

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

PRODUIRE LES ÉVIDENCES: LA FONCTION SÉMIOTIQUE DE L'ANALYSE LOGIQUE

Dans *L'œil mathématique*¹, son excellent essai sur la philosophie mathématique de Charles Sanders Peirce, Christiane Chauviré reconstitue les contours d'une conception épistémologique des sciences formelles particulièrement originale et inventive. Il faut dire que Peirce s'efforce de faire tenir ensemble des éléments théoriques qui pourraient paraître incompatibles à qui connaît les critiques adressées par les logiciens à la théorie kantienne d'un savoir mathématique synthétique a priori fondé sur des intuitions pures.

Comme son contemporain Gottlob Frege², Peirce est en effet convaincu, contre Immanuel Kant, que les mathématiques sont une science essentiellement déductive et, en ce sens, pleinement «analytique». En outre, comme Frege, Peirce développe, dans la lignée de George Boole (mais aussi William Stanley Jevons ou Ernst Schröder), des langages formels permettant d'exprimer rigoureusement les contenus mathématiques énoncés et de contrôler précisément l'exactitude des inférences deductives entre eux. Sur ces aspects, la proximité avec le projet logiciste frégeen paraît patente.

Et néanmoins, contrairement à Frege ou plus tard Bertrand Russell, Peirce ne cesse de se présenter comme un héritier enthousiaste plutôt qu'un détracteur acharné d'éléments importants de l'épistémologie kantienne. Comme Kant, il entend en particulier rendre compte du caractère «synthétique», c'est-à-dire informatif et non trivial, de la plupart des énoncés mathématiques ainsi que des processus inférentiels qui permettent de les justifier. Bien plus, comme Kant, Peirce porte une grande attention au rôle (sémiotique) que joue, dans la justification de ces inférences et de ces énoncés, le travail de construction et de transformation de figures ou plus généralement de diagrammes. Sur ce point, Peirce entend clairement prolonger et développer la théorie kantienne du schématisme.

Comme l'indique clairement Chauviré, le projet de Peirce vise en fait à répondre à un problème classique de la théorie de la connaissance :

comment expliquer à la fois la fécondité des mathématiques et leur rigueur déductive, le fait qu'elles étendent notre connaissance tout en procédant selon un raisonnement déductif nécessaire qu'une tradition logique mal

1. Christiane CHAUVIRÉ, *L'œil mathématique. Essai sur la philosophie mathématique de Peirce*, Paris, Kimé, 2008.

2. Gottlob FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Wilhelm Koebner, 1884; trad. fr. Claude Imbert, *Les Fondements de l'arithmétique*, Paris, Seuil, 1969 – FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, Hermann Pohle, 1893 (vol. I), 1903 (vol. II).

informée dépeint comme analytique au sens kantien, c'est-à-dire trivial aux yeux de Peirce³ ?

REVOIR LA NOTION KANTIENNE D'ANALYTICITÉ

Pour répondre à cette question, Peirce doit surmonter certains éléments du cadre de pensées kantien. Tout d'abord, comme les logiciens, il doit dépasser la conception simpliste que se fait Kant d'un jugement « analytique ». S'appuyant sur une conception assez élémentaire des concepts qui les envisage comme une somme de traits déterminants spécifiant toujours plus la « compréhension » et réduisant toujours plus l'« étendue » du concept, Kant estime qu'un jugement est analytique si les traits déterminant le concept qui est en position d'attribut du jugement sont déjà inclus dans les traits déterminant la représentation qui est en position de sujet. Et c'est pourquoi, selon lui, les jugements analytiques ne sont pas réellement informatifs; pour qui prend le temps de procéder à l'analyse des concepts impliqués, c'est-à-dire à l'explicitation de leurs traits déterminants, ils apparaissent triviaux.

Comme les logiciens, Peirce est toutefois conscient qu'un nombre important de concepts intéressants, notamment en mathématiques, ne sont pas simplement définis par une somme de traits déterminants, mais plutôt caractérisés par certains rapports plus ou moins complexes entre traits ou propriétés, de sorte qu'analyser ces concepts ne se réduit pas à faire la liste de leurs traits déterminants mais implique de déployer très précisément la nature de ