET DISCRETISATION DES MILIEUX  
POREUX NATURELS

IV.1. DOMAINE IDEALISE, MODELE CONCEPTUEL

IV.2. DISCRETISATION SPATIALE

IV.2.1. PRINCIPES GENERAUX

IV.2.2. DISCRETISATIONS EN CELLULES OU BLOCS POUR LA  
METHODE DES DIFFERENCES FINIES

IV.2.3. DISCRETISATIONS EN ELEMENTS POUR LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS

IV.2.4. DISCRETISATIONS EN REGIONS POUR LES METHODES  
DES ELEMENTS FRONTIERES ET DES ELEMENTS  
ANALYTIQUES

IV.3. DISCRETISATION TEMPORELLE

IV.4. CONDITIONS AUX LIMITES

IV.4.1. LIMITES DES MODELES ET LIMITES PHYSIQUES

IV.4.2. CONDITIONS DE PRESSION OU DE POTENTIEL IMPOSE

IV.4.3. CONDITIONS DE FLUX OU DE DEBIT IMPOSE

IV.4.4. CONDITIONS DE DEBIT DEPENDANT D'UN POTENTIEL

IV.4.5. CONDITIONS DE SURFACE DE SUINTEMENT

IV.4.6. LIMITE ENTRE DEUX MILIEUX POREUX HOMOGENES

IV.4.7. CONDITIONS DE SURFACE LIBRE

V. GEOSTATISTIQUE APPLIQUEE AU TRAITEMENT DES DONNEES DES  
MODELES HYDROGEOLOGIQUES

V.1. INTRODUCTION

V.2. HYPOTHESES, DEFINITIONS ET EQUATIONS DU KRIGEAGE  
ORDINAIRE

V.3. KRIGEAGE DES PERMEABILITES

V.4. COKRIGEAGE

V.5. METHODES DE KRIGEAGE EN CONDITIONS DE NON STATIONNARITE

V.6. KRIGEAGE DES HAUTEURS PIEZOMETRIQUES

VI. MODELISATION 3D D'UNE NAPPE LIBRE EN REGIME TRANSITOIRE :

ETUDE DE LA NAPPE DE HESBAYE (BELGIQUE)

VI.1. INTRODUCTION

VI.2. CADRE GEOLOGIQUE, GEOMORPHOLOGIQUE, HYDROLOGIQUE ET HYDROGEOLOGIQUE

VI.3. MODELE "QUASI 3D" PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

VI.3.1. SPECIFICITES DU PROGRAMME NEWSAM

VI.3.2. IDEALISATION, DISCRETISATION ET CONDITIONS AUX LIMITES

VI.3.3. CALIBRATION, RESULTATS ET ANALYSE

VI.4. MODELE 3D EN REGIME TRANSITOIRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

VI.4.1. TESTS DE SIMULATION SUR UNE COUPE VERTICALE 2D

VI.4.2. MODELISATION 3D DE LA NAPPE

DESCRIPTION DU MODELE ET DE SES CONDITIONS AUX LIMITES

CALIBRATION, RESULTATS ET ANALYSE

VII. MODELE ECOULEMENT-TASSEMENT COUPLE ET NON LINEAIRE :

ETUDE DE LA SUBSIDENCE DE SHANGHAI (RP. CHINE)

VII.1. INTRODUCTION

VII.2. CONDITIONS GEOLOGIQUES, HYDROGEOLOGIQUES ET GEOTECHNIQUES

VII.2.1. GEOLOGIE, SEDIMENTOLOGIE

VII.2.2. HYDROGEOLOGIE

VII.2.3. CONDITIONS GEOTECHNIQUES

### VII.3. MODELE ECOULEMENT 3D

VII.3.1. DISCRETISATIONS SPATIALE ET TEMPORELLE

VII.3.2. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX FRONTIERES

VII.3.3. CALIBRATION ET RESULTATS

### VII.4. MODELE ECOULEMENT-TASSEMENT 1D

VII.4.1. SCHEMA NUMERIQUE ET LOIS CONSTITUTIVES

VII.4.2. CHOIX DE LA NON LINEARITE DE K

VII.4.3. DISCRETISATION, ETAT INITIAL ET CONDITIONS AUX FRONTIERES

VII.4.4. RESULTATS DE LA SIMULATION

VII.4.5. COMPARAISON AVEC UN MODELE LINEAIRE

VII.4.6. SIMULATION AVEC UNE AUTRE LOI DE NON LINEARITE DE K

### VII.5. CONCLUSIONS

## VIII. TRAITEMENT GEOSTATISTIQUE DES DONNEES ET INFLUENCE SUR LA CALIBRATION ET LES RESULTATS : ETUDE DE LA NAPPE ALLUVIALE DE LA MEUSE ENTRE LIEGE ET MAASTRICHT

### VIII.1. INTRODUCTION

### VIII.2. CADRE HYDROGEOLOGIQUE - SYNTHESE DES DONNEES

### VIII.3. TRAITEMENT DES PERMEABILITES

VIII.3.1. INTRODUCTION

VIII.3.2. CORRELATION PERMEABILITE-RESISTIVITE (METHODE A)

VIII.3.3. KRIGEAGE DES PERMEABILITES MESUREES PAR POMPAGES (METHODE B)

VIII.3.4. APPLICATION DE LA CORRELATION SUIVIE DU KRIGEAGE (METHODE C)

VIII.3.5. COKRIGEAGE DES PERMEABILITES PAR LES RESISTIVITES (METHODES D ET D')

VIII.3.6. SYNTHESE DES RESULTATS DES TRAITEMENTS DE K

#### VIII.4. TRAITEMENT DES HAUTEURS PIEZOMETRIQUES

VIII.4.1. DERIVES ET VARIOGRAMMES DES RESIDUS

VIII.4.2. KRIGEAGE DES RESIDUS ET RESULTATS

VIII.4.3. CONCLUSIONS

#### VIII.5. SIMULATION PAR ELEMENTS FINIS

VIII.5.1. GEOMETRIE, CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS  
AUX FRONTIERES

VIII.5.2. SIMULATIONS AVEC LES DONNEES NON TRAITEES

VIII.5.3. SIMULATIONS AVEC LES DONNEES TRAITEES

VIII.5.4. COMPARAISONS DES RESULTATS OBTENUS

VIII.5.5. CONCLUSIONS

#### ANNEXES

1 : EXPRESSION DE LA VARIATION DE POROSITE EN FONCTION DU  
TEMPS

2 : VITESSES DE DARCY ET VITESSES MICROSCOPIQUES MOYENNES.  
VITESSES RELATIVES ET VITESSES ABSOLUES.  
EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE DE SOLIDE.

## SIGNES, CONVENTIONS, NOTATIONS ET ABREVIATIONS

Le choix des notations et symboles est parfois rendu complexe par le grand nombre de lois et relations citées ou utilisées dans ce travail. Les significations sont souvent rappelées dans le texte. Dans la liste qui suit, sont repris de façon systématique, quasi tous les symboles utilisés. Le chapitre principal où ils interviennent ou le paragraphe de première apparition sont mentionnés.

A ,	section de l'échantillon (loi de Darcy), (II.1.7.)
A ,	constante de gonflement, (III.2.5.)
A ,	facteur d'amplification, (IV.3.)
a ,	ouverture moyenne de la fracture, (II.2.3.)
a ,	portée d'un variogramme (V. et VIII.)
a ,	constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)
a <sub>T</sub> '	constante à déterminer expérimentalement pour la relation de Terzaghi généralisée, (VII.4.6.)
B ,	section totale d'écoulement, (II.2.2.)
B <sub>i</sub> ,	sections d'écoulement, (II.2.2.)
b ,	distance moyenne entre les fractures, (II.2.3.)
b' ,	épaisseur du semi-perméable, (IV.4.4.)
b ,	constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)
b <sub>T</sub> '	constante à déterminer expérimentalement pour la relation de Terzaghi généralisée, (VII.4.6.)
C ,	constante de compression, (III.2.5.)
C ,	concentration, (II.3.3.)
C ,	effet de pépité, (V. et VIII.)
C <sub>C</sub> ,	indice de gonflement, (III.2.5.)
C <sub>S</sub> ,	indice de compression, (III.2.5.)
C <sub>V</sub> ,	coefficient de consolidation, (III.2.4.)
C(d) ,	covariance, (V.2.)
C <sub>K1</sub> ,	taux de variation de K, $\sigma' < \sigma'_{\text{préc}}$ , (III.2.5.)
C <sub>K2</sub> ,	taux de variation de K, $\sigma' \geq \sigma'_{\text{préc}}$ , (III.2.5.)
c ,	constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)
c <sub>T</sub> '	constante à déterminer expérimentalement pour la relation de Terzaghi généralisée, (VII.4.6.)
d ,	distance entre les points, (V. et VIII.)
d ,	constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)

- $d_a$  , dimension moyenne des aspérités dans les fractures, (II.3.3.)  
 $D_h$  , diamètre hydraulique  
 $D$  , épaisseur d'un aquifère, (II.2.6.)  
 $d_{moyen}$  , moyenne géométrique de la taille du grains solides, (III.2.5., figure III.13.)  
 $e(x,y)$  , épaisseur d'un aquifère captif au point de coordonnées  $x,y$ , (II.2.6.)  
 $e$  , indice des vides  
 $EVR$  , Elément de Volume Représentatif.  
 $E []$  , espérance mathématique, (V.2.)  
 $F_m$  , force moyenne appliquée aux contacts grain à grain en excluant toute composante due à la pression de fluide, (II.3.2.)  
 $F()$  , terme de la solution analytique de Fourier, (III.2.4.)  
 $f$  , fonction  
 $g$  , gravité (attraction terrestre)
- $\underline{gradB} = \left( \frac{\partial B}{\partial x'}, \frac{\partial B}{\partial y'}, \frac{\partial B}{\partial z'} \right)$
- $h$  , hauteur piézométrique.  
 $h_i$  , hauteur piézométrique initiale, (III.2.4.)  
 $h_s$  , hauteur piézométrique imposée brusquement à une extrémité, (III.2.4.)  
 $h_s$  , hauteur d'eau des eaux de surface ou d'un aquifère extérieur pour le calcul de l'infiltration, (IV.4.4.)  
 $I$  , volume d'eau ajouté par unité de temps et par unité de volume de milieu poreux (1.3.3.)  
 $I_p$  , indice de plasticité, (III.2.5.)  
 $IC$  , indice de continuité  
 $i, j$  , indices (notations indicielles)  
 $i = \frac{\Delta h}{L}$  , gradient hydraulique dans la loi de Darcy, (II.1.7.)
- $J_f$  , projection dans le plan de la fracture du gradient piézométrique local, (II.2.3.)  
 $\underline{K}, K_{ij}$  , tenseur des perméabilités  
 $K$  , coefficient de perméabilité ou perméabilité  
 $K(d)$  , covariance généralisée, (V.4.)  
 $K_{eq}$  , perméabilité équivalente, (II.2.2.)  
 $K_f$  , perméabilité de fracture en régime laminaire (II.2.3.)  
 $K_m$  , perméabilité de la matrice, (II.2.3.)

$K_z$	perméabilité verticale, (III.2.4.)
$K'$	coefficient de perméabilité d'une couche semi-perméable pour le calcul d'une infiltration
$k$	perméabilité intrinsèque
$L$	longueur caractéristique du domaine poreux, (II.1.1.)
$L$	longueur de l'échantillon (loi de Darcy), (II.1.7.)
$l$	longueur caractéristique de l'E.V.R., (II.1.1.)
$l_r$	coefficient d'infiltration, (IV.2.2.)
$l$	longueur de l'élément fini 1D vertical, (III.2.)
LGIH,	Laboratoires de Géologie de l'Ingénieur, d'Hydrogéologie et de Prospection Géophysique, Université de Liège.
$m$	paramètre à déterminer expérimentalement (III.2.5., figure III.17.)
$m(x)$	valeur de la dérive au point de coordonnées généralisées $x$ , (V.)
$m_{\text{pore}}$	paramètre caractéristique de la distribution des tailles des pores, (III.2.5.)
MSM,	département de Mécanique des matériaux, Stabilité des constructions et Mécanique des structures, Université de Liège.
$N$	nombre de contacts grain à grain/surface totale, (II.3.2.)
$n$	porosité
$n_c$	porosité cinématique
$n_e$	porosité efficace
$n_r$	capacité de rétention
$p$	pression d'eau, pression interstitielle
$q$	débits volumiques échangés avec l'extérieur, (II.1.5.)
$q$	débit
$q_{\text{exp}}$	quantité de fluide libéré par tassement, (III.2.5.)
$q_i$	idem mais décomposés suivants les 3 axes
$Q_{xy}$	débit ou flux dans le plan des axes de coordonnées $x, y$
$R$	résidus par rapport à une dérive, (V. et VIII.)
$\hat{R}$	résidus estimés
$R_r$	rugosité relative dans les fractures, (II.2.3.)
$r_h$	rayon hydraulique du pore, (II.1.1.)
$S$	coefficient d'emmagasinement
$S$	surface moyenne des contacts grain à grain, (II.3.2.)
$S_r$	degré de saturation résiduel d'un milieu poreux non-saturé en eau
$S_s$	coefficient d'emmagasinement spécifique, (II.3.3.)
$S_{\text{sp}}$	surface spécifique, (III.2.5.)

$S_w$  , degré de saturation, (II.2.6.) figure 15, (III.2.5.)  
 $T$  , température, (II.3.3.)  
 $t$  , temps  
 $V_{em}$  , volume d'eau mobile  
 $V_p$  , volume des pores (annexe 1)  
 $V_s$  , volume de solide (annexe 1)  
 $V_v$  , volume des vides  
 $V_t$  , volume total  
 $V_{Lm}$  , vitesse sismique longitudinale mesurée, (II.1.2.)  
 $V_{Lc}$  , vitesse sismique longitudinale calculée, (II.1.2.)  
 $v$  , vitesse d'écoulement de Darcy, vitesse de filtration (absolue puis relative)  
 $v_I$  , flux traversant la surface libre, (IV.4.7.)  
 $v_s$  , vitesse équivalente du solide dans l'EVR (annexe 2)  
 $v_f$  , vitesse microscopique moyenne du fluide (annexe 2)  
 $v_s$  , vitesse microscopique moyenne du solide (annexe 2)  
 $v_{f.r}$  , vitesse relative microscopique du fluide (annexe 2)  
 $v_{f.a}$  , vitesse absolue microscopique du fluide (annexe 2)  
 $v_{s.a}$  , vitesse absolue microscopique du solide (annexe 2)  
 $var[ ]$  , variance, (V.)  
 $w$  , constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)  
 $W$  , constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)  
 $x_i$  ou  $x_j$  , 3 coordonnées généralisées  
 $Z$  , variable aléatoire, (V.2.)  
 $Z^*$  , variable estimée, (V. et VIII.)  
 $z$  , coordonnée verticale, altitude  
 $z$  , profondeur, (III.2.6.)  
 $z_o$  , profondeur à partir de laquelle les terrains sont saturés, (III.2.6.)  
 $z_{sat}$  , épaisseur saturée  
 $\alpha$  , degré de non linéarité de l'écoulement dans une fracture, (II.2.2.)  
 $\alpha$  , coefficient de compressibilité volumétrique du milieu poreux par diminution de porosité, (II.3.2.)  
 $\alpha$  , coefficient de forme pour la fonction  $S(p)$ , (IV.4.7.)  
 $\beta$  , coefficient de compressibilité du fluide, (II.3.2.)  
 $\beta_s$  , coefficient de compressibilité des grains solides, (II.3.2.)  
 $\gamma$  , poids volumique apparent du milieu poreux (figure III.2.)

$\gamma(d)$	, variogramme (fonction de la distance), (V. et VIII.)
$\gamma_s$	, poids volumique des grains solides du milieu poreux (tableau III.2.)
$\gamma_{sat}$	, poids volumique du milieu poreux saturé (figure III.2.)
$\gamma_w$	, poids volumique de l'eau (figure III.2.)
$\partial$	, dérivée partielle
$\Delta$	, différence finie
$\Delta$	, écart moyen par rapport à la régression, (VIII.3.2.)
$\varepsilon$	, déformation relative, (III.)
$\varepsilon$	, seuil de convergence, (IV.3.)
$\varepsilon_v$	, déformations relatives volumiques, (II.3.2.)
$\psi_w$	, hauteur piézométrique de succion, (IV.4.7.)
$\kappa$	, constante à déterminer expérimentalement
$\lambda$	, constante à déterminer expérimentalement, (III.2.5.)
$\lambda$	, paramètre dépendant exclusivement des caractéristiques du système, (IV.3.)
$\lambda_o$	, facteurs de pondération utilisés en krigeage, (V.)
$\mu$	, coefficient de viscosité dynamique
$\mu$	, multiplicateur de Lagrange, (V.)
$\mu$	, moyenne de résidus (V.5.D.)
$\rho$	, masse volumique de l'eau
$\rho_A$	, résistivité apparente des terrains mesurée par sondages électriques, (VIII.)
$\rho_s$	, masse volumique du solide (annexe 2)
$\sigma$	, contrainte totale
$\sigma'$	, contrainte effective
$\sigma'_{prec}$	, contrainte effective de préconsolidation
$\theta$	, paramètre d'intégration temporelle des méthodes numériques, (II.4.2.)
$\omega$	, paramètre de relaxation, utilisé par Nacul(1991), (IV.2.2.)
$\omega$	, seuil d'un variogramme, (V. et VIII.)



## I. INTRODUCTION

Quelque soit le but final, la meilleure façon de profiter au maximum de toutes les données disponibles, relatives à une nappe aquifère, est de combiner celles-ci aux lois physiques appropriées (exprimées sous forme d'équations) pour former un modèle mathématique (Peck et al., 1988).

Cependant, pour un problème donné, il ne suffit pas de prendre un programme existant, l'introduire sur l'ordinateur, pousser sur quelques touches et attendre la solution. La partie la plus importante de la procédure de simulation est la compréhension approfondie du système et des processus physiques en cours. Il s'agit d'identifier les caractéristiques faisant partie intégrante du comportement du système et celles qui peuvent être éventuellement négligées. Sur base de cette compréhension, synthétisée en un modèle conceptuel du problème réel, un modèle numérique peut alors être construit et un programme numérique est préparé.

Pour fournir des solutions simulées du système, ayant un sens physique le plus précis possible, il est nécessaire de tenir compte de la complexité des réservoirs aquifères. Les hétérogénéités, variations spatiales, anisotropies, que nous réservent les terrains géologiques sont autant de sources de complications, alourdissant la réalisation des modèles mathématiques en hydrogéologie.

L'échelle à laquelle sont représentés le domaine et les processus est également un facteur de précision qui déterminera les approximations qui sont permises ou non dans l'idéalisation du domaine et la conceptualisation du système.

Les développements informatiques de ces dernières années permettent désormais de réaliser des simulations très précises sur des domaines régionaux, en tenant compte d'hétérogénéités locales, de non linéarités de paramètres, de couplages entre processus simulés, etc.

La construction d'un modèle mathématique à des fins prévisionnelles requiert les principales étapes décrites ci-après (figure I.1.) .

- (a) La synthèse des données disponibles doit aboutir à un modèle conceptuel de l'aquifère étudié, à partir duquel seront choisies les dimensions spatiales, les conditions aux limites et la formulation en régime permanent ou transitoire.
- (b) La formulation en équations mathématiques des processus physiques est suivie de la recherche de l'expression numérique de celles-ci et de leur implémentation dans le programme.
- (c) Le programme est testé quant à sa convergence, sa stabilité et sa précision; des comparaisons avec des solutions analytiques connues, en utilisant de grands intervalles de variation des

paramètres, sont recommandées.

- (d) La calibration est menée en ajustant la répartition et la valeur des paramètres (et éventuellement des conditions aux frontières) de manière à ce que les résultats calculés soient similaires aux données mesurées pour une même sollicitation du système.

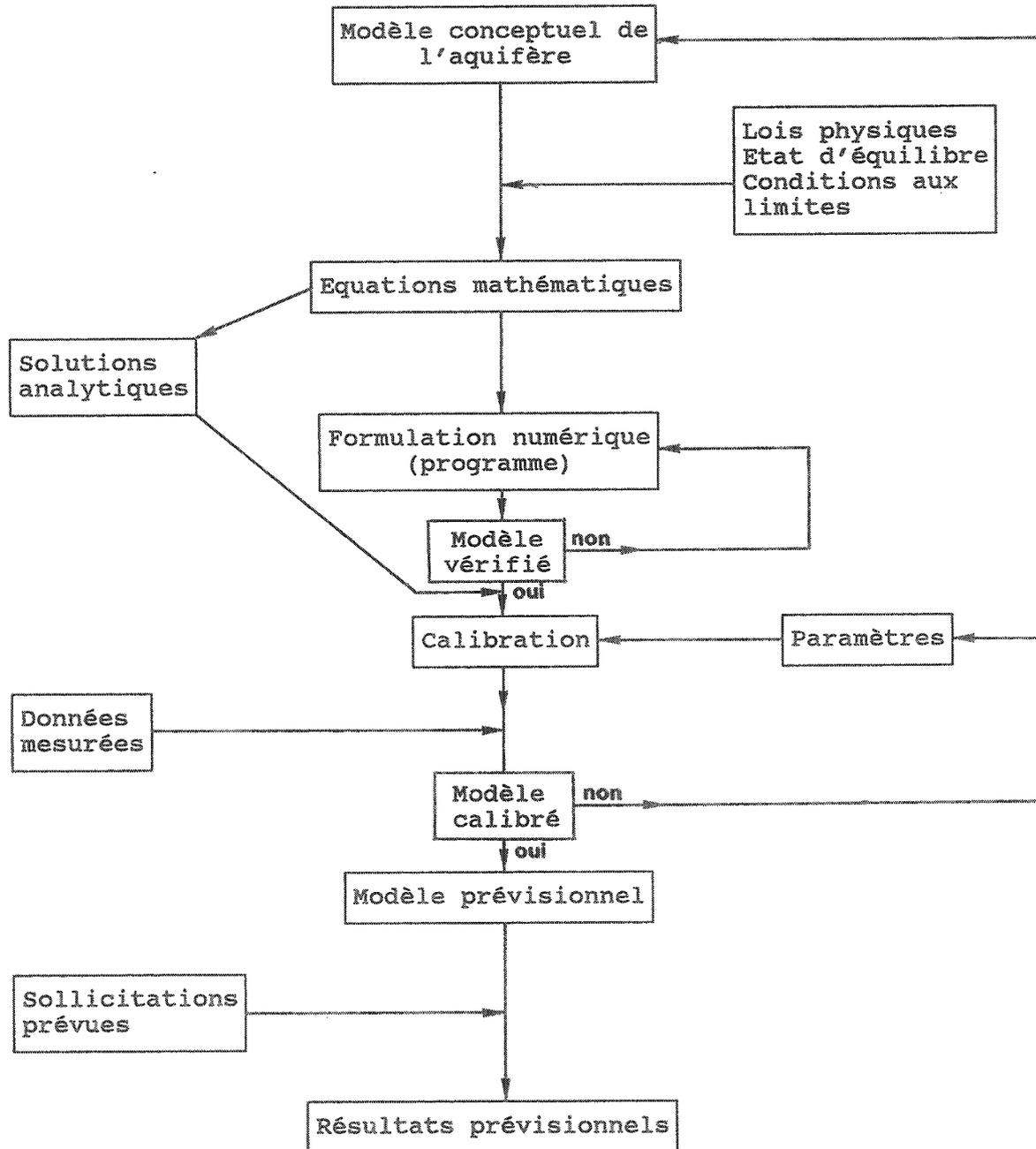


Figure I.1. : Développement d'un modèle numérique à des fins prévisionnelles (d'après Peck et. al., 1988)

Afin de traiter, dans la suite de ce travail, des problèmes spécifiques relatifs aux représentations et paramétrisations du domaine, ainsi qu'aux couplages et non linéarités des paramètres, le chapitre II reprend en synthèse, quelques notions fondamentales relatives aux écoulements d'eau en milieu poreux saturé. L'accent est mis sur la signification physique et la formulation mathématique des paramètres hydrogéologiques d'écoulement que sont la perméabilité et l'emmagasinement. Un bref "memento" reprenant les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées en hydrogéologie mathématique clôture ce chapitre.

Après l'énoncé des couplages et interactions pouvant exister entre les processus physiques ayant lieu dans les milieux poreux saturés, le chapitre III est entièrement consacré aux couplages et non linéarités affectant les paramètres dans les problèmes de tassements liés aux écoulements.

Ce n'est que lorsque des tassements importants sont apparus comme des conséquences du pompage intensif d'eau, de gaz ou d'hydrocarbures, dans les terrains du sous-sol que la consolidation a été étudiée en relation avec les changements de l'équilibre hydraulique au sein du milieu poreux. Les cas les plus célèbres sont, sans conteste, la "San Joaquin Valley" en Californie, Galveston, Mexico City, Tokyo, Venise, Shanghai et Ekofisk; mais, ces problèmes régionaux se rencontrent dans de nombreux autres cas. Les non linéarités des paramètres (perméabilité et emmagasinement) sont évidentes à comprendre physiquement, puisqu'on imagine aisément que la consolidation, en réduisant l'indice des vides du terrain, va ainsi modifier également ces deux paramètres. L'équation d'écoulement est couplée à la consolidation par la variation du coefficient d'emmagasinement spécifique (proportionnel à la compressibilité) en fonction de la variation de pression interstitielle dans le milieu. Pour la variation de la perméabilité, de nombreuses lois existent selon les environnements géologiques et géotechniques, mais également selon les caractéristiques des tests réalisés mesurant l'évolution de ce paramètre.

Le chapitre IV est consacré aux modes de représentation et de discrétisation, permettant de concrétiser le modèle conceptuel sur un domaine idéalisé. Des discrétisations spatiales et temporelles va dépendre grandement la façon dont le modèle tient compte de la réalité et donc la précision de l'approximation réalisée. L'accent est mis tout particulièrement sur les différentes conditions aux limites que l'on peut imposer aux systèmes et sur leur adéquation avec les processus observés en réalité.

La précision dans la détermination des propriétés de l'aquifère est fondamentale. Dans le cas de petits modèles, il est assez aisé de déterminer l'influence d'une erreur connue pour un paramètre sur les résultats de la simulation. Quand les modèles sont régionaux ou plus complexes, cela devient impossible. Des erreurs viennent notamment de l'estimation des valeurs des paramètres aux endroits où aucune mesure n'est disponible.

Le choix du type de modèle pour représenter les variations spatiales et les hétérogénéités, et la méthode d'"homogénéisation" des paramètres mesurés sur une zone ou un domaine, sont des facteurs affectant la précision de la simulation, mais le facteur primordial reste bien sûr la densité (dans le temps et dans l'espace) des mesures disponibles.

Le chapitre V reprend les applications des géostatistiques pouvant servir à optimiser les données disponibles avant l'entrée de celles-ci dans un modèle déterministe. Les méthodes de krigeage, avec l'hypothèse intrinsèque et en non stationnarité, sont exposées en vue de leur application pour le traitement des perméabilités et des hauteurs piézométriques.

Les chapitres VI, VII et VIII reprennent des cas d'études pour lesquels l'originalité des approches proposées se situe dans la paramétrisation, la discrétisation, la préparation des données et la conceptualisation du problème, afin d'idéaliser de façon très précise les problèmes pratiques posés.

Au chapitre VI, la construction du modèle 3D de la nappe aquifère de la Hesbaye, au Nord-Ouest de Liège, illustre clairement l'importance d'une discrétisation fine des hétérogénéités du système, lorsque le modèle est régional et traité en régime transitoire. La comparaison entre un modèle "quasi 3D", utilisant la méthode des différences finies et le modèle 3D par éléments finis, est à ce sujet, très significative.

Les détails de la simulation de la subsidence de Shanghai sont repris au chapitre VII, illustrant notamment l'effet de la prise en compte des non linéarités et couplages des paramètres d'écoulement (perméabilité et emmagasinement). Les conditions initiales du problème sont recalculées; le choix de la relation de non linéarité de la perméabilité est discuté et toute la paramétrisation est détaillée, montrant la démarche choisie.

Le chapitre VIII tente d'illustrer sur le cas du modèle de la nappe alluviale de la Meuse (en aval de Liège), l'effet de la préparation des données par des méthodes géostatistiques adéquates. Le krigeage et le cokrigeage sont utilisés pour traiter les données relatives aux perméabilités, avant leur introduction dans le programme déterministe par éléments finis. Pour les hauteurs piézométriques, un krigeage en non stationnarité est réalisé par la méthode des résidus (Neuman & Jacobson, 1984) afin d'optimiser la piézométrie de référence (le problème est traité en régime permanent).

Enfin, de l'ensemble des considérations et résultats exposés dans cette thèse, on tirera quelques conclusions sur la paramétrisation des modèles en hydrogéologie et les problèmes qu'elle soulève, ainsi que les domaines de recherche appliquée qui se dégagent pour l'avenir.

## II. PARAMETRES ET MODELES HYDROGEOLOGIQUES D'ECOULEMENT

Il ne nous appartient pas de reprendre en détail les fondements de l'hydraulique souterraine. Cependant, quelques lois fondamentales seront exposées brièvement car les développements des chapitres ultérieurs s'appuient sur celles-ci.

### II.1. INTRODUCTION

Deux propriétés essentielles caractérisent, du point de vue hydraulique, les roches et sols constituant les réservoirs souterrains : la porosité et la perméabilité au sens général des termes. Quelques notions fondamentales doivent être rappelées sur ces 2 paramètres de l'écoulement en milieu poreux et en milieu fracturé. Ensuite, dans le chapitre III, les variations, interactions et sensibilités de ces paramètres à divers phénomènes seront exposées afin d'aborder la paramétrisation des modèles hydrogéologiques en pleine connaissance des phénomènes physiques en cours.

Les roches meubles ou indurées constituant le sol et le sous-sol peuvent toutes être considérées comme formant ce qu'on appelle un milieu poreux se caractérisant par la présence d'une matrice solide et d'espaces. Ces espaces correspondent aux pores de la roche ou aux chenaux, fissures, fractures, cavités que l'on peut rencontrer dans diverses formations géologiques. Des phases fluides (par exemple : l'air, l'eau, des hydrocarbures, ...) occupent ces espaces disséminés dans le milieu.

Dans ces réservoirs assimilés à des milieux poreux, l'écoulement d'un fluide (en hydrogéologie = l'eau) à travers ce réseau de pores, de chenaux et de fissures s'effectue moyennant des conditions aux frontières, correspondant aux interfaces microscopiques eau-solide. Immédiatement se pose le problème de l'échelle à laquelle les processus doivent être étudiés. A l'échelle microscopique, on se heurte très rapidement (Bear & Verruijt, 1987) à l'impossibilité de décrire in extenso la géométrie tortueuse et non-répétitive des frontières imposées à l'écoulement, ainsi qu'au manque de vérification par des mesures éventuelles. Le niveau de description à utiliser est donc l'échelle macroscopique avec, comme hypothèse indispensable et sous-jacente, la continuité des différentes phases composant le milieu. Les paramètres utilisés seront donc macroscopiques et représenteront certaines moyennes de propriétés microscopiques correspondantes.

#### II.1.1. REPRESENTATION D'UN MILIEU POREUX ET ELEMENT DE VOLUME REPRESENTATIF

Une intégration dans l'espace est réalisée pour obtenir macroscopiquement la porosité et la perméabilité d'un milieu poreux (à l'échelle microscopique, ces deux propriétés peuvent même n'avoir aucune signification (de Marsily, 1986)). Le volume sur lequel est effectuée cette intégration est qualifié d'Elément de Volume Représentatif (E.V.R.) du milieu poreux.

Cet élément permet d'utiliser la porosité et la perméabilité de la zone de l'E.V.R. (quelle que soit la taille de celui-ci) dans les équations mathématiques où ces grandeurs sont théoriquement ponctuelles.

La taille d'un E.V.R. doit donc être suffisamment grande par rapport à celle des pores, chenaux et fissures afin de définir des valeurs moyennes significatives, et suffisamment petites pour que d'un E.V.R. à l'autre, la variation des paramètres puisse être considérée comme continue au moyen de mesures macroscopiques usuelles. En milieu fissuré, le premier de ces impératifs peut mener à choisir un E.V.R. énorme ne satisfaisant alors plus à la deuxième contrainte. Nous verrons dans la suite (cfr. IV.2.) comment des aquifères en milieu fissuré, fracturé ou karstifié peuvent, dans certains cas, être modélisés avec une représentation explicite des discontinuités du milieu.

Dans un milieu poreux de porosité de pores, les deux conditions présidant à la définition d'un E.V.R. peuvent être exprimées comme suit (Bear & Bachmat, 1967) :

$$l \gg r_h$$

$$l \ll L$$

- où  $l$  est la longueur caractéristique de l'E.V.R.
- $r_h$  est le rayon hydraulique = inverse de la surface spécifique du volume des vides.
- $L$  est la longueur caractéristique du domaine poreux sur lequel un changement significatif de la valeur moyenne des paramètres peut se produire.

L'approche statistique n'est également pas étrangère à la notion d'EVR. Bachmat et Bear (1986) ont montré que, dans bien des cas, le volume d'un EVR devrait être choisi de manière à ce que les moyennes volumétriques puissent être considérées comme des estimations satisfaisantes, pour tous les paramètres considérés comme des fonctions aléatoires représentant la configuration des vides. Autrement dit, ces estimations doivent être indépendantes de la taille de l'échantillon. La porosité en un point est, par exemple, choisie égale à la moyenne statistique de toutes les réalisations possibles ponctuelles (0 sur un grain de solide et 1 dans un vide). L'approche statistique permet d'utiliser d'autres propriétés statistiques que la moyenne (espérance mathématique), mais à condition que des hypothèses d'homogénéité statistique (stationnarité) soient vérifiées (cfr. V.2.). Ces dernières conditions sont, par essence, similaires au concept d'EVR (Dagan, 1989).

Les fonctions "réservoir" et "conduite" d'un aquifère, caractérisées respectivement par la porosité et la perméabilité de la formation géologique, sont assurées par les dimensions et les interconnexions des vides. La porosité est la propriété du réservoir à stocker ou libérer de l'eau (ou plus généralement un fluide); la perméabilité est son aptitude à conduire son écoulement (Castany, 1967).

### II.1.2. POROSITE

La figure II.1. montre différents types de répartition des vides dans les roches.

La porosité totale, notée  $n$ , est définie comme suit :

$$n = \frac{V_v}{V_t} \quad (\text{II.1.})$$

où  $V_v$  est le volume des vides et  $V_t$  le volume total.

Statistiquement, cette relation peut s'écrire :

$$n = \frac{1}{V} \int_V f(x) dV \quad (\text{II.2.})$$

où  $f(x)$  est la fonction aléatoire telle que

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in V_v$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in V_s \text{ (volume de solide).}$$

Cette définition ne tient compte ni de la forme des vides, ni de la surface spécifique des grains alors que ces deux caractéristiques influencent les relations entre le(s) fluide(s) et le solide. En prenant désormais comme fluides l'eau et l'air, il nous faut rappeler qu'outre l'eau de constitution des minéraux composant la roche, l'eau contenue dans les formations géologiques peut être immobile ou mobile.

En milieu saturé, l'eau immobile, composée de l'eau de rétention (eau des colloïdes, eau hygroscopique et eau pelliculaire), de l'eau capillaire et de l'eau contenue dans des pores fermés ou en cul de sac, ne participe pas à l'écoulement et sa quantité dépend de la surface spécifique du solide car elle est retenue par diverses actions de surface (adsorptions, attractions moléculaires, ... (Monjoie, 1981)).

Seule, l'eau dite "mobile" participe à l'écoulement (lorsque le milieu est saturé) amenant à la définition d'une porosité cinématique :

$$n_c = \frac{V_{em}}{V_t} \quad (\text{II.3.})$$

où  $V_{em}$  = volume d'eau mobile.

Cette porosité peut être faible en comparaison de la porosité totale.

La capacité de rétention étant exprimée par :

$$n_r = \frac{V_{im}}{V_t} = n - n_c \quad (\text{II.4.})$$

où  $V_{im}$  = volume d'eau immobile

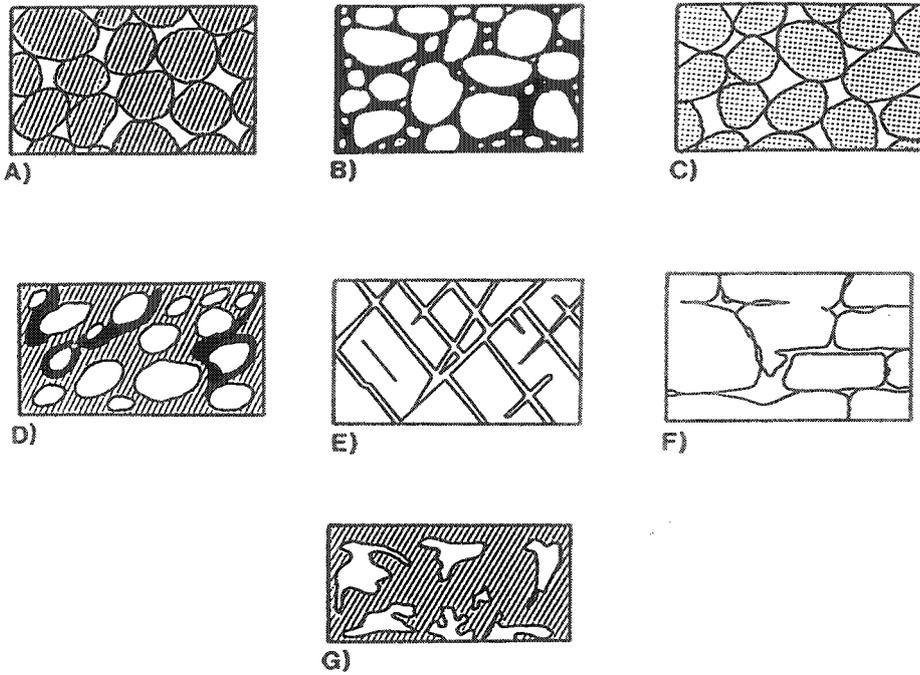


Figure II.1. : A) roche sédimentaire bien classée ayant une porosité importante

B) roche sédimentaire à granulométrie très hétérogène : porosité faible

C) roche sédimentaire bien classée et grains eux-mêmes poreux : porosité de l'ensemble très importante

D) roche sédimentaire bien classée mais des précipitations et dépôts occupent les espaces : porosité faible

E) roche rendue poreuse par fracturation : porosité dépendant de la densité des fractures (d'après Meinzer, 1942) (Bear and Verruijt, 1987)

F) roche rendue poreuse par fracturation et dissolution : porosité faible ou importante selon la densité des fractures élargies

G) roche relativement poreuse mais peu perméable (par manque d'interconnexions)

La porosité cinématique  $n_c$  n'est pas mesurable (Burger et al, 1985), c'est pourquoi on considère la porosité efficace  $n_e$  qui se rapporte à la quantité de fluide, libérée par drainage gravitaire total d'une roche saturée ... après un temps fini ... considéré comme suffisamment long. Certains auteurs parlent également de porosité de drainage.

Le tableau II.1 donne quelques valeurs de  $n$  et  $n_e$  pour différentes formations géologiques.

Néanmoins, il nous faut préciser que théoriquement, si la forme, le degré de classement et l'agencement des grains sont identiques, les dimensions des grains n'influent pas sur la porosité (Monjoie, 1981). En effet, pour le cas de la figure II.2., on a  $a^3/d^3$  sphères comprises dans le volume  $\frac{\pi a^3}{6}$

Le volume des vides  $V_v$  peut s'écrire :

$$V_v = a^3 \left( 1 - \frac{\pi}{6} \right) \quad (\text{II.5.})$$

et la porosité totale :

$$n = \left( 1 - \frac{\pi}{6} \right) = 0.4764.$$

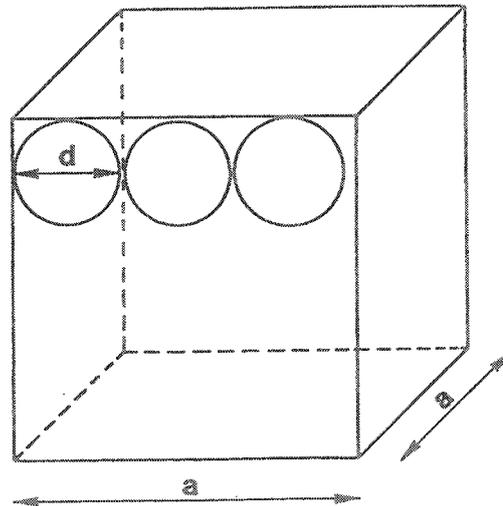


Figure II.2. : Calcul de la porosité dans un milieu composé de sphères identiques

	n (%)	n <sub>e</sub> (%)
Granites et gneiss	0.02 - 2	0.1 - 2*
Quartzites	0.8	0 - 2*
Micaschistes, phyllades, ardoises et shales	0.5 - 7.5	0.1 - 1*
Schistes		0.1 - 2*
Calcaires et dolomies primaires	0.5 - 12.5	0.1 - 10*
Dolomies secondaires	10 - 30	5 - 10*
Craies	8 - 45	2 - 12*
Grès, psammites	3.5 - 38	3 - 35
Tuff volcaniques	30 - 40	5 - 15
Graviers	15 - 25	15 - 30
Sables	15 - 35	10 - 30
Silts	30 - 45	15 - 25
Argiles	40 - 70	1 - 10

(\* Selon le degré de fissuration)

Tableau II.1. : Quelques valeurs de porosités totales et efficaces  
(établi avec l'aide de Ph. MEUS, P. BIVER et A.  
MONJOIE)

En pratique, c'est donc la forme des grains, leur agencement et leur classement qui modifient la porosité totale et bien plus encore la porosité efficace. La figure II.3. illustre les variations de  $n$ ,  $n_e$  et  $n_r$  constatées dans la pratique et reportées en fonction du diamètre moyen des grains.

Les méthodes de détermination de la porosité sur échantillons sont basées sur la mesure du volume total ( $V_t$ ) d'une part, et sur la mesure du volume des vides ( $V_v$ ), par différentes méthodes : porosimètre à mercure, par extraction d'air ou expansion de gaz. La précision est en principe excellente mais, en pratique, les échantillons sont souvent quelque peu remaniés surtout dans les roches meubles.

Les méthodes pratiquées in situ peuvent consister en mesures de la résistivité apparente, de la densité par diagraphie  $\gamma - \gamma$ , de la teneur en ions  $H^+$  par diagraphie neutron ou même de la vitesse des ondes soniques et sismiques. Une description détaillée de ces méthodes ne fait pas l'objet de ce travail; on peut cependant préciser qu'elles ont l'avantage de constituer, le plus souvent, des enregistrements continus des propriétés physiques mesurées et de façon non-destructive. Cependant, l'étalonnage précis de ces méthodes reste souvent très délicat à établir dans les terrains meubles à cause des problèmes d'échantillonnage. Un exemple est donné à la figure II.4. montrant les résultats des diagraphies  $\gamma$ -ray,  $\gamma$ - $\gamma$  et neutron dans les terrains sablo-argileux du sous-sol de Shanghai, confrontés à la porosité mesurée sur des échantillons prélevés lors du forage.

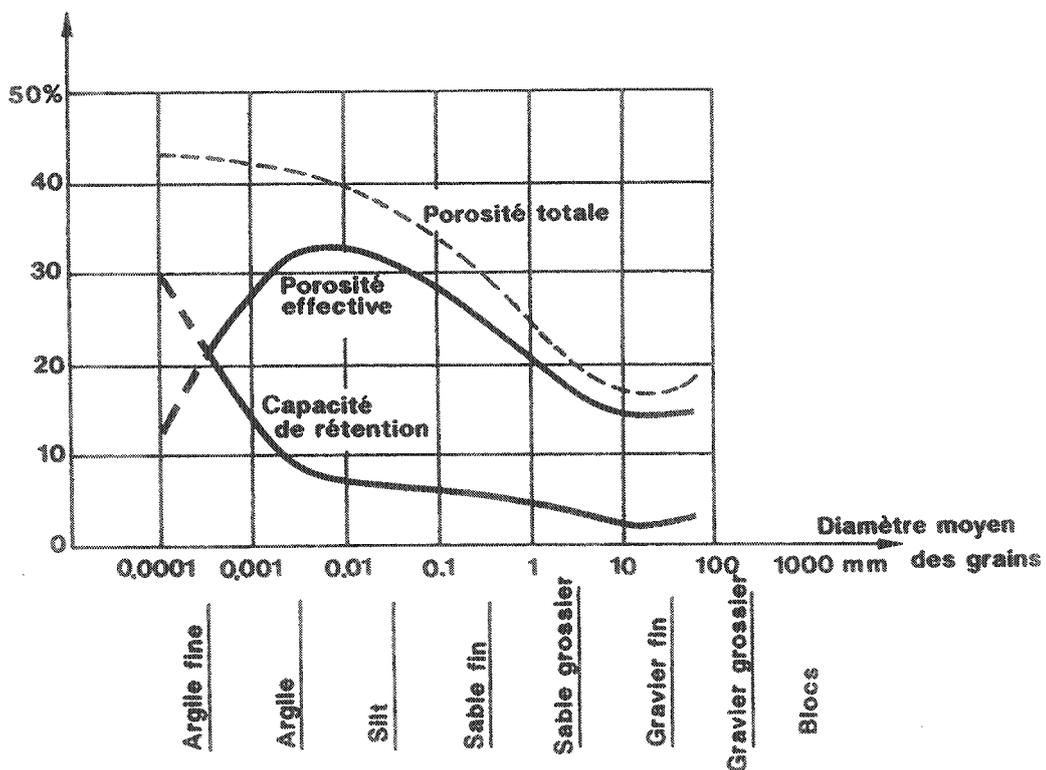


Figure II.3. : Influence des diamètres des grains sur les composantes de la porosité ( diagramme d'Eckis d'après Castany, 1967 et Monjoie, 1981)

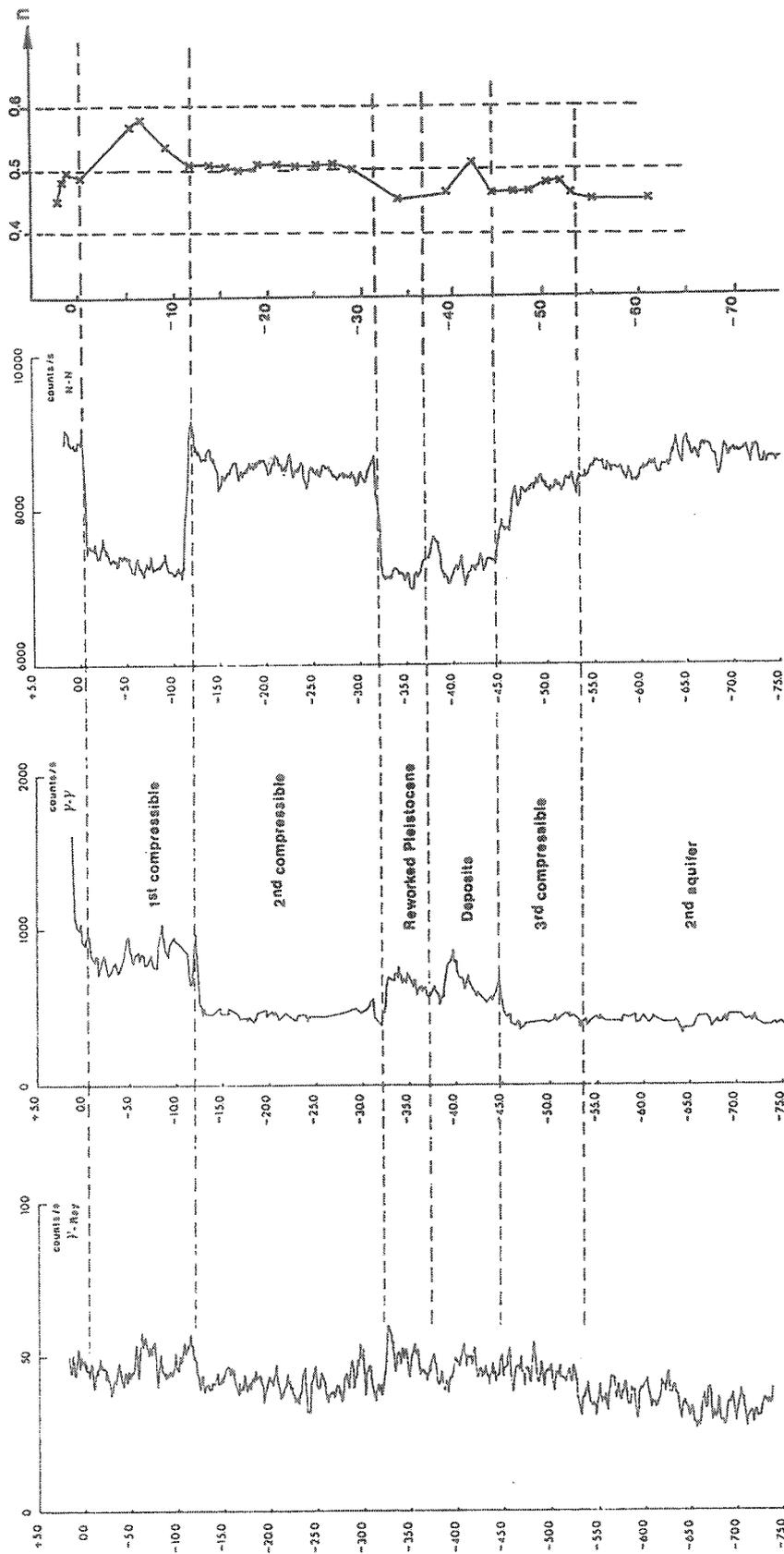


Figure II.4. : Résultats des diagraphies  $\gamma$ -ray,  $\gamma$ - $\gamma$ , neutron au forage G22 à Shanghai, comparés aux mesures de porosité totale sur échantillons provenant du même forage.

La porosité efficace peut également être calculée par essais de pompages (cfr II.3.7.) et par comparaison de la fluctuation piézométrique pour une infiltration efficace donnée, pour un volume d'eau sorti à l'exutoire ou pour une variation des réserves d'eaux souterraines calculée à partir des courbes de tarissement (Monjoie, 1981).

Dans le cas de roches cohérentes, il est possible de distinguer la porosité de pores et la porosité de fissures (figure II.5.), en se basant sur la notion d'indice de continuité (Tourenq, 1978) :

$$IC = 100 \frac{V_{Lm}}{V_{Lc}}$$

où  $V_{Lm}$  est la vitesse sismique longitudinale mesurée  
 $V_{Lc}$  est la vitesse sismique longitudinale calculée sur base de la composition minéralogique.

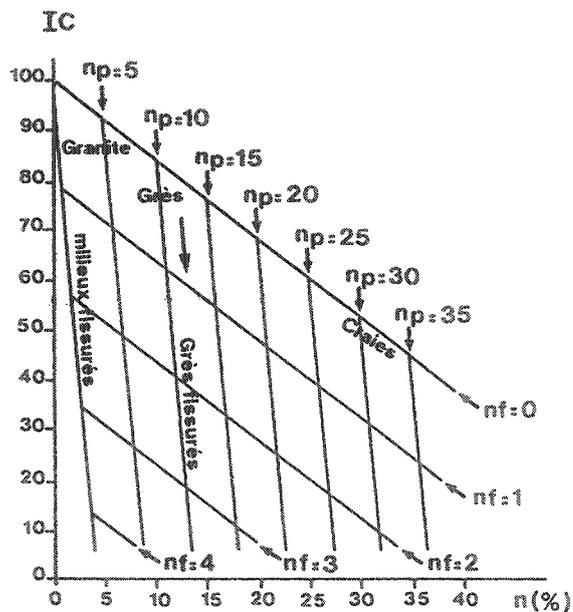


Figure II.5. : Distinction entre porosité "de pores" et "de fissures" à partir de l'indice de continuité et de la porosité totale (d'après Calembert et al, 1981).

Cette méthode a été appliquée avec succès pour la détermination de la porosité de pores et de la porosité de fissures des craies de Hesbaye (Muller, 1990, et Biver, 1990).

### II.1.3. PRESSIONS ET HAUTEURS PIEZOMETRIQUES

L'hydraulique des nappes souterraines est un cas particulier de la mécanique générale des fluides pour lequel les écoulements sont presque toujours laminaires (Burger et al., 1985). Les seuls cas d'exception sont constitués par les essais Halliburton et les essais à la sonde de Prandtl pratiqués à haute pression dans des milieux rocheux fissurés. L'énergie d'une particule du fluide en mouvement est donc considérée comme uniquement potentielle (altitude de la particule et pression) car l'énergie cinétique est si réduite qu'elle est négligée. L'équation de Bernouilli s'écrit :

$$h = z + \int \frac{dp}{\rho \cdot g} \quad (\text{II.6.})$$

où  $h$  = potentiel ou hauteur piézométrique  
 $p$  = pression d'eau  
 $\rho$  = masse volumique de l'eau.

Si le fluide est incompressible,

$$\begin{aligned} h &= z + p/\rho \cdot g \\ \text{et} \\ p &= (h-z)\rho \cdot g \end{aligned} \quad (\text{II.7.})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial t}$$

### II.1.4. VITESSES D'ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX

Dans les milieux poreux, la vitesse des particules d'eau est très variable. La direction des vecteurs vitesse et les sections d'écoulement peuvent changer fortement d'un point à l'autre.

La vitesse réelle des particules d'eau dans chaque pore du milieu ne peut être, ni mesurée, ni utilisée dans les calculs, car elle constitue une grandeur microscopique.

Il faut se ramener à une grandeur macroscopique par moyenne spatiale sur l'E.V.R. ou par moyenne statistique : la vitesse de filtration ( $v$ ) ou la vitesse de Darcy (cfr. II.1.7.).

Cette dernière se distingue de la vitesse effective qui est également une vitesse moyenne mais obtenue en ne considérant que le volume des pores où l'eau est mobile au lieu de l'E.V.R. entier.

II.1.5. EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE DE FLUIDE EN MILIEU POREUX SATURE

L'équation générale de continuité, exprimant la conservation de la masse de fluide, se ramène à :

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot n) + \rho \cdot q = 0 \quad (\text{II.8.})$$

où  $q$  = débits volumiques (par unité de volume) échangés par l'E.V.R. avec l'extérieur (positif si débit sortant).

II.1.6. SIMPLIFICATION ET INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES (de Marsily, 1986)

De Marsily (1986) a montré qu'en simplifiant les équations dynamiques générales de Navier-Stokes pour le cas d'un écoulement laminaire et permanent entre deux plans parallèles et imperméables, on trouve une loi macroscopique qui pourra être comparée à la loi expérimentale de Darcy (cfr. II.1.7.). En particulierisant encore par l'introduction de la gravité et en plaçant le dispositif verticalement, il trouve :

$$v = - \frac{n \cdot e^2}{12 \cdot \mu} (\operatorname{grad} p + \rho \cdot g \operatorname{grad} z) \quad (\text{II.9.})$$

où  $e = n/(1-n)$  = indice des vides

$\mu$  = coefficient de viscosité dynamique

$\operatorname{grad} z = (0, 0, 1)$ , l'axe des  $z$  étant placé verticalement et orienté vers le dessus.

L'équation (II.9.) s'écrit également :

$$v = - \frac{n \cdot e^2 \cdot \rho \cdot g}{12 \mu} \operatorname{grad} h \quad (\text{II.10.})$$

avec  $h$  défini par l'équation (II.6.).

### II.1.7. LOI DE DARCY

La vitesse de filtration est déterminée par l'expérience de Darcy (1856) qui consiste à faire passer, à travers un échantillon de milieu poreux de section constante A, un débit d'eau Q. La vitesse est exprimée par :

$$v = \frac{Q}{A} \quad (\text{II.11.})$$

Darcy a montré que le débit Q à travers une formation poreuse (figure II.6.) essentiellement sableuse, peut s'exprimer par :

$$Q = K.A. \frac{\Delta h}{L} \quad (\text{II.12.})$$

$$\text{et } v = K.i$$

où K est un coefficient dépendant du milieu poreux appelé conductivité hydraulique ou coefficient de perméabilité.

$\Delta h$  est la différence des hauteurs piézométriques en amont et en aval de l'échantillon.

L est la longueur de l'échantillon.

$i = \Delta h/L$  est le gradient hydraulique.

Cette loi phénoménologique, exprimée en termes de hauteurs piézométriques ( $\Delta h$ ) est valide pour un fluide incompressible (ou de densité constante à composition égale) et le flux se déplaçant vers les hauteurs piézométriques décroissantes.

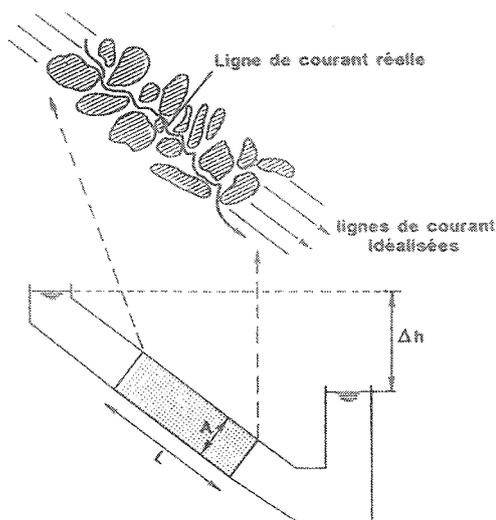


Figure II.6. : Ecoulement à travers un échantillon poreux

## II.2. ECOULEMENT EN MILIEU POREUX NATUREL - NOTION DE PERMEABILITE

### II.2.1. GENERALISATION DE LA LOI DE DARCY

En milieu isotrope, le coefficient de perméabilité, apparaissant dans la loi de Darcy, est un scalaire exprimant, de façon globale, l'aisance qu'a le fluide à se déplacer à travers la tortuosité des vides (Bear and Verruijt, 1987). Il va donc dépendre des propriétés du fluide (densité et viscosité) et du milieu poreux (répartition des vides, forme des grains, tortuosité, surface spécifique, porosité). Par conséquent, K peut s'exprimer :

$$K = \frac{k \cdot \rho \cdot g}{\mu} \quad \begin{array}{l} [L] \\ [T] \end{array} \quad (II.13.)$$

où k est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux  $[L]^2$

De nombreuses relations empiriques ont été émises liant K à différentes propriétés physiques du milieu. Il en sera question dans la suite de ce travail.

Dans l'expérience de Darcy, les causes réelles du déplacement de fluide sont le gradient de pression et la gravité; par conséquent, on peut écrire :

$$\underline{v} = - \frac{k}{\mu} (\underline{grad}p + \rho \cdot g \cdot \underline{grad}z) \quad (II.14.)$$

et en tenant compte de l'équation (II.6.) :

$$\underline{v} = - \frac{k \cdot \rho \cdot g}{\mu} \underline{grad}h = - K \underline{grad}h \quad (II.15.)$$

La loi de Darcy se généralise aux trois dimensions de l'espace, on écrit :

$$v_i = - K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \text{ et } 3 \quad (II.16.)$$

où  $K_{ij}$  = tenseur des perméabilités du milieu

$x_j$  = coordonnée

### II.2.2. MILIEU POREUX ANISOTROPE ET TENSEUR DE PERMEABILITE

Si la perméabilité en un point du milieu poreux est dépendante de la direction, le milieu poreux est anisotrope. Le cas le plus courant est l'anisotropie des formations géologiques sédimentaires où une direction préférentielle d'écoulement est constatée parallèlement au plan de sédimentation. Des cas particuliers d'anisotropie énorme sont constatés dans des massifs rocheux fissurés et karstifiés.

En considérant un écoulement parallèle au plan de stratification d'un milieu poreux composé de plusieurs couches, la somme des débits calculés par la loi de Darcy dans chaque couche prise individuellement donne :

$$\sum Q_i = \sum K_i \cdot B_i \cdot \frac{\Delta h}{L} \quad (\text{II.17.})$$

où  $B_i$  est la section d'écoulement de la  $i$ ème couche.

La perméabilité équivalente, parallèle aux couches, s'écrit par conséquent :

$$K_{eq} = \frac{1}{B} \sum K_i B_i \quad (\text{II.18.})$$

où  $B$  est la section totale =  $\sum B_i$ .

De même, pour un écoulement perpendiculaire aux couches, la perméabilité équivalente vaut :

$$K_{eq} = \frac{\sum B_i}{\left( \sum \frac{B_i}{K_i} \right)}$$

L'anisotropie de  $K$  est traitée en toute généralité lorsque les 9 composantes du tenseur de perméabilité, défini à l'équation (II.16.), sont non-nulles.

Le tenseur des perméabilités est un tenseur du second ordre et Matheron (1967) a prouvé sa symétrie par intégration des équations de Navier-Stokes en milieu continu. Macroscopiquement et intuitivement, dans la mesure où la perméabilité représente une grandeur moyenne sur au moins un EVR, cela paraît évident.

Dans un milieu poreux anisotrope, le vecteur flux et le gradient hydraulique ne sont pas colinéaires, excepté dans le cas où le gradient est parallèle à une direction principale d'anisotropie. Lorsque les directions principales d'anisotropies sont choisies comme système d'axe, le tenseur de perméabilité se réduit à une diagonale non nulle :  $K_{ij} = 0, \forall i \neq j$  et  $K_{ij} \neq 0, \forall i=j$

### II.2.3. MILIEU POREUX FISSURE

Pour simuler les écoulements en milieu poreux fissuré, trois approches sont couramment pratiquées :

- a. la description détaillée des fractures, prises séparément, demandant la connaissance des caractéristiques propres de chacune d'entre elles;
- b. l'utilisation d'une "version étendue" de l'EVR, de manière à considérer le milieu poreux continu équivalent au milieu fissuré étudié;
- c. l'utilisation de paramètres assimilés à des fonctions aléatoires; des moyennes statistiques de ces fonctions sont alors utilisées dans les calculs moyennant l'hypothèse d'homogénéité statistique (fort proche de la définition d'un EVR).

L'étude de l'écoulement dans une fracture (approche a.) a amené Louis (1968) à écrire de façon générale :

$$\left. \begin{aligned} v &= K_f \cdot J_f \text{ en régime laminaire} \\ v &= K'_f \cdot J_f^\alpha \text{ en régime turbulent} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19.})$$

où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la fissure

$K_f$  est la perméabilité de la fracture pour un écoulement laminaire

$K'_f$  est la perméabilité de la fracture pour un écoulement turbulent

$J_f$  est la projection du gradient piézométrique local dans le plan de la fracture

$\alpha$  est le degré de non linéarité de l'écoulement ( $0.5 < \alpha < 1$ ) (de Marsily, 1986).

Ensuite, Louis (1974) distingue 5 types de régime d'écoulement (figure II.7.) en fonction de la rugosité relative ( $R_r$ ) de la fracture et du nombre de Reynolds ( $Re$ ).

Si des ponts de matière sont constatés dans la fissure, on peut multiplier la vitesse indiquée à la figure II.7 par un "coefficient de séparation de la fracture" (de Marsily, 1986). Pour un réseau de fractures parallèles (figure II.8.), la perméabilité équivalente en régime laminaire s'écrit :

$$K = \left( \frac{a}{a+b} \right) \cdot K_f + \left( \frac{b}{a+b} \right) \cdot K_m \quad (\text{II.20.})$$

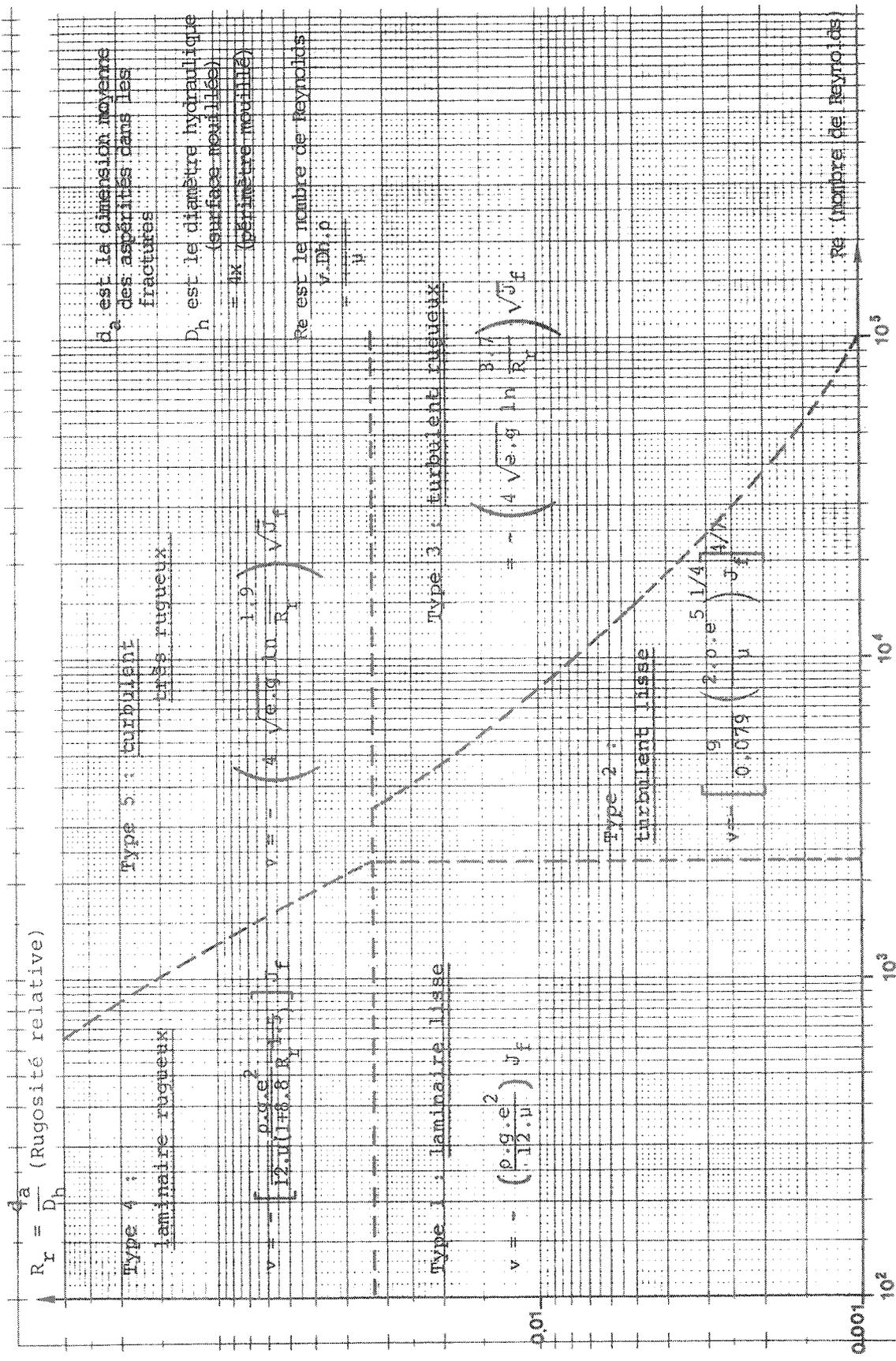


Figure II.7. : Différentes lois d'écoulement dans les fractures et leur domaine d'application (d'après de Marsily, 1986 et Louis, 1974)

où  $K_m$  est la perméabilité de la matrice  
 $b$  est la distance entre les fractures  
 $a$  est l'ouverture moyenne de la fissure

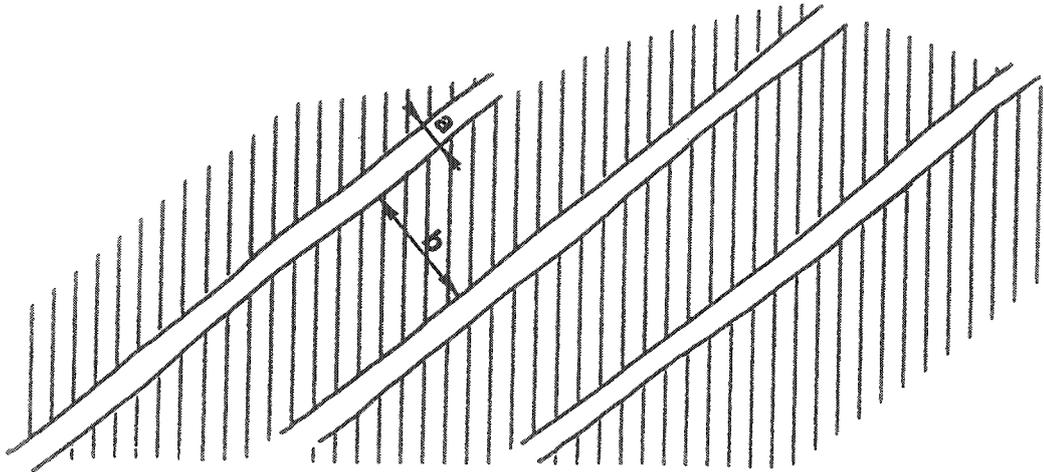


Figure II.8. : Réseau de fractures parallèles dans un milieu poreux rocheux.

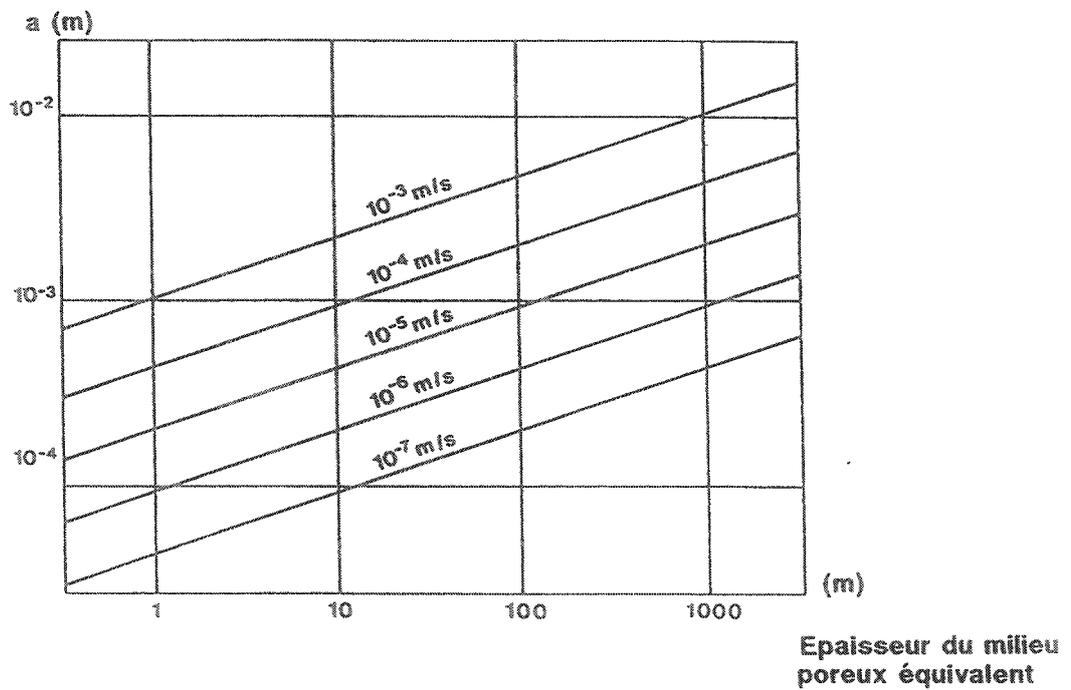


Figure II.9. : Epaisseur (en mètres) d'un milieu poreux continu, équivalent à une fracture, d'après de Marsily, 1986.

a est très petit par rapport à b; l'équation (II.20.) s'écrit donc :

$$K = \frac{a}{b} K_f + K_m \quad (\text{II.21.})$$

Par cette dernière équation, on arrive à la notion de perméabilité équivalente (approche b.). En résultat de leurs études, Maini et Hocking (1977) fournissent un graphique permettant de substituer un milieu poreux continu équivalent au milieu poreux fracturé (figure II.9.).

De cette manière, pour des milieux poreux affectés de 2 ou plusieurs familles de fissures, les perméabilités équivalentes parallèles à chaque famille de fissures sont déterminées et on peut en déduire les directions principales d'anisotropie comme illustré à la figure II.10. Dans ce type d'approche, on suppose cependant que les fissures sont infinies et ont des propriétés uniformes.

Rappelons néanmoins que la seule façon précise de déterminer  $K_f$  ou  $K'_f$  d'une fissure (approche a.) consiste à réaliser des tests de pression in situ (sonde de Prandtl et tests Halliburton).

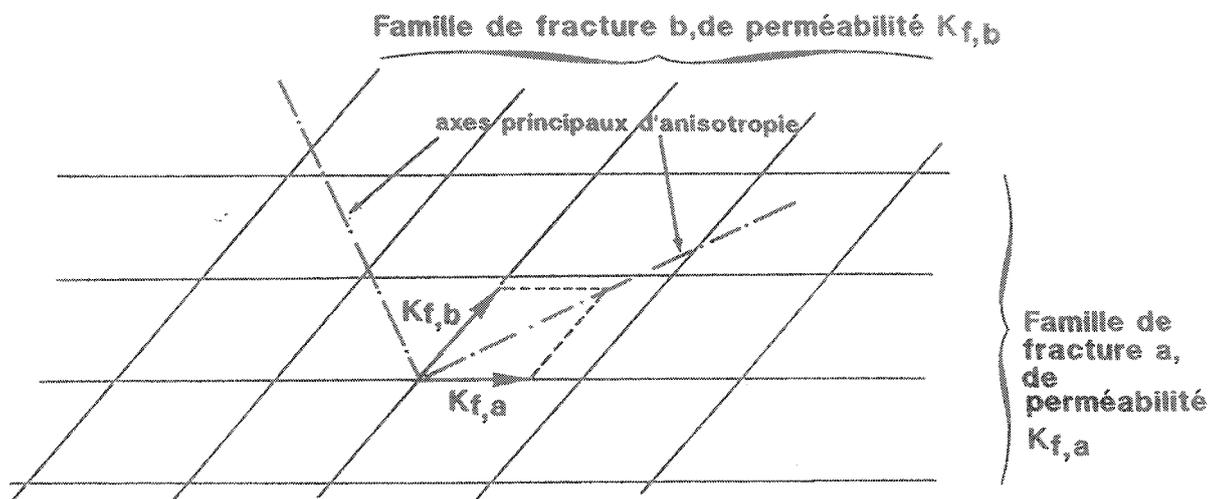


Figure II.10. : Axes principaux d'anisotropie d'un milieu poreux, fracturé par deux familles de fissures.

Dans la troisième approche (approche c.), l'effet des incertitudes quant à la géométrie réelle des fractures est analysé dans l'estimation de la perméabilité équivalente (Stam et al., 1990). Les mesures de terrains sont spécifiées avec leurs moyennes et variances si bien que la moyenne et la variance de la perméabilité équivalente sont calculées (figure II.11.).

De façon générale, avec un système fracturé dont la géométrie serait totalement quelconque, la matrice de perméabilité n'est pas un tenseur et n'est pas symétrique. Sagar et Runchal (1982) ont montré sous quelles conditions la symétrie est obtenue.

L'écoulement en milieu poreux fracturé est donc très complexe à étudier de façon précise et, si l'on considère des écoulements en régime transitoire, il faudra en plus tenir compte d'une porosité double.

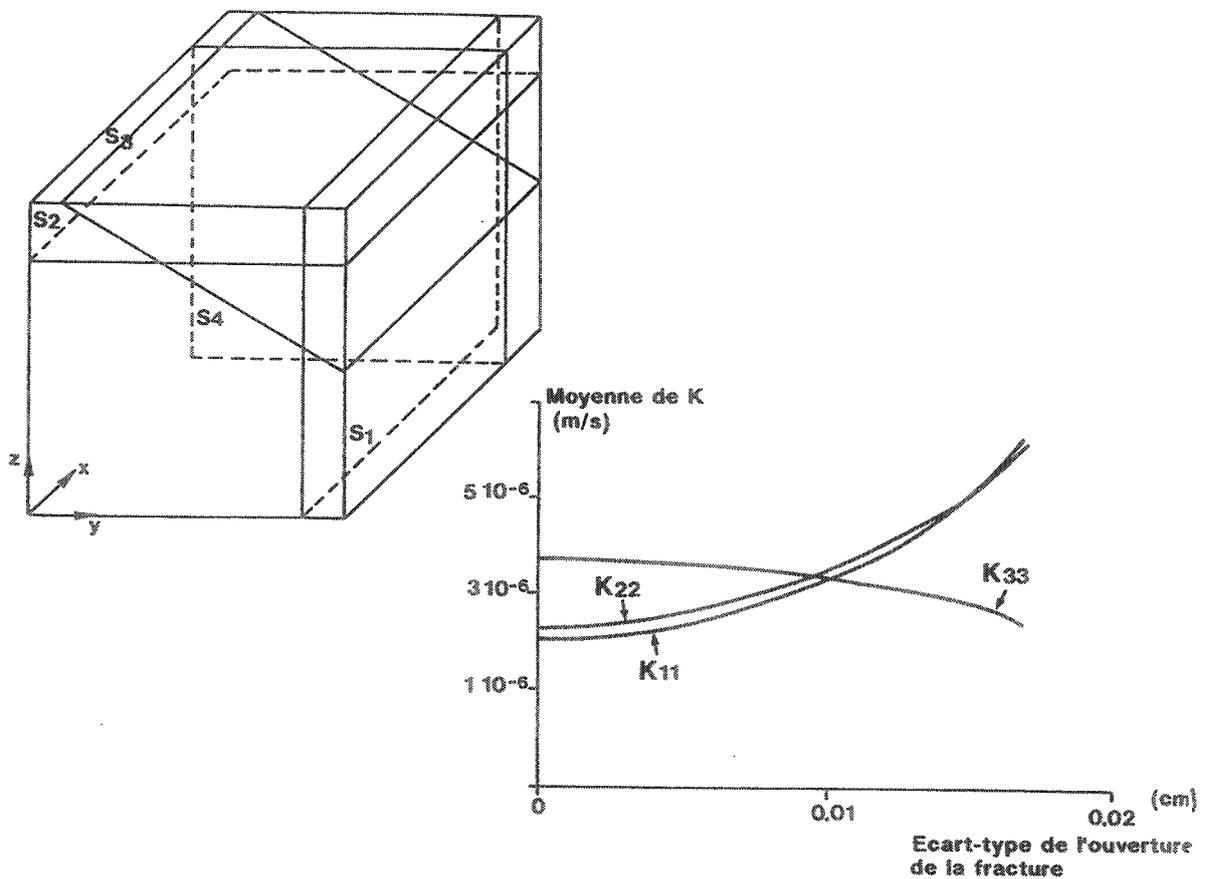


Figure II.11. : Exemple montrant la dépendance des perméabilités moyennes principales par rapport à l'écart-type des valeurs d'ouverture des fractures. Cet exemple a été calculé par Sagar et Runchal (1982) sur un bloc de 5 m X 5 m affecté de 4 systèmes de fractures, S1, S2, S3 et S4.

#### II.2.4. LIMITATIONS ET VALIDITE DE LA LOI DE DARCY

Au départ, la loi de Darcy a été établie sur base d'essais réalisés sur des milieux poreux dont la matrice est sableuse, sablo-silteuse ou même sablo-graveleuse. Il est nécessaire d'étudier sa validité pour des milieux poreux fracturés et pour des milieux poreux argileux. Cette discussion paraîtrait purement théorique et dénuée d'intérêt pratique si les problèmes de stockage de déchets (radioactifs, par exemple) dans des horizons indurés ou meubles de faible perméabilité n'avaient amené ce type de problème à notre attention. Il apparaît expérimentalement (Bear & Verruijt, 1987) que la relation entre la vitesse de filtration ( $v$ ) et le gradient hydraulique ( $i$ ) peut s'écarter de la relation linéaire exprimée par la loi de Darcy (équation II.12.) pour des ( $i$ ) très petits ou très grands.

Par analogie avec l'hydraulique générale, on caractérise l'écoulement étudié par son nombre de Reynolds (figure II.7.) :

$$R_e = \frac{v \cdot D_h \cdot \rho}{\mu} \quad (\text{II.22.})$$

où  $D_h$  est le diamètre hydraulique.

Malgré des modes de détermination différents du  $D_h$ , selon les auteurs  $D_h = d_{10}$  ou  $D_h = \sqrt{k/n}$ , il est reconnu généralement que la loi de Darcy est valide si le nombre de Reynolds est compris entre 1 et 10 (Bear & Verruijt, 1987), ce qui "couvre" la plupart des problèmes traités.

Des nombres de Reynolds supérieurs peuvent être rencontrés dans des milieux calcaires fracturés et karstifiés ou à proximité immédiate de pompages ou réinjections à forts débits. Les turbulences et les vitesses élevées, font en sorte qu'une augmentation supplémentaire du gradient provoque une augmentation de vitesse inférieure à ce que préconiserait la loi de Darcy (figure II.12, a).

A l'autre extrême, des nombres de Reynolds inférieurs à 1 sont trouvés dans des milieux très argileux où un gradient supérieur à celui préconisé par la loi de Darcy est nécessaire pour provoquer un écoulement. Dans ce dernier cas, la loi généralement considérée est celle de la figure II.12.b due initialement à Jacquin (1965) et reprise par de nombreux auteurs (de Marsily, 1986, ...) bien que difficilement confirmée par les expériences (figure II.13.).

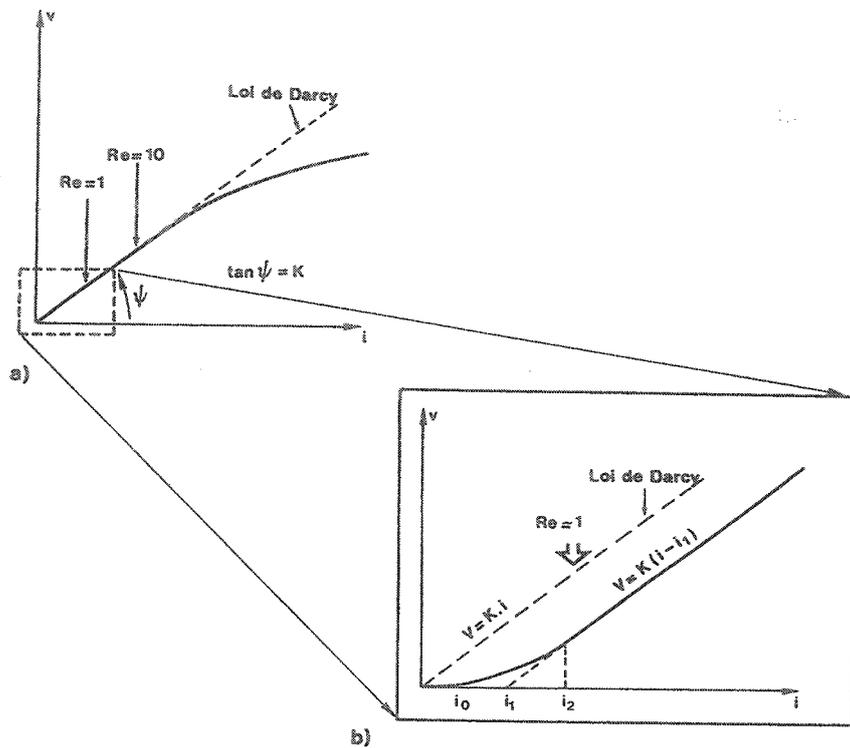


Figure II.12 : Déviations par rapport à la loi de Darcy pour les grands et petits gradients hydrauliques.

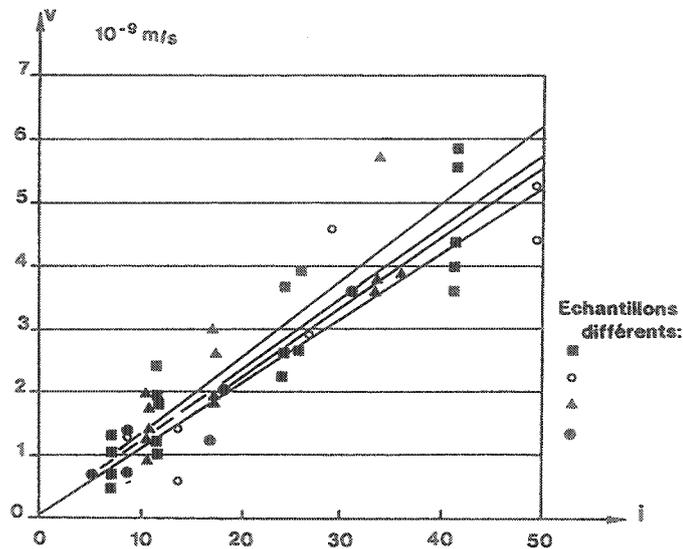


Figure II.13 : Vitesse de filtration en fonction du gradient hydraulique, à travers 4 échantillons d'argile à dominante kaolinite-illite, montrant la difficulté d'établir une loi avec précision, vu les imprécisions des mesures, les vitesses faibles et les temps d'expérience énormes. D'après Wagner & Egloffstein (1990).

Ce comportement est dû aux différentes interactions que subit l'eau dans les milieux argileux : polarités électriques, potentiel de courant d'eau, comportement non-Newtonien de l'eau dans les espaces capillaires, flux inverse d'électro-osmose, ... Pour autant qu'une loi puisse être déterminée, il est évident que les valeurs de  $i_0$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  (figure II.12.) dépendent de la nature exacte des argiles en présence. A partir de là, de nombreux auteurs ont proposé des lois empiriques satisfaisantes pour les milieux argileux qu'ils étudient, où la perméabilité devient en quelque sorte dépendante du gradient hydraulique.

#### II.2.5. EQUATION DE L'ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX EN RÉGIME PERMANENT

En régime permanent, l'équation (II.8.) exprimant la conservation de la masse du fluide s'écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) + \rho \cdot q = 0 \quad (\text{II.23.})$$

Si on remplace  $v$  par sa valeur dans l'équation (II.14.) de la loi de Darcy et en considérant le fluide incompressible ( $\rho = \text{cste}$ ), on obtient :

$$\operatorname{div} \left[ K (\operatorname{grad} p) \right] - \rho \cdot g \cdot q = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \rho \cdot g \cdot q = 0$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q = 0$$

(en notations indicielles)

#### II.2.6. TRANSMISSIVITE ET HYPOTHESE DE DUPUIT

En toute généralité, les écoulements en milieu poreux sont tri-dimensionnels.

##### Nappes captives

Dans bien des cas de nappes captives, si la couche aquifère possède une épaisseur  $e(x,y)$  (figure II.14.), le flux  $Q(x,y)$  en un point de coordonnées  $(x,y)$  est considéré comme dirigé parallèlement aux épontes en ce point et ces épontes sont considérées imperméables. On trouve alors :

$$Q(x,y) = \int_0^{e(x,y)} v_{x,y} dz \quad (\text{II.25.})$$

où  $v_{x,y}$  est la vitesse de filtration de Darcy dans le plan défini par les axes  $x$  et  $y$ .

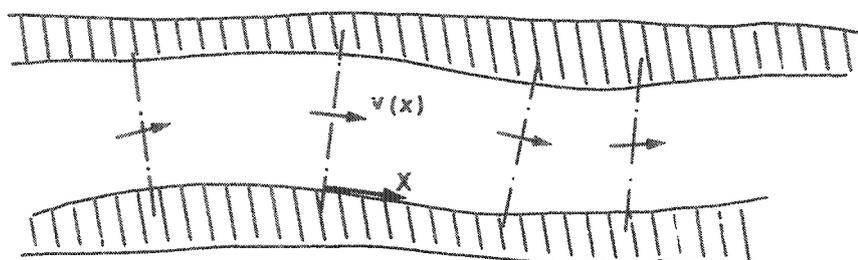
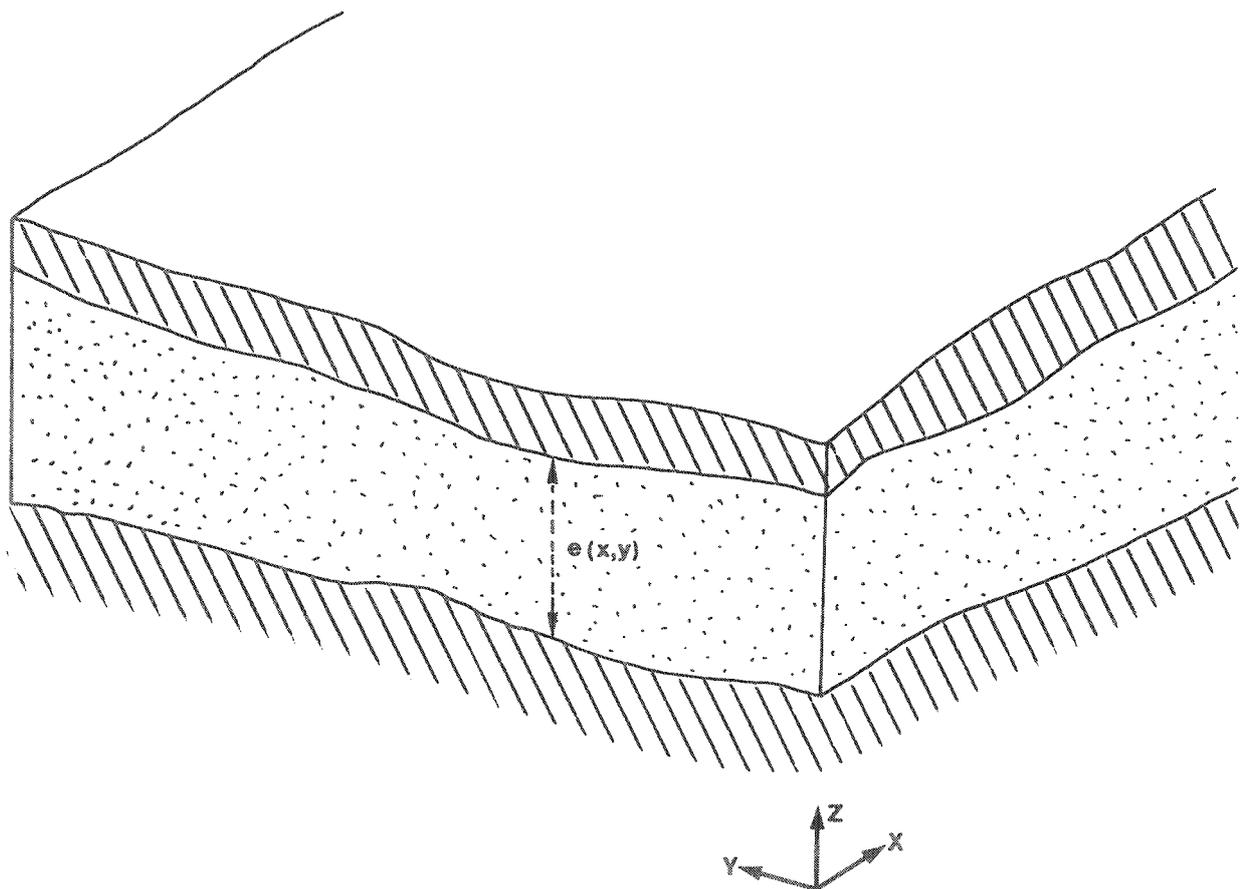


Figure II.14. : Ecoulement parallèle aux épontes en nappe captive

Les deux composantes de ce flux peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} Q_x(x,y) &= \int_0^{e(x,y)} K(x,y,z) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot dz \\ Q_y(x,y) &= \int_0^{e(x,y)} K(x,y,z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot dz \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.26})$$

On définit la transmissivité comme suit :

$$T(x,y) = \int_0^{e(x,y)} K(x,y,z) \cdot dz \quad (\text{II.27.})$$

Les équations (26) s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} Q_x(x,y) &= T(x,y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ Q_y(x,y) &= T(x,y) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28.})$$

Si le milieu est isotrope et homogène sur l'épaisseur  $e(x,y)$ , on a :

$$T(x,y) = K(x,y) \cdot e(x,y) \quad (\text{II.29.})$$

ou en tout point,  $T=K \cdot e$ .

### Nappes libres

Les nappes libres sont surmontées d'une frange capillaire située au dessus de la surface libre (figure II.15.). Le plus souvent, la hauteur de la frange capillaire est négligeable (bien que dépendante de la lithologie, de la texture et de la structure de la formation aquifère) par rapport à l'épaisseur saturée de la couche aquifère. On considère la surface libre confondue avec la surface appelée "water table" située au-dessus de la frange capillaire et elles peuvent être caractérisées par une pression nulle (voir aussi chapitre IV).

Dans les problèmes hydrogéologiques, la position de cette surface libre constitue bien souvent ce que l'on cherche.

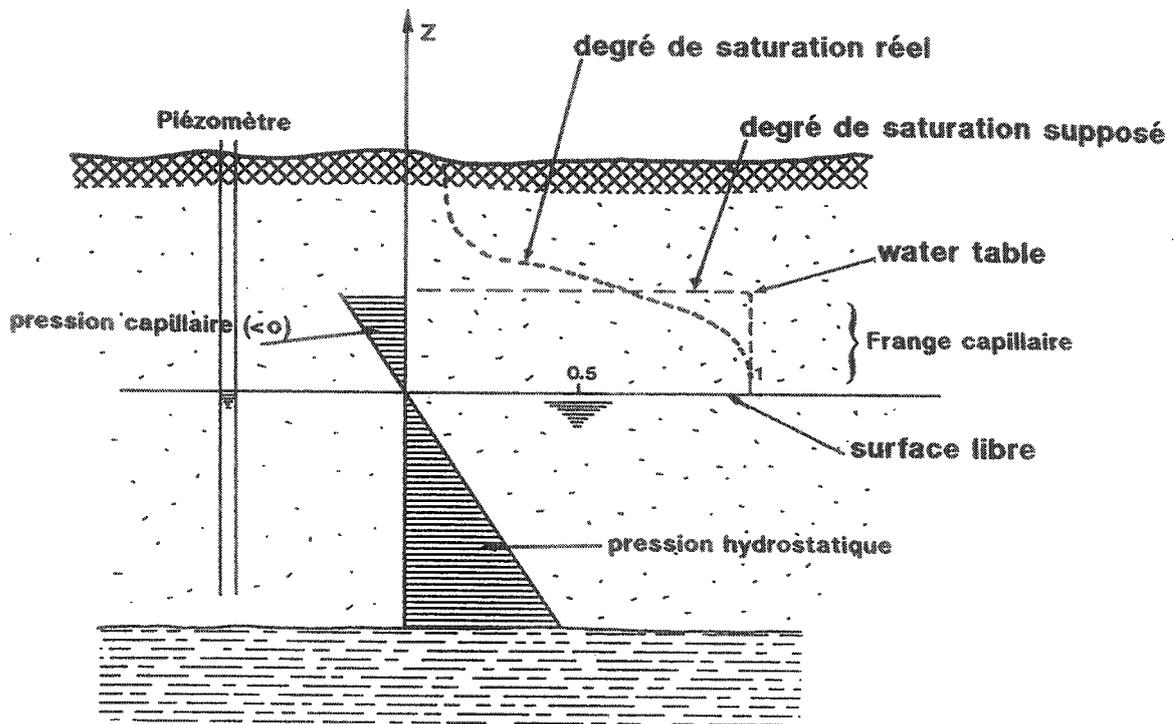


Figure II.15. : Nappe libre, frange capillaire et degré de saturation (d'après Bear, 1987).

Pour contourner ce problème, pouvoir utiliser la notion de transmissivité et réduire l'écoulement 3D à un problème bidimensionnel  $[h(x,y,z,t) \rightarrow h(x,y,t)]$ , il faut utiliser l'hypothèse de Dupuit (1863) : lorsque la pente de la surface libre de l'aquifère étudié est très faible (1/1000 ou 1/10000), on la considère horizontale et le flux est également considéré strictement horizontal. Remarquons que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse d'une "répartition hydrostatique" des pressions :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho \cdot g \quad (\text{II.30.})$$

#### II.2.7. MESURES DE LA PERMEABILITE

##### Détermination in situ

La détermination in situ de la perméabilité se fait le plus souvent par des essais de pompage, d'injection, de pressions ou de traçage dont les résultats sont interprétés en utilisant des solutions analytiques ou empiriques (et plus récemment des solutions numériques) pouvant simuler, de façon acceptable, le cas étudié.

De nombreux traités d'hydrogéologie (de Marsily, 1986, Castany, 1963 et 1967, Monjoie, 1981, etc.) reprennent de façon complète la plupart des cas rencontrés : nappes libres ou captives, en milieu poreux et/ou fracturé et fissuré, en mode permanent ou transitoire, nappes radiales infinies avec ou sans infiltration par les épontes.

Les différentes méthodes d'interprétation supposent un certain nombre d'hypothèses. L'écart entre le comportement théorique et celui observé permet de mettre en évidence certaines caractéristiques de l'aquifère telles l'hétérogénéité, l'anisotropie et l'apparition de pertes de charge.

Il n'entre pas dans le cadre de ce travail de rappeler ces différentes méthodes.

#### Détermination sur échantillons

Les perméamètres utilisés sont des dispositifs similaires à celui de Darcy. Si la perméabilité est grande, la différence de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval est maintenue constante (perméamètre à niveau constant) et la mesure du débit est effectuée en aval de l'échantillon testé. Dans les autres cas, un perméamètre à niveau variable est utilisé et la mesure du volume de fluide infiltré est effectuée par repérage du niveau d'eau amont sur un tube gradué (piézomètre à niveau variable).

Les mesures réalisées à l'aide de ces perméamètres sont, en pratique, souvent mises en doute, de par le remaniement fréquent des échantillons testés et d'autre part, même si les échantillons peuvent être considérés comme non-remaniés, elles ne sont que rarement représentatives des valeurs moyennes de  $K$  sur l'E.V.R. utilisé dans les modèles (figure II.16.).

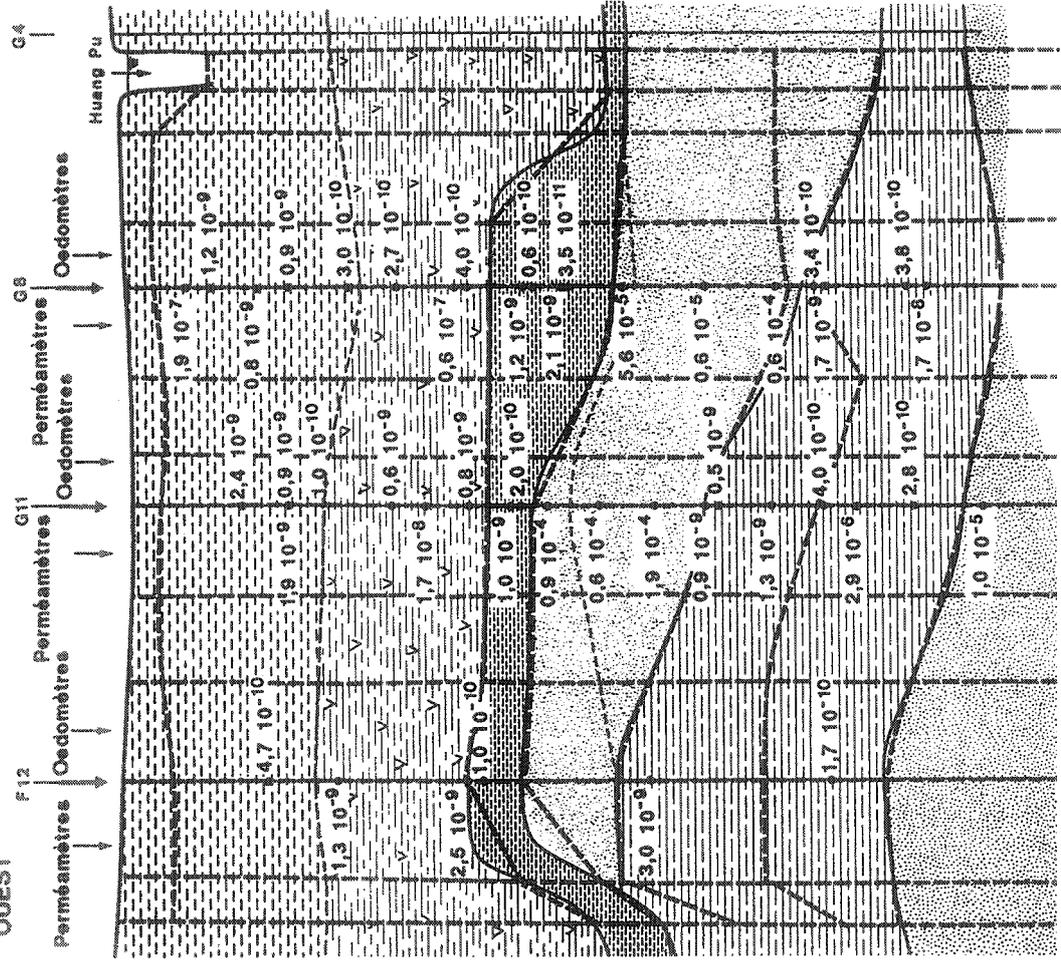
En "reservoir engineering", l'utilisation de gaz secs (air, He,  $N_2$ ) comme fluide pour la mesure de la perméabilité est courante afin de minimiser les réactions fluide-matrice. A basse pression, ces essais fournissent des valeurs trop grandes de  $K$  car l'échantillon testé contient de l'air avant l'essai. La correction d'évacuation d'air de Klinkenberg (1941) permet alors de se ramener à des perméabilités équivalentes, relatives à des liquides. Cette correction est à appliquer avec précautions selon la nature chimique du fluide par rapport à celle de la formation poreuse (argiles sensibles par exemple).

Pour les formations silteuses et argileuses très peu perméables, la perméabilité est mesurée par des essais de consolidation (oedomètres ou triaxiaux). La perméabilité est obtenue à différents paliers de contrainte effective, ce qui revient à dire qu'une relation de type  $K=f(e)$  est obtenue (cfr. III). Les valeurs obtenues de la sorte sont nettement inférieures à celles obtenues par des perméamètres pour les 3 raisons suivantes :

- la perméabilité des terrains argileux décroît sensiblement avec la diminution de l'indice des vides (et donc avec l'augmentation de la contrainte effective);

EST

OUEST



LEGENDE

- 1ère couche compressible: argile silteuse
- 2ème couche compressible: argile silteuse et loam
- Dark Green Stiff Clay: argile surconsolidée
- 1er aquifère: silt et sable fin
- 3ème couche compressible: argile silteuse
- 2ème aquifère: sable fin et silt

Maillage en éléments finis



Figure II.16. : valeurs des perméabilités en m/s mesurées par perméamètres et oedomètres sur des échantillons provenant des différentes couches argilo-silteuses du sous-sol de Shanghai. Dans le cas des oedomètres, la valeur mentionnée est relative à l'état de contrainte effective, restitué par rapport aux conditions in situ.

- . l'eau utilisée dans les perméamètres n'est pas en équilibre chimique complet avec l'échantillon argileux, ce qui peut créer des interactions ioniques importantes influençant l'écoulement. Dans un essai de consolidation, il y a juste expulsion partielle de l'eau occupant les pores et pas passage d'eau dans tout l'échantillon;
- . les zones proches des parois de l'échantillon sont souvent perturbées, pouvant produire des écoulements plus importants si aucune précaution particulière n'est prise dans les perméamètres. En consolidation, au contraire, les contraintes latérales tendent à réduire les perméabilités dans ces zones perturbées.

C'est essentiellement ces 3 raisons qui expliquent que les perméabilités des sédiments argileux du sous-sol de Shanghai (figure II.16.) diffèrent d'un facteur 10 et parfois 100 selon que les mesures ont été réalisées au perméamètre ou à l'oedomètre.

Les valeurs obtenues par consolidation sont plus fiables si les niveaux de contrainte, appliqués lors des essais correspondent aux contraintes réelles régnant à la profondeur de prélèvement. Autrement dit, la perméabilité doit être mesurée sur l'échantillon dans les mêmes conditions d'indice des vides (de porosité) et de contraintes effectives que celles qui existaient dans sa position in situ (Domenico et Mifflin, 1965).

#### II.2.8. APPROCHE STATISTIQUE DE LA PERMEABILITE

Au paragraphe II.1.1., il a été exposé comment la porosité ponctuelle d'un milieu poreux pouvait être considérée en tant que fonction aléatoire. La perméabilité introduite selon la loi de Darcy n'est pas une grandeur ponctuelle, et l'écoulement est régi en tout point du milieu poreux par les équations de Navier-Stokes (cfr. II.1.6.). C'est l'intégration spatiale de ces équations sur le milieu poreux (de géométrie très complexe) qui aboutit à la loi de Darcy (Matheron, 1967). On peut donc lier une perméabilité globale d'un volume de milieu poreux à la géométrie rencontrée dans ce volume. Cette caractérisation de la géométrie peut se faire de façon stochastique à partir de fonctions aléatoires d'autant plus nombreuses que la géométrie est complexe.

En pratique cependant, on constate que la variance de la variabilité spatiale de K est très élevée et que l'hypothèse de stationnarité (au sens statistique du terme, cfr chapitre V.) n'est pas applicable (Delhomme, 1976). D'autres hypothèses moins restrictives (hypothèse intrinsèque, cfr. chapitre V) peuvent néanmoins être utilisées permettant notamment le krigeage des valeurs de perméabilité (cfr. V). Hoeksema et Kitadinis (1985), dans un travail général de caractérisation de la perméabilité et de la transmissivité au sens statistique du terme, sont arrivés à la conclusion qu'elles étaient le plus souvent caractérisées par une distribution log normale.

## II.3. STOCKAGE EN MILIEU POREUX - NOTION D'EMMAGASINEMENT

### II.3.1. INTRODUCTION

L'équation de continuité (II.8.) ou de conservation de la masse de fluide dans un milieu saturé (cfr. II.1.5.) s'écrit comme suit :

$$\operatorname{div}(\rho.v) + \rho.q = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho.n) \quad (\text{II.31.})$$

Le deuxième membre de cette équation fait intervenir la variation temporelle de la masse de fluide stockée par unité de volume de milieu poreux. Il s'agit donc de caractériser la capacité de l'aquifère (milieu poreux) à stocker ou libérer un volume de fluide en fonction des pressions régnant dans la formation.

Dès à présent, il convient de remarquer les faits suivants :

- si la pression interstitielle est nulle (ou atmosphérique), on n'est pas en milieu poreux saturé mais à l'interface entre le milieu non-saturé et le milieu saturé : la surface libre. La capacité d'emménagement de l'aquifère libre dépendra principalement de la porosité efficace du milieu poreux (cfr. II.3.7.);
- s' il existe une pression interstitielle non nulle, cette capacité dépendra principalement des compressibilités du milieu poreux et du fluide (cfr. II.3.6.).

Avant de définir les coefficients d'emménagement des nappes aquifères, il nous faut donc rappeler brièvement la notion de contrainte effective.

### II.3.2. PRINCIPE DES CONTRAINTES EFFECTIVES

De nombreux auteurs ont contribué à l'élaboration et à la discussion de ce principe; citons notamment Terzaghi (1943), Skempton (1954, 1960), Bishop (1959, 1963), Geertsma (1957) et Verruijt (1980, 1984).

Considérons une section plane dans un milieu poreux saturé et une force normale à cette section. La répartition des contraintes obtenues dans les parties solides et liquides du milieu poreux peut s'exprimer explicitement comme suit :

$$\frac{\text{Force normale}}{\text{Surface totale}} = \frac{\Sigma(\text{forces "grain à grain"})}{\text{Surface totale}} + \frac{\Sigma(\text{forces fluide-fluide})}{\text{Surface totale}} \quad (\text{II.32.})$$

(de la section)

Exprimons les proportions de la surface totale de la section qui sont relatives aux contacts "grain à grain" et aux contacts "fluide-fluide" :

- contact solide (ou grain à grain) :  $N.S$
- contact fluide (ou fluide-fluide) :  $(1-N.S)$

avec  $N$  = nombre de contacts grain à grain / Surface totale  
 $S$  = surface moyenne des contacts grain à grain.

On obtient alors :

$$\frac{\Sigma(\text{forces grain à grain})}{\text{Surface totale}} = (\text{proportion de contact solide}) \times (\text{contrainte moyenne aux contacts grain à grain}) \quad (\text{II.33.})$$

et

$$\frac{\Sigma(\text{forces fluide-fluide})}{\text{Surface totale}} = (\text{proportion de contact fluide}) \times (\text{contrainte moyenne dans le fluide}) \quad (\text{II.34.})$$

L'équation (II.32.) peut alors s'écrire (figure II.17) :

$$\sigma = N.S \left( \frac{F_m}{S} + p \right) + (1-N.S).p \quad (\text{II.35.})$$

avec  $F_m$  = force moyenne appliquée aux contacts grain à grain en excluant toute composante due à la pression de fluide  
 $\sigma$  = contrainte totale.  
 $p$  = pression de fluide

L'équation (II.35.) se ramène à :

$$\sigma = N.F_m + p \quad (\text{II.36.})$$

et  $\sigma = \sigma' + p \quad (\text{II.37.})$

où  $\sigma' = N.F_m$  est définie comme la contrainte effective.

Telle qu'exprimée par les équations (II.36.) et (II.37.), la contrainte effective  $\sigma'$  est inutilisable en pratique car elle nécessiterait la connaissance de  $N$  et de  $F_m$ . D'autre part, il faut signaler qu'en établissant les équations (II.35.) à II.37.), les deux hypothèses suivantes ont été implicitement prises en compte (Bishop and Blight, 1963) :

- l'incompressibilité des grains du sol
- la contrainte de consolidation (qui contrôle l'aire de contact) est indépendante de  $p$ .

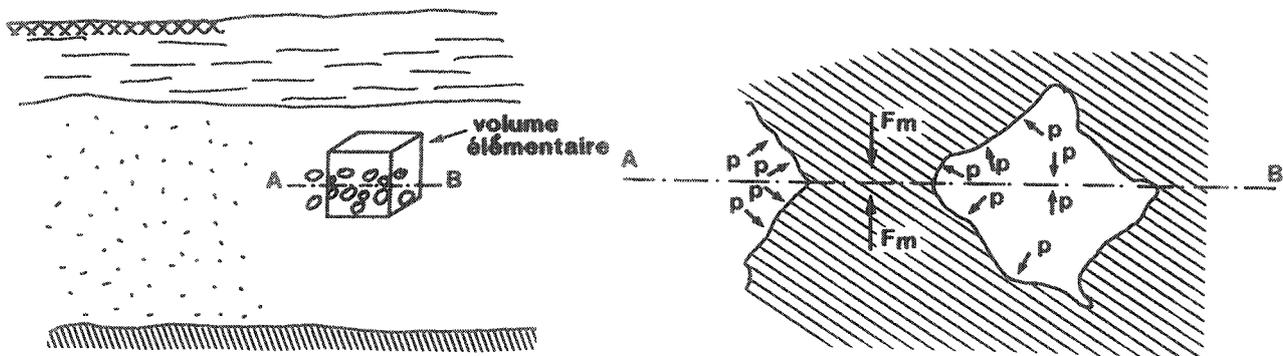


Figure II.17. : Volume élémentaire, coupe A-B et répartition des forces et de la pression dans un milieu poreux

Les géotechniciens (Terzaghi, 1943) attribuent à  $\sigma'$  une valeur telle que la variation des déformations volumiques d'un milieu poreux puisse être exprimée par :

$$d\epsilon_v = \alpha \cdot d\sigma' \quad (\text{II.38})$$

avec  $\alpha$  = coefficient de compressibilité volumétrique du milieu poreux par diminution de porosité.

Il s'agit d'un postulat, qui permet d'attribuer à l'effet de la seule contrainte effective, l'ensemble des déformations mesurées. Cette convention suppose que le comportement géomécanique du milieu poreux puisse être représenté de façon acceptable par le coefficient  $\alpha$  dont la valeur dépend des contraintes effectives :  $\alpha(\sigma')$ .

D'autre part, on sait qu'en réalité, les déformations volumiques mesurées ne sont pas seulement dues à la diminution de porosité mais également à la compressibilité des grains solides ( $\beta_s$ ) et à la compressibilité du fluide saturant ( $\beta$ ) :

$$d\epsilon_v = \alpha(d\sigma - dp) + \beta_s \cdot dp + \beta \cdot dp \quad (\text{II.39})$$

En combinant les équations (II.38.) et II.39.), on trouve l'expression conventionnelle de la contrainte effective :

$$d\sigma' = d\sigma - dp \left( 1 - \frac{\beta_s}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (\text{II.40.})$$

Cela suppose que le comportement géomécanique des grains solides et du fluide puissent être décrits de façon acceptable par les coefficients de compressibilité  $\beta_s$  et  $\beta$ .

Si on prend l'hypothèse supplémentaire d'un milieu poreux saturé et drainé (cas le plus courant dans la nature), la variation de contrainte totale est nulle :  $d\sigma = 0$ .

L'équation (II.40.) s'écrit :

$$d\sigma' = - dp \cdot \left( 1 - \frac{\beta_s}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (\text{II.41.})$$

Dans la plupart des cas traités, la compressibilité du fluide et des grains solides sont négligées par rapport à la compressibilité du milieu poreux et l'équation (II.41.) se ramène à une expression semblable à (II.37.) :

$$d\sigma' = - dp$$

et  $\sigma = \sigma' + p \quad (\text{II.42.})$

Remarque : Dans ses travaux, Biot (1941, 1956) considère que le rapport  $\frac{\beta_s}{\alpha}$  n'est pas négligeable. Les essais qu'il préconise

pour déterminer les paramètres dans ses théories élasto-plastiques et élastiques sont malheureusement non-conventionnels (Kingsburry, 1984). Considérant le problème 1D, ils peuvent cependant se ramener (Dassargues, 1989) à des essais oedométriques d'une part et à un essai déterminant la compressibilité du solide sans pore (grains) d'autre part. En négligeant la compressibilité de l'eau, il considère :

$$\sigma = \sigma' + \left( 1 - \frac{\beta_s}{\alpha} \right) \cdot p \quad (\text{II.43.})$$

Le facteur  $\left( 1 - \frac{\beta_s}{\alpha} \right)$  est souvent appelé "coefficient de Biot" (Fatt, 1959).

### II.3.3. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT SPECIFIQUE EN NAPPE CAPTIVE

Il nous faut développer le deuxième membre de l'équation (II.31.) qui représente la variation de masse de fluide stockée dans un milieu poreux saturé :

$$\frac{\partial(n \cdot \rho)}{\partial t} = n \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial n}{\partial t} \quad (\text{II.44.})$$

L'équation d'état du fluide s'écrit  $\rho = \rho(p, c, T)$ . En prenant comme hypothèse des conditions isothermes et une composition chimique homogène du fluide, on se ramène à  $\rho = \rho(p)$  et

$$n \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = n \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.45.})$$

En définissant  $\beta$ , coefficient de compressibilité du fluide tel que

$$\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \text{ à } c \text{ et } T \text{ constantes,}$$

on peut écrire :

$$n \frac{\partial \rho}{\partial t} = n \cdot \rho \cdot \beta \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.46.})$$

En exprimant la variation de la porosité en fonction du temps (cfr. Annexe 1, équation a.6.) et en reprenant les mêmes hypothèses qu'au paragraphe II.3.2., le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (II.44.) s'écrit :

$$\rho \cdot \frac{\partial n}{\partial t} = \rho \cdot \alpha \cdot (1-n) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.47.})$$

Remarquons une fois de plus qu'il nous a été nécessaire d'introduire des hypothèses sur le comportement géomécanique du milieu poreux par l'utilisation du coefficient  $\alpha$ . Le chapitre III traitera en détails des différents aspects de ce couplage écoulement-tassement.

En additionnant les deux termes repris aux équations (II.46.) et (II.47.), la variation temporelle de la masse de fluide stockée dans le milieu poreux saturé s'écrit par :

$$\frac{\partial (n \cdot \rho)}{\partial t} = \rho (n \cdot \beta + \alpha \cdot (1-n)) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.48.})$$

L'équation (II.31.), exprimant la conservation de la masse du fluide en milieu poreux saturé, devient :

$$- \operatorname{div} (\rho \cdot v) - \rho \cdot q = \rho \left( n \cdot \beta + \alpha \cdot (1-n) \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.49.})$$

La vitesse  $v$  intervenant dans l'équation (II.49.) est une vitesse absolue de filtration du fluide (au sens de la loi de Darcy) qui, jusqu'ici, supposait que la matrice solide était immobile. Exprimons cette vitesse en fonction de la vitesse relative microscopique du fluide et de la vitesse absolue microscopique du solide (équation a.11. de l'Annexe 2) :

$$v = n \cdot \left( v_{f.r} + v_{s.a} \right) \quad (\text{II.50.})$$

où  $v_{f.r}$  = vitesse relative microscopique du fluide

$v_{s.a}$  = vitesse absolue microscopique du solide

Par conséquent, l'équation (II.49.) peut s'écrire :

$$- \operatorname{div} (\rho \cdot n \cdot v_{f.r}) - \rho \cdot q = \rho \cdot (n \cdot \beta + \alpha (1-n)) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \cdot n \cdot v_{s.a}) \quad (\text{II.51.})$$

En exprimant l'équation de conservation de la masse de solide (Annexe 2), en supposant que le fluide est homogène et que l'E.V.R. peut être caractérisé par une seule valeur de porosité, le dernier terme de l'équation (II.51.) peut s'écrire :

$$\operatorname{div} (\rho \cdot n \cdot v_{s.a}) = \frac{\rho \cdot n}{(1-n)} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (\text{II.52.})$$

L'équation (II.51.) devient :

$$- \operatorname{div} (\rho \cdot n \cdot v_{f.r}) - \rho \cdot q = \rho \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{II.53.})$$

En l'écrivant par rapport aux hauteurs piézométriques, on obtient :

$$- \operatorname{div} (\rho \cdot n \cdot v_{f.r}) - \rho \cdot q = \rho^2 \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.54.})$$

Pour quantifier l'emménagement de fluide dans le milieu poreux pour une variation unitaire de hauteur piézométrique, écrivons ce que devient l'équation (II.54.) en conditions non-drainées, pour lesquelles la vitesse relative microscopique du fluide par rapport au solide ( $v_{f.r}$ ) s'annule.

On obtient :

$$I = -q = \rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.55.})$$

avec  $I = -q =$  volume d'eau ajouté par unité de temps et par unité de volume de milieu poreux ( $q$  est positif pour un débit sortant, cfr. II.1.5.).

Pour  $\frac{\partial h}{\partial t} = 1 \frac{[L]}{[T]}$ , on obtient l'expression du coefficient d'emménagement spécifique en milieu poreux saturé (nappes captives) :

$$S_s = \rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \quad [L^{-1}] \quad (\text{II.56.})$$

De nombreux auteurs (Cooper, 1966, De Wiest, 1966, Narasimhan & Kanehiro, 1980) ont discuté le fait de savoir si le coefficient d'emménagement spécifique en nappe captive était exprimé par sa forme sous-jacente à l'équation (II.49.), à savoir :

$$S_s = \rho \cdot g \cdot (\alpha \cdot (1-n) + n \cdot \beta) \quad (\text{II.57.})$$

ou par l'équation (II.56.). Il apparaît in fine, et comme démontré ci-dessus (Bredehoeft & Cooley, 1983, Bear & Corapcioglu, 1981) que ces expressions sont équivalentes, avec la même définition du coefficient  $\alpha$ , si ce n'est que l'expression (II.57.) utilisée par De Wiest (1966) suppose que le volume élémentaire considéré ne se déforme pas.

Rappelons que les hypothèses suivantes se sont avérées nécessaires :

- contrainte totale constante
- comportement géomécanique du milieu poreux représenté par  $\alpha$ , coefficient de compressibilité volumétrique du milieu poreux par diminution de porosité.  
De nombreux auteurs limitent la signification de ce coefficient au cas où les déformations et les contraintes sont uniquement verticales (Jacob, 1940)
- les déformations peuvent être considérées comme petites. Si ce n'est pas le cas, dans le cas de grandes déformations, on doit remplacer les dérivées partielles par rapport au temps en dérivées totales (approche Lagrangienne). Cette approche a été suivie par Gambolati (1968) pour le cas de l'écoulement et du tassement unidimensionnel vertical. Elle peut s'avérer nécessaire dans les études de subsidences et tassements très importants, dus à la présence de formations très compressibles.

Il apparaît que la valeur de  $S_g$  dépend de la valeur de  $\alpha$  ( $\gg n.\beta$ ), de  $\sigma'$  et de la contrainte effective de préconsolidation ( $\sigma'_{prec}$ ). Cette dépendance va fournir un des termes du couplage écoulement-tassement (cfr. chapitre III).

#### II.3.4. EQUATION GENERALE DE L'ECOULEMENT EN NAPPE CAPTIVE

En introduisant la définition du coefficient d'emménagement spécifique en milieu saturé (II.56.) dans l'équation (II.54.), on obtient :

$$-\text{div} \left( \rho.n.v_{f,r} \right) - \rho.q = \rho.S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.58.})$$

Considérons désormais comme vitesse de Darcy la vitesse de filtration (globale dans l'E.V.R.) relative par rapport au solide, c'est-à-dire :

$$v = n.v_{f,r} \quad (\text{II.59.})$$

Dès lors, si le fluide est supposé homogène dans l'espace malgré  $(\rho = \rho(p))$ , on écrit (II.58.) comme suit :

$$-\text{div } v - q = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.60.})$$

En y introduisant la valeur de  $v$  exprimée par les équations (II.14.), (II.15) et (II.16.), on trouve les expressions suivantes de l'équation générale de l'écoulement en nappe captive :

$$\text{div } \frac{k}{\mu} (\text{grad } p + \rho \cdot g \text{ grad } z) - q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.61.})$$

$$\text{div } (K \cdot \text{grad } h) - q = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.62.})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q_i = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.63.})$$

### II.3.5. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT EN NAPPE CAPTIVE ET EN NAPPE LIBRE

Le coefficient d'emmagasinement spécifique d'une nappe captive a été défini par l'équation (II.56.). Cette grandeur est relative au volume unitaire du milieu poreux. Moyennant une intégration sur l'épaisseur de l'aquifère (cfr. II.2.6.), on peut la ramener à la surface unitaire de l'aquifère. On obtient la définition du coefficient d'emmagasinement d'une nappe captive :

$$S = \int_{z_1}^{z_2} S_s \cdot dz \quad (\text{II.64.})$$

où  $z_1$ ,  $z_2$  sont les cotes de la base et du sommet de l'aquifère

$S$  est le volume de fluide libéré ou stocké par unité de surface de l'aquifère et pour une variation unitaire de la hauteur piézométrique (figure II.18.).

Par définition, dans le cas d'une nappe libre (cfr. II.2.6. et figure II.15.), au-dessus de la zone saturée se trouve une zone de milieu poreux non saturé (avec ou sans frange capillaire). Les variations de hauteur piézométrique induisent un mouvement de la surface libre de la nappe, ce qui va augmenter ou diminuer la quantité de fluide emmagasiné par saturation ou drainage du milieu poreux.

Par conséquent, l'emménagement de fluide dans le milieu poreux, pour une variation unitaire de hauteur piézométrique, va dépendre essentiellement de la porosité efficace.

En effet, comme défini précédemment (cfr. II.1.3.), la valeur de la porosité efficace va déterminer la quantité de fluide libéré par drainage gravitaire ou inversément, stocké par remplissage des pores (figure II.18.). Donc, malgré une définition similaire, l'emménagement des nappes captives et libres correspond pour une large part à des processus très différents : le drainage en nappe libre et l'expulsion en nappe captive, pour un abaissement des hauteurs piézométriques (figure II.18.).

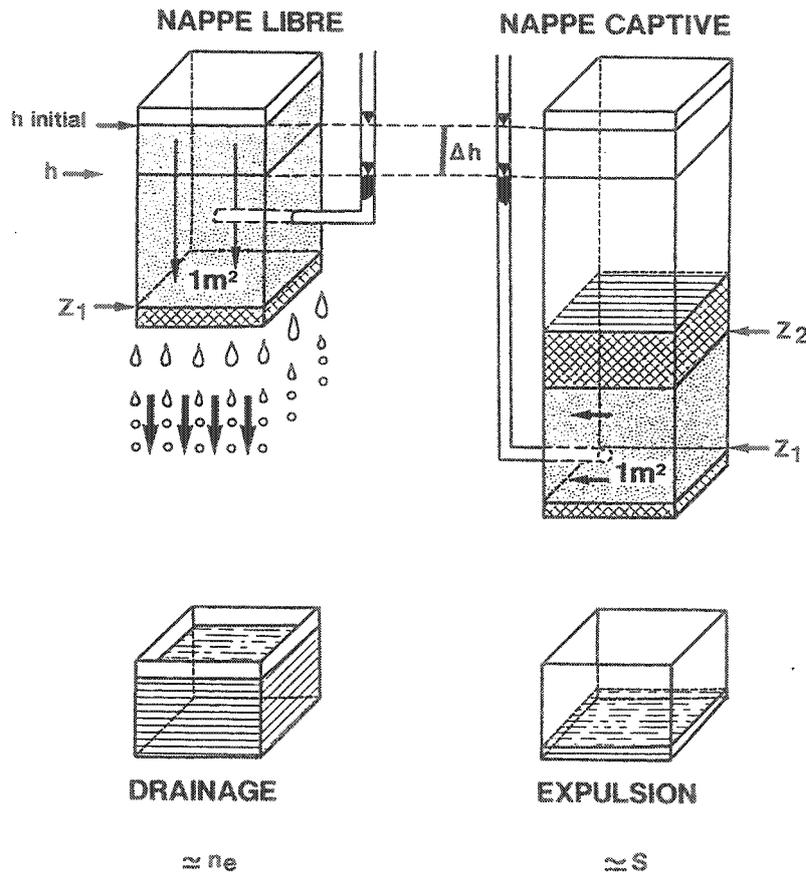


Figure II.18. : Volume d'eau libérée en nappe libre et en nappe captive (d'après Castany, 1967).

Pour être complet, il faut ajouter qu'à tout mouvement de la surface libre correspond des changements de pression dans l'aquifère. Ces changements de pressions, tout comme en conditions de nappe captive (excepté que la contrainte totale n'est pas constante), provoquent une libération ou un emmagasinement de fluide de par la compressibilité du milieu poreux.

La définition du coefficient d'emmagasinement en nappe libre est donc la suivante :

$$S = n_e + \int_{z_1}^h S_s \cdot dz \quad (\text{II.65.})$$

où  $S_s$  est le coefficient d'emmagasinement spécifique du milieu poreux saturé.

Le plus souvent, ce deuxième terme est négligé par rapport à  $n_e$ . Ce faisant, on néglige la compressibilité de l'eau, des grains solides et du milieu poreux dans son ensemble. Les valeurs courantes de  $n_e$  dans les terrains aquifères (reprises au tableau II.1., II.1.2.) sont comprises entre 0.03 et 0.35 alors que les valeurs du coefficient d'emmagasinement spécifique des nappes captives sont très rarement supérieures à  $1.10^{-4} \text{ (m}^{-1}\text{)}$ . Il faudrait donc des aquifères libres dont la hauteur saturée serait considérable pour que le deuxième terme de l'équation (II.65.) soit pris en compte.

### II.3.6. EQUATION GENERALE DE L'ÉCOULEMENT EN NAPPE LIBRE

Vu la définition du coefficient d'emmagasinement, et en vue d'écrire l'équation de l'écoulement en milieu poreux pour des nappes libres, il est nécessaire de considérer l'intégration sur la hauteur saturée de l'aquifère (cfr. II.2.6.) et donc que les termes  $\frac{\partial h}{\partial z}$  soient nuls. En fait, on ne néglige pas totalement toutes les composantes verticales de l'écoulement puisqu'au niveau de la surface libre, on considère le drainage vertical ou l'accrétion verticale du fluide dans les pores du milieu.

L'équation des écoulements en milieu poreux, dans le cas d'une nappe libre, peut s'écrire (de Marsily, 1986) :

$$\text{div} \left[ \left( \int_{z_1}^h K \cdot dz \right) \cdot \underline{\text{grad}h} \right] - q = n_e \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.66.})$$

## II.3.7. MESURES DU COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT

### Détermination in situ

Comme pour la perméabilité, la détermination in situ du coefficient d'emmagasinement se fait le plus souvent par l'interprétation d'essais de pompages par des solutions analytiques. Des mesures du rabattement, en d'autres points qu'au puits de pompage, sont indispensables pour la détermination précise du coefficient d'emmagasinement. Les méthodes analytiques utilisées pour l'interprétation des essais et pour le calcul du coefficient d'emmagasinement sont celles de Theis (1935) et Jacob (1952).

Pour tenir compte de l'infiltration en provenance des épontes, les méthodes de Hantush (1966), de Boulton (1975), de Neuman et Witherspoon (1972) sont également proposées. Ces méthodes sont reprises dans les traités d'hydrogéologie (De Marsily, 1986, Castany, 1963 et 1967, Monjoie, 1981, ...). Un résumé du principe et du mode d'application de ces méthodes est exposé dans le cadre de l'étude hydrogéologique du sous-sol de Shanghai (Dassargues, 1989).

Dans le cas des nappes libres, le coefficient d'emmagasinement est approximé par la porosité efficace du milieu poreux. Comme signalé précédemment (cfr. II.1.2.), celle-ci peut être mesurée in situ par différents types de mesures diagraphiques.

### Détermination sur échantillons

Pour les nappes libres, le coefficient d'emmagasinement est déterminé à partir des mesures de porosité efficace sur échantillons (cfr. II.1.2.).

Pour les nappes captives, le coefficient d'emmagasinement spécifique est déterminé par des essais de consolidation drainés. Sans entrer dans les détails du couplage écoulement-tassement évoqué précédemment (cfr. II.1.3.) et décrit en détail au chapitre III, il faut signaler que la valeur de  $S_s$  est trouvée par la détermination de  $\alpha$ . En pratique, le plus souvent, il s'agit d'essais oedométriques où on travaille avec les hypothèses suivantes :

- contrainte totale constante (essai drainé)
- déformations latérales empêchées et négligées
- état uniaxial de contraintes et de déformations.

De plus, les compressibilités du fluide et des grains solides sont supposées négligeables par rapport à  $\alpha$ . Par conséquent, l'équation (II.56.) se réduit à :

$$S_s = \rho \cdot g \cdot \alpha \quad (II.67.)$$

D'une façon générale, on remarque que les valeurs obtenues à partir d'essais de pompages sont supérieures à celles obtenues sur échantillons par des essais de consolidation (Domenico & Mifflin, 1965).

Dans le cas de sédiments meubles, ce type de comparaison est néanmoins difficilement réalisable dans la pratique, car la prise d'échantillons non-remaniés dans des couches sablo-silteuses aquifères est très malaisé et, d'autre part, la mesure précise de hauteurs piézométriques dans les couches argileuses lors d'essais de pompage est également très difficile.

#### II.3.8. APPROCHE STATISTIQUE DU COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT

Le coefficient d'emmagasinement peut également être considéré comme une variable aléatoire du milieu poreux étudié. En pratique cependant, beaucoup moins de données et d'informations relatives au coefficient d'emmagasinement sont disponibles. L'étude de Hoeksema et Kitadinis (1985) a montré que, tout comme pour les perméabilités et transmissivités, la distribution des coefficients d'emmagasinement serait log-normale. De plus, elle montrerait, dans la plupart des cas, un pur effet de pépite (variogramme horizontal à la valeur de l'effet de pépite). Le coefficient d'emmagasinement pourrait donc être assimilé à une variable purement aléatoire sans aucune structure spatiale (Dagan, 1989).

## II.4. METHODES NUMERIQUES UTILISEES DANS LES MODELES HYDROGEOLOGIQUES D'ECOULEMENT

### II.4.1. INTRODUCTION

Les équations différentielles aux dérivées partielles, décrivant l'écoulement de fluide en milieu poreux, sont établies. Pour résoudre ces équations, appliquées à des cas concrets, il est presque toujours nécessaire de recourir à des méthodes numériques plutôt que d'utiliser des solutions analytiques. Les principales raisons de cet usage sont (de Marsily, 1986, Bear & Verruijt, 1989) :

- . les conditions aux frontières peuvent être variables dans le temps, inégales, de géométrie complexe et irrégulière, alors que pour les solutions analytiques le milieu doit être considéré comme infini ou semi-infini, la "méthode des images" ne pouvant être utilisée de façon intensive sur des cas concrets;
- . les paramètres intervenant dans l'équation peuvent être sources de non linéarités, les solutions analytiques ne permettant généralement pas d'en tenir compte;
- . les propriétés des différentes formations formant le milieu poreux peuvent varier fortement dans l'espace, une hétérogénéité très marquée peut être constatée et être prise en compte, alors que les solutions analytiques supposent le milieu homogène et de géométrie très simple;
- . les sollicitations externes du système (infiltrations, puits, sources, venues d'eau, ...) doivent pouvoir être représentées le plus exactement possible et éventuellement par d'autres moyens que des points, des lignes où une intégrale sur un intervalle;
- . parfois, des solutions analytiques peuvent être trouvées mais leurs expressions sont très complexes et leur programmation demande alors beaucoup plus d'efforts numériques et de temps ingénieur et CPU.

Devant un problème concret à résoudre, l'utilisateur se trouve donc devant les choix suivants :

- quelle méthode numérique utiliser afin de décrire le plus précisément possible (en rapport avec le degré de précision demandé) et à moindre coût, le système d'écoulement dans le réservoir souterrain à étudier ?
- une fois la méthode choisie sur base de ces caractéristiques s'adaptant de façon adéquate au problème à traiter, se pose un deuxième choix concernant le code à utiliser. Idéalement, ce dernier choix devrait être réalisé en toute rigueur, selon la précision des résultats à obtenir plutôt qu'en fonction des disponibilités locales.

La présentation et la description détaillée des différentes méthodes numériques utilisées n'est pas l'objet de ce travail. Un résumé succinct de chaque méthode est repris ci-après.

Le tableau II.2. reprend schématiquement des appréciations généralement admises par les utilisateurs dans les domaines de l'hydrogéologie et du "reservoir engineering", concernant les différents aspects d'utilisation des méthodes numériques le plus souvent mises en oeuvre. Il ne s'agit là nullement d'un tableau de référence. Bien que forcément très subjectif, il reflète néanmoins l'opinion des utilisateurs de ces méthodes.

Méthode numérique	Accessibilité de la théorie	Puissance, Généralité	Facilité d'utilisation	Elégance mathématique
Différences finies	++	+	++	0
Éléments Finis	-	++	++	+
Éléments frontières	--	0	-	++
Éléments analytiques	-	+	+	++

Tableau II.2. : Comparaison des différentes méthodes numériques d'après Verruijt (communication orale en 1990)  
 (++, très aisée, très bonne)  
 (+, aisée, bonne)  
 (0, moyenne)  
 (-, difficile, mauvaise)  
 (--, très difficile, très mauvaise)

#### II.4.2. PRINCIPES DES DIFFERENTES METHODES

##### Méthode des différences finies

Une grille ou un assemblage de cellules est ajusté au mieux à l'ensemble du domaine. En hydrogéologie, les cellules sont le plus souvent rectangulaires (ou parallépipèdes rectangles). En "reservoir engineering" par contre de nombreuses autres formes ont été développées permettant de tenir compte de géométries plus complexes (cfr chapitre IV). Ces derniers développements pourraient être aisément introduits en hydrogéologie. La dimension des cellules est choisie en fonction de la précision voulue. La valeur numérique de la hauteur piézométrique en chaque point central des cellules est considérée comme représentant la moyenne des valeurs dans chaque cellule. De même, les paramètres sont introduits par valeur moyenne, équivalente, représentative de chaque cellule. A partir de là,

l'approximation par différences finies de l'équation différentielle consiste à remplacer les dérivées spatiales et temporelles par des différences finies. Concernant la différenciation du temps, les principaux schémas utilisés sont les schémas explicite, implicite et de Crank-Nicholson correspondant à des valeurs du paramètre d'intégration temporelle respectivement de  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$  et  $\theta = 1/2$ .

De nombreux auteurs décrivent avec soin la méthode des différences finies avec, comme application, la modélisation des aquifères souterrains : de Marsily (1986), Prickett (1975), Remson et al. (1971), Wang & Anderson (1982).

La méthode est facile à comprendre et à programmer. En général, on considère qu'elle est suffisante pour traiter des problèmes régionaux 1D, 2D ou quasi 3D multicouches pour lesquels des degrés de précision moyens sont demandés.

Pour les problèmes plus précis, totalement 3D ou locaux, les restrictions géométriques sur la forme et la disposition des cellules (parfois gigognes dans certains codes) empêchent son utilisation. L'anisotropie ne peut être prise en compte que parallèlement aux côtés des cellules et aux axes principaux. Les méthodes traditionnelles des différences finies ne conviennent pas pour traiter les problèmes de transport, car une dispersion numérique importante est créée, due au fait du centrage des points d'intégrations (Biver, 1990).

#### Méthode des éléments finis

Le domaine est décomposé en "éléments" 2D ou 3D de formes diverses : triangles, quadrilatères ou autres. Les paramètres sont introduits par valeur moyenne, équivalente, représentative pour tout l'élément.

Dans chaque élément, la variable inconnue  $h(x, y, z, t)$  peut être exprimée à partir de fonctions d'interpolations linéaires ou paraboliques, lesquelles s'expriment à partir des coordonnées des noeuds. Le champ complet est substitué par un nombre fini de champs partiels, liés par des conditions de continuité, exprimées aux noeuds. La solution approchée  $h(x, y, z, t)$  est construite à partir d'une combinaison linéaire de toutes les fonctions élémentaires. Pratiquement, elle est obtenue en exprimant de façon approchée (résidus pondérés, minimalisation d'une fonctionnelle) que les  $h(x, y, z, t)$  satisfont l'équation différentielle de l'écoulement (en y incluant les conditions aux frontières). Les schémas d'intégration temporelle les plus utilisés sont ceux de Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ) et de Galerkin ( $\theta = 2/3$ ). Pour plus de détails sur l'application de la méthode des éléments finis en hydrogéologie, on peut consulter : Remson et al. (1971), Pinder & Gray (1977), Wang et Anderson (1982), Bear & Verruijt (1987), de Marsily (1986), ...

Nettement moins facile à comprendre et à programmer, la méthode des éléments finis est beaucoup plus flexible géométriquement en raison de l'utilisation d'éléments finis de toutes formes et de toutes tailles (Charlier, 1987).

Les formes des frontières, les hétérogénéités et les sollicitations extérieures sont ainsi représentées de façon plus précise. La méthode permet également de traiter le problème des frontières mobiles (surface libre d'un aquifère), toutes les directions d'anisotropie et les hétérogénéités très marquées.

La méthode des éléments finis est donc très bien adaptée pour traiter aussi bien les problèmes régionaux que locaux (hydrogéologie du génie civil) où les formes des frontières et des hétérogénéités prennent une grande importance.

Elle est plus souple que les différences finies pour traiter les problèmes de transport, car elle permet d'appliquer, plus facilement, des techniques de décentrage des points d'intégration, réduisant de la sorte la dispersion numérique des résultats (Biver, 1990).

#### Méthode des éléments frontières

Le domaine est divisé en régions de mêmes caractéristiques hydrodynamiques, les frontières entre régions passent par tous les points où des valeurs sont imposées. Dans les régions, des solutions continues ou analytiques simples (appliquées à des cas de sollicitations simples) sont exprimées pour transformer les équations différentielles en équations intégrales équivalentes. Ces dernières contiennent les valeurs des variables aux extrêmes de la zone d'intégration (frontières de la région). Chacune de ces équations exprime la contribution de la région sur ses frontières. Le système d'équation est obtenu en réalisant l'assemblage de ces contributions sur les frontières, tout en satisfaisant les conditions imposées aux limites (sur les parties concernées de la frontière), au moins en moyenne.

La méthode est de plus grande complexité mathématique et, du point de vue de l'utilisation, ce n'est que très récemment que des codes complets et d'emploi relativement aisé sont apparus pour des études relatives aux réservoirs souterrains. La méthode est très efficace en terme de temps CPU consommé et la précision des calculs n'est pas influencée par la grandeur des zones discrétisées, ces dernières peuvent être de toutes tailles, y compris semi-infinies.

Si l'hétérogénéité du domaine est grande, l'obligation de définir de nombreuses régions de petites dimensions lui supprime tout avantage par rapport aux éléments finis. Bien souvent, le manque de préprocesseurs permettant l'introduction aisée des données rend la méthode d'une lourdeur rédibitoire. En théorie, la combinaison des méthodes des éléments finis et des éléments frontières dans un même code devrait permettre de bénéficier d'encore plus de souplesse : distinction d'éléments de toutes formes et de toutes tailles et grandes régions pouvant être semi-infinies. Les codes de ce type, disponibles actuellement, sont encore très expérimentaux et désservis par le manque de préprocesseurs adaptés. Pour une description détaillée de la méthode des éléments frontières, on consultera : Brebbia (1978), Lin & Liggett (1979), Banerjee & Butterfield (1981).

### Méthode des éléments analytiques

Développée par Strack (1987), elle consiste à résoudre tout d'abord l'équation différentielle analytiquement dans des régions considérées homogènes. Cependant, dans ce cas ci, le principe de superposition est appliqué pour trouver la solution d'un problème exprimé comme la somme de solutions de base, chacune avec un certain nombre de paramètres pouvant être inconnus. Ces paramètres sont ensuite déterminés par les conditions aux frontières. Cela mène à un système d'équations algébriques. L'avantage majeur réside dans l'expression de la solution sous forme analytique avec la possibilité d'obtenir aussi bien une réponse globale qu'une réponse détaillée à certains endroits, et cela à différentes échelles.

Par contre, vu son principe combinant des solutions analytiques parfois déjà très sophistiquées, la programmation de cette méthode demande une sérieuse expérience dans la recherche de ces solutions analytiques. De même que pour les éléments frontières, l'hétérogénéité très importante du domaine, assortie à l'irrégularité des frontières et leurs éventuelles variations dans le temps retire à cette méthode ses principaux avantages par rapport à la méthode des éléments finis.

Néanmoins, il apparaît qu'elle est promise à un bel avenir en hydrogéologie si des codes bien adaptés aux besoins de l'utilisateur sont créés.



### III. INTERACTIONS ENTRE PARAMETRES, NON LINEARITES ET COUPLAGES

#### III.1. PHENOMENES COUPLES AUX ECOULEMENTS, EN MILIEU POREUX SATURE

La recherche de nouvelles lois à introduire dans les modèles, afin de représenter au mieux les processus réels que l'on veut simuler, ne peut s'envisager sans tenir compte des interactions existant entre les différents phénomènes physiques et physico-chimiques s'opérant dans le milieu poreux. Ces derniers peuvent être classés en 4 grandes catégories de processus (Dassargues & al., 1989) :

- les écoulements en milieu poreux,
- la géomécanique des terrains meubles et rocheux,
- les phénomènes physico-chimiques dans l'ensemble matrice-fluide,
- le transport en milieu poreux.

Les interactions entre ces 4 types de processus vont s'exprimer en termes de couplages et de non linéarités des paramètres. Selon les circonstances et le degré de précision désiré, certains couplages sont considérés comme indispensables et d'autres peuvent être négligés sans affecter, de manière significative, la précision du modèle.

En résumé, les différentes interactions possibles sont illustrées par le schéma de la figure III.1. :

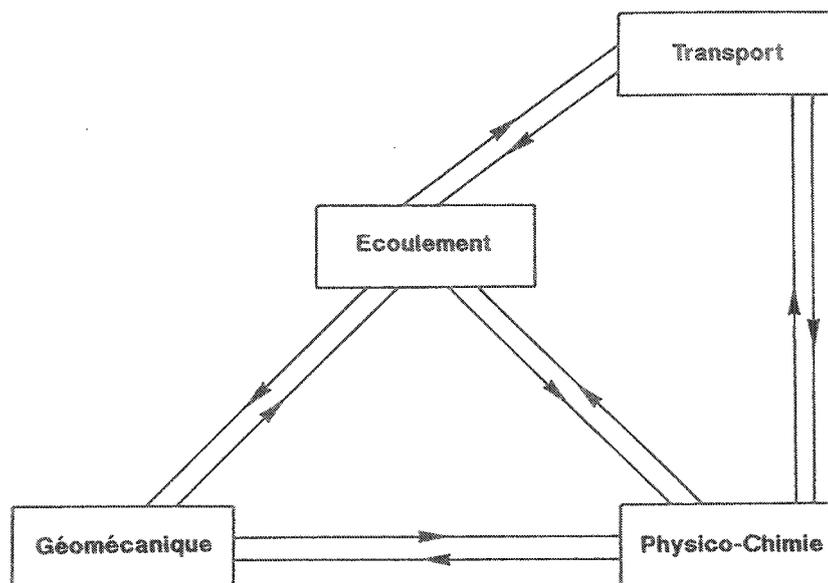


Figure III.1. : Différents processus et interactions réciproques entre ceux-ci.

- Interactions géomécanique ↔ écoulements : les déformations d'un milieu poreux, par diminution du volume des pores ou par fermeture/ouverture des fissures, vont provoquer des variations des paramètres de l'écoulement; ce dernier, modifié, va à son tour influencer l'état de contrainte règnant dans le milieu.
- Interactions physico-chimie ↔ écoulements : les phénomènes de coalescence, de recristallisation, de dissolutions, d'adsorption/désorption... provoqués par les conditions physico-chimiques de l'ensemble fluide saturant plus matrice, vont changer les valeurs de la porosité et de la perméabilité du milieu poreux, ce faisant les écoulements sont modifiés, provoquant d'autres conditions physico-chimiques (i.e. réduction ou augmentation du flux de fluide saturant).
- Interactions physico-chimie ↔ géomécanique : les phénomènes physico-chimiques (décrits ci-avant) sont responsables du fluage de réservoirs souterrains en terrains meubles et de modifications de résistances aux contraintes dans les terrains rocheux. Après déformation, les conditions physico-chimiques sont modifiées (i.e. par augmentation de la pression dans les pores).
- Interactions transport ↔ écoulements : les conditions de transport d'une substance polluante au sein de la phase fluide sont directement influencées par l'écoulement de cette phase fluide dans le milieu poreux et à l'inverse, le transport d'une substance peut affecter les conditions d'écoulement (i.e. modification de l'écoulement en nappe salée par l'influence de la masse volumique du fluide).
- Interactions transport ↔ physico-chimie : les paramètres intervenant dans les différents processus du transport (dispersion, diffusion, adsorption/désorption...) sont étroitement liés aux conditions physico-chimiques règnant dans le milieu poreux. D'autre part, l'apport d'une substance transportée par la phase fluide peut modifier considérablement les conditions physico-chimiques prévalant dans le milieu.

Ce bref aperçu des multiples interactions pouvant entrer en ligne de compte, montre que pour rendre possible la réalisation de modèles mathématiques intégrant plusieurs processus et quelques-unes des interactions entre ceux-ci, d'importantes recherches expérimentales et numériques sont et seront encore nécessaires, touchant à des domaines très interdisciplinaires.

Plus modestement, dans le cadre de ce travail, nous nous limiterons à aborder les interactions et couplages concernant les écoulements en milieu poreux et la géomécanique des terrains meubles. Le cas d'étude de la subsidence de Shanghai illustrera (chapitre VII) l'application des théories exposées ci-après.

### III.2. COUPLAGE ET NON LINEARITE DANS LES PROBLEMES ECOULEMENT-TASSEMENT

#### III.2.1. MECANISMES DE LA SUBSIDENCE DUE AUX POMPAGES

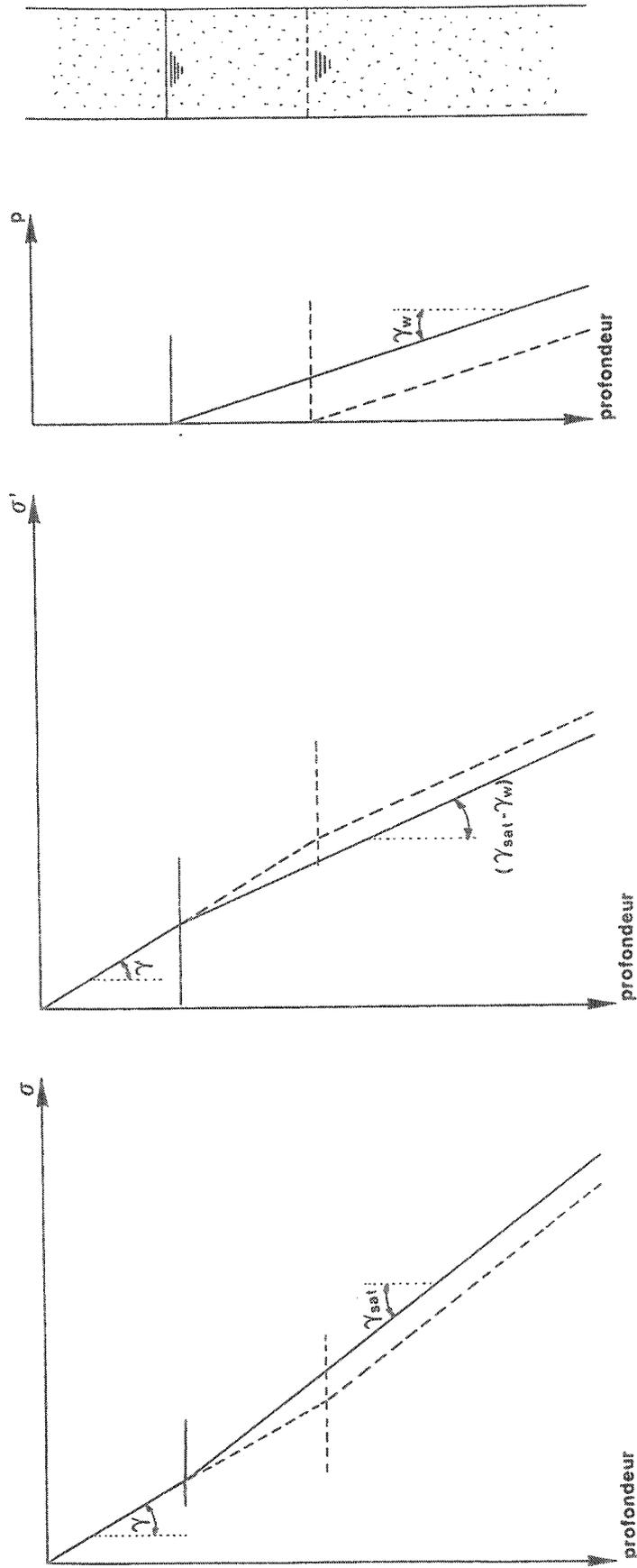
La nécessité d'étudier de façon détaillée les interactions entre les écoulements et les tassements en milieu poreux, vient principalement des phénomènes de subsidence artificielle qui sont dus à l'extraction d'un liquide du sous-sol. Quel que soit le fluide pompé (huiles, gaz naturel, eau, vapeur), les principes de la subsidence induite restent identiques (Dassargues, 1989). Seules les caractéristiques et les dimensions des réservoirs changent : roches indurées ou sédiments meubles, perméabilités et porosités réduites ou importantes, grande ou petite profondeur d'enfouissement (contraintes et contraintes de préconsolidation), pressions de fluide élevées ou faibles.

En appliquant le principe de Terzaghi, on peut exprimer simplement les contraintes créées par l'abaissement de la surface piézométrique d'une nappe libre et d'une nappe captive.

Dans le cas de la nappe libre (figure III.2.), la baisse du niveau piézométrique crée une baisse de pression d'eau dans le milieu poreux saturé, provoquant une augmentation de la contrainte effective et une diminution de la contrainte totale.

Dans le cas d'une nappe captive, dans un premier temps la dépression provoquée dans l'aquifère ne s'est pas encore propagée à travers le semi-perméable (figure III.3.) et les dépressions sont compensées totalement par l'augmentation correspondante de la contrainte effective. La contrainte totale reste inchangée. Après un temps suffisamment long pour que la dépression (ou qu'une partie de celle-ci) ait eu le temps de traverser le semi-perméable (figure III.4.), cette dépression est alors compensée par une diminution croissante de la contrainte totale et une augmentation de la contrainte effective. A l'équilibre (après un temps qui peut être infiniment long), la situation serait similaire à celle obtenue en nappe libre. On peut remarquer, que l'hypothèse (très souvent admise) d'une contrainte totale constante n'est acceptable que s'il y a réalimentation par le dessus ou que si le temps de propagation de la dépression d'eau à travers le semi-perméable est très grand par rapport à la durée de prise en considération dans l'étude. Le caractère transitoire des phénomènes a ici une grande importance puisque sans même parler de tassements secondaires, la consolidation primaire du milieu poreux est activée par la baisse de pression interstielle jusqu'à ce que l'équilibre hydrostatique soit atteint.

Physiquement, l'évolution de la structure des argiles pendant la consolidation fait en sorte que les dimensions des pores se réduisent et que la porosité d'ensemble diminue. On remarque (Delage & Lefebvre (1984), Rieke & Chilingarian (1974), Schroeder (1989)) le développement d'une certaine anisotropie structurale, les feuillets des minéraux argileux s'orientant perpendiculairement à la contrainte appliquée (figure III.5.).



——— t<sub>0</sub> (initialement)  
 - - - - - t ( finalement)

Figure III.2. : Evolution de la contrainte totale et de la contrainte effective en fonction de la profondeur, lors de la baisse du niveau piézométrique en nappe libre.  
 $\gamma_{sat}$  = poids volumique du milieu poreux saturé  
 $\gamma_w$  = poids volumique de l'eau  
 $\gamma$  = poids volumique apparent du milieu poreux

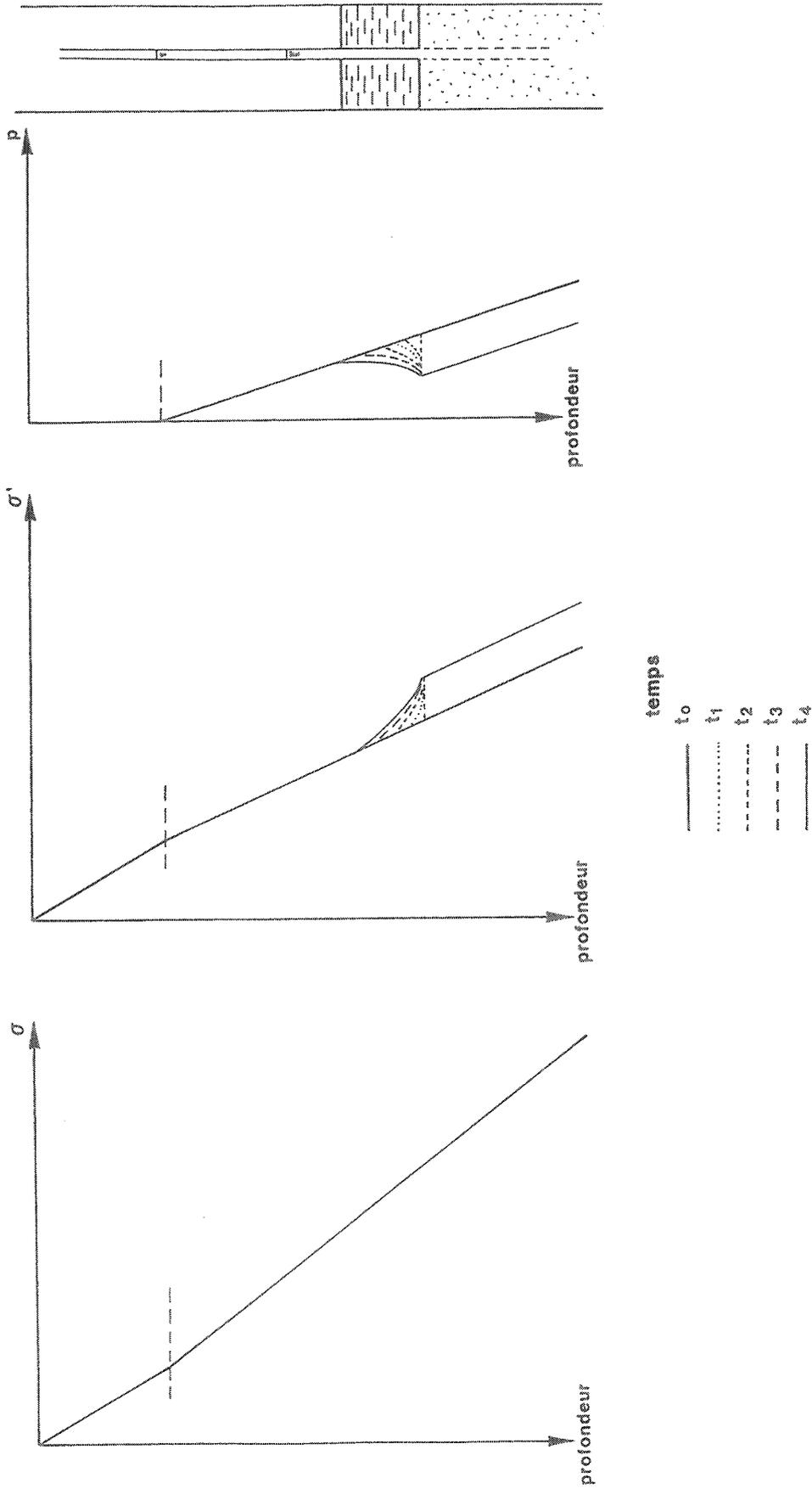
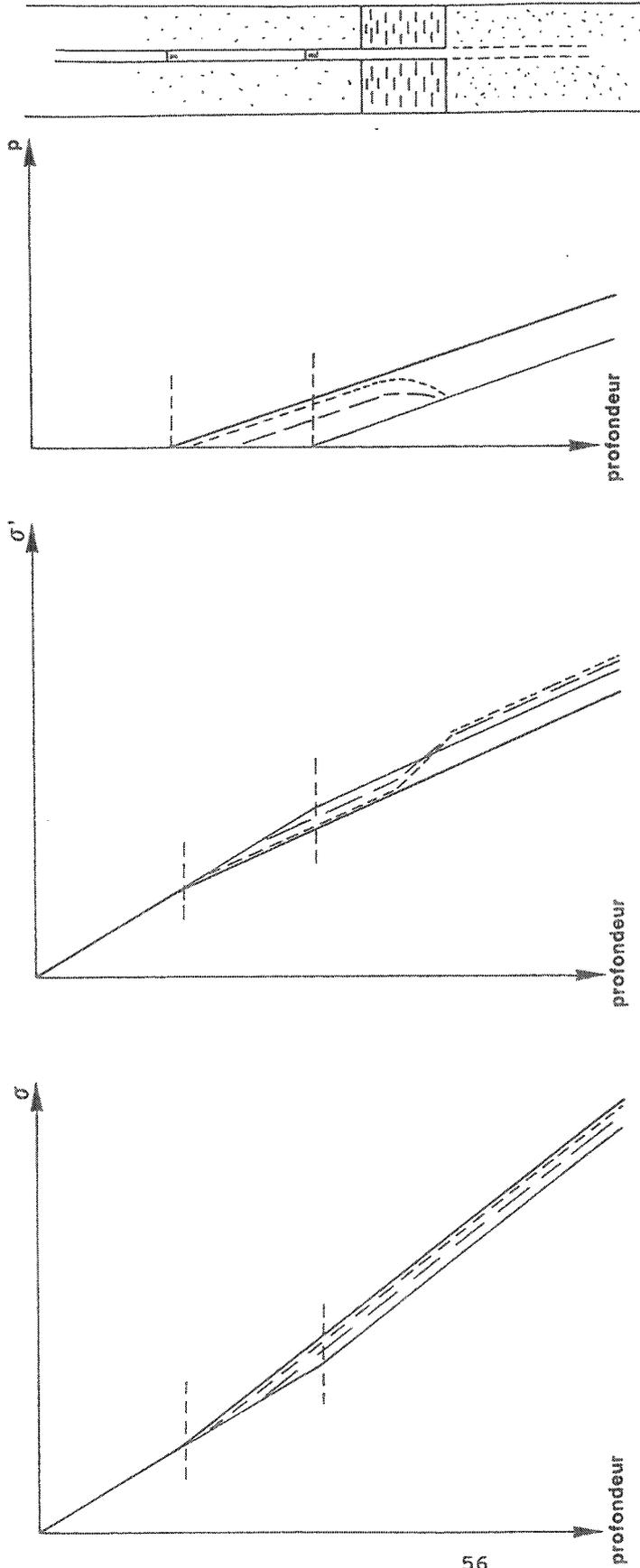


Figure III.3. : Evolution de la contrainte totale et de la contrainte effective en fonction de la profondeur, lors de la baisse du niveau piézométrique en nappe captive (la dépression n'a pas encore traversé totalement le semi-perméable).



temps

$t_0$  ———  
 $t_5$  - - - -  
 $t_6$  - - - -  
 $t_7$  ———

Figure III.4. : Evolution de la contrainte totale et de la contrainte effective en fonction de la profondeur, lors de la baisse du niveau piézométrique en nappe captive (la dépression a eu le temps de traverser le semi-perméable).

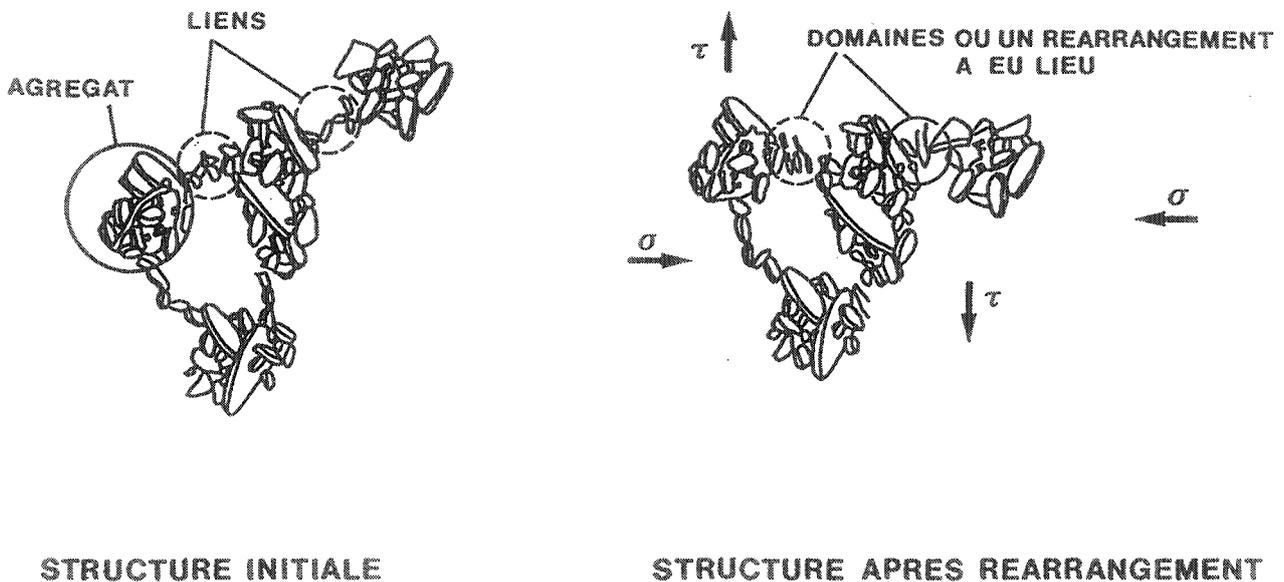


Figure III.5. : Orientation de feuillets argileux perpendiculairement à la contrainte subie (d'après Schroeder, 1989).

### III.2.2. ELEMENTS DE RHEOLOGIE DES MILIEUX POREUX MEUBLES

Dans les études de subsidence, le comportement mécanique des terrains doit être idéalisé en terme de modèles mécaniques existants. Les hypothèses simplificatrices que l'on prend, amènent inévitablement à des résultats approchés. En pratique, ces approximations peuvent être acceptées, selon la précision désirée et le plus souvent selon le degré de confiance que l'on peut accorder aux données.

De façon générale, la déformation du milieu poreux saturé peut être considérée comme une combinaison des effets de la déformation des grains solides, du réarrangement de ceux-ci et de la compressibilité éventuelle du fluide. Comme signalé précédemment (cfr. II.3.), la compressibilité du fluide et celle des grains solides seront négligées par rapport à la compressibilité du squelette du milieu poreux dans son ensemble (par réarrangement des grains). Il est supposé, en général, que la déformation de ce squelette suit des lois élastiques, plastiques, viscoélastiques ou des combinaisons de celles-ci. En élasticité, linéaire (loi de Hooke) ou non, la déformation est toujours réversible.

Le plus souvent, on considère que la plasticité n'intervient qu'après un "point critique" à partir duquel des déformations irréversibles sont constatées.

Les tassements secondaires ou tassements différés dans le temps doivent dans certains cas être pris en compte; on les introduit souvent par de la viscosité.

Les modèles élastiques, plastiques et visqueux peuvent être combinés en série ou en parallèle, de façon multiple de manière à reproduire le comportement géomécanique complexe du milieu poreux.

A ce choix d'un modèle rhéologique, s'ajoute le problème de la description 1D ou 3D des phénomènes. La décision sera prise en fonction des essais dont on dispose (oedomètres ou triaxiaux) et de la précision des résultats à obtenir.

### III.2.3. SYNTHESE DES TRAVAUX ANTERIEURS

Depuis de nombreuses années, les hydrogéologues et les géotechniciens ont étudié les tassements induits par la diminution des pressions d'eau dans les formations poreuses du sous-sol. Le principe des contraintes effectives (cfr. II.3.2.) ainsi que les travaux de Biot ont permis l'étude détaillée de l'influence des variations de pression d'eau sur la consolidation d'un milieu poreux compressible. L'expression exacte du coefficient d'emménagement spécifique en fonction de la compressibilité du milieu poreux, de l'eau et des grains solides (cfr. II.3.3.) permet également de déduire le lien étroit entre les écoulements et les tassements provoqués, ce qui conduit à mieux comprendre la problématique des subsidences dues au pompage intensif d'eau souterraine.

Au départ, le coefficient de perméabilité ( $K$ ) et le coefficient de compressibilité ( $\alpha$ ) du milieu poreux étaient considérés constants durant la consolidation. Les solutions analytiques de Hantush (1960) et de Neuman & Witherspoon (1969), calculant les flux et la propagation des variations de pressions dans des systèmes de nappes captives séparées par des aquitards peu perméables, sont basées sur la non-variation des  $K$  et  $S_s$  des couches aquifères et des aquitards. Objectivement, ces paramètres ne peuvent être considérés comme constants dans des horizons semi-perméables et compressibles, car ils sont dépendants de la porosité ou de la compressibilité du milieu poreux et ces dernières varient avec l'indice des vides. Lambe & Whitman (1969) ont montré que la perméabilité pouvait varier de façon non négligeable et non linéaire durant la consolidation.

Donc, outre le choix de la loi géomécanique 1D ou 3D représentant au mieux le comportement rhéologique des milieux poreux, de nombreux auteurs ont comparé les répartitions de contraintes effectives et degrés de consolidation, variations de perméabilité et de compressibilité, aux résultats obtenus classiquement par la théorie de Terzaghi (1943).

Les principaux types de modèles existants sont les suivants (Corapcioglu, 1981) :

- les modèles empiriques,
- les modèles utilisant la notion de demi-espace de terrain élastique,
- les modèles basés sur des lois constitutives élastiques,
- les modèles visco-élastiques,
- les modèles intégrant les déformations plastiques,
- les modèles calculant les déformations horizontales,
- les modèles basés sur des lois expérimentales.

Vu le comportement d'élasticité non linéaire et de mise en plasticité progressive des argiles, et dans une moindre mesure, des sables, cette catégorie de modèles basés sur des lois expérimentales, est une des plus fiables. Des lois élasto-visco-plastiques 1D ou 3D peuvent être établies à partir de données expérimentales provenant de divers essais géomécaniques. En fonction du type de loi constitutive que l'on veut définir (paramétriser), des chemins de contrainte plus ou moins élaborés seront appliqués durant les essais.

#### III.2.4. EQUATION COUPLEE ET HYPOTHESES

Traditionnellement, pour établir les équations différentielles décrivant les écoulements dans un contexte géologique composé de couches aquifères séparées par des couches semi-perméables (appelées aquitards), on suppose que l'écoulement est strictement vertical dans les aquitards et horizontal dans les aquifères (Rudolph & Frind, 1991). Cette double hypothèse est d'habitude considérée comme acceptable au vu des contrastes importants en perméabilité caractérisant les couches aquifères et les aquitards (Neuman & Witherspoon, 1969). La propagation d'une variation de pression interstielle dans les couches semi-perméables (aquitards) et perméables (aquifères) peut être calculée par analogie complète avec la conduction thermique en régime variable. En l'absence d'autres sollicitations, la propagation d'une baisse de niveau piézométrique suivant une direction en milieu semi-infini obéit à la relation :

$$h = h_s + (h_i - h_s) \cdot F \left( \frac{x}{2 \sqrt{c_v \cdot t}} \right) \quad (\text{III.1.})$$

qui est une solution analytique de l'équation de Fourier

$$C_v \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.2.})$$

avec  $C_v = \frac{K}{S_s}$  = coefficient de consolidation

$x$  = coordonnée dans la direction étudiée

$h_s$  = hauteur piézométrique imposée brusquement à une extrémité (analogie au choc thermique)

$h_i$  = hauteur piézométrique initiale

$$F\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v \cdot t}}\right) = \text{fonction intégrale d'erreur de Gauss (figure III.6.)}$$

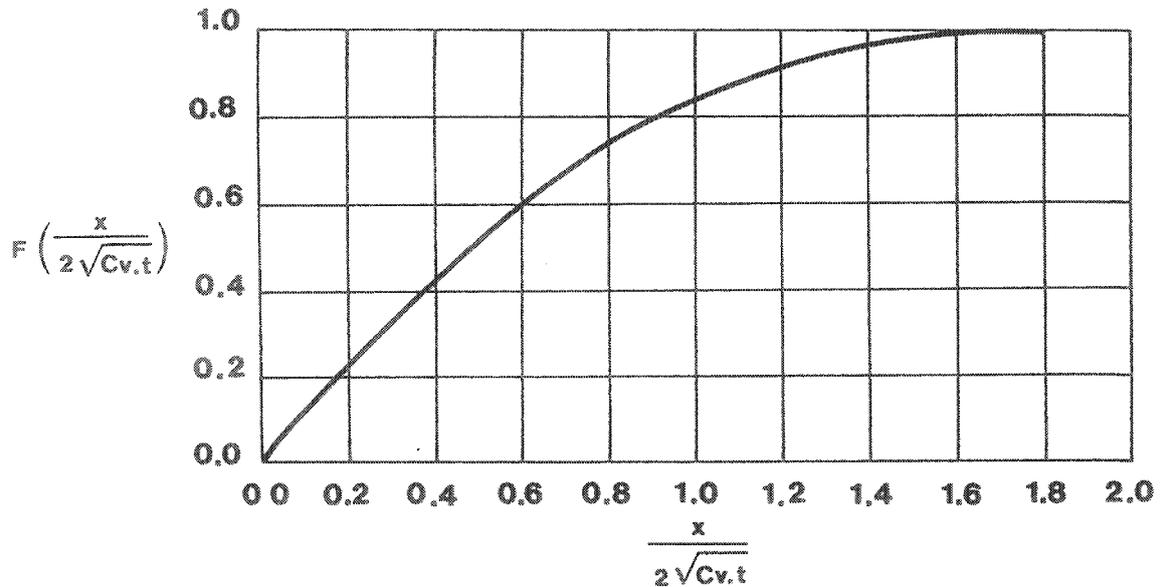


Figure III.6. : Courbe de la fonction intégrale d'erreur de Gauss

Les temps de propagation d'une variation piézométrique, obtenus au tableau III.1. pour des aquitards et des aquifères (caractérisés par des perméabilités de  $1 \cdot 10^{-9}$  m/s et  $1 \cdot 10^{-4}$  m/s et des coefficients d'emmagasinement spécifiques respectivement de  $4 \cdot 10^{-3}$  m<sup>-1</sup> et  $1 \cdot 10^{-4}$  m<sup>-1</sup>) confirment que la propagation est presque instantanée dans les aquifères par rapport à la migration dans les couches argileuses.

Tableau III.1. - Temps de propagation d'une variation piézométrique

AQUITARDS			AQUIFERES		
		$K = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ $S_s = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ $C_v = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$			$K = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ $S_s = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ $C_v = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
1 m	90 %	1952 jours	100 m	90 %	4,9 jours
	80 %	400 jours		80 %	1 jours
	70 %	159 jours		70 %	9,5 heures
	60 %	84,5 jours		60 %	5 heures
	50 %	52,4 jours		50 %	3,1 heures
5 m	90 %	133,7 ans	500 m	90 %	122 jours
	80 %	27,4 ans		80 %	25 jours
	70 %	10,9 ans		70 %	9,9 jours
	60 %	5,8 ans		60 %	5,3 jours
	50 %	3,6 ans		50 %	3,3 jours
10 m	90 %	534,8 ans	1000 m	90 %	488 jours
	80 %	109,7 ans		80 %	100 jours
	70 %	43,5 ans		70 %	39,7 jours
	60 %	23,2 ans		60 %	21,1 jours
	50 %	14,3 ans		50 %	13 jours
20 m	90 %	2139 ans	2000 m	90 %	1952 jours
	80 %	439 ans		80 %	400,5 jours
	70 %	174 ans		70 %	159 jours
	60 %	92,6 ans		60 %	84,5 jours
	50 %	57,4 ans		50 %	52,4 jours

Cependant, l'hypothèse de l'écoulement strictement horizontal dans les aquifères nous paraît trop restrictive car dans le cas d'une succession de couches aquifères, séparées par des couches semi-perméables, chaque couche aquifère doit alors être considérée séparément, en utilisant des coefficients d'infiltration pour simuler implicitement la présence des aquitards au sommet et à la base de l'aquifère étudié.

De plus, dans le cas d'irrégularités géologiques plus marquées (mais fréquentes) : biseaux, lentilles d'argiles, connexions entre différents niveaux aquifères..., la stricte horizontalité des écoulements dans les aquifères est illusoire. Par conséquent, il est nécessaire de traiter le problème d'écoulement en trois dimensions afin d'obtenir, avec le maximum de précision, la répartition des pressions interstitielles dans les couches aquifères.

L'équation 3D d'écoulement dans les aquifères captifs (équation II.63.) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q_i = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.3.})$$

Dans les semi-perméables ou aquitards, l'équation de l'écoulement vertical s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.4.})$$

Les équations (III.3.) et (III.4.) sont couplées par les conditions aux frontières correspondant aux limites des couches semi-perméables. En pratique, les pressions ou les hauteurs piézométriques calculées par le modèle d'écoulement 3D seront introduites après chaque pas de temps dans le modèle d'écoulement 1D comme des conditions aux limites variables avec le temps.

Le schéma de calcul obtenu est repris à la figure III.7..

On considère la compressibilité des couches aquifères suffisamment petite par rapport à celle des couches semi-perméables pour pouvoir négliger les effets du tassement des couches aquifères sur l'écoulement dans celles-ci. L'analyse de l'écoulement 3D dans les aquifères est réalisée avec des paramètres hydrodynamiques constants, alors que le modèle écoulement-tassement 1D est basé sur des paramètres variant avec l'indice des vides et la contrainte effective.

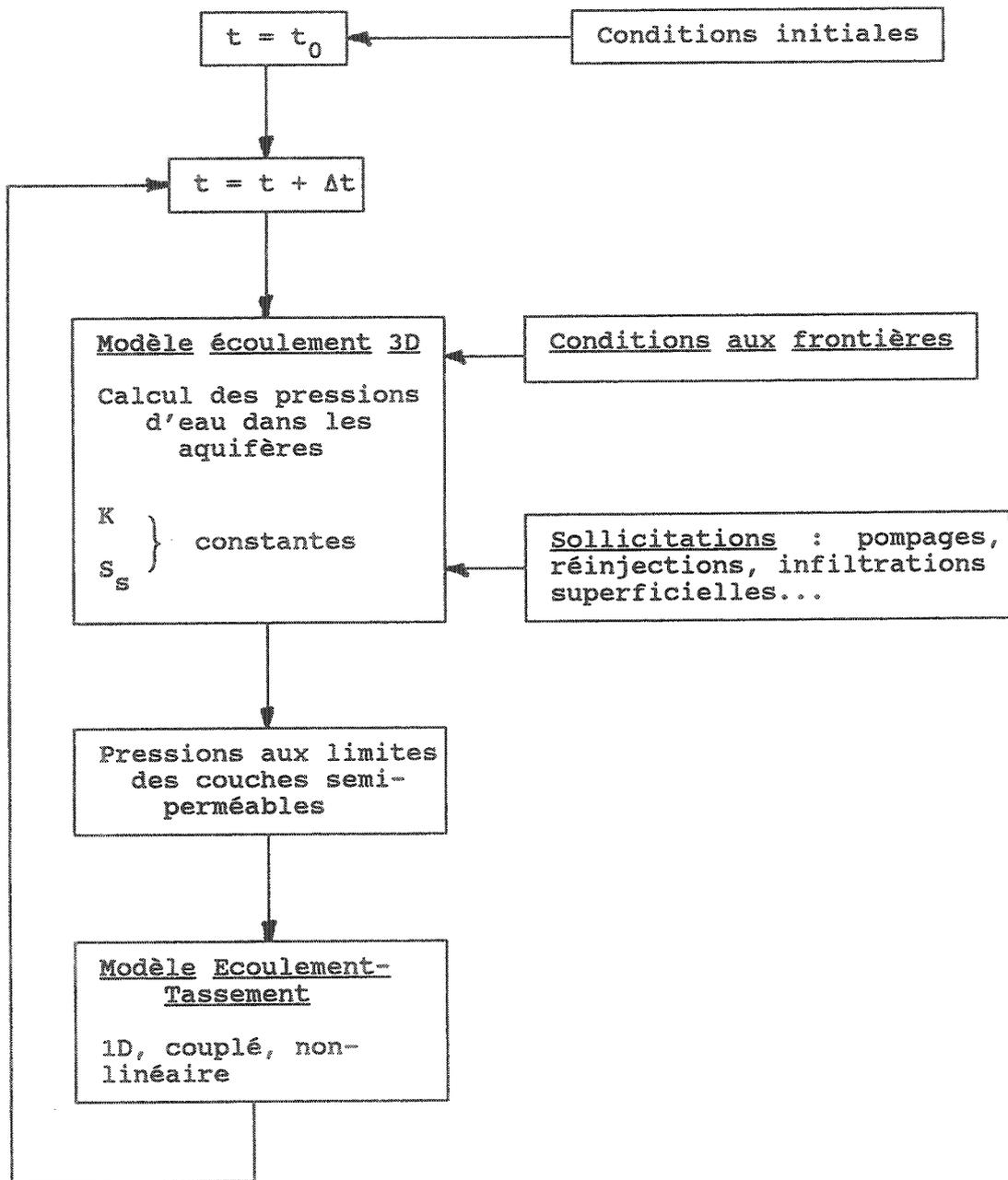


Figure III.7. : Modèle de calcul de la subsidence composé d'un modèle écoulement 3D et d'un modèle écoulement-tassement couplé 1D

### III.2.5. NON LINEARITE DES PARAMETRES

#### Coefficient d'emménagement spécifique $S_s$

La définition du coefficient d'emménagement spécifique, telle que rappelée au chapitre II est le volume d'eau qu'un volume unitaire de milieu poreux saturé peut libérer/emmagasiner pour une variation unitaire de hauteur piézométrique.

Moyennant l'hypothèse d'une contrainte totale constante, il s'écrit (équation II.56.) :

$$S_s = \rho \cdot g (\alpha + n \cdot \beta) \quad (\text{III.5.})$$

Comme l'ont signalé Domenico & Mifflin (1965), la compressibilité de l'eau ( $\beta$ ) est négligeable par rapport à celle d'un milieu poreux compressible. Le coefficient d'emménagement spécifique d'une couche semi-perméable (compressible) peut donc s'écrire :

$$S_s = \rho \cdot g \cdot \alpha \quad (\text{III.6.})$$

Par l'équation (II.38.), le coefficient  $\alpha$  de compressibilité volumétrique, est exprimé en fonction de la variation des déformations volumétriques :

$$\alpha = - \frac{dc_v}{d\sigma'} \quad (\text{III.7.})$$

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$\alpha = - \frac{dv}{v \cdot d\sigma'} \quad (\text{III.8.})$$

$$\alpha = - \frac{dn}{(1-n) \cdot d\sigma'} \quad (\text{III.9.})$$

où  $n$  est la porosité au début de la variation  $d\sigma'$

et enfin,

$$\alpha = - \frac{de}{(1+e) \cdot d\sigma'} \quad (\text{III.10.})$$

où  $e$  est l'indice des vides au début de la variation  $d\sigma'$ .

La relation entre  $e$  et  $\sigma'$  peut être déterminée pour tous les types de matériaux poreux par des essais de consolidation. C'est ici que dans la plupart des cas, l'hypothèse d'une relation seulement basée sur les déformations verticales est choisie, et ceci pour des raisons très pratiques (Bonnechère, (1985), Josseaume, (1981), Leroueil et al., (1985), Terzaghi & Peck, (1948), Verdeyen et al., (1968), Rudolph & Frind, (1991)...).

Les essais de consolidation les plus courants sont des oedomètres, où un échantillon est soumis à une contrainte axiale, toute déformation latérale étant empêchée. L'essai est drainé et la variation d'indice des vides ou la variation de déformation verticale sont obtenues en fonction de la variation de contrainte effective. Les résultats (figure III.8.) permettent de déterminer  $\alpha$  pour chaque niveau de contrainte effective. Les courbes oedométriques obtenues pour des matériaux sableux et argileux (figure III.9.) montrent que la consolidation primaire (consolidation avec évacuation d'eau) n'est pas linéaire et est en partie non-réversible. Le coefficient de compressibilité que l'on voudrait calculer sur base de ces courbes ( $\sigma'$ ,  $\epsilon$ ) n'est pas constant; il dépend de la valeur de la contrainte effective et de la plus forte contrainte que le terrain a subi avant sa consolidation lors de l'essai:  $\sigma'_{prec}$  (contrainte de préconsolidation).

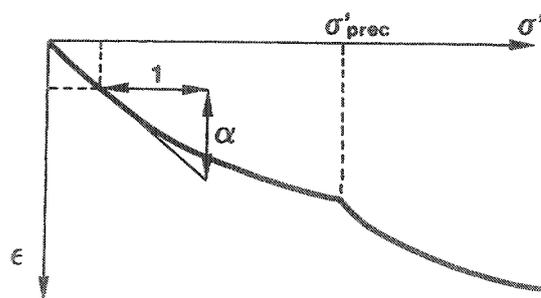


Figure III.8. : Résultats d'un essai oedométrique.

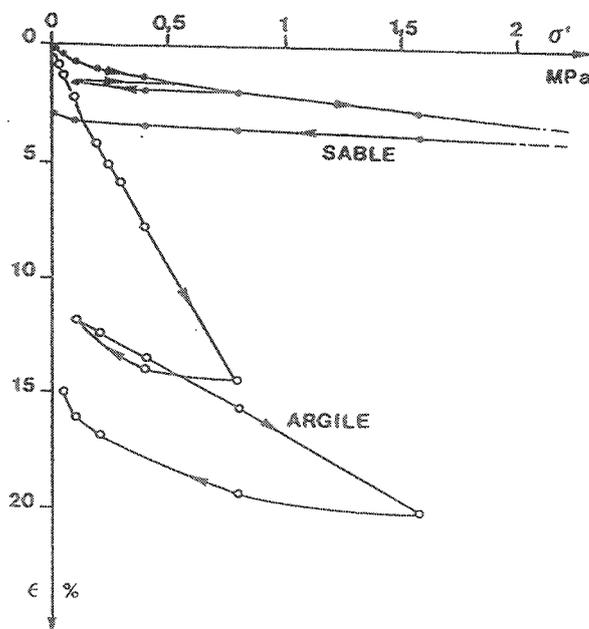


Figure III.9. : Courbes oedométriques d'un sable et d'une argile (d'après Bonnechère, 1985).

Par conséquent, pour pouvoir caractériser le matériau avec des coefficients constants, on se réfère aux diagrammes  $(\ln \sigma', \epsilon)$  et  $(\ln \sigma', e)$  (figure III.10.). A partir de ceux-ci, on définit habituellement :

A : constante de gonflement  
 C : constante de compression

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 1/A \cdot \ln \sigma' + \text{Cste} & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ \epsilon &= 1/C \cdot \ln \sigma' + \text{Cste} & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{aligned} \right\} \text{(III.11.)}$$

$C_s$  : indice de gonflement  
 $C_c$  : indice de compression

$$\left. \begin{aligned} e &= C_s \cdot \log \sigma' + \text{Cste} & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ e &= C_c \cdot \log \sigma' + \text{Cste} & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{aligned} \right\} \text{(III.12.)}$$

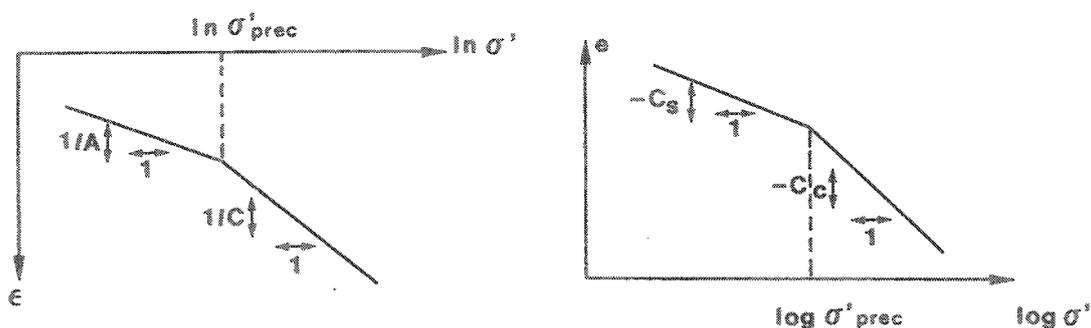


Figure III.10. : Diagrammes semi-log reprenant les résultats de consolidations oedométriques.

En pratique les équations (III.11.) et (III.12.) sont utilisées sous la forme :

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\sigma' / (A.\sigma') & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ d\varepsilon = d\sigma' / (C.\sigma') & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{cases} d\varepsilon = - \frac{C_s}{2.3} \cdot \frac{d\sigma'}{\sigma'} & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ d\varepsilon = - \frac{C_c}{2.3} \cdot \frac{d\sigma'}{\sigma'} & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Le coefficient de compressibilité exprimé par l'équation (III.10.) peut alors s'écrire en fonction de la contrainte effective et de l'indice de vides (pris au début de la variation de contrainte effective) :

$$\begin{cases} \alpha(\sigma', e) = \frac{C_s}{2.3} \cdot \frac{1}{(1+e).\sigma'} & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ \alpha(\sigma', e) = \frac{C_c}{2.3} \cdot \frac{1}{(1+e).\sigma'} & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{cases} \quad (\text{III.15.})$$

En fonction uniquement des contraintes effectives, on peut écrire :

$$\begin{cases} \alpha(\sigma') = 1 / (A.\sigma') & \sigma' < \sigma'_{\text{prec}} \\ \alpha(\sigma') = 1 / (C.\sigma') & \sigma' \geq \sigma'_{\text{prec}} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

La variation du coefficient de compressibilité et par conséquent du coefficient d'emménagement (équation III.6.) est illustrée à la figure III.11.

Le couplage et la non linéarité de  $S_g$  sont aisément introduits dans le code de calcul en exprimant que la quantité de fluide expulsé ( $q_{\text{exp}}$ ) du milieu poreux par décompression correspond à la variation de la déformation et donc au volume perdu par réarrangement des grains.

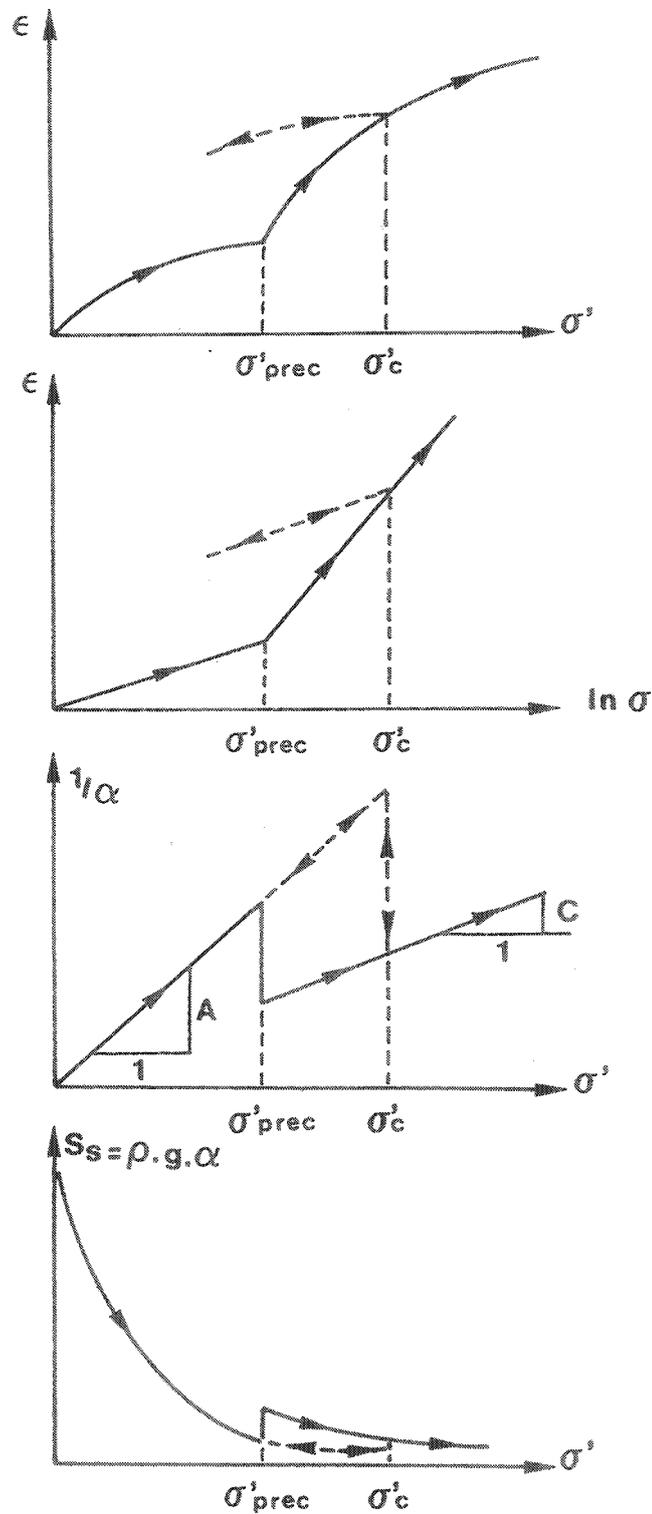


Figure III.11. : Variation de  $S_s$  en fonction de la contrainte effective

On obtient :

$$q_{\text{exp}} = s_s \cdot \frac{d\sigma'}{\rho \cdot g} \quad (\text{III.17.})$$

Certains auteurs, dont Feldkamp (1989), proposent de façon plus générale (sans lier leur théorie à la réalisation d'essais particuliers comme les oedomètres), des relations liant l'indice des vides à la contrainte effective :

$$e = a/\sigma'^b \quad (\text{III.18.})$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes à déterminer expérimentalement pour chaque milieu poreux.

Le coefficient de compressibilité peut alors s'exprimer en fonction de  $e$  uniquement. Par (III.10.) on trouve :

$$\alpha(e) = \frac{c \cdot e^d}{(1+e)} \quad (\text{III.19.})$$

où  $c$  et  $d$  sont des constantes à déterminer expérimentalement.

#### Coefficient de perméabilité K

-----

Les relations liant le coefficient de perméabilité K à l'indice des vides ou à la porosité ont été proposées par de nombreux auteurs. La diminution de l'indice des vides (ou de la porosité) pendant la consolidation, entraîne la diminution de la perméabilité du milieu poreux saturé.

Un première catégorie de relations empiriques liant la perméabilité intrinsèque du milieu à la porosité totale vient des développements dans l'interprétation de logs diagraphiques de porosité en "reservoir engineering". Les principales sont reprises ci-après.

- La perméabilité intrinsèque est exprimée en fonction de la porosité totale ( $n$ ), du degré de saturation en eau ( $S_w$ ) et d'une constante ( $c$ ) dépendant du milieu (déterminée par d'autres mesures diagraphiques) :

$$k = (c \cdot n^3 / S_w)^2 \quad (\text{III.20.})$$

(Wyllie & Rose, 1950, et d'après Archer & Wall, 1987)

- Une autre relation utilisée par des sociétés d'interprétation de diagraphies demande en plus, la connaissance du degré de saturation résiduel des milieux poreux non-saturé en eau ( $S_r$ ).

$$k = \left\{ \frac{c}{W^4} \left( \frac{n}{S_r} \right)^w \right\}^2 \quad (\text{III.21.})$$

où  $c$ ,  $W$  et  $w$  sont des constantes caractéristiques de chaque couche géologique, déterminées sur base des résultats de diagraphies de résistivité. (Timur, 1968, Coates & Dumanoir, 1973, et d'après Archer & Wall, 1987).

Ces relations sont peu applicables dans le calcul des subsidences par consolidation et d'autre part, elles ne sont valables que pour des roches indurées crayeuses, calcaires, dolomitiques ou gréseuses.

En hydrogéologie, une première dépendance du coefficient de perméabilité à la pression interstitielle, via le poids spécifique de l'eau a été démontrée par De Wiest (1966). Dans le cas de la consolidation 1D couplée à l'écoulement vertical, Gambolati (1973) a montré que les effets induits par cette dépendance sont négligeables, sauf si la couche compressible a une épaisseur supérieure à 10000 m et que des pressions interstitielles supérieures à  $5 \cdot 10^5$  MPa sont considérées.

D'autre part, la variation du coefficient de perméabilité des terrains meubles en fonction de l'indice des vides ou de la porosité a été investiguée par de nombreux chercheurs. Ils se sont attachés essentiellement à la détermination de relations empiriques, valables dans des milieux poreux saturés, argileux, semi-perméables et compressibles.

Ces relations sont construites à partir d'essais in situ et le plus souvent d'essais en laboratoire. Comme signalé précédemment (II.2.7.) ces derniers mènent à une sous-estimation systématique par rapport aux valeurs de  $K$  obtenues par des essais in situ. Ceux-ci sollicitent un plus grand volume de milieu poreux mais ne peuvent donner la perméabilité, qu'à l'état de contrainte régnant dans le milieu au moment de l'essai.

Les difficultés rencontrées lors de l'établissement de telles relations sont dues également aux nombreux paramètres influençant  $K$  dans ces terrains meubles. Citons notamment :

- la nature lithologique (figure III.12.);
- la dimension des grains et des particules solides composant le squelette du milieu (figures III.13. et III.14.);
- les formes, orientations et surfaces spécifiques des grains;
- la répartition spatiale des pores (figure III.15.)

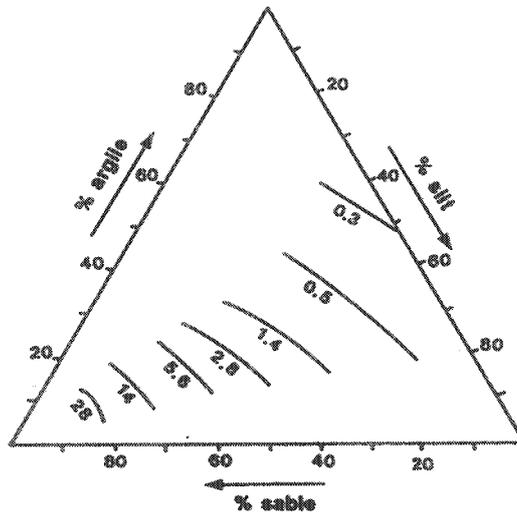
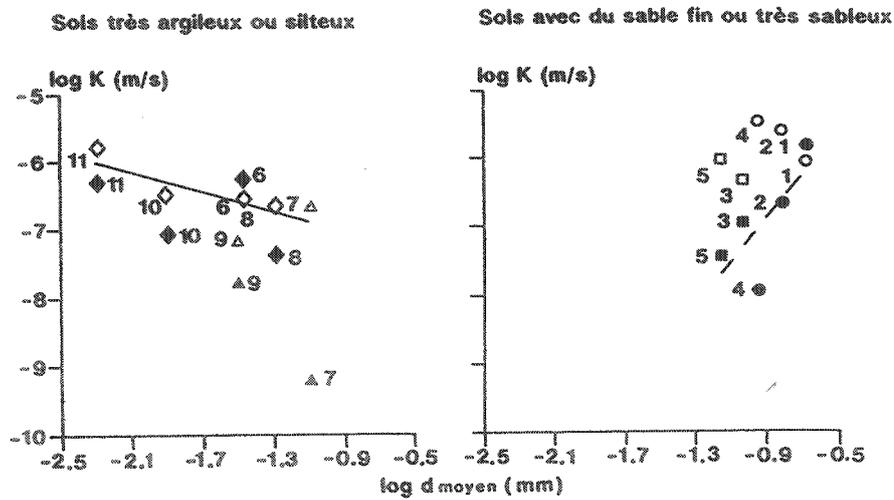


Figure III.12. : Le coefficient de perméabilité ( $\times 10^{-6}$  m/s) des terrains meubles saturés (d'après Milner, 1989 sur des données de Delver, 1962).



	Composition			Fraction argileuse
	sable %	silt %	argile %	
1	80	10	10	Kaolinite Très sableux ●● Sable fin ■■ Très silteux ▲▲ Très argileux ◆◆
2	70	20	10	
3	70	20	10 (sable fin)	
4	70	10	20	
5	70	10	20 (sable fin)	m.s.k. (mélange 1:1:1, muscovite-smectite-kaolinite)
6	50	10	40	
7	50	40	10	Très sableux ○○ Sable fin □□ Très silteux ▲▲ Très argileux ◆◆
8	50	25	25	
9	20	70	10	
10	20	40	40	
11	20	10	70	

Figure III.13. : Valeur moyenne de log K pour des sols saturés d'eau en fonction de la moyenne géométrique de la taille des grains solides (d'après Milner, 1989).

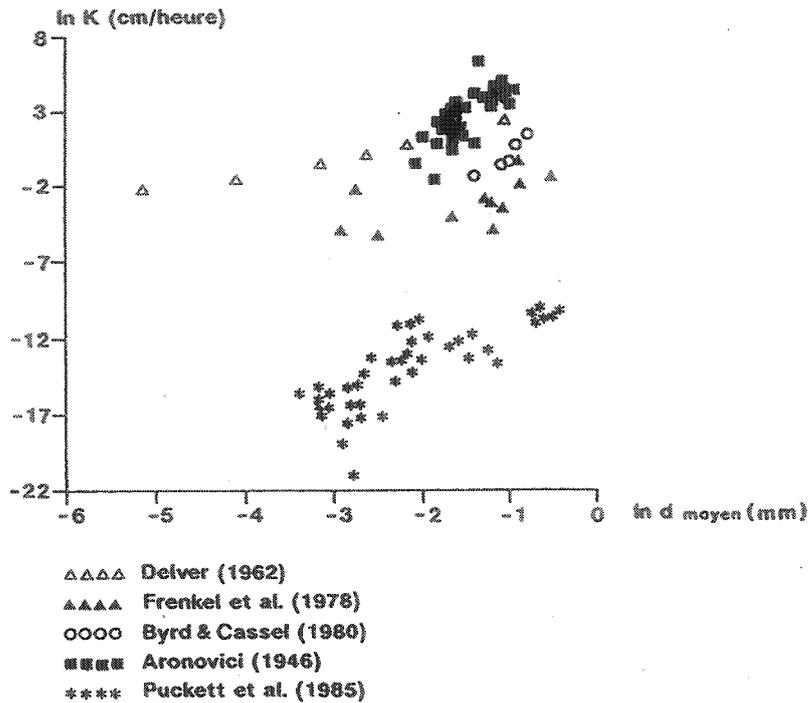


Figure III.14. : Variation de  $\ln K$  (en cm/heure) en fonction du  $\ln \bar{d}_{\text{moyen}}$ , pour des sols saturés à l'eau. Les données proviennent de 5 auteurs. (d'après Milner, 1989).

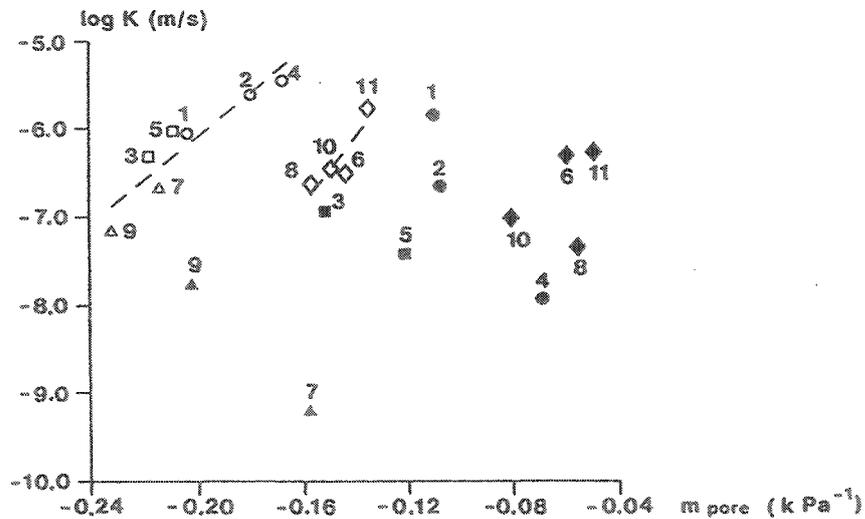


Figure III.15. : Variation de la moyenne de  $\log K$  en fonction d'un paramètre caractéristique de la distribution des tailles des pores. Le paramètre  $m_{\text{pore}}$  est la pente de la relation ( $\log[\text{teneur en eau}] - \log[\text{pression capillaire}]$ ). Les échantillons testés ont les caractéristiques décrites à la figure III.13. (d'après Milner, 1989).

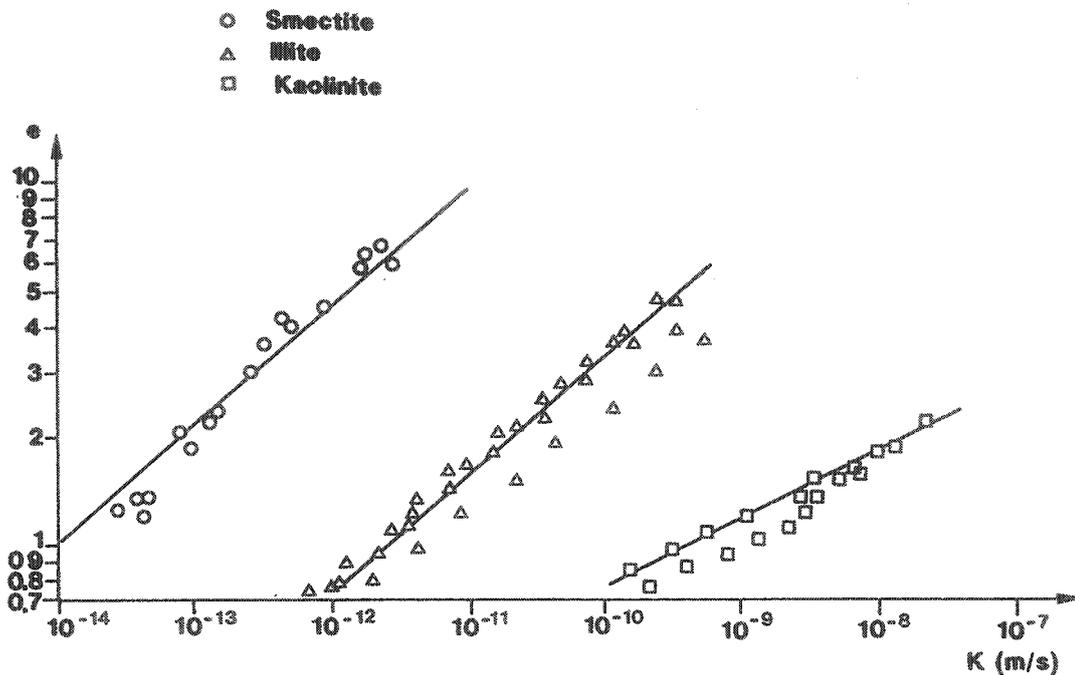


Figure III.16. : Variation du coefficient de perméabilité en fonction de l'indice des vides pour 3 argiles sodiques dans l'eau (d'après Mesri & Olson, 1971)

Sur base de diagrammes expérimentaux (figure III.16.) montrant l'évolution de  $\log K$  en fonction de  $\log e$ , pour la smectite, l'illite, le kaolinite, Mesri et Olson (1971) déduisent que l'évolution de  $K$  est surtout influencée (dans ces argiles), par la taille et la tortuosité des "conduits". La nature des argiles intervient dans la mesure où le rapport diamètre/épaisseur des feuillets solides, augmente de la kaolinite à l'illite et de l'illite à la smectite, expliquant les perméabilités plus élevées des kaolinites. Comme précisé précédemment (figure III.5.), la consolidation a tendance à orienter les feuillets argileux de façon normale par rapport à l'axe des contraintes principales, augmentant de façon importante la tortuosité des conduits empruntés par l'eau dans son écoulement qui, lui, est parallèle à l'axe des contraintes effectives. Cette constatation n'exclut toutefois pas la diminution de  $K$  simplement par diminution de l'espace total occupé par les vides.

Parmi les plus connues, les relations et théories suivantes peuvent être citées :

- Terzaghi (1925) a proposé une relation entre la perméabilité intrinsèque  $k$  et l'indice des vides :

$$k = \lambda (e - 0,15)^3 \cdot (1+e) \quad (\text{III.22.})$$

où  $\lambda$  est une constante à déterminer expérimentalement.

Les résultats expérimentaux ont montré que pour des milieux poreux de porosité comprise entre 0,20 et 0,80, l'équation III.22. peut se généraliser sous la forme (Rieke & Chiligarian, 1974) :

$$k = \lambda \cdot n^a \quad (\text{III.23.})$$

où  $\lambda$  et  $a$  sont des constantes expérimentales ( $a$  prend une valeur proche de 5 dans la plupart des cas)

Récemment, Feldkamp (1989) a repris cette équation sous une forme similaire à celle obtenue pour la variation de compressibilité (équation III.19.) :

$$k = a \cdot \frac{e^b}{(1+e)}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes à déterminer expérimentalement

- L'équation de Kozeny-Carman (1937) s'écrit comme suit:

$$k = \lambda \frac{n}{S_{sp}^2} \quad (\text{III.24.})$$

où  $\lambda$  est une constante à déterminer expérimentalement

$S_{sp}$  = surface se rapportant à une unité de volume de pores (ou surface spécifique)

Très peu utilisée en pratique, elle a été modifiée pour obtenir :

$$k = \lambda \frac{n^3}{(1-n)^2 \cdot S_{sp}^2} \quad (\text{III.25.})$$

où  $\lambda$  est une constante à déterminer expérimentalement.

- Barends (1990) propose une loi liant empiriquement  $k$  aux déformations relatives ( $\varepsilon$ ) et à la porosité ( $n$ ) :

$$k = k_0 e^{(\kappa \cdot \varepsilon / n)} \quad (\text{III.26.})$$

où  $k_0$  est la perméabilité intrinsèque initiale (avant déformation)

$\kappa$  est un paramètre empirique, calculé expérimentalement

- Safai et Pinder (1980) ont proposé :

$$K = \left[ 1 + \left( a \cdot \left| \frac{p}{\rho \cdot g} \right| \right)^b \right]^{-c} \quad (\text{III.27.})$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des paramètres empiriques, déterminés expérimentalement.

- Lambe & Whitman (1969) présentent des données expérimentales obéissant à une loi (citée également par Rudolph & Frind, 1991), du type :

$$dK = K_0 \cdot \left( 10^{de/m} - 1 \right) \quad (\text{III.28.})$$

où  $K_0$  est le coefficient de perméabilité au début de l'incrément de contrainte effective  $d\sigma'$

$m$  est déterminé expérimentalement (figure III.17.)

- Sur base de nombreux résultats d'essais, Nishida & Nakagawa (1969) ont développé une équation liant  $K$  à l'indice des vides ( $e$ ) et à l'indice de plasticité ( $I_p$ ) pour des argiles :

$$\log K = \left[ \frac{e}{(0,01 \cdot I_p + 0,05)} \right] - 12 \quad (\text{III.29.})$$

Cette loi est valable dans les sols généralement très argileux et a été appliquée avec succès pour calculer les phénomènes de subsidence, dus à la compaction des sédiments meubles du Quaternaire dans les zones côtières du Japon.

De façon plus générale, cette équation III.29. peut s'écrire :

$$K = e^{a \cdot e + b} \quad (\text{III.30.})$$

$$\text{où } a = \frac{2.3}{c \cdot I_p + d}$$

$b, c, d$  sont des constantes à déterminer expérimentalement

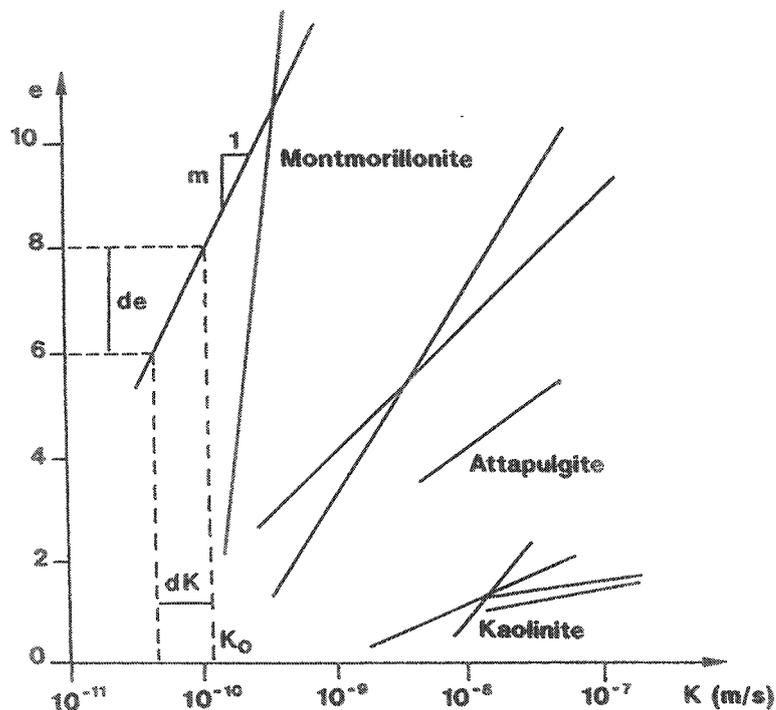


Figure III.17. : Relation entre  $K$  et l'indice des vides ( $e$ ) pour différents types d'argile (d'après Lambe & Whitman, 1969).

- Monte & Kritzen (1976), cités par Lewis & Schrefler (1987) ont trouvé expérimentalement une relation bilinéaire entre  $\ln K$  et l'indice des vides ( $e$ ) pour des consolidations unidimensionnelles (figure III.18.). Sur base de ces résultats et en se calquant sur le type de relation trouvée entre  $\log \sigma'$  et  $e$  pour la consolidation 1D (équations III.12. et figure III.10.), on peut construire un diagramme ( $\log K, e$ ) illustré à la figure III.19.

Sur ce diagramme, on peut définir les coefficients angulaires  $C_{K1}$  et  $C_{K2}$  comme les taux de variation de  $K$  en fonction de  $e$ , durant la consolidation, respectivement avant et après avoir atteint la valeur du coefficient de perméabilité (noté  $K_{prec}$ ) correspondant à la contrainte effective de préconsolidation.

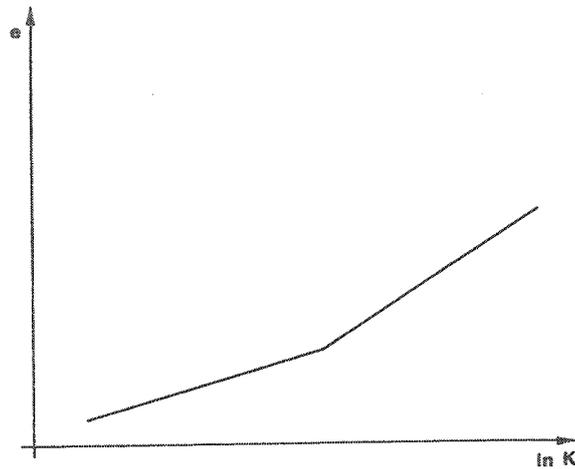


Figure III.18. : Relation entre l'indice des vides  $e$  et  $\ln K$  (d'après Lewis & Schrefler, 1987).

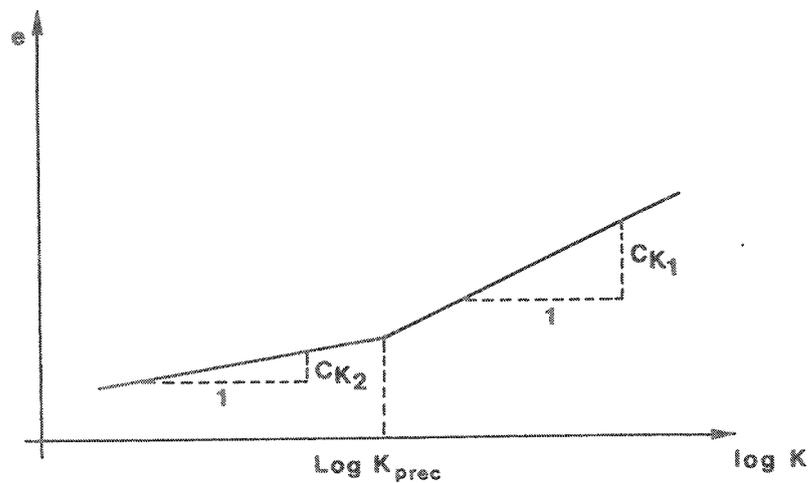


Figure III.19. : Diagramme ( $\log K$ ,  $e$ )

A partir de là, de façon similaire aux équations (III.14.), il est aisé de trouver :

$$\left\{ \begin{array}{l} de = \frac{C_{K1}}{2.3} \cdot \frac{dK}{K} \quad K > K_{prec} \\ de = \frac{C_{K2}}{2.3} \cdot \frac{dK}{K} \quad K \leq K_{prec} \end{array} \right. \quad (III.31.)$$

En associant les équations (III.14.) et (III.31.) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{C_s}{C_{K1}} \cdot \frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{dK}{K} \quad K > K_{prec} \\ - \frac{C_c}{C_{K2}} \cdot \frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{dK}{K} \quad K \leq K_{prec} \end{array} \right. \quad (III.33.)$$

Ce qui mène à une équation du type :

$$K = C/\sigma'^a \quad (III.33.)$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} a = C_s/C_{K1} \quad K > K_{prec} \\ a = C_c/C_{K2} \quad K \leq K_{prec} \end{array} \right.$$

$$C = K_{prec} \cdot (\sigma'_{prec})^a$$

Helm (1976) avait postulé une relation du même type que l'équation (III.33.) mais moins précise :

$$K = C/\sigma' \quad (III.34.)$$

où  $C$  est une constante à déterminer expérimentalement.

Cependant, sur base de travaux de Haghgou (1983), cités par Magnan (1986), il serait très malaisé de déterminer le rapport  $a = C_c/C_{K2}$  sur bien des argiles en consolidation (figure III.20.).

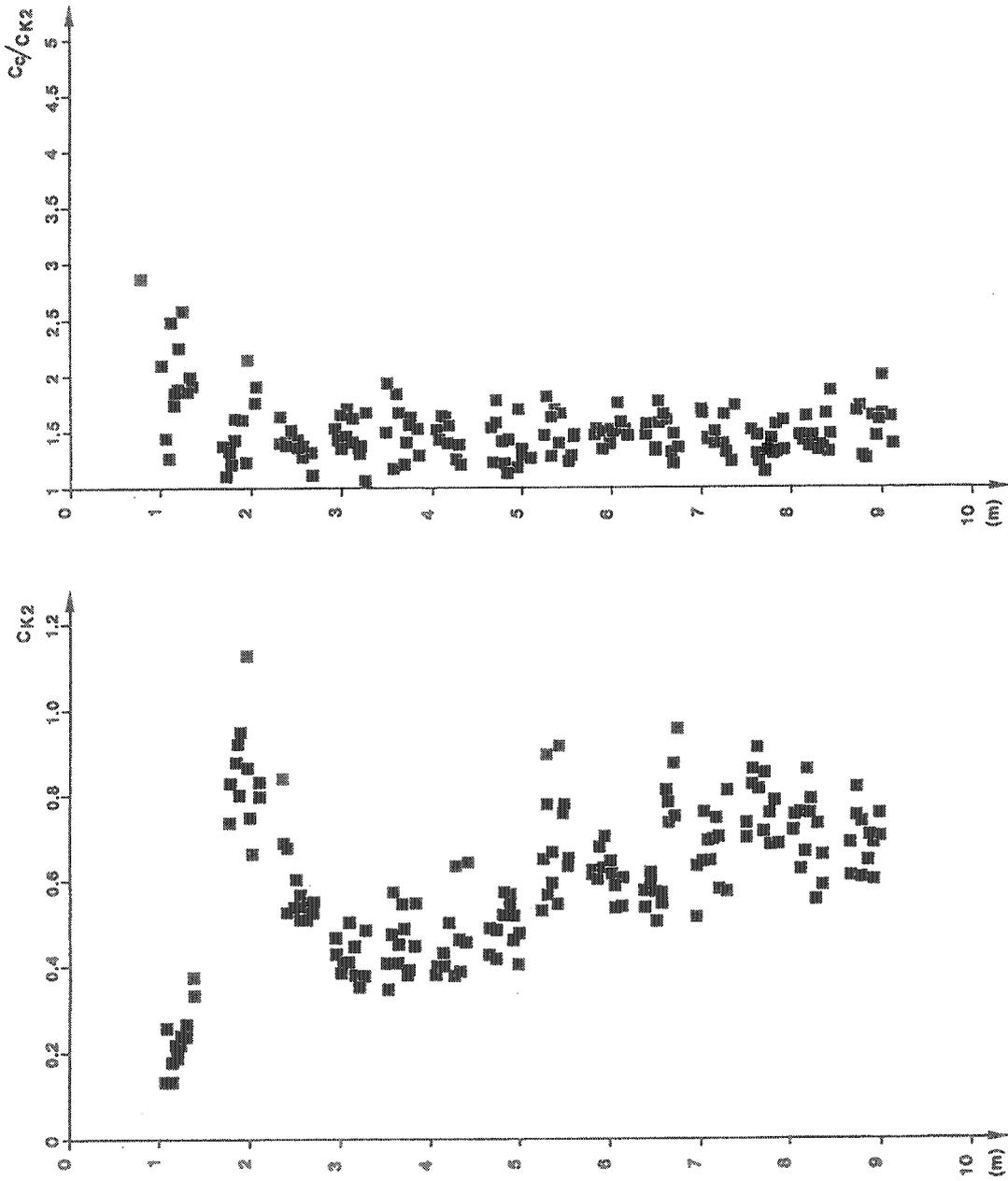


Figure III.20. : Variations de  $C_{K2}$  et du rapport  $\frac{C_c}{C_{K2}}$   
 (d'après Magnan, 1986 et Haghgou, 1983, argile  
 de Cubzac, remblai D).

De nombreuses relations sont donc connues, adaptées plus ou moins bien à chaque cas étudié. L'essentiel consiste à disposer d'un maximum de données géologiques et sédimentologiques, de manière à pouvoir orienter le choix hydrogéotechnique ( $e$ ,  $n$ ,  $K$  en fonction de  $\sigma'$ ), afin de choisir et adapter les coefficients, paramètres et exposants de la relation proposée.

### III.2.6. CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES ET SCHEMAS NUMERIQUES

L'équation (III.4.) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(e(\sigma')) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s(e(\sigma')) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.34.})$$

Les non linéarités en  $K_z$  et en  $S_s$  peuvent être traitées assez aisément dans les schémas numériques itératifs. Les conditions aux frontières, les lois de variation de  $K_z$  et  $S_s$  et les conditions initiales doivent être déterminées afin de permettre la résolution du problème en régime transitoire. Comme précisé précédemment (III.2.4.), les conditions aux frontières des couches semi-perméables compressibles sont fournies à chaque pas de temps par le modèle d'écoulement 3D.

Les valeurs initiales de  $K_z$  et de  $S_s$  doivent être déduites de l'état de contrainte initial régnant dans le milieu poreux saturé, donc de la répartition initiale de  $\sigma'$  et  $e$ .

(a) La contrainte effective initiale, en tout point de profondeur  $z$ , s'écrit (figure III.2.)

$$\sigma'(z) = \gamma \cdot z_0 + (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - z_0)$$

où  $z_0$  est la profondeur à partir de laquelle les terrains sont saturés

Cependant, durant la consolidation, la valeur de  $\gamma_{\text{sat}}$  peut augmenter puisque le milieu poreux devient plus dense par diminution de l'indice des vides. De plus, la longueur de la colonne 1D considérée se raccourcit durant le processus de consolidation.

Si, par exemple, une colonne de 10 m de terrain argileux compressible caractérisé par  $\gamma_{\text{sat}} = 16.93 \text{ kN/m}^3$  passe durant la consolidation d'un indice des vides moyen  $e = 1.27$  à  $e = 1.0$ , le poids volumique saturé moyen  $\gamma_{\text{sat}}$  devient égal à  $17.9 \text{ kN/m}^3$ .

La variation de la longueur de la colonne peut s'exprimer comme suit :

$$\Delta l = l \cdot \frac{\Delta e}{1+e} \quad (\text{III.35.})$$

On obtient, pour l'exemple, une diminution de 0.38m. La contrainte effective en un point situé à la base de la colonne augmente de 9 % quand on tient compte de la variation de  $\gamma_{\text{sat}}$ , en partie contrebalancée par la variation de  $l$  et en supposant la saturation du milieu inchangée (les détails du calcul sont repris au tableau III.2.). Ce taux de variation est maximum en 1 point de profondeur  $z$  égal à la longueur de la colonne ( $l$ ) (tableau III.2.).

En général, la variation de la contrainte effective résultant de l'évolution de la valeur de  $\gamma_{\text{sat}}$  est considérée comme négligeable par rapport aux fortes variations de  $\sigma'$  dues aux diminutions des pressions interstitielles. D'autre part, l'ajout d'une non linéarité supplémentaire sous la forme d'une relation :

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{1}{(1+e)} \cdot (\gamma_s + e \cdot \gamma_w) \quad (\text{III.36.})$$

ne pose pas de grands problèmes et est souvent implicitement prise en compte dans le calcul.

$$e_0 = 1.27 \quad n_0 = 0.56 \quad \gamma_s = 26 \text{ kN/m}^3$$

$$e = 1.0 \quad n = 0.5 \quad \gamma_w = 9.81 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{sat}0} = \gamma_s(1 - n_0) + \gamma_w \cdot n_0 = 16.93 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{sat}} = \gamma_s(1 - n) + \gamma_w \cdot n = 17.9 \text{ kN/m}^3$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta e}{(1+e)} = 0.038 \quad \text{si } l = 10 \text{ m} \rightarrow \Delta l = 0.38 \text{ m}$$

$$\sigma'_0 = \gamma \cdot z_0 + (\gamma_{\text{sat}0} - \gamma_w) \cdot (z - z_0)$$

$$\sigma' = \gamma \cdot z_0 + (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - z_0 - \Delta l)$$

$$\text{si } z_0 = 0 \text{ m et } z = 10 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \sigma' - \sigma'_0 &= (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - \Delta l) - (\gamma_{\text{sat}0} - \gamma_w) \cdot (z) \\ &= \gamma_{\text{sat}} \cdot z - \gamma_{\text{sat}0} \cdot z - \gamma_{\text{sat}} \cdot \Delta l + \gamma_w \cdot \Delta l \\ &= 6.6 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma' / \sigma'_0 = 1.09 \rightarrow 9 \% \text{ d'augmentation de } \sigma'$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w)}{(\gamma_{\text{sat}0} - \gamma_w)} \cdot \frac{(z - \Delta l)}{(z)} \quad \text{est maximum si } z = l$$

$$\text{avec } \Delta l = l \cdot \frac{\Delta e}{1+e} \quad \text{et } z \leq l$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'}{\sigma'_0} &= (1.136) \cdot \frac{z - l \cdot (0.038)}{z} \\ &= 1.136 (1 - 0.38) = 1.09 \end{aligned}$$

Tableau III.2. : Variation de  $\sigma'$  due aux variations de  $\gamma_{\text{sat}}$  et de la longueur de la colonne en consolidation

(b) La répartition initiale des valeurs d'indice des vides  $e(z)$  dans la colonne doit être fournie au modèle. Les valeurs fournies par les essais sont caractéristiques de l'état de contrainte, régnant dans les terrains lors du prélèvement de l'échantillon. Or la simulation du comportement du réservoir doit bien souvent débiter à une époque antérieure à la date de prélèvement. Si les contraintes effectives peuvent être retrouvées par les mesures de la dépression d'eau et application de la loi de Terzaghi, l'indice des vides initial peut être calculé (figure III.21.) :

- . si initialement le milieu poreux était normalement consolidé

$$e_{\text{initial}} = e_{\text{essais}} + C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{\text{essais}}}{\sigma'_{\text{initial}}} \quad (\text{III.37.})$$

- . si initialement le milieu poreux était surconsolidé à une contrainte effective :  $\sigma'_{\text{prec}}$

$$e_{\text{initial}} = e_{\text{essais}} + C_s \cdot \log \frac{\sigma'_{\text{prec}}}{\sigma'_{\text{initial}}} + C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{\text{essais}}}{\sigma'_{\text{prec}}} \quad (\text{III.38.})$$

(c) A partir de la connaissance de la distribution initiale des contraintes effectives et des indices des vides, la compressibilité initiale et le coefficient de perméabilité initial peuvent être calculés rétroactivement. Ensuite, au cours de la consolidation les valeurs de  $S_s$  et de  $K_z$  sont actualisées en utilisant les relations les liant à  $e$  ou  $\sigma'$ .

(d) Comme signalé précédemment, lors de la consolidation la hauteur de la colonne 1D est modifiée. On peut en tenir compte dans la procédure numérique, dans chaque élément 1D par l'application de l'équation (III.35.) où  $l$  est alors la longueur de l'élément. Cette modification de la géométrie de l'élément au cours de la consolidation constitue une non linéarité supplémentaire dans l'équation (III.34.).

La résolution de l'équation (III.34.) en mode transitoire demande donc l'actualisation de  $K_z$ ,  $S_s$  et  $l$  durant chaque pas de temps en réponse aux variations de pressions interstitielles ce qui amène à l'élaboration d'un organigramme du type de celui illustré à la figure III.22.

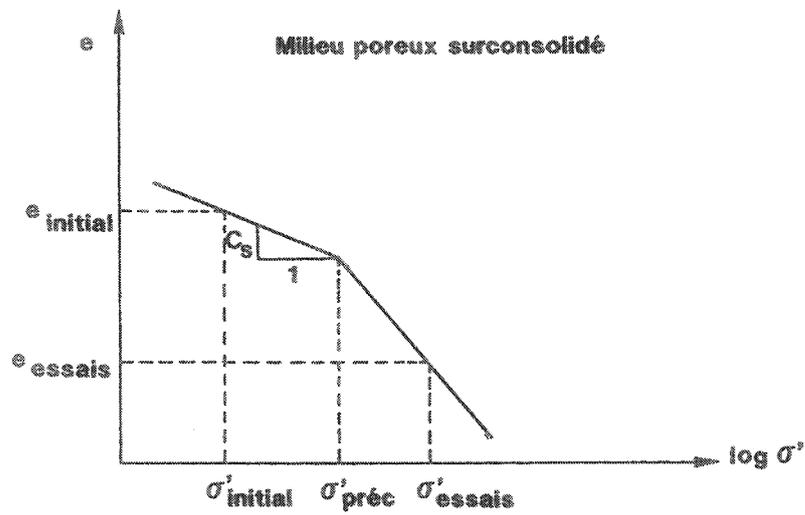
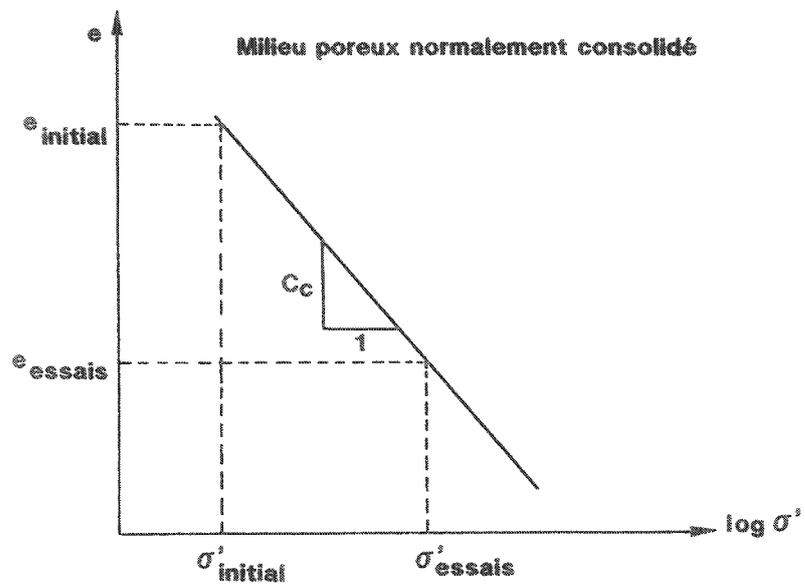


Figure III.21. : Calcul de l'indice des vides initial.

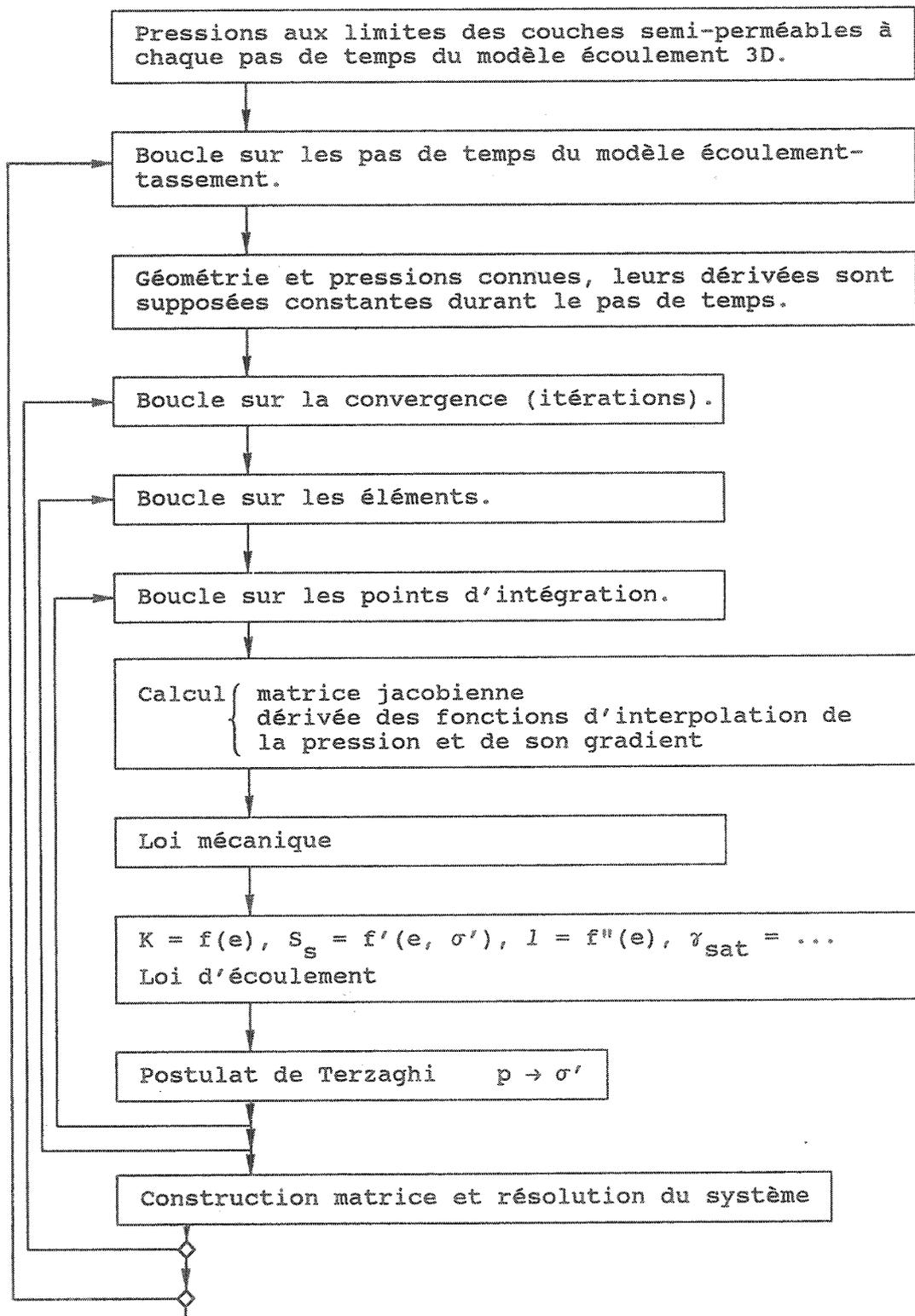


Figure III.22. : Schéma décrivant les opérations successives réalisées dans un modèle écoulement-tassement couplé et non-linéaire.

### III.2.7. INFLUENCE DE LA PRISE EN COMPTE DU COUPLAGE ET DES NON LINEARITES

Les résultats d'un modèle écoulement-tassement où les paramètres ( $K_z$  et  $S_s$ ) varient en fonction des contraintes effectives ne seront en rien semblables aux résultats d'un modèle non couplé à paramètres constants.

Les baisses de pression vont se propager différemment, le coefficient de consolidation ( $C_v = K_z/S_s$ ) n'étant pas constant. En effet,  $K_z$  et  $S_s$  varient, mais pas dans le même rapport.

Rudolph & Frind (1991) montrent que pour un changement de pression à la base d'une colonne d'argile, il faut plus de temps pour rétablir un régime permanent d'écoulement en simulation non linéaire qu'en simulation linéaire (figure III.23.). Remarquons que cette constatation n'est vraie dans tous les cas que lorsque les valeurs de  $K_z$  et  $S_s$  de la simulation à paramètres constants, sont identiques aux valeurs initiales de la simulation non linéaire. De plus, il faut que les variations (à la baisse) de  $K_z$  soient plus importantes que celles de  $S_s$  pour provoquer une diminution de  $C_v$ .

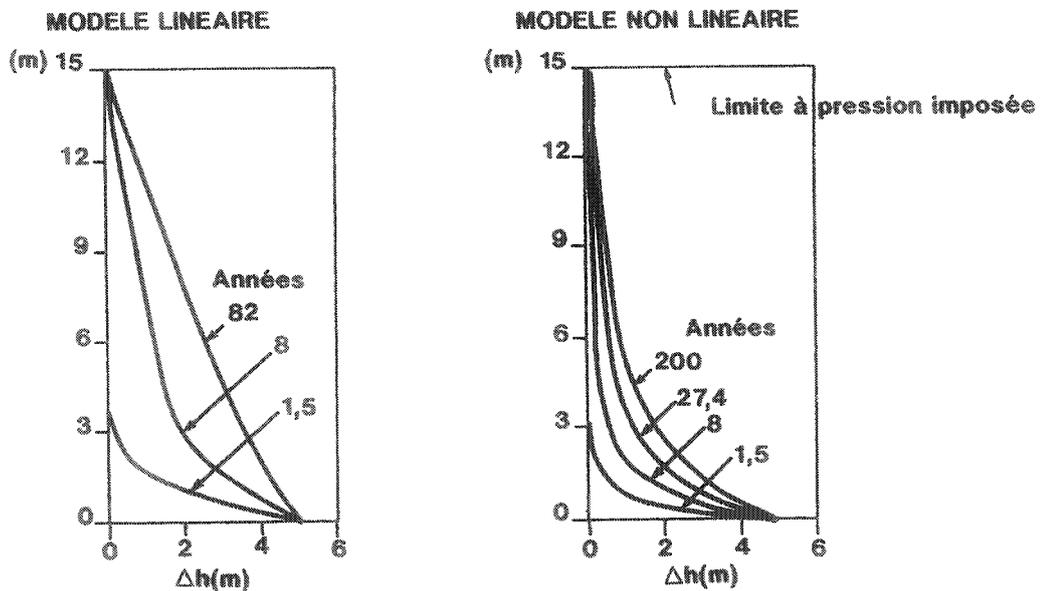


Figure III.23. : Propagation d'une dépression de 5 m d'eau dans une couche d'argile de 15 m d'épaisseur. Comparaison entre les simulations linéaire et non linéaire. (d'après Rudolph & Frind, 1991).

Précédemment Helm (1976) avait déjà étudié ce type de comparaisons dans lesquelles (figure III.24.) :

- la variation à la baisse de  $S_s$  est moins importante que celle de  $K_z$ ;
- les paramètres constants pour la simulation linéaire ne sont pas égaux aux valeurs initiales des  $K_z$  et  $S_s$  de la simulation non linéaire.

Les profils montrant la propagation de la contrainte effective maximum, jusqu'à la demi-épaisseur d'une couche argileuse compressible, illustrent, pour deux dates, que les variations de pressions d'eau se sont moins vite propagées dans le cas non linéaire (figure III.24.).

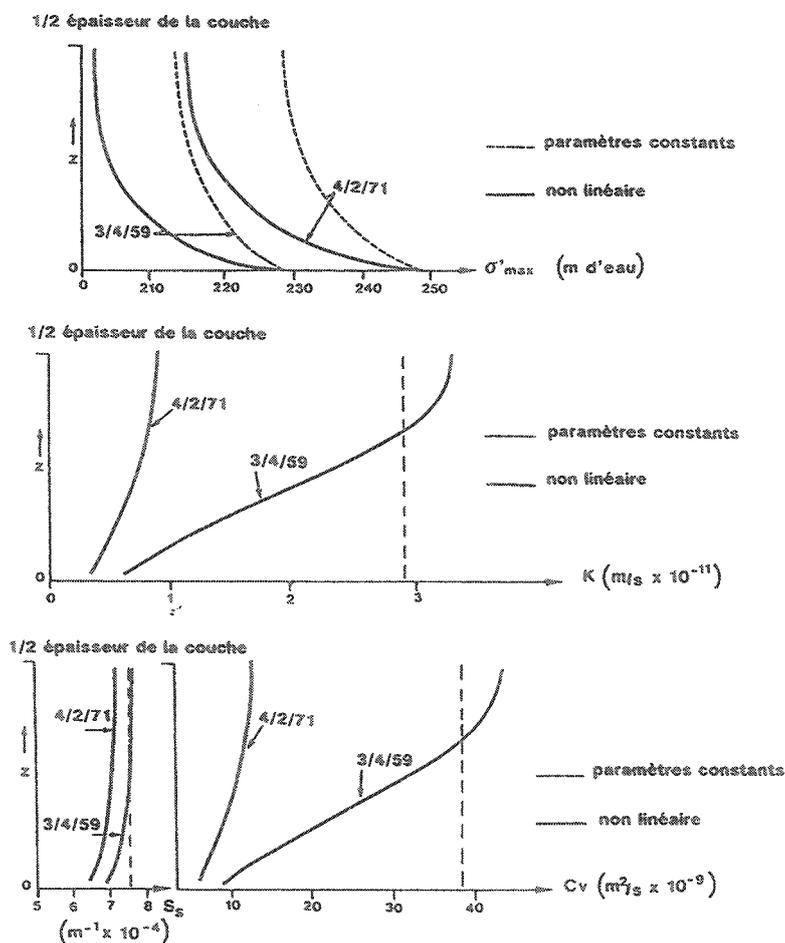


Figure III.24. : Résultats publiés par Helm (1976) montrant la distribution des paramètres et de  $\sigma'_{max}$  en 1959 et 1971 dans une demi-couche compressible du site de Pixley (Californie), présumée homogène initialement.

Le même type de constatation sera faite dans la suite (VII.4.5.), pour les colonnes 1D situées dans la zone de Shanghai en comparant les simulations :

- linéaire (modèle non-couplé ou linéaire),
- couplée (non linéaire en  $S_s$ ) et linéaire en  $K_z$ ,
- non linéaire en  $K_z$  et  $S_s$ .

Les différences dans la répartition des pressions d'eau et donc dans celle des contraintes effectives, induisent l'essentiel de la différence des tassements calculés avec l'une ou l'autre des simulations.

Néanmoins, à variation de pression égale, il est également possible de démontrer que les tassements calculés par la simulation linéaire seront supérieurs aux tassements calculés par le programme non linéaire si les paramètres constants sont identiques aux valeurs initiales des paramètres pour la simulation non linéaire.

Exprimons la déformation du milieu poreux compressible, sur un pas de temps par (III.6.) et (III.7.) :

$$\int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon(t+\Delta t)} d\varepsilon = \int_{\sigma'(t)}^{\sigma'(t+\Delta t)} \frac{S_s}{\rho \cdot g} d\sigma' \quad (\text{III.39.})$$

Dans le cas du modèle non-couplé linéaire,  $S_s$  est constant, on peut donc écrire :

$$\int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon(t+\Delta t)} d\varepsilon = \frac{S_s}{\rho \cdot g} \int_{\sigma'(t)}^{\sigma'(t+\Delta t)} d\sigma' \quad (\text{III.40.})$$

En intégrant,

$$\varepsilon(t+\Delta t) - \varepsilon(t) = \frac{S_s}{\rho \cdot g} \left( \sigma'(t+\Delta t) - \sigma'(t) \right) \quad (\text{III.41.})$$

En utilisant (III.6.) et (III.16.), on peut remplacer  $S_s$  et l'exprimer en fonction d'une constante ayant les dimensions d'une contrainte effective ( $\sigma'_{imp}$ ). En considérant la plasticité, on a :

$$\varepsilon(t+\Delta t) - \varepsilon(t) = \frac{1}{C \cdot \sigma'_{imp}} \left( \sigma'(t+\Delta t) - \sigma'(t) \right) \quad (\text{III.42.})$$

où C est remplacé par A en zone élastique

$\sigma'_{imp}$  est une constante, choisie implicitement lors du choix de la valeur constante de  $S_s$  (dans chaque couche).

Dans le cas du modèle couplé et non linéaire, l'équation III.39. devient :

$$\int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon(t+\Delta t)} d\varepsilon = \frac{1}{\rho \cdot g} \int_{\sigma'(t)}^{\sigma'(t+\Delta t)} S_s \cdot d\sigma' \quad (\text{III.43.})$$

car seulement  $\rho \cdot g$  peut être considéré constant.

En remplaçant  $S_s$  par sa valeur dans (III.6.) et (III.16.), on obtient :

$$\int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon(t+\Delta t)} d\varepsilon = \frac{1}{C} \cdot \int_{\sigma'(t)}^{\sigma'(t+\Delta t)} \frac{d\sigma'}{\sigma'} \quad (\text{III.44.})$$

Par intégration, on trouve :

$$\varepsilon(t+\Delta t) - \varepsilon(t) = \frac{1}{C} \cdot \ln \left( \frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'(t)} \right) \quad (\text{III.45.})$$

Comparer les équations (III.42.) et (III.45.) revient à comparer les termes :

$$\frac{1}{\sigma'_{imp}} \left( \sigma'(t+\Delta t) - \sigma'(t) \right) \quad \text{et} \quad \ln \left( \frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'(t)} \right)$$

Au premier pas de temps de la simulation, on a :

$$\frac{1}{\sigma'_1(t)} \left( \sigma'(t+\Delta t) - \sigma'_1(t) \right) \quad \text{et} \quad \ln \left( \frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'_1(t)} \right)$$

car  $S_s = \frac{1}{C \cdot \sigma'_1(t)}$  valeur initiale de  $S_s$  pour le modèle non linéaire.

Dans ce cas, on obtient l'inégalité :

$$\frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'_1(t)} - 1 \geq \ln \left( \frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'_1(t)} \right) \quad (\text{III.46.})$$

$$\text{avec } \sigma'(t+\Delta t) \geq \sigma'_1(t)$$

$$\text{car, en toute généralité, } e^{\frac{a-c}{c}} \geq \frac{a}{c}$$

si  $a \geq c$  (figure III.25.)

Aux pas de temps suivants, on a :

$$\frac{1}{\sigma'_1(t)} \left( \sigma'(t+\Delta t) - \sigma'(t) \right) \geq \ln \left( \frac{\sigma'(t+\Delta t)}{\sigma'(t)} \right) \quad (\text{III.47.})$$

$$\text{avec } \sigma'(t+\Delta t) \geq \sigma'(t) \geq \sigma'_1(t)$$

$$\text{car, en toute généralité, } e^{\frac{a-b}{c}} \geq \frac{a}{b}$$

si  $a \geq b \geq c$  (figure III.26.)

Donc, même si les contraintes effectives induites étaient rigoureusement semblables dans les simulations linéaire et couplée non linéaire, les déformations calculées sont toujours plus importantes dans le cas linéaire, si la valeur constante de  $S_g$  correspond à la valeur initiale du modèle non linéaire.

La non linéarité de  $K_z$  n'influencera les déformations que par l'entremise de son effet sur la répartition des pressions d'eau.

En conclusion, le principal facteur provoquant des différences de tassement est la répartition différente dans l'un et l'autre cas des pressions d'eau et donc des contraintes effectives. De plus, comme signalé ci-dessus, la variation de  $S_g$  en fonction des contraintes effectives induit des différences dans les déformations calculées, même si on considère la contrainte effective inchangée.

Si les valeurs des paramètres initiaux du modèle non linéaire sont égales aux valeurs constantes de la simulation linéaire, les tassements calculés en mode non linéaire sont systématiquement inférieurs à ceux calculés en simulation linéaire.

Pour un cas d'étude donné, il est parfois utile de pouvoir comparer les résultats calculés avec différents types de relation prenant en compte la non linéarité de  $K_z$ .

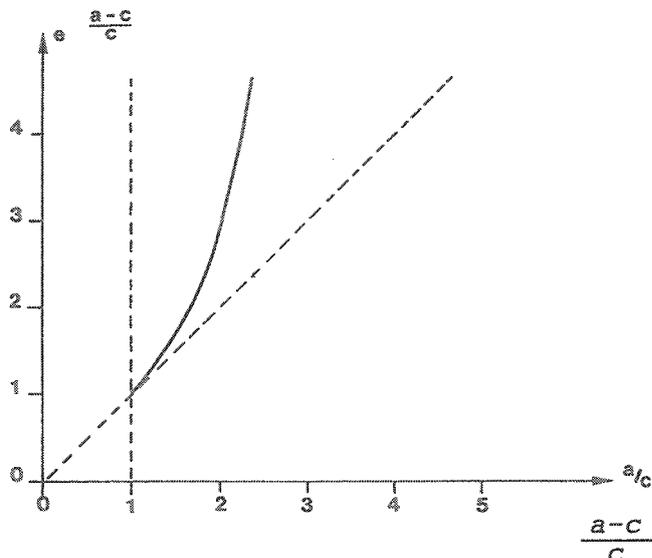


Figure III.25. : Diagramme montrant que  $e \frac{a-c}{c} \geq \frac{a}{c}$  pour  $a \geq c$

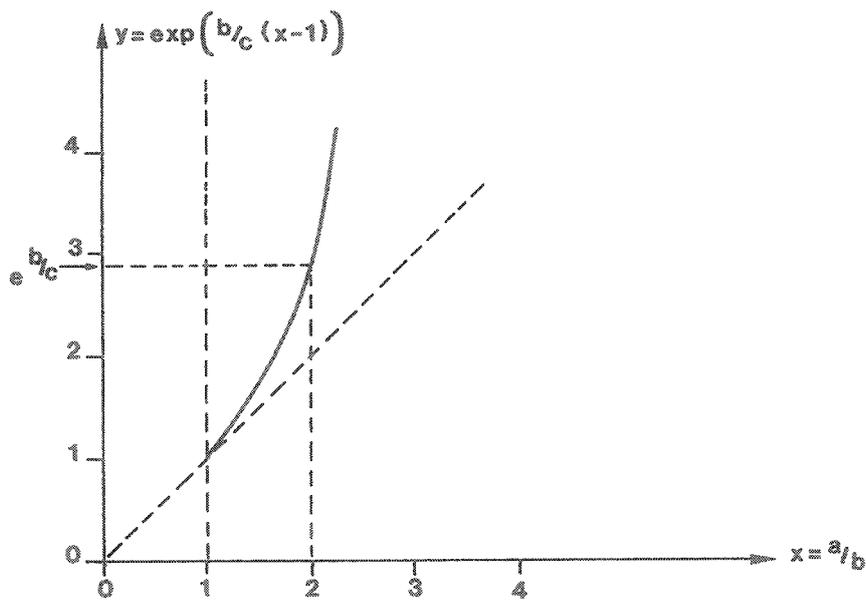


Figure III.26. : Diagramme montrant que  $e \frac{a-b}{c} \geq \frac{a}{b}$   
pour  $a \geq b \geq c$

on pose  $x = \frac{a}{b}$   
 $y = e^{\frac{b}{c}(x-1)}$

$$b/c \geq 1 \longrightarrow e^{b/c} \geq 2.7183$$



## IV. REPRESENTATION, IDEALISATION ET DISCRETISATION DES MILIEUX POREUX NATURELS

### IV.1. DOMAINE IDEALISE, MODELE CONCEPTUEL

Résoudre un problème d'écoulement en milieu poreux saturé par une modélisation mathématique consiste à trouver la répartition dans le temps et dans l'espace des valeurs des variables concernées. Celles-ci doivent satisfaire les équations différentielles décrivant l'écoulement en tout point du domaine, ainsi que les spécifications imposées en terme de valeurs initiales et de valeurs aux frontières.

Afin d'effectuer l'intégration de l'équation de l'écoulement (II.60) et (II.66) sur le domaine à étudier, par une méthode numérique, il faut au préalable définir le système avec ses paramètres, sa géométrie et ses sollicitations, variables dans l'espace et parfois dans le temps.

Il s'agit donc d'établir le modèle conceptuel des processus à simuler sur un domaine idéalisé. Ce modèle conceptuel est en fait constitué de notre perception, simplifiée par l'entremise d'une série d'hypothèses, du système réel à étudier.

Notons que la définition du système, assortie des hypothèses pouvant s'appliquer au cas traité, mène bien souvent à un choix relativement restreint quant à la méthode numérique et au code à choisir.

La géométrie doit être définie en 3 dimensions, à moins que le cas traité puisse être étudié de façon satisfaisante en réduisant les dimensions du problème. C'est la géométrie des différentes formations géologiques et la répartition des valeurs des paramètres hydrodynamiques qui déterminent le degré d'hétérogénéité à prendre en compte, le type de comportement de l'aquifère (captif ou libre), ainsi que les conditions d'infiltrations éventuelles. La discrétisation dans l'espace doit donc être réalisée en tenant compte des hypothèses prises concernant ce degré d'hétérogénéité et/ou d'anisotropie.

De la même façon, selon le caractère relativement permanent ou transitoire des sollicitations imposées au système, la modélisation est menée en ramenant le problème à un régime strictement permanent ou à un régime transitoire, où le choix des pas de temps constitue la discrétisation temporelle du problème.

Ensuite, il faut identifier le comportement de la zone externe mais contiguë au domaine discrétisé afin de discerner le type d'interaction s'opérant aux limites du modèle.

L'étude de ces conditions aux frontières comprend l'identification de toutes les quantités d'eau entrant ou sortant du domaine idéalisé. Certaines hypothèses doivent parfois être prises quant à l'idéalisation de ces conditions aux limites pour simplifier leur prise en compte dans le modèle numérique.

## IV.2. DISCRETISATION SPATIALE

### IV.2.1. PRINCIPES GENERAUX

La discrétisation géométrique doit tenir compte de nombreux impératifs, le maillage final obtenu étant le résultat de la prise en compte de l'ensemble de ceux-ci. La discrétisation spatiale, en cellules, éléments, régions, dépend étroitement du schéma d'intégration spatial utilisé. Par exemple, pour des éléments finis, la variation spatiale de la pression ou de hauteur piézométrique est représentée à l'aide de fonctions d'interpolation et les inconnues nodales sont les inconnues du problème discrétisé. Plus le maillage sera serré, plus la précision du calcul sera grande.

Le maillage est la représentation du domaine étudié par l'assemblage de cellules (différences finies), d'éléments (éléments finis) ou de régions (éléments frontières et éléments analytiques). Leur taille est choisie en fonction de l'hétérogénéité du milieu, de la complexité des frontières, de la densité des mesures disponibles et des points de sollicitation, de la précision désirée des résultats, mais aussi des contingences informatiques (taille du système, temps C.P.U.). L'étude géologique et hydrogéologique préalable à la modélisation du système étudié, fournit la plupart de ces informations.

Comme signalé précédemment, les différentes méthodes numériques amènent à des approximations très diverses de la géométrie.

La méthode des différences finies est souvent limitée à des cellules ou blocs rectangulaires (2D) ou parallélépipédiques (3D) éventuellement gigognes (emboîtés); cependant un seul type de cellules peut être utilisé à la fois dans un modèle.

Les méthodes des éléments frontières et des éléments analytiques supposent que l'hétérogénéité du domaine est relativement restreinte puisque des solutions continues et analytiques sont imposées dans les différentes régions discrétisées, par contre ces dernières peuvent être de formes complexes.

La méthode des éléments finis est la plus adaptée à représenter un domaine de grande hétérogénéité dans les 3 dimensions tout en possédant des frontières aux contours complexes; en effet les éléments proposés sont de formes diverses et ils peuvent se déformer et s'agencer de manière très souple.

Dans le cas où le système à étudier consiste en une succession verticale de couches aquifères et de couches semi-perméables (aquitards), une simulation réellement tri-dimensionnelle des écoulements en régime transitoire, implique la distinction de plusieurs couches d'éléments ou de cellules dans les aquitards, afin de calculer une variation verticale des pressions d'eau autre que linéaire ou parabolique.

atif doit être pris en compte en fonction de la  
que dans les résultats. Il sera rediscuté de cet  
la présentation du modèle d'écoulement du sous-sol  
(r. VII.).

sollicitations imposées aux nappes aquifères doivent  
en compte de la façon la plus précise possible.  
moi, dans les problèmes d'hydrogéologie appliquée au  
l (tunnels, terrassements, drains, captages, tapis  
des éléments de formes diverses doivent parfois être  
En effet, la répartition des pressions interstitielles  
a trouvée avec précision sur un domaine local très  
ne et contenant des zones de géométries complexes pour  
es les paramètres hydrodynamiques sont très contrastés  
reste du domaine.

Des galeries de pompage, situées dans une nappe aquifère  
nale, constituent un autre cas, où il est souhaitable de  
ésenter correctement et explicitement (éléments finis) ou  
licitement, une géométrie particulière à laquelle est  
juguée la sollicitation la plus importante du système. Aux  
its de pompage ou de réinjection, on fait coïncider des noeuds  
des points centraux de cellules.

D'autre part, il est nécessaire de pouvoir simuler en  
régime transitoire des aquifères à nappe libre sans modification  
du maillage. Certaines techniques exposées dans la suite  
(IV.4.7.) permettent ce type d'analyse en utilisant les méthodes  
des différences finies et des éléments finis. Ces techniques  
sont indispensables lorsque le domaine à étudier est régional,  
comportant plusieurs centaines, milliers ou millions d'éléments  
(ou cellules), car elles évitent un réajustement du maillage en  
fonction de la nouvelle position de la surface libre après chaque  
pas de temps.

Sans entrer dans beaucoup de détails, il est évident que  
du raffinement du maillage, dépendent la stabilité et la  
précision des résultats. La taille et la forme des cellules ou  
éléments peuvent influencer le résultat trouvé.

La figure IV.1. reprend comme exemple, un essai de  
pompage pour lequel sont calculés la solution analytique de  
Theis, la droite d'approximation logarithmique de Jacob, des  
solutions numériques calculées par différences finies avec des  
maillages de plus en plus fins (FD1, FD2, FD3, FD4) et une  
solution numérique calculée par la méthode des éléments finis  
(FE1).

On constate, dans le cas illustré ici, qu'un maillage  
très fin, à proximité immédiate du pompage (distance < 10 m)  
génère des résultats plus précis; par contre un maillage très  
dense au-delà de 10 m (comme pour FE1 entre 10 et 100 m)  
n'apporte pas beaucoup d'informations supplémentaires.

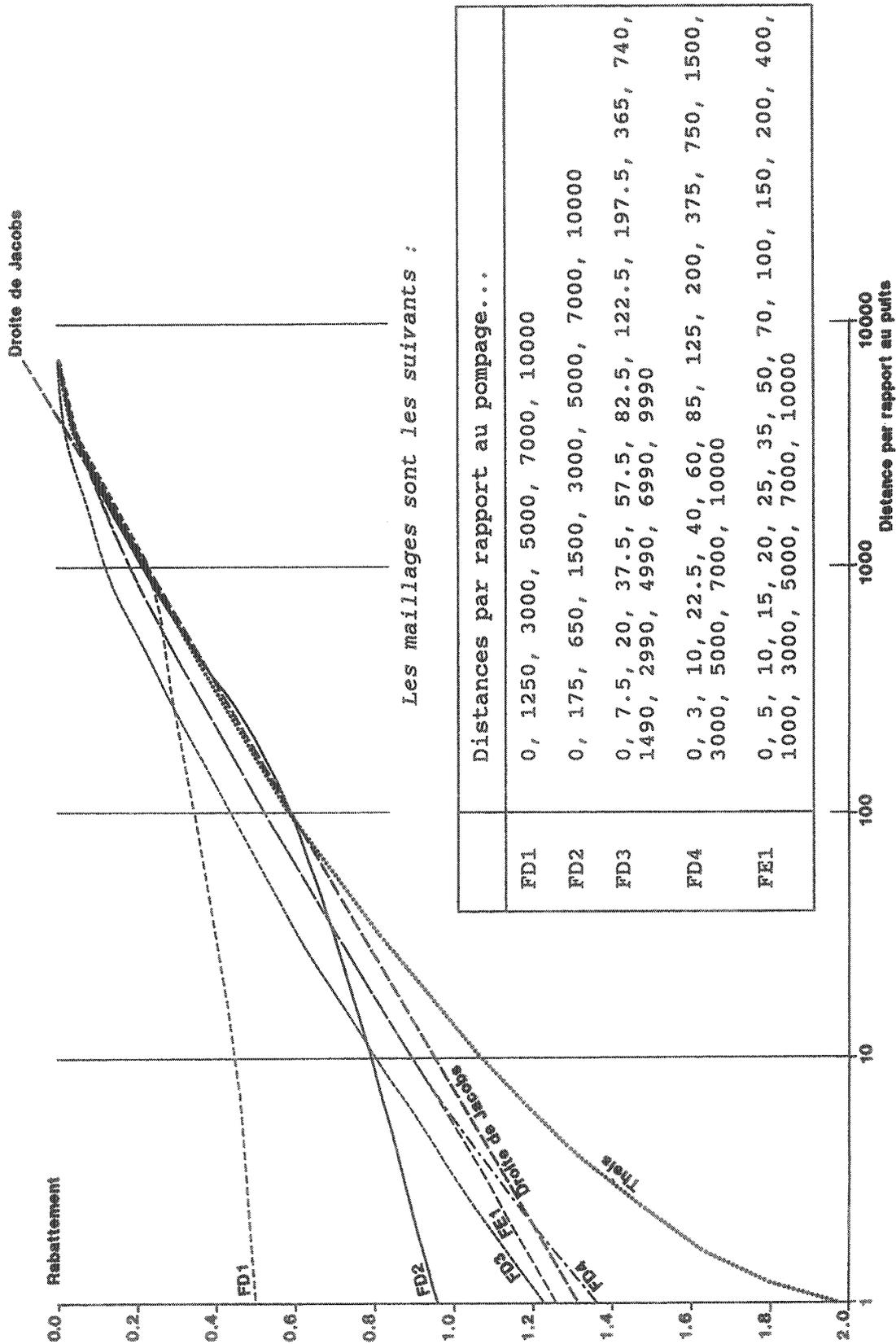


Figure IV.1. : Influence de la densité du maillage sur les rabattements<sub>2</sub> calculés autour d'un puits de pompage (T = 0.116 m/s, Q = 0.116 m<sup>3</sup>/s, nappe captive, S = 0.001, t = 64800 s).

La précision de la solution calculée peut être mise en rapport avec la dimension des cellules ou éléments ainsi qu'avec la taille des pas de temps utilisés (cfr. IV.3.) . Un processus physique, caractérisé par de fortes variations spatiales sur une petite distance, sera difficilement simulé avec précision si le maillage est composé de grandes cellules (ou éléments). Pour un problème 1D, en régime permanent d'écoulement, traité par la méthode des différences finies, Bear & Veruijt (1987) ont démontré (en développant  $d^2f/dx^2 = 0$  en série de Taylor) que par l'expression numérique approximant la dérivée seconde, on commet une erreur qui est proportionnelle au carré de la taille de la maille (en prenant l'hypothèse d'une maille régulière).

La dépendance des résultats calculés par rapport à la densité du maillage, laisse deviner que certains effets d'anisotropie obtenus dans les résultats peuvent être induits uniquement par une anisotropie dans la densité du maillage ou par le choix de formes d'éléments (cellules) favorisant l'une ou l'autre direction. Lors de la discrétisation d'un problème, il faut veiller à éviter ces effets, qui dans certains cas extrêmes peuvent modifier totalement les résultats.

#### IV.2.2. DISCRETISATIONS EN CELLULES OU BLOCS POUR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Traditionnellement en hydrogéologie, la méthode des différences finies est limitée à l'utilisation de cellules rectangulaires (2D) ou parallélipédiques (3D) avec éventuellement l'emboîtement gigogne de celles-ci.

Pour représenter des problèmes à la géométrie simple et régulière, comme à la figure IV.2., aucun problème majeur n'est rencontré. Cependant, pour tenir compte de l'infiltration due à la rivière (figure IV.2.), on calcule le coefficient d'infiltration ( $l_r$ ) comme suit :

$$l_r = \frac{K_z}{d_r} \cdot \frac{A_r}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (IV.1.)$$

- où  $K_z$  est la perméabilité du fond de la rivière  
 $d_r$  est l'épaisseur du fond de la rivière  
 $A_r$  est la surface réelle où l'infiltration a lieu (surface couverte par la rivière)  
 $\Delta x \cdot \Delta y$  est la surface de la cellule à laquelle sera affecté le coefficient d'infiltration.

On affecte à l'ensemble de la cellule, une infiltration qui n'est effective en réalité que sur une zone plus restreinte; on étale cette infiltration. Ce type d'approximation (faisant partie de l'idéalisation du système à représenter) peut être la cause de grosses imprécisions. Dans le cas du modèle de la Hesbaye, nous verrons (cfr. VI.) comment la discrétisation inadéquate des galeries de pompage peut être pénalisante pour les résultats du modèle.

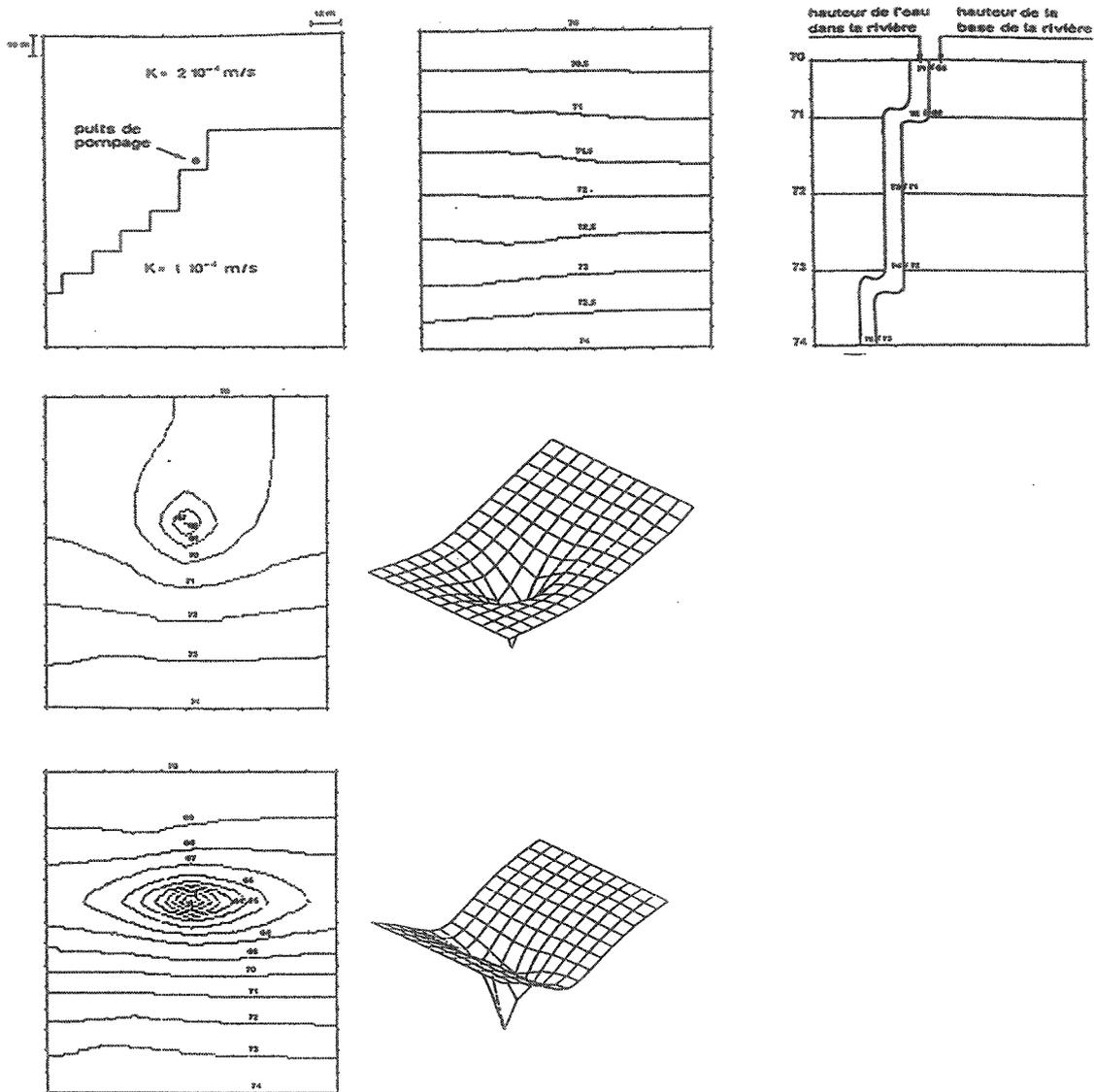


Figure IV.2. : Simulation par la méthode des différences finies, d'une nappe cylindrique, avec deux zones de perméabilité, un pompage ( $Q = -0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ ), une rivière à partir de laquelle des infiltrations ont lieu et une infiltration uniforme de  $1.59 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s par m}^2$ . Les potentiels sont imposés au Nord et au Sud; les frontières latérales sont imperméables. Les résultats de la simulation sont montrés pour le cas isotrope et pour une anisotropie  $K_{yy} = 0.2 K_{xx}$

Pour les problèmes de très grandes dimensions et peu affectés par des hétérogénéités locales, la méthode des différences finies est très souvent appliquée avec succès. Elle constitue de ce fait (et de par sa simplicité numérique et sa faible consommation en C.P.U.) la méthode quasi exclusivement utilisée en réservoir pétrolier (figure IV.3.).

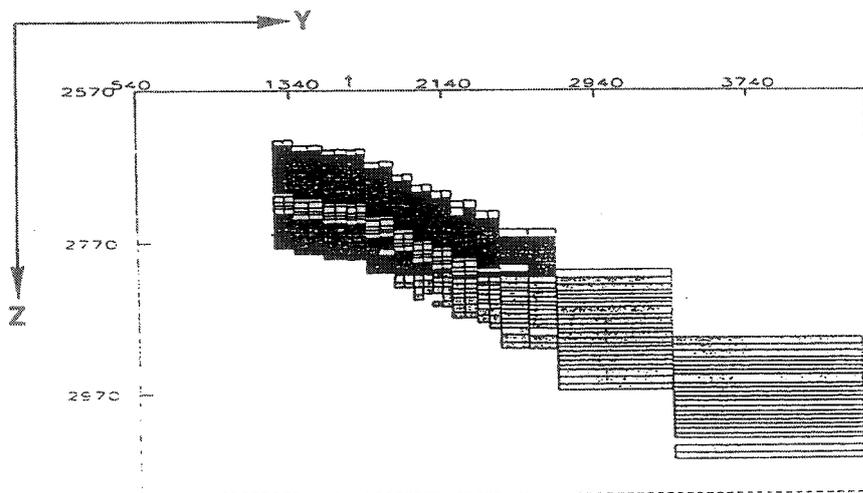
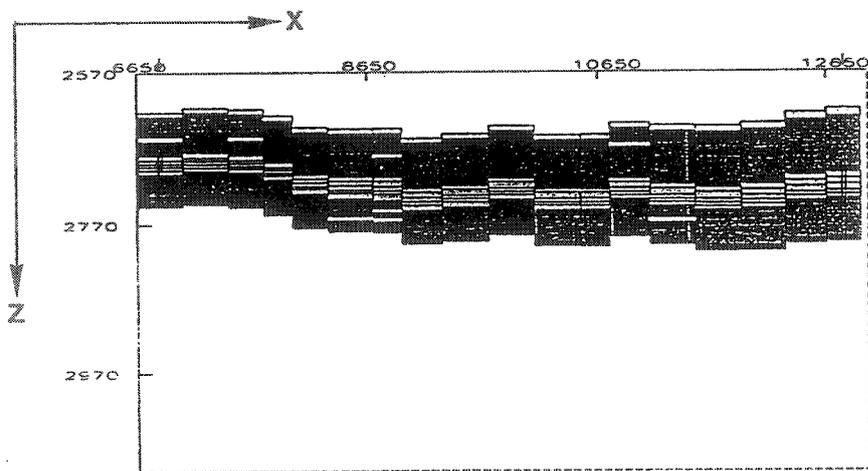
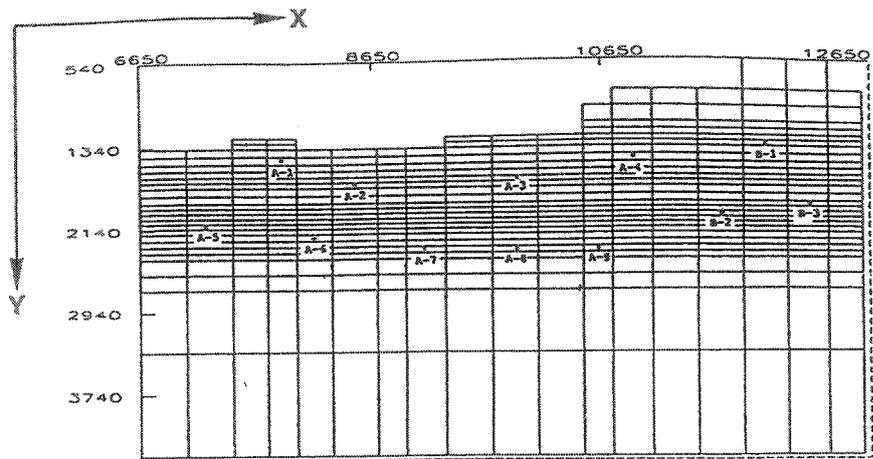


Figure IV.3. : Discretisation en blocs d'un réservoir pétrolier de la Mer du Nord pour la simulation par différences finies (d'après Qi, 1991).

De nouvelles techniques ont été développées (en reservoir engineering) afin de permettre la discrétisation d'un maillage localement plus détaillé (Local Grid Refinement (L.G.R.)). De nouvelles formes de blocs sont testées (Aziz & Palagi, 1991) et des techniques de décomposition du domaine sont étudiées avec tous les problèmes liés aux choix des conditions aux limites (Nacul, 1991).

Les maillages utilisés d'habitude sont alignés sur des systèmes de coordonnées orthogonaux, cartésiens, cylindriques ou curviliéniens entraînant les inconvénients suivants :

- il est difficile de discrétiser finement une zone sans générer une multitude d'autres blocs dans des zones où cela n'est pas nécessaire;
- il n'est pas aisé de combiner des maillages de différents types (i.e. cartésien et cylindrique près des puits);
- la simulation des zones proches des puits est peu précise;
- il est difficile de choisir un maillage dont l'orientation ne provoque pas un effet d'anisotropie.

Basée sur des travaux de Heinemann et al. (1983 et 1989), Aziz et Palagi (1991) proposent une des premières grilles utilisée en différences finies par Tyson et Weber (1964) composée de polygones de Voronoï (1908), similaires à ceux de la méthode de Theissen (utilisés en hydrogéologie pour le calcul des précipitations). Ils généralisent cette approche pour utiliser des polygones de formes diverses (figure IV.4.). Ces auteurs étudient actuellement de façon approfondie toutes les influences provoquées sur les résultats, par l'emploi de telle ou telle grille dans la simulation de situations classiques d'exploitation de réservoir pétrolier.

D'autre part, pour tenir compte d'hétérogénéités locales dans la simulation des réservoirs, les techniques statistiques sont de plus en plus utilisées, en simulant différentes réalisations équiprobables de la géométrie du réservoir, respectant toutes les données géologiques existantes (Matheron et al. (1987), Eschard et al. (1991)). Cependant, ce type de techniques, appliquées à des réservoirs régionaux de grande taille, demandent de nombreux passages sur ordinateur, consommant un temps C.P.U. très important pour des résultats souvent décevants dans la pratique (Henriquez, 1991).

Par conséquent, les techniques de "Local Grid Refinement" (L.G.R.) gardent toute leur importance et elles sont développées en parallèle à celles opérant la décomposition du domaine.

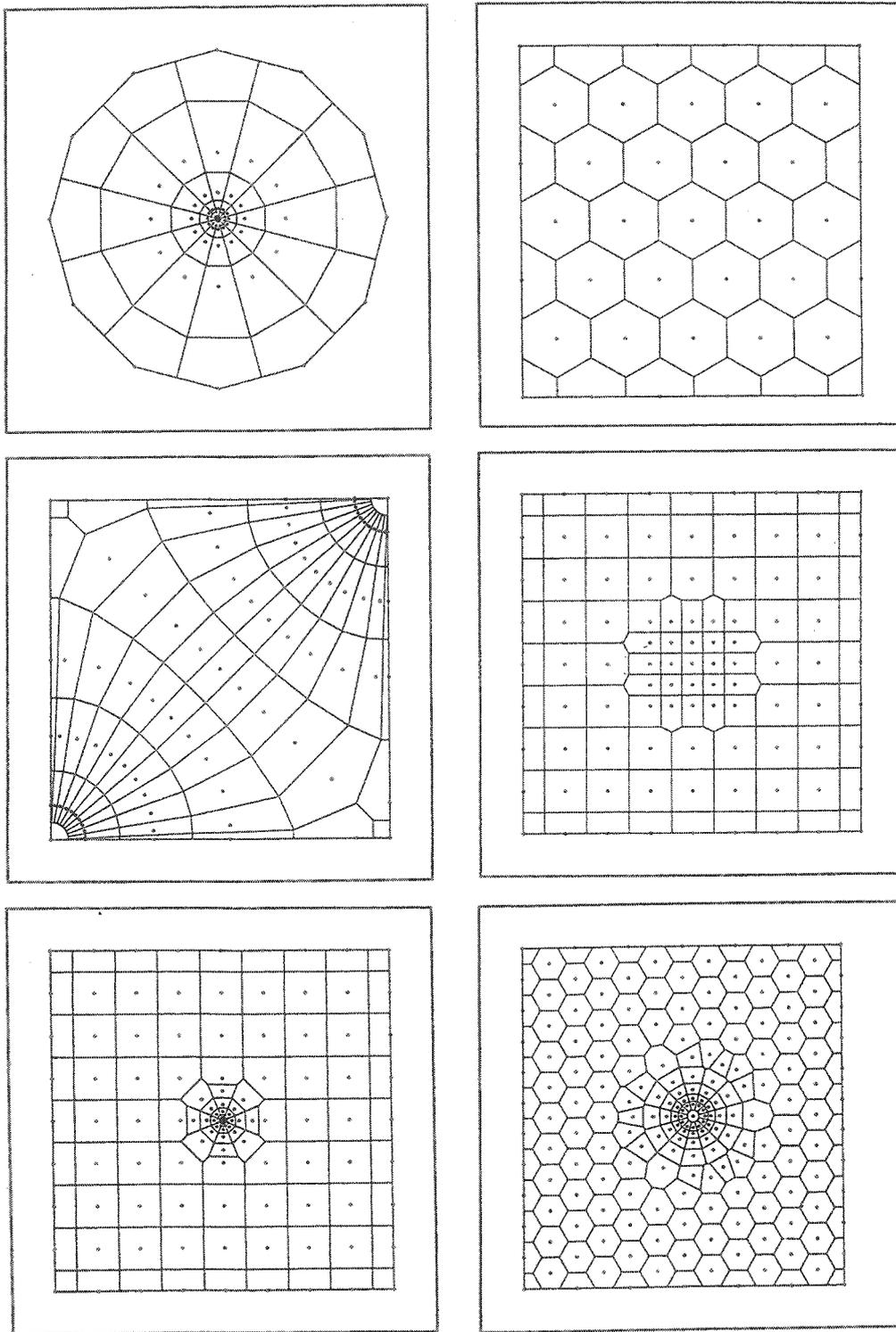


Figure IV.4. : Maillages utilisant des polygones de Voronoi de différents types: cylindriques, hexagonaux, curvilinéaires, avec raffinement local, cartésiens "hybrides" et hexagonaux hybrides (d'après Aziz & Palagi, 1991).

En effet, durant la calibration ou le calcul prévisionnel d'un réservoir, il est courant qu'il soit nécessaire d'étudier plus en détail le comportement d'une partie de celui-ci.

Ce type de situation peut se manifester pour différentes raisons :

- une séparation géologique;
- des configurations de pompages faisant en sorte que la densité de ceux-ci est très variable;
- des déphasages dans le temps concernant le début des pompages.

Pour prendre en compte correctement les interactions avec le reste du réservoir, des simulations de l'ensemble du réservoir sont généralement réalisées, mais elles sont coûteuses.

Il est donc souhaitable de pouvoir effectuer le calcul dans des parties du domaine avec des conditions aux limites fournies par le comportement du reste du réservoir. La combinaison de possibilités de discrétisation détaillée localement (L.G.R.) et de décomposition du domaine (figure IV.5.), permet de travailler de cette façon.

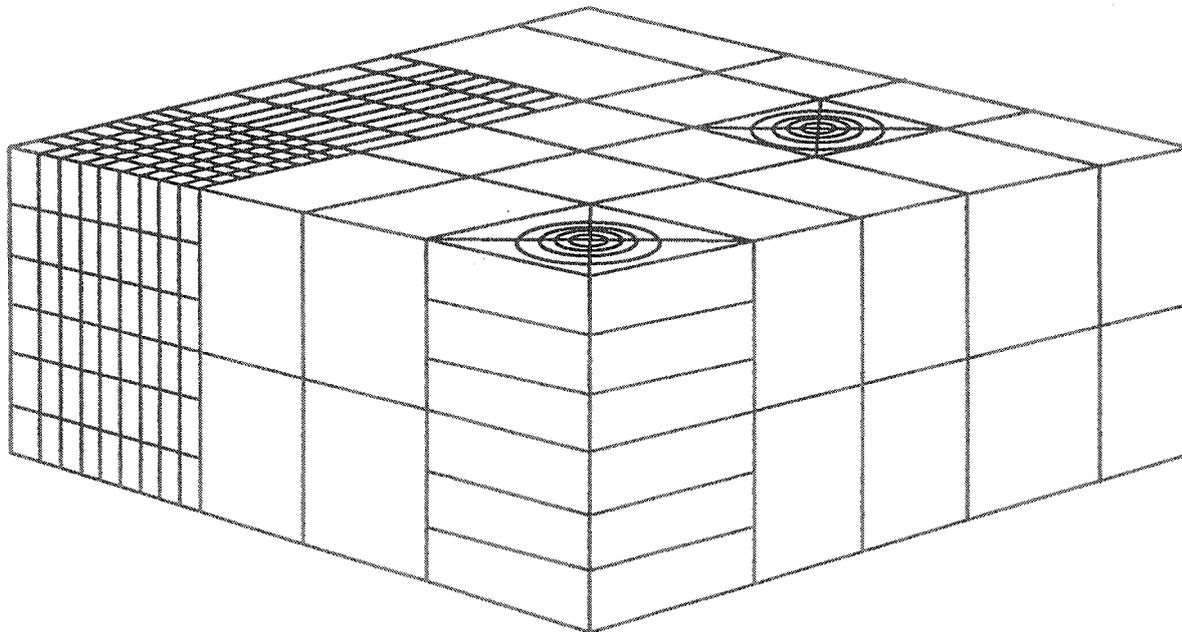


Figure IV.5. : Techniques de discrétisation détaillée locale (Local Grid Refinement) et de décomposition du domaine (d'après Bratvold, 1991).

La procédure suivie dans ce genre d'approche est décrite par Bratvold (1991) :

- (1) simulation de l'ensemble du problème, en utilisant un maillage grossier.
- (2) utilisation des valeurs calculées en (1) pour estimer les conditions aux frontières des zones qui seront détaillées.
- (3) simulation éventuellement en parallèle (parallel processing) des différentes zones où le maillage a été détaillé.  
→ haute résolution obtenue dans chacune de ces régions (petits pas de temps, pas de temps différents dans chaque région, etc...)
- (4) actualisation des données pour la simulation globale, en utilisant les résultats calculés en provenance des zones détaillées.

Un des problèmes majeurs consiste donc à attribuer aux différentes régions résultant de la décomposition du domaine, des conditions aux limites pas trop éloignées de la réalité (figure IV.6.).

Nacul (1991) propose des procédures itératives pour le calcul de ces conditions aux frontières en constatant l'influence de la décomposition du domaine sur la matrice de résolution du système. Des procédures de résolution des différentes zones, en série ou en parallèle sont présentées à la figure IV.7.. La convergence de ces procédures peut être accélérée par des techniques :

- (a) de préconditionnement des conditions aux frontières où des premières approximations de celles-ci sont issues de la résolution du système global;
- (b) de recouvrement des frontières, où toute une zone comprenant la frontière est couverte par au moins deux régions issues de la décomposition du domaine
- (c) de relaxation, via l'utilisation d'un paramètre

$$\omega = \Delta p / \Delta p_1$$

où  $\Delta p$  est la variation de pression après convergence dans la région concernée  
 $\Delta p_1$  est la variation de pression après la 1ère itération dans la région concernée

Tous ces développements ne sont pas utilisés actuellement en hydrogéologie car ils n'ont jusqu'à présent pas encore été jugés nécessaires vu l'emploi généralisé de la méthode des éléments finis lorsque le réservoir est hétérogène et de forme complexe. Ils méritent d'être signalés car ils contribueront certainement à améliorer les programmes utilisés dans le futur en permettant notamment le "parallel processing".

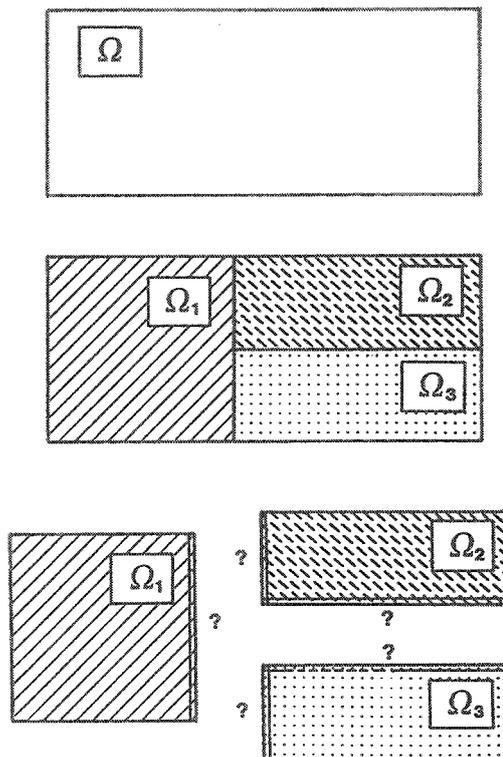


Figure IV.6. : Décomposition du domaine et problème des conditions aux limites internes.

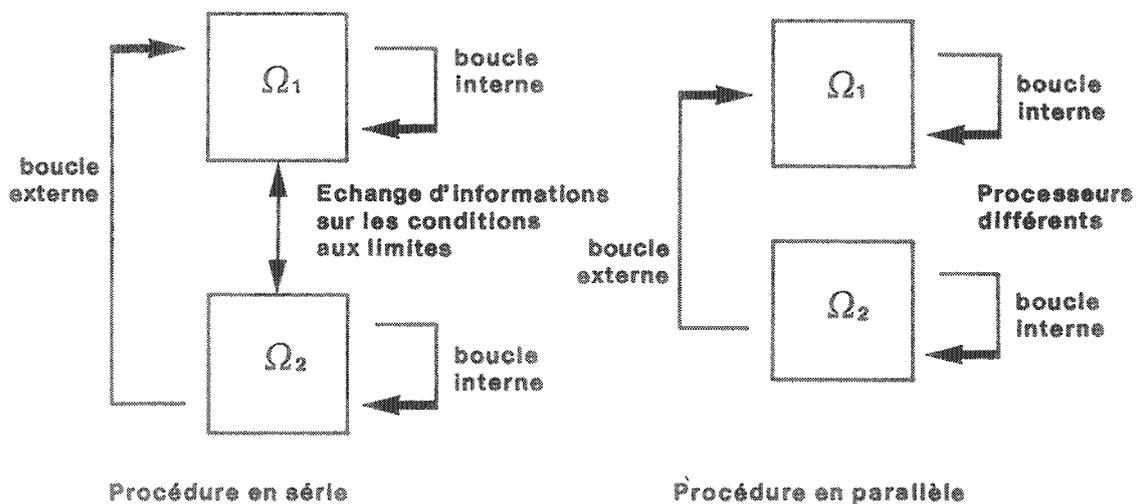


Figure IV.7. : Procédures de résolution en série et en parallèle. La boucle externe de la procédure en parallèle demandera plus d'itérations car il n'y a pas d'échange d'information entre les 2 processeurs (d'après Nacul, 1991).

Comme signalé précédemment (II.4.), pour les problèmes étudiant la dispersion de polluants, les grilles traditionnelles de la méthode des différences finies ne conviennent pas, car elles introduisent une dispersion numérique importante.

Des recherches ont été menées, non seulement pour utiliser des techniques de décentrage et des schémas d'ordre supérieur de différenciations "upwind" (Patel & Markatos, 1986), mais également afin de permettre des techniques de discrétisation détaillée localement (L.G.R.) se déplaçant avec les zones à forts gradients de la variable calculée (Thompson & Ferziger, 1989 et Dannenhoffer, 1988). Il s'agit d'une approche Lagrangienne en utilisant des maillages gigognes, générés automatiquement et se déplaçant avec les zones de forts gradients (figure IV.8.) (Gaspar et al., 1991). A chaque pas de temps, une méthode de "particle tracking" repère, à l'aide de la génération d'un maillage gigogne, les points Lagrangiens (se mouvant avec l'écoulement). La dispersion est ensuite résolue en utilisant ce maillage gigogne, qui est structuré de manière à ce que le système puisse être résolu par le même code quelque soit le maillage obtenu à chaque pas de temps.

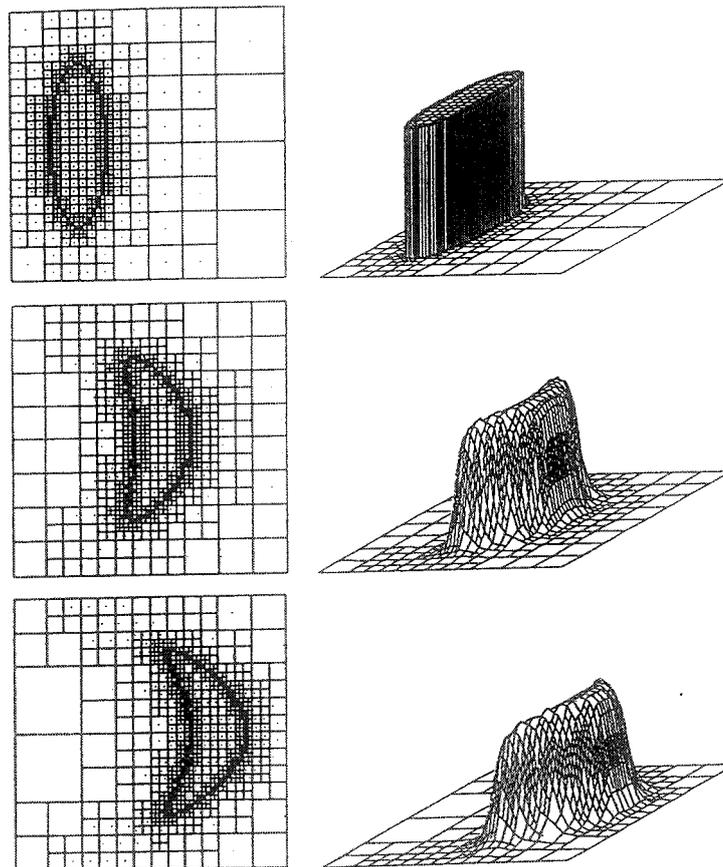


Figure IV.8. : Simulation de la dispersion d'un polluant, dans des conditions d'écoulement parallèle, en utilisant des maillages gigognes mobiles (d'après Gaspar et al., 1991).

Il n'est pas dans les objectifs de ce travail de décrire plus en détail ce type de techniques, remarquons cependant qu'elles ne sont appliquées, jusqu'ici, que sur des domaines dont les caractéristiques (perméabilité, coefficient d'emménagement spécifique, dispersivités...) sont homogènes. La prise en compte d'hétérogénéités entraînerait sans doute des contraintes supplémentaires sur ces maillages, difficiles à introduire dans ces techniques se servant de référentiels de Lagrange.

#### IV.2.3. DISCRETISATIONS EN ELEMENTS POUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis se caractérise par des bibliothèques d'éléments bien fournies (figure IV.9.) permettant de considérer un grand nombre de situations particulières, pouvant être rencontrées lors de la simulation des réservoirs souterrains. Cette grande flexibilité dans la forme et la taille des éléments a fait en sorte que les techniques (IV.2.2.) de discrétisation locale détaillée et de décomposition du domaine, bien qu'existantes (Ewing & Lazarov, 1989), n'ont été que peu ou pas utilisées en hydrogéologie jusqu'à présent. Comme signalé précédemment (II.4.2.), la méthode des éléments finis est tout particulièrement bien adaptée à la discrétisation de problèmes locaux d'hydrogéologie appliquée au Génie Civil, où des hétérogénéités aux contrastes très marqués (dans les valeurs des paramètres) et des frontières à la géométrie complexe peuvent être représentés avec un maximum de précision par des éléments "tuyaux" 1D, des éléments "coques" 2D, etc...

D'un point de vue pratique, lors d'un maillage tri-dimensionnel régional utilisant, par exemple, des éléments isoparamétriques à 8 noeuds (briques dans le cas le plus courant), on considère des couches successives de noeuds, la répartition de ceux-ci étant constante dans leur représentation horizontale (figure IV.10.). D'une couche de noeuds à une autre, seule la coordonnée verticale change. Les numéros des noeuds et des éléments sont calculés d'une couche à l'autre par incrémentation.

Ces couches successives de noeuds épousent les limites des différentes entités géologiques distinguées et elles ne sont donc pas forcément horizontales. Si un biseau intervient dans la géométrie du réservoir, des éléments sans épaisseur (et n'intervenant pas dans le calcul) peuvent être introduits afin de conserver une incrémentation régulière de couche à couche (figure IV.10.).

Cette technique permet au maillage, vu dans le plan horizontal, de tenir compte de toutes les discontinuités et changements géologiques intervenant dans le volume discrétisé (figure IV.11.).

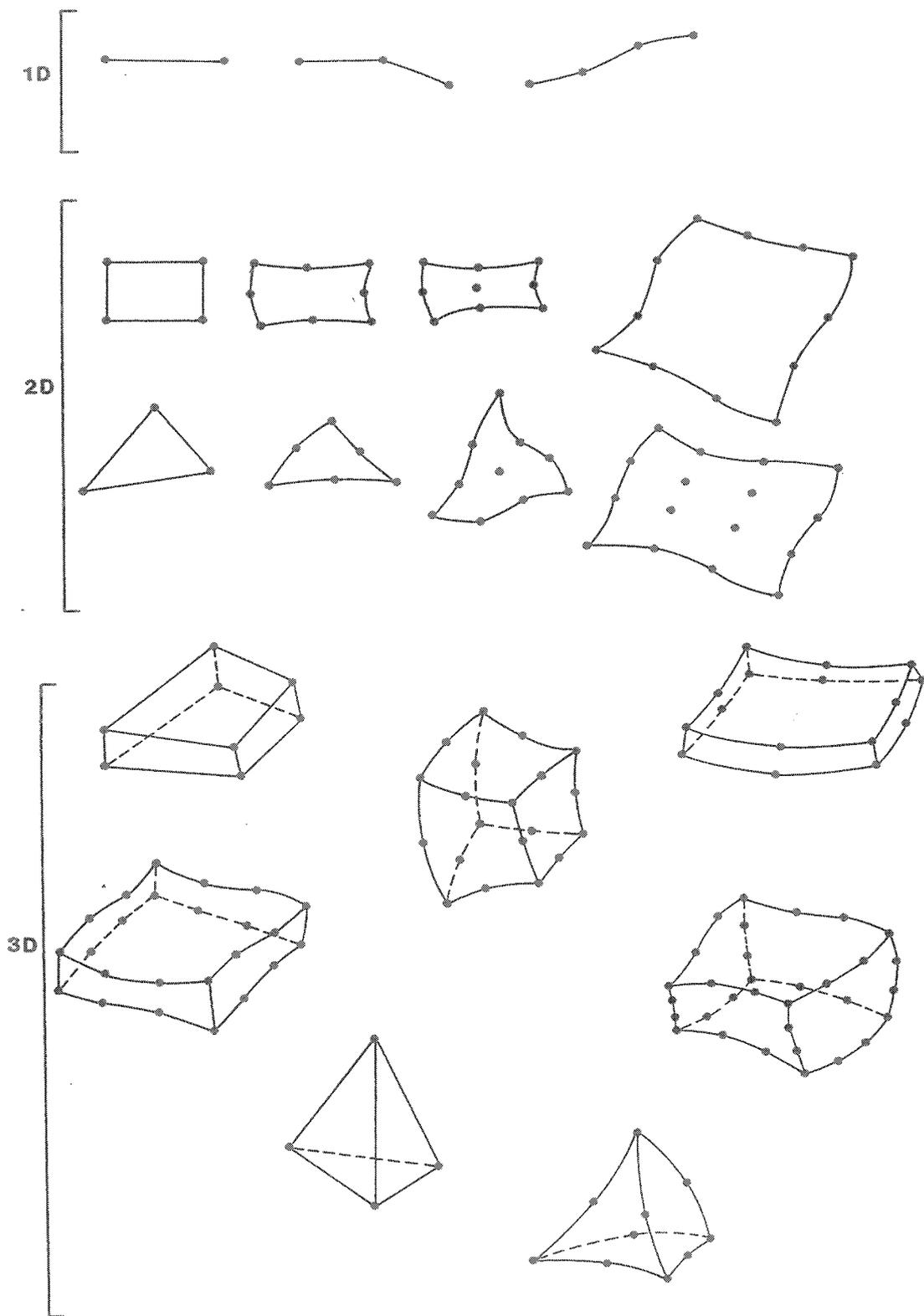


Figure IV.9. : Divers éléments finis à 1, 2 ou 3 dimensions.

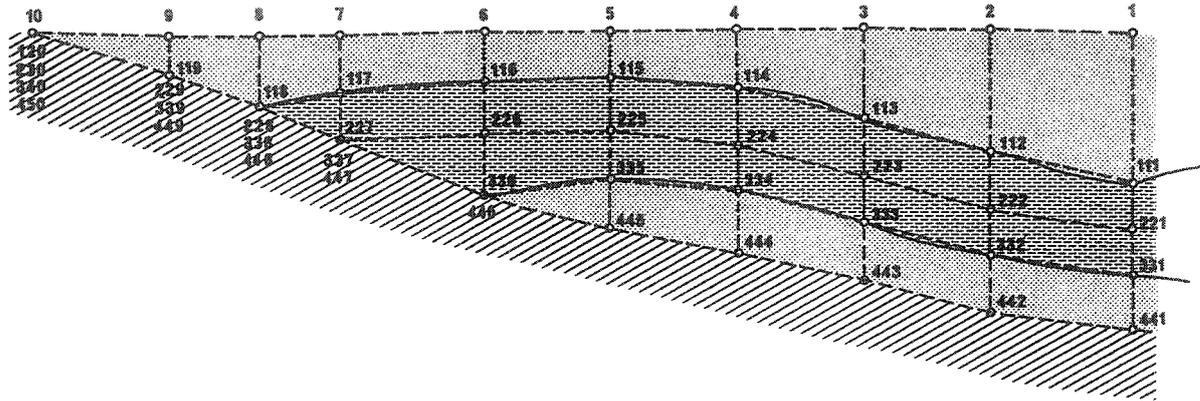


Figure IV.10. : Coupe verticale dans un maillage tridimensionnel avec lignes verticales de noeuds et incrémentation.

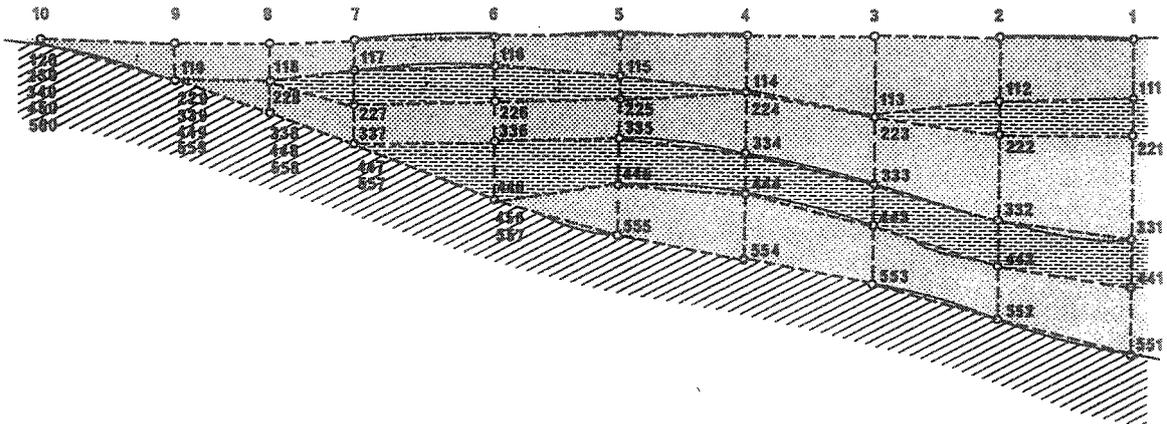


Figure IV.11. : Coupe verticale dans un maillage tridimensionnel avec lignes verticales de noeuds : le maillage tient compte de tous les changements géologiques intervenant dans le volume discrétisé.

Pour un modèle d'écoulement, la répartition de la perméabilité et du coefficient d'emmagasinement spécifique peut se faire de manière très souple; à la limite, on pourrait définir autant de couples de paramètres qu'il y a d'éléments dans la structure. En pratique, pour faciliter cette répartition, on définit souvent des "matériaux" différents, en regroupant sous le même matériau les éléments affectés des mêmes paramètres (figure IV.12.). Un exemple très complet de discrétisation 3D d'un aquifère régional sera illustré dans le cadre de la simulation de la nappe de Hesbaye (chapitre VI).

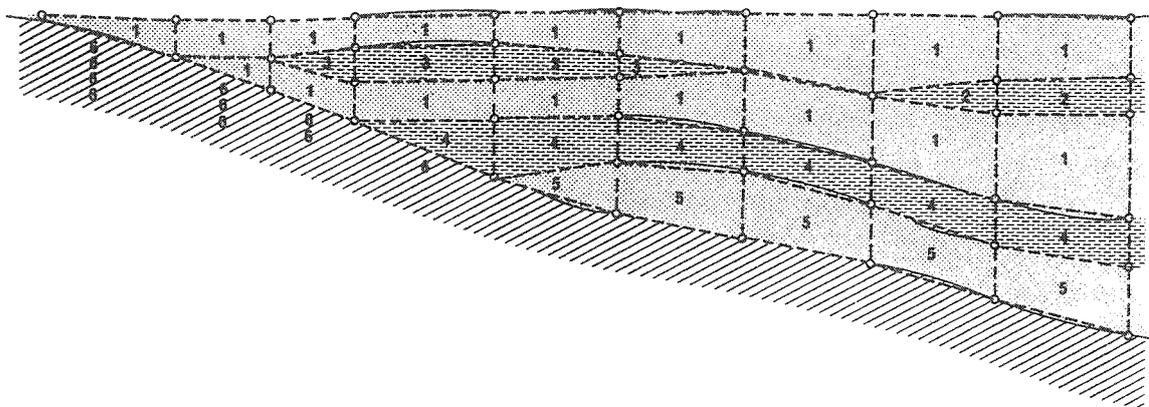


Figure IV.12. : Coupe verticale dans un maillage tridimensionnel : matériaux différents  
 matériau 1 : aquifère  
 matériau 2 : semi-perméable  
 matériau 3 : autre semi-perméable  
 matériau 4 : autre semi-perméable  
 matériau 5 : autre aquifère  
 matériau 6 : matériau inexistant faisant en sorte que ces éléments sans épaisseur ne soient pas pris en compte

#### IV.2.4. DISCRETISATIONS EN REGIONS POUR LES METHODES DES ELEMENTS FRONTIERES ET DES ELEMENTS ANALYTIQUES

De par son principe, la méthode des éléments frontières requiert la discrétisation des frontières du domaine à modéliser. On discrétise des surfaces lorsqu'il s'agit d'une simulation 3D et des courbes lorsque le problème se ramène à 2 dimensions. Les valeurs calculées de la variable varient de façon continue à l'intérieur des régions et toutes les approximations de géométrie, d'hétérogénéité... doivent intervenir sur les frontières de ces régions. Chaque région doit être homogène et donc si l'hétérogénéité du domaine est grande, les petites régions discrétisées s'apparentent virtuellement à un maillage d'éléments finis. Cependant, la méthode des éléments frontières permet de discrétiser très élégamment des domaines tendant vers l'infini pour les cas suivants :

- problèmes comportant des conditions aux limites devant être reportées à l'infini par rapport à la zone de la sollicitation (ce type de problème peut être rencontré assez fréquemment dans les modélisations d'aquifères régionaux);
- problèmes comportant des régions semi-infinies, homogènes et non sollicitées (ce type de problème peut être rencontré en hydrogéologie appliquée au Génie Civil).

Il faut souligner néanmoins l'exceptionnelle rareté dans la littérature, d'exemples présentant des simulations d'écoulements en milieu poreux saturé, à une échelle régionale par la méthode des éléments frontières.

La méthode des éléments analytiques, utilise des solutions analytiques valables dans chaque région, pour les superposer. Ces régions doivent donc être homogènes et les formes des limites doivent être régulières. La discrétisation consiste à délimiter les zones susceptibles de remplir ces conditions.

Une hétérogénéité importante du domaine ou même son irrégularité sont difficiles à discrétiser et rendent inapplicable cette méthode. Par contre, elle peut être utilisée pour des calculs de dégrossissement, en simulant des aquifères régionaux ou supra-régionaux de caractère très homogène (figure IV.13.). Il reste aux auteurs de telles études à rester prudent dans l'interprétation des résultats. Tout comme la méthode des éléments frontières, la méthode des éléments analytiques s'accommode particulièrement bien d'un domaine semi-infini ou aux frontières repoussées à l'infini.

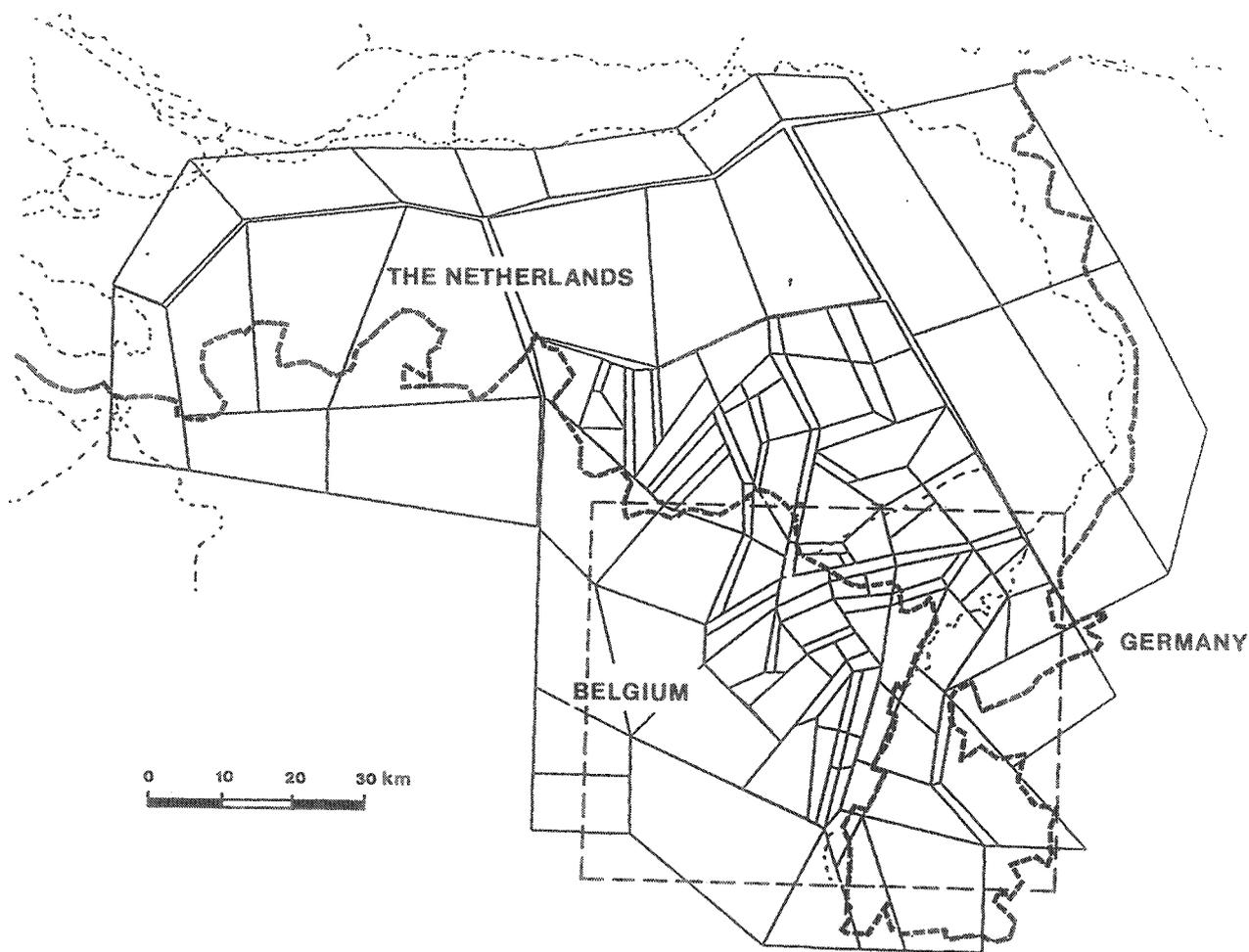


Figure IV.13. : Discretisation en éléments analytiques du modèle régional du plateau de Campine (d'après Stoepker et al., 1989).

### IV.3. DISCRETISATION TEMPORELLE

Pour résoudre un problème transitoire dans le temps, il faut réaliser une discrétisation temporelle, de manière à ce que la solution du problème soit calculée en un nombre fini d'instants choisis par l'utilisateur. Les intervalles entre ces instants sont définis comme les pas de temps de la simulation.

Le choix des pas de temps est soumis aux impératifs suivants :

- les pas de temps doivent être choisis en respectant des critères numériques garantissant la précision, la stabilité et la convergence de la solution.
- la précision dans le temps des données relatives aux sollicitations; il est inutile de calculer des résultats tous les mois si des valeurs moyennes annuelles de pompage/réinjection sont introduites comme sollicitation.
- durant la calibration, les instants où la solution est calculée doivent si possible coïncider avec ceux pour lesquels des mesures existent. Si les mesures sont peu fréquentes, il est inutile d'avoir des pas de temps très courts.
- pour les calculs prévisionnels, les pas de temps à choisir dépendent de la précision dans le temps, désirée pour ces prévisions.
- les pas de temps ne doivent pas être trop courts afin de ne pas multiplier leur nombre, augmentant ainsi la place mémoire occupée par les fichiers de sortie, et majorant généralement le nombre total de résolutions du système d'équation.

Ce dernier impératif s'exprime en termes de critères à respecter. Ces critères varient d'une méthode numérique à une autre et surtout d'un schéma d'intégration temporelle à un autre.

Le schéma d'intégration linéaire, qui est le plus utilisé dans nos problèmes, s'exprime par :

$$h_{i,j}(t_1) = h_{i,j}(t+\Delta t) \cdot \theta + h_{i,j}(t) \cdot (1-\theta) \quad (\text{IV.2.})$$

- où  $\theta$  est le paramètre d'intégration temporelle compris entre 0 et 1
- $h_{i,j}$  est la hauteur piézométrique en un noeud (ou point central) repéré par les indices  $i$  et  $j$
- $t$  est l'instant de début du pas de temps
- $(t+\Delta t)$  est l'instant de fin du pas de temps
- $t \leq t_1 < t+\Delta t$



Pour les autres schémas d'intégration, on peut consulter Forsythe & Wasow (1960), Fox (1962) et d'autres.

Pour la méthode des éléments finis, les travaux en analyse modale de Hogge & Nyssen (1977) de l'Université de Liège, ont débouché sur l'établissement d'un critère de stabilité en considérant l'équation à 1 dimension en milieu homogène :

- inconditionnellement stable si  $\theta \geq 1/2$
- $\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\theta)\lambda}$  pour  $\theta < 1/2$  (IV.4.)

où  $\lambda$  (toujours positif) dépend exclusivement des caractéristiques du système.

Pour ce type de problème, les schémas de Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ), de Galerkin ( $\theta = 2/3$ ) et implicite ( $\theta = 1$ ) sont donc inconditionnellement stables pour tout pas de temps.

Toujours pour le même problème, Hogge (1989) illustre les phénomènes d'oscillations dans la réponse que l'on obtient en fonction de ( $\lambda$ ) et du pas de temps ( $\Delta t$ ). La figure IV.15. montre que seul le schéma implicite est inconditionnellement non oscillant. On constate également, que plus le schéma a un caractère implicite, moins le pas de temps est limité pour l'élimination des oscillations. On verra ci-après que l'emploi de grands pas de temps est également préjudiciable dans la précision obtenue.

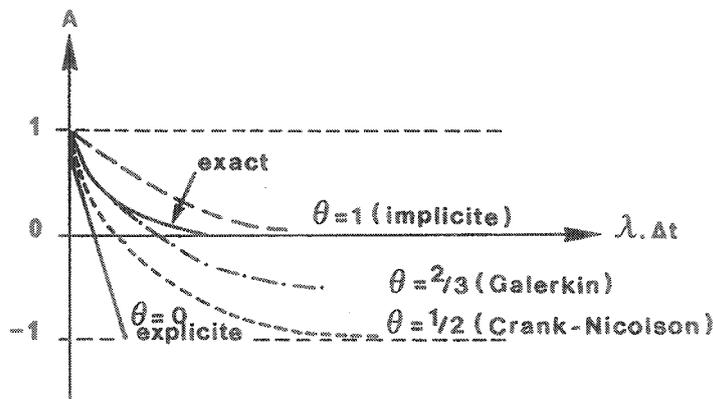


Figure IV.15. : Facteur d'amplification ( $A$ ) en fonction de ( $\lambda \cdot \Delta t$ ). Ce diagramme montre que les grands pas de temps risquent d'induire des oscillations importantes de la solution sauf dans le schéma totalement implicite.

$$A = \frac{h_{i,j}(t+\Delta t)}{h_{i,j}(t)} \quad (\text{d'après Hogge, 1981})$$

La précision des solutions calculées doit également être mise en rapport avec la taille des pas de temps utilisés. Intuitivement, on peut s'attendre que, pour un phénomène montrant de fortes variations sur un court laps de temps, il sera difficile d'atteindre une bonne précision si les pas de temps de la simulation sont grands.

Pour la méthode des éléments finis, les facteurs d'amplification exact et numérique, développés en séries de Taylor sont comparés pour chaque schéma d'intégration (Hogge, 1977). Tous les schémas sont précis au 1er ordre et seul le schéma de Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ) est précis à l'ordre 2.

Hogge (1980) obtient une représentation graphique de l'erreur sur la solution (ou sur le taux de décroissance) par un

diagramme reprenant :  $\left( \lambda \cdot \Delta t, \frac{1}{\lambda \cdot \Delta t} \cdot \ln \frac{1 + \theta \cdot \lambda \cdot \Delta t}{1 - (1 - \theta) \cdot \lambda \cdot \Delta t} \right)$ ,

figure IV.16..

$$\frac{1}{\lambda \cdot \Delta t} \ln \left( \frac{1 + \theta \cdot \lambda \cdot \Delta t}{1 - (1 - \theta) \cdot \lambda \cdot \Delta t} \right)$$

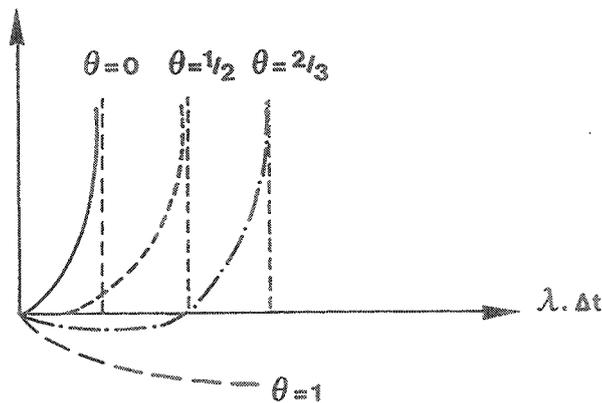


Figure IV.16. : Représentation graphique d'une image de l'erreur sur la solution (erreur sur le taux de décroissance) (d'après Hogge, 1980).

Il en déduit que :

- . pour  $\theta = 0$  , la surestimation est systématique,
- . pour  $\theta = 1/2$ , la précision est bonne si les  $\Delta t$  sont petits,
- . pour  $\theta = 2/3$ , bon compromis sur la précision,
- . pour  $\theta = 1$ , la sous estimation est systématique.

Signalons pour terminer que la "consistence" de la solution est vérifiée si l'erreur commise dans la solution numérique s'annule lorsque les pas de temps tendent vers zéro.

#### IV.4. CONDITIONS AUX LIMITES

##### IV.4.1. LIMITES DES MODELES ET LIMITES PHYSIQUES

Il est important de distinguer clairement, les limites physiques du domaine, où le processus a lieu, et les limites du modèle construit pour le simuler. Malheureusement, elles sont souvent distinctes et il faut s'assurer que les frontières imposées au modèle créent le même effet que les limites naturelles. Après identification de ces frontières, il faut que les différences éventuelles puissent être justifiées conceptuellement, pour affirmer que les limites idéalisées du modèle n'influencent pas ou très peu la solution.

Dans les études d'hydrogéologie appliquée au Génie Civil notamment, les calculs de simulation (en 2D verticales) des écoulements sous un ouvrage d'art, ont souvent des frontières latérales totalement "artificielles". Il est généralement admis pour ce type de problème qu'en repoussant les frontières à une distance égale à 3 fois l'épaisseur de la zone d'écoulement (Franke et al., 1984), l'influence sera faible sur les résultats. Ce genre d'affirmation est cependant arbitraire car l'influence dépend également de l'intensité de la sollicitation imposée à la zone modélisée et du type de conditions aux frontières choisies. Une analyse de la sensibilité du modèle par rapport à la position et au type de conditions aux frontières n'est donc pas inutile dans ce cas..

Du point de vue mathématique, chaque équation de l'écoulement résolue, donne lieu à une infinité de solutions possibles. La solution correspondant au problème étudié est celle qui vérifie les conditions aux limites liées à ce problème. Ces conditions sont donc exprimées en fonction de la variable principale: pour les écoulements en milieu saturé, la hauteur piézométrique ou la pression interstitielle.

Si on considère le procédé de "moyennisation" sur les E.V.R. (II.1.1.) pour déterminer, par exemple, la porosité du réservoir, la variation de celle-ci sera graduelle (figure IV.17.). En pratique cependant, les frontières idéalisées du modèle correspondront souvent à des surfaces délimitant un changement abrupt de la valeur du paramètre, car on les fait coïncider au maximum avec les discontinuités du système réel.

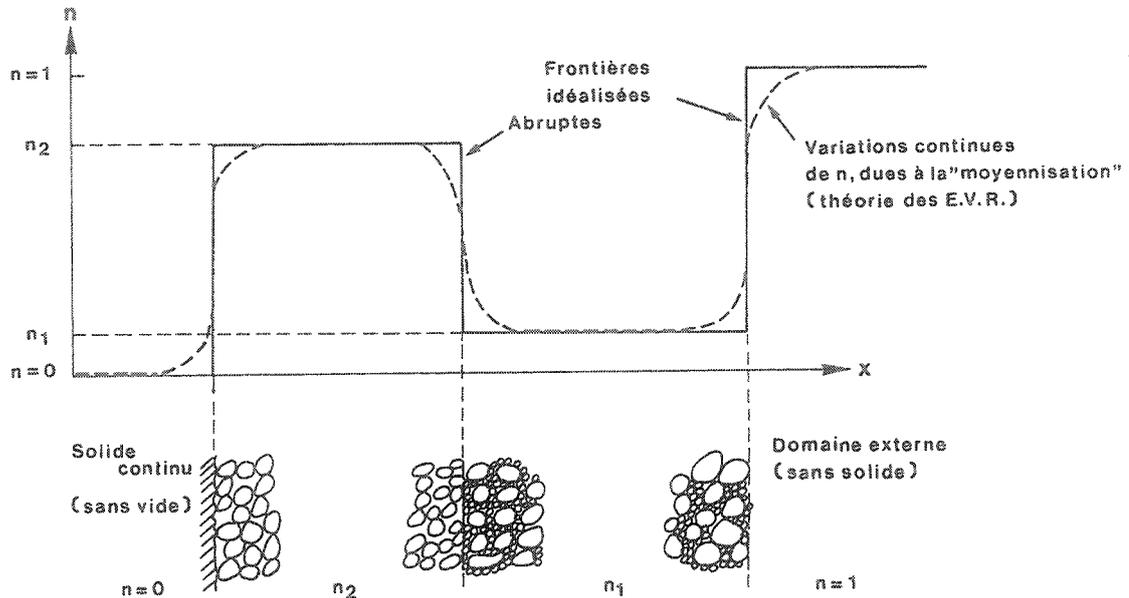


Figure IV.17. : Frontières idéalisées abruptes ne correspondant pas avec l'approche continue d'homogénéisation à l'échelle macroscopique (d'après Bear & Veruijt, 1987).

En toute généralité, les conditions aux frontières sont tirées du principe de compatibilité des flux, correspondant en mécanique du solide, à la compatibilité des déplacements. Nous distinguons différents types de conditions imposables aux frontières d'un modèle :

- les conditions de pression ou de potentiel imposé,
- les conditions de flux ou de débit imposé,
- les conditions de débit dépendant d'un potentiel,
- les conditions de surface de suintement,
- les conditions de limite entre 2 milieux poreux différents,
- les conditions de surface libre.

Le choix adéquat des conditions aux frontières exprimant mathématiquement, le mieux possible, les limites physiques du problème, influence grandement la qualité d'un modèle. C'est pourquoi, le manque d'informations relatives à la zone externe mais contiguë au domaine modélisé est parfois très préjudiciable.

Pour toute simulation en régime transitoire, il faut également définir des conditions initiales. Celles-ci sont composées des valeurs initiales de la (ou des) variable(s) principale(s) et des valeurs initiales de tous les paramètres intervenant dans les lois constitutives du modèle (parmi lesquels certains seront actualisés au cours de la simulation non linéaire).

A nouveau, le choix adéquat de ces valeurs, basé sur des données mesurées (in situ ou en labo) est très important pour la qualité de la procédure de calibration du modèle.

#### IV.4.2. CONDITIONS DE PRESSION OU DE POTENTIEL IMPOSE

Connues sous le nom de conditions de Dirichlet, elles reviennent à spécifier le potentiel (ou la pression) sur les limites où celui-ci est indépendant des flux échangés. En termes de hauteur piézométrique, ce type de condition s'exprime par :

$$h = f(x, y, z, t) \quad (\text{IV.5.})$$

où  $f$  est une fonction connue

Selon l'expression (IV.5.), cette hauteur piézométrique imposée peut varier dans l'espace et dans le temps. La spécification de ces éventuelles variations est soumise aux discrétisations spatiale et temporelle.

En pratique, ces conditions aux limites peuvent être choisies dans les cas suivants (figure IV.18.) :

- (1) au contact entre un aquifère et des eaux libres de surface (rivière, lac,...);
- (2) lorsque des lignes équipotentielles peuvent être distinguées (barrages, assèchement de fouille...);
- (3) lorsqu'une zone restreinte comprise dans un aquifère très vaste doit être modélisée, et que les flux aux limites de cette zone sont inconnus, elles doivent alors être reportées assez loin de la zone de sollicitation afin de ne pas trop influencer la solution.

Remarquons que, via ce type de limites, des flux énormes (et peut-être disproportionnés) peuvent entrer ou sortir du modèle. Quelque soit le débit pompé en un puits du modèle, les conditions de potentiel imposé, spécifiées aux limites, feront en sorte de réalimenter latéralement le système, même au-delà de ce qui est physiquement raisonnable.

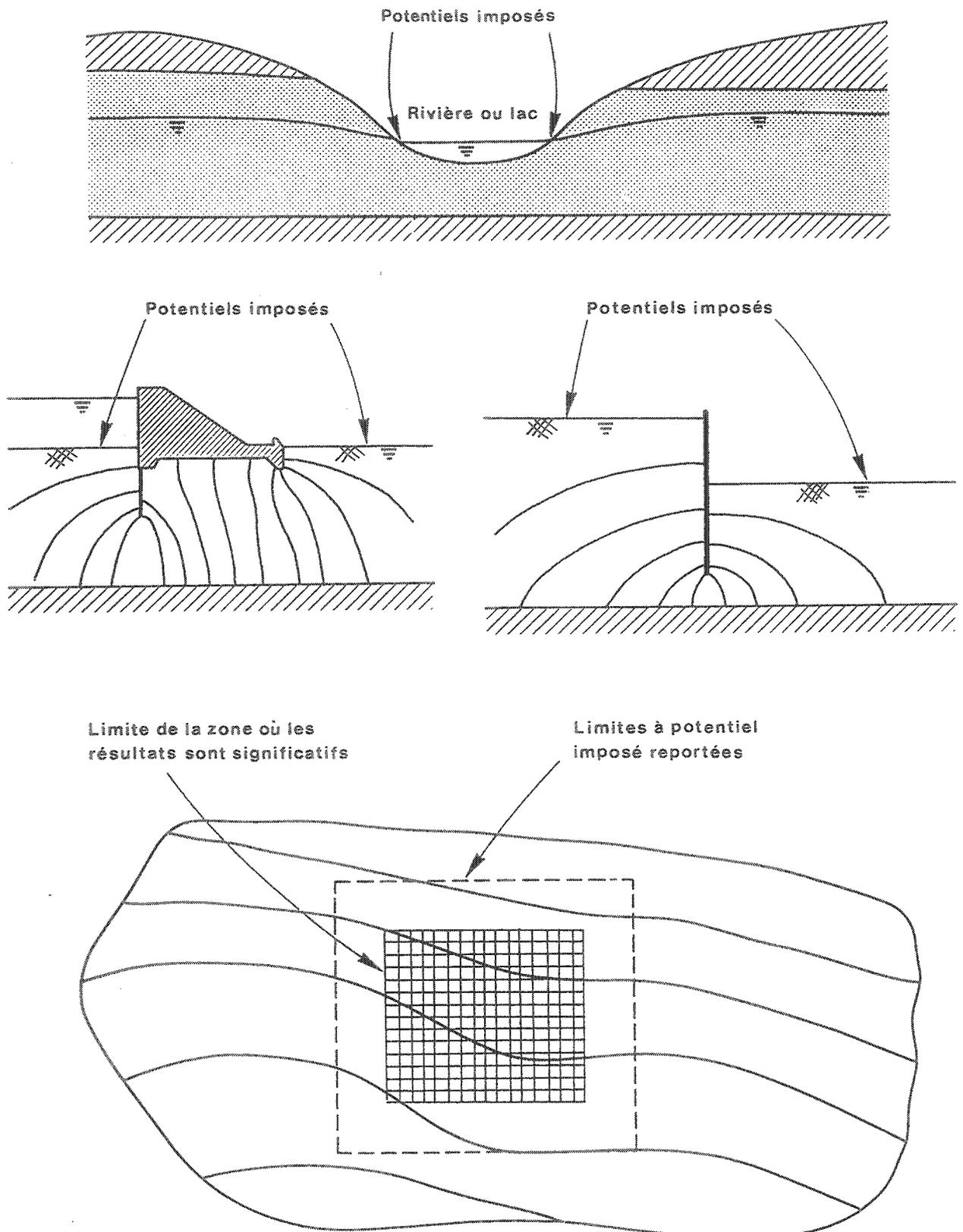


Figure IV.18. : Limites à potentiel imposé.

#### IV.4.3. CONDITIONS DE FLUX OU DE DEBIT IMPOSE

Connues sous le nom de conditions de Neumann, elles reviennent à spécifier le débit sur les limites du modèle, indépendamment des hauteurs piézométriques (ou pressions) trouvées sur celles-ci. En utilisant la loi de Darcy, c'est donc le gradient normal à la frontière qui est imposé :

$$K \frac{\partial h}{\partial n}$$

Si la limite correspond à une ligne de courant, aucun flux n'est toléré perpendiculairement, le flux spécifié est nul (condition de frontière imperméable) :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (\text{IV.6.})$$

Si un flux non nul est à spécifier, la condition sur le débit peut s'écrire :

$$\int_S K \cdot \frac{\partial h}{\partial n} dS = q(x, y, z, t) \quad (\text{IV.7.})$$

Les frontières imperméables peuvent, souvent être utilisées lorsque des contrastes supérieurs à  $10^5$  sont constatés dans les valeurs de perméabilité et que la propagation des variations de pressions interstitielles dans les couches peu perméables n'est pas l'objet de la simulation. Un milieu poreux naturel n'est jamais totalement imperméable au sens strict du terme.

Une frontière imperméable peut également être utilisée à la limite du bassin hydrogéologique de la nappe étudiée (figure IV.19.) puisqu'aucun écoulement n'a lieu perpendiculairement à cette limite, même si le milieu poreux est de même caractéristique que dans l'aquifère.

Des frontières à débit imposé sont généralement distinguées au sommet du modèle pour tenir compte d'une réalimentation de la nappe (figure IV.19.) par infiltration efficace (sauf si la réalimentation est stoppée par le "trop plein" de l'aquifère provoquant le ruissellement en surface et des conditions de potentiel imposé); il s'agit alors de conditions de débit réparti uniformément sur la surface du toit de l'aquifère.

Les principales sollicitations des aquifères, imposées par les puits et galeries de pompage (et/ou de réinjection), les tranchées drainantes etc... dont les débits sont connus, sont généralement introduites par des conditions aux débits imposés (figure IV.19.).

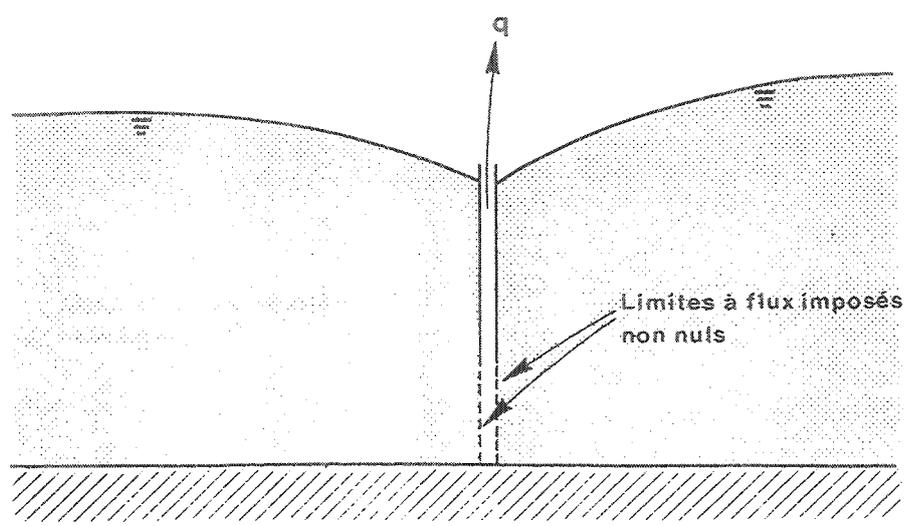
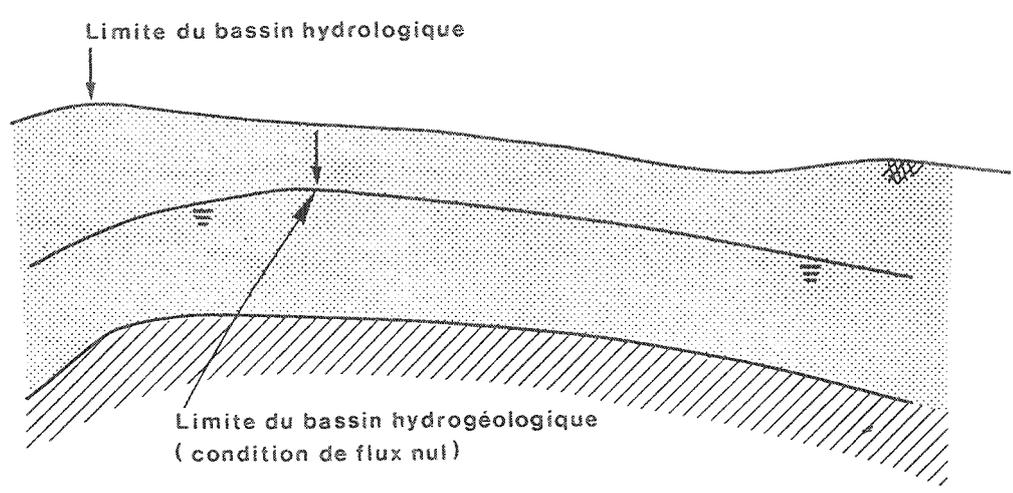
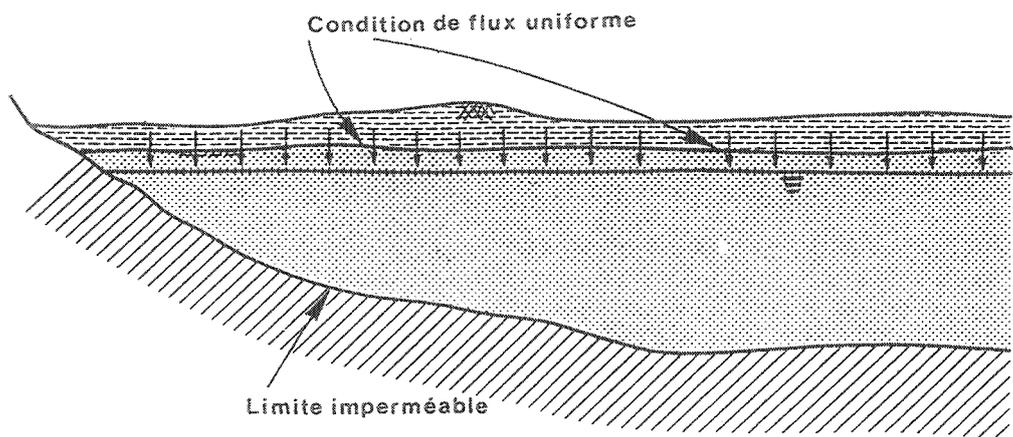


Figure IV.19. : Limites à flux imposés.

#### IV.4.4. CONDITIONS DE DEBIT DEPENDANT D'UN POTENTIEL

Dans certaines situations, il faut pouvoir représenter un flux (à travers la frontière) qui varie en fonction des changements de hauteur piézométrique à cet endroit.

L'exemple type est le flux à travers une couche semi-perméable en provenance soit d'un aquifère supérieur (non simulé), soit d'eaux de surface (figure IV.20.). La différence des potentiels ( $h_s - h$ ) induit le flux et par la loi de Darcy, on obtient :

$$q = K' \frac{(h_s - h)}{b'} \quad (\text{IV.8.})$$

où  $K'$  et  $b'$  sont les coefficients de perméabilité et l'épaisseur de la couche semi-perméable.

Pour l'aquifère simulé, on obtient :

$$-K \frac{\partial h}{\partial n} = K' \frac{(h_s - h)}{b'}$$

et donc,

$$-K \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{K'}{b'} h = \frac{K'}{b'} \cdot h_s \quad (\text{IV.9.})$$

On obtient une condition "mixte" (exprimée en fonction de  $\frac{\partial h}{\partial n}$  et  $h$ ), appelée condition de Fourier ou encore condition de Cauchy.

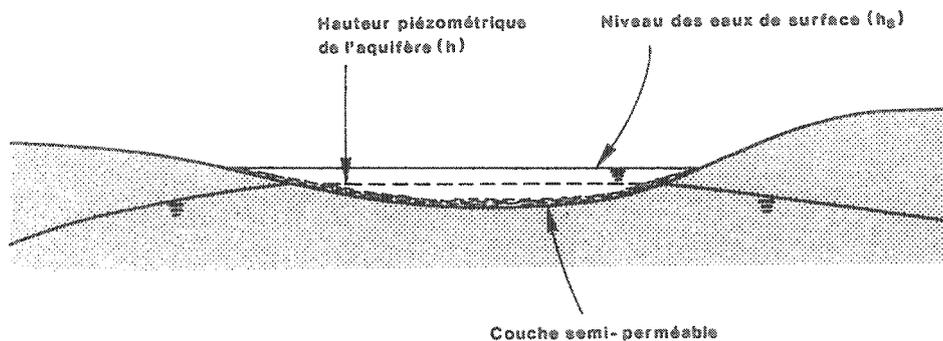


Figure IV.20. : Condition "mixte" où le débit dépend d'un potentiel.

#### IV.4.5. CONDITIONS DE SURFACE DE Suintement

Une limite entre le milieu poreux saturé et l'atmosphère, le long de laquelle un écoulement de suintement (ou parfois de l'évaporation) a lieu, est appelée une surface de suintement. Pour la simulation de ce type de limite, deux cas peuvent se produire :

- (a) La géométrie de cette surface est totalement connue et fixée. Dans cette hypothèse, on impose une condition similaire à celle d'une surface libre (cfr. IV.7.) :  $h = z$ , dictée par la géométrie du problème (figure IV.21.). Le résultat de la simulation fournira un débit de suintement.
- (b) La géométrie est variable dans le temps et dans l'espace en fonction des écoulements. Souvent, la longueur (ou la surface dans le cas 3D) de la limite de suintement n'est connue que par détermination du point (ou de la ligne) d'intersection entre une surface libre et la limite de suintement (figure IV.21.). Cette intersection n'est pas connue et fait partie de la solution à chercher. On peut résoudre ce problème par un procédé itératif où la condition exprimant le suintement consiste à alterner à chaque itération, un potentiel imposé de surface libre ( $h = z$ ) et une condition de flux imposé correspondant au débit de suintement. Ce procédé converge d'habitude si la première estimation, soit du débit de suintement, soit de la géométrie (où on impose  $h = z$ ), n'est pas trop irréaliste.

Des conditions de surfaces de suintement sont utilisées le plus souvent pour simuler le suintement à travers des murs de quai et dans un puits de pompage (figure IV.21.). Le suintement à travers un barrage en terre ou en béton est peu étudié, si ce n'est pour en déduire la manière de l'éviter. Parfois, la condition de surface de suintement est utilisée pour simuler une zone de sources (figure IV.21.)

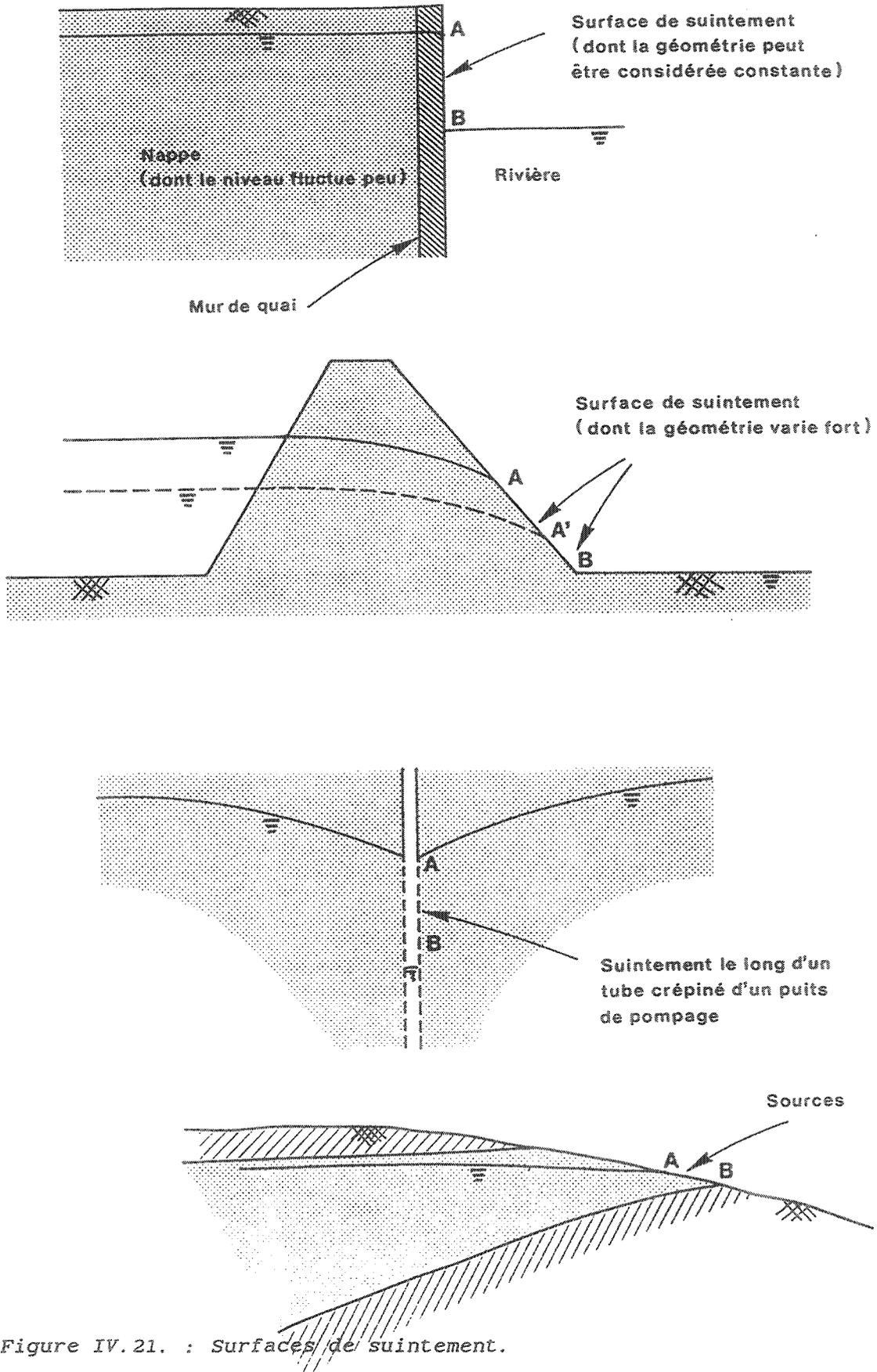


Figure IV. 21. : Surfaces de suintement.

#### IV.4.6. LIMITE ENTRE DEUX MILIEUX POREUX HOMOGENES

Comme signalé précédemment, le changement abrupt de la valeur des paramètres correspondant à une limite entre deux milieux poreux (supposés homogènes) est en contradiction avec le procédé des homogénéisations à l'échelle macroscopique via la théorie des E.V.R. (IV.4.1. et II.1.1.). Néanmoins, pour que la simulation soit la plus précise possible, les discontinuités repérées (sur lesquelles on a des données) sont prises en compte par ces changements abrupts de type de milieu poreux. Ces limites ne constituent pas des frontières externes du modèle et elles sont prises en compte, d'habitude, lors de la discrétisation géométrique du modèle (IV.2.).

Il est, cependant, bon de rappeler les conditions de continuité (ou de compatibilité) qu'elles amènent. Ces conditions étant automatiquement prises en compte par les méthodes d'intégration numérique puisqu'elles interviennent dans les fondements de celles-ci.

Pour assurer la continuité ou la compatibilité des débits à travers ce type de limite, on a :

$$K_1 \frac{\partial h_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial h_2}{\partial n} \quad (\text{IV.10.})$$

où  $n$  est la direction normale à la frontière si les milieux poreux sont isotropes

Pour la continuité des hauteurs piézométriques, on a :

$$h_1 = h_2$$

Comme signalé précédemment, si les contrastes en perméabilité sont supérieurs à  $10^5$ , on se ramène à une limite imperméable (éventuellement interne au domaine modélisé).

#### IV.4.7. CONDITIONS DE SURFACE LIBRE

Pour établir les conditions correspondant à une surface libre, il faut étudier l'interface eau-air dans le milieu poreux. La surface pour laquelle la pression d'eau macroscopique est égale à zéro (pression atmosphérique) est qualifiée de surface libre (ou surface phréatique) de l'aquifère (cfr. II.2.6. et figure II.15.).

On distingue au-dessus de cette surface, une zone capillaire où le degré de saturation ( $S_w$ ) du milieu poreux reste égal à 1. L'épaisseur de cette frange capillaire est variable selon la nature et la granulométrie du milieu poreux (figure IV.22.) et sa surface supérieure constitue ce qu'on appelle dans la littérature anglaise "the water table". Le plus souvent, l'épaisseur de la frange capillaire est supposée négligeable et la surface libre est caractérisée alors par une pression interstitielle nulle. Au-dessus, le degré de saturation diminue progressivement jusqu'à atteindre le degré de saturation résiduel à une hauteur appelée hauteur de succion ( $\psi_w$ ). L'eau n'occupe qu'une partie des vides et les autres sont remplis d'air à la pression atmosphérique. L'eau est le fluide mouillant, son angle de mouillabilité avec le solide étant positif (proche de zéro), et l'air constitue la phase non mouillante. C'est la zone non saturée; l'eau y est à une pression négative appelée pression capillaire ( $p_c$ ) (figure II.15.) qui correspond physiquement à la pression qu'il faudrait appliquer au milieu poreux partiellement saturé pour le désaturer jusqu'à la valeur de  $S_r$ . On a :

$$p_c = - \gamma_w \cdot \psi_w \quad (\text{IV.11.})$$

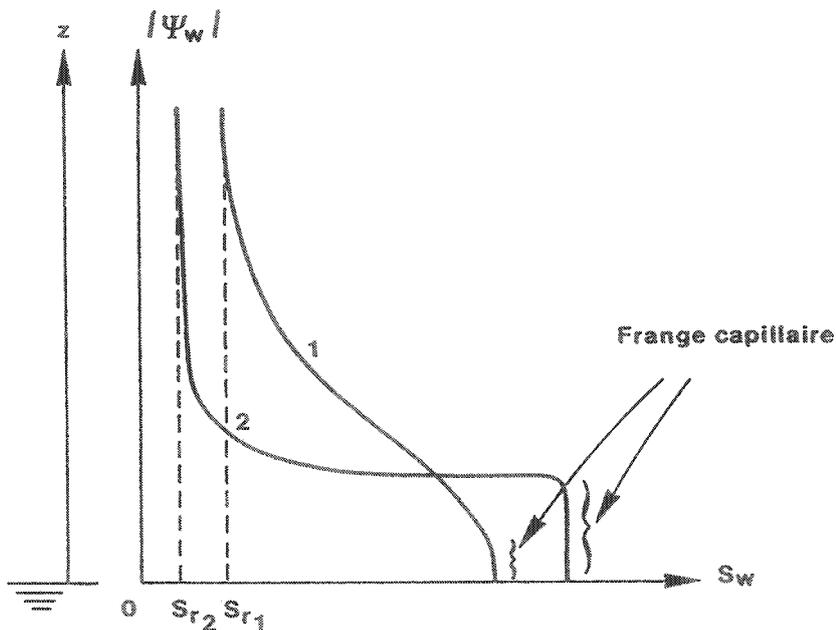


Figure IV.22. : Courbes de rétention pour différents milieux poreux (d'après Bear, 1987)

- (1) milieu poreux granulométriquement bien homogène
- (2) milieu poreux granulométriquement mal trié.

Le diagramme  $(S_w, \psi(S_w))$ , connu sous le nom de courbe de rétention est affecté par un hystéresis marquant la saturation du milieu en phase de mouillage par rapport à la phase de séchage (figure IV.23.). Cet hystéresis influence également les courbes de rétention lorsque le processus de mouillage est repris avant la désaturation complète du milieu; on obtient alors des "courbes intermédiaires" (figure IV.23.).

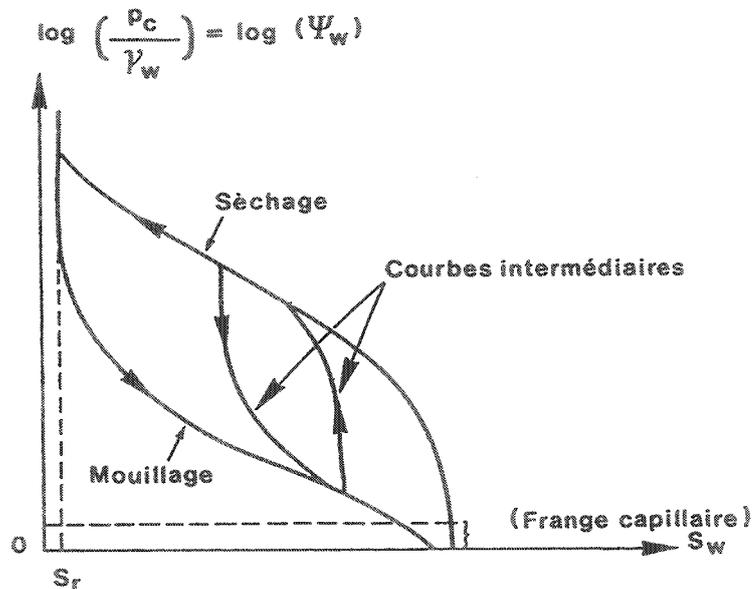


Figure IV.23. : Hystéresis dans les courbes de rétention.

En négligeant la frange capillaire, deux conditions caractérisent les surfaces libres :

- (a) la pression interstitielle est nulle (atmosphérique), correspondant à une hauteur piézométrique imposée :

$$h = z \quad (\text{IV.12.})$$

- (b) aucun flux ne traverse ces limites, sauf si il y a infiltration/évaporation, on écrit (si le milieu est isotrope) :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = v_I \quad (\text{IV.13.})$$

où  $v_I > 0$  est l'infiltration

$v_I < 0$  est l'évaporation

Le problème majeur posé par ce type de surface réside dans le fait qu'on ne connaît pas, à priori, sa position exacte. En fait, la détermination de sa position est souvent l'inconnue du problème à simuler.

Pour traiter ce problème, différentes approches sont utilisées dans les simulations .

- a) Ajustement de sa position par annulation des flux calculés. La discrétisation spatiale est fixe, la position initiale de la surface libre est estimée et on y impose la condition de potentiel imposé  $h = z$ . En résultat de la simulation, des flux sont calculés à travers cette frontière. La position de la surface libre est alors ajustée de manière à rendre ces flux compatibles avec l'équation (IV.13.). Très lourde à appliquer en pratique, cette procédure ne convient pas du tout en régime transitoire.
- b) Non prise en compte des éléments ou cellules se situant au-dessus. La discrétisation est fixe, la position de la surface libre est estimée au départ. A chaque itération, un test est réalisé pour connaître la position de chaque élément (cellule) par rapport à la surface libre caractérisée par  $h = z$ . Les perméabilités relatives aux éléments (cellules) situés au-dessus de cette limite sont annulées faisant en sorte qu'aucun écoulement n'est calculé à travers et au-dessus de la surface libre (Bathe & Khoshgoftaar, 1979). Cette technique est assez simple à mettre en oeuvre dans un programme linéaire (Piette (1976), Cescotto & Piette (1983)), mais ne fonctionne pas en régime transitoire, ni si la surface libre est très inclinée sur la verticale.
- c) Maillage adapté. La discrétisation géométrique est adaptée après chaque pas de temps à la nouvelle position de la surface libre. Ce procédé, utilisé uniquement avec la méthode des éléments finis est automatisé par l'emploi de mailleurs automatiques qui, en gardant le même nombre d'éléments, déforment ceux-ci pour s'adapter à la nouvelle limite (Taylor & Brown, (1967), Desai (1976 et 1983)). Outre sa lourdeur d'implémentation, cette procédure est très coûteuse en temps CPU (pas en résolution du système, mais en maillage automatique etc...) et crée très souvent des éléments fort distordus dans le maillage, accroissant de ce fait, les risques de non-convergence ou d'instabilité numérique. De plus, si l'hétérogénéité du domaine est grande, la gestion du maillage automatique peut devenir très difficile.

Pour la simulation 3D de réservoirs régionaux et hétérogènes, les techniques classiques décrites jusqu'ici ne conviennent pas. D'autres méthodes basées sur l'introduction de lois de variation des coefficients de perméabilité et d'emménagement permettent la simulation détaillée d'aquifères libres régionaux en mode transitoire.

urbe de  
tion du  
échage  
ourbes  
avant  
ourbes

d) Variation de K. La surface libre n'est pas considérée réellement comme une frontière mais comme une zone où l'on passe continument de la saturation complète à la zone désaturée. Cette zone est supposée se déplacer par simple translation verticale et instantanée selon les déplacements de la surface libre (Dagan, 1989). Cette hypothèse est d'autant plus vraie que le rapport  $\frac{\psi_w}{z_{sat}}$  est important

(Vachaud, 1968),  $z_{sat}$  = épaisseur saturée .

Si l'on désire simuler cette zone, il faut étudier les écoulements en milieu poreux non saturé, avec une perméabilité de celui-ci qui varie en fonction du degré de saturation ou de la teneur en eau (figure IV.24.) (Aubry & Ozanam (1988), de Marsily (1986)...). Un coefficient de perméabilité variant avec la pression (figure IV.25.) est introduit dans le code. De nombreuses relations empiriques, décrivant plus ou moins bien les variations de K effectivement mesurées dans différents types de terrains (figure IV.26.), sont décrites dans la littérature relative aux écoulements en milieu poreux non saturé.

Ce type d'approche permet donc de simuler non seulement la partie totalement saturée du milieu poreux, mais également la zone partiellement désaturée par une loi continue de variation de K en fonction de la pression capillaire. Numériquement, il est plus aisé d'introduire une loi continue (de type B, figure IV.25.) qu'une loi fort discontinue (de type A, figure IV.25.) imposant une brusque mise à zéro de la perméabilité dans la zone non saturée. Encore faut-il, disposer de mesures de K en fonction de la pression capillaire, pour caractériser au mieux le comportement du milieu poreux dans ce domaine (figure IV.26.).

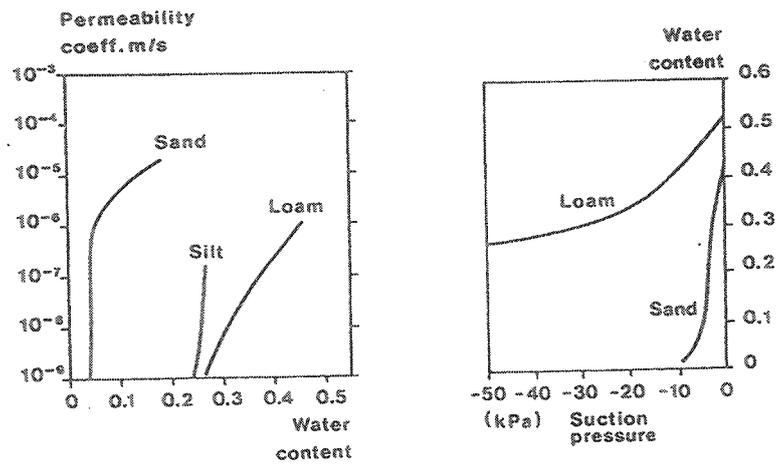


Figure IV.24. : Evolution de K en fonction de la teneur en eau et évolution de celle-ci en fonction de la pression capillaire (d'après Dassargues, 1991).

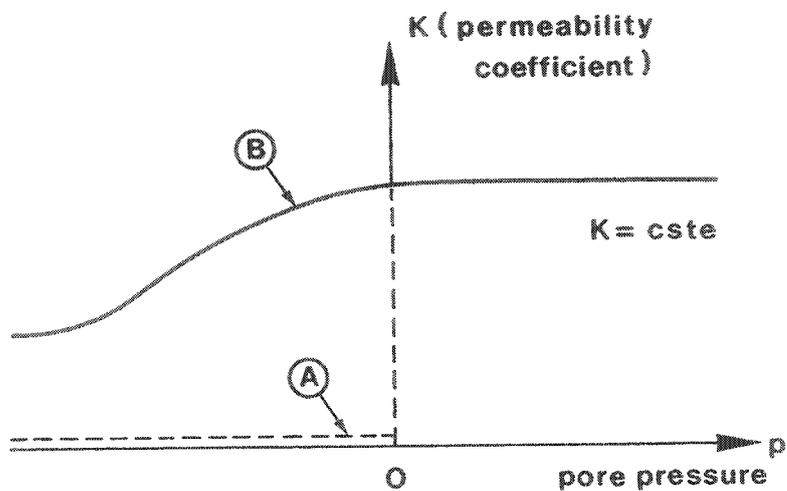


Figure IV. 25. : Lois de variation du coefficient de perméabilité en fonction de la pression d'eau :

- A) loi utilisée dans la plupart des programmes FEM avec ou sans ajustement du maillage (méthodes (b) et (c)) (Bathe & Khoshgoftaar, 1979).
- B) loi utilisée dans les programmes non linéaires (méthode (d)) (d'après Dysli & Rybisar, 1988).

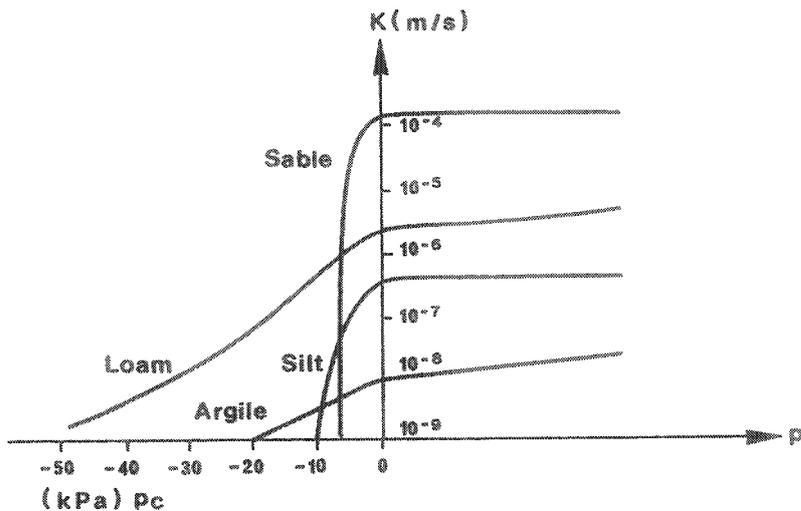


Figure IV. 26. : Variations de K en fonction de la pression interstitielle et de la pression capillaire.

- e) Variation de S. Le coefficient d'emmagasinement peut être introduit dans le code non linéaire comme étant une fonction de la pression (Dassargues & al., 1988). La méthode, mise au point par Charlier & Radu (1988), s'inspire de la simulation des changements de phase par une technique enthalpique (Comini et al., 1974), où les changements de phase s'effectuent à température constante mais avec emmagasinement d'une quantité de chaleur.

Dans notre cas, le milieu poreux passe de l'état non saturé à l'état saturé, à une pression constante nulle, en emmagasinant une quantité d'eau. Cette quantité d'eau correspond principalement à la porosité efficace du milieu poreux. La variation de cet emmagasinement en fonction de la pression d'eau est reprise à la figure IV.27. pour un aquifère sableux.

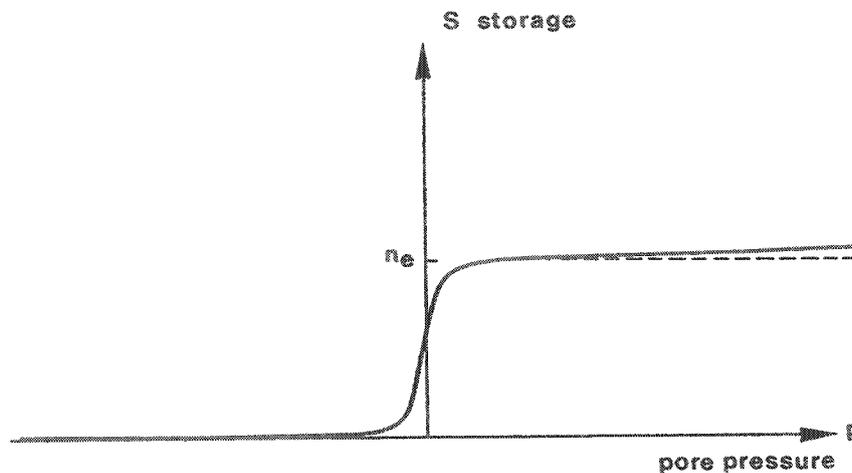


Figure IV.27. : Variation de l'emmagasinement en fonction de la pression.

Dans le code (éléments finis) non linéaire LAGAMINE développé au MSM, Charlier (1987) a introduit une loi d'emmagasinement en arctangente, qui approxime au mieux la variation réelle (figure IV.28.) :

$$S = n_e \left[ \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{p}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_s}{\rho \cdot g} \cdot \langle p \rangle \quad (\text{IV.16.})$$

où  $\langle p \rangle = p$  si  $p > 0$

$\langle p \rangle = 0$  si  $p \leq 0$

$\alpha$  est un coefficient de relaxation influençant la forme de la fonction (figure IV.28.)

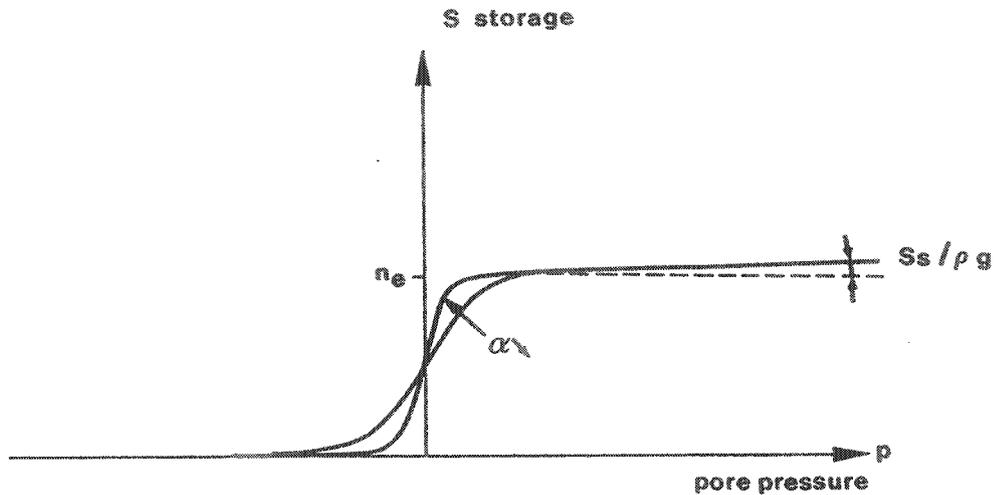


Figure IV.28. : Loi d'emménagement introduite par Charlier (1987), dans le code non linéaire LAGAMINE.

Pour des pressions négatives, une certaine quantité d'eau est présente dans le milieu poreux, ce qui peut correspondre à la réalité. Cette quantité d'eau dépend de la valeur du paramètre  $\alpha$  de la relation. L'idéal serait que ce coefficient de relaxation corresponde au phénomène physique de variation de l'emménagement en fonction de la pression (pression capillaire quand  $p < 0$ ). Il devrait alors être adapté d'un cas à l'autre en fonction des caractéristiques du milieu poreux.

Néanmoins, il se peut que les impératifs numériques fassent en sorte qu'une valeur de  $\alpha$  non compatible avec les processus physiques de la zone partiellement saturée soit choisie (sables ...). Dans ce cas, si on veut exclure toute simulation de la zone non saturée, la loi de Darcy peut être adaptée de manière à réduire ses effets dans cette zone, en la multipliant par un facteur  $S/n_e$  :

$$v = - \frac{S}{n_e} \left[ \frac{K}{\rho \cdot g} \text{grad } p + K \text{ grad } z \right] \quad (\text{IV.17.})$$

Cette méthode a été utilisée avec succès pour la modélisation en régime transitoire de la nappe de Hesbaye (cfr. VI).

Par contre, si la simulation de la zone non saturée est décidée, la loi de Darcy non modifiée est conservée mais en y intégrant la non linéarité de  $K$  (cfr. d).

Dans la partie saturée, c'est le coefficient d'emménagement spécifique, exprimé en unités de pressions

( $\frac{S_s}{\rho \cdot g}$ ) en  $\text{Pa}^{-1}$ ) qui est la pente de la courbe.

Dans le cas particulier où la simulation a pour but de calculer les tassements induits par des pompages dans une nappe à surface libre, la non linéarité de  $S$  ( $S = S(p)$ ) pour simuler la surface libre peut s'ajouter sans gros problème à la non linéarité de  $S_s$  ( $S_s = S_s(p)$ ) et à la non linéarité de  $K$  ( $K = K(e)$ ).

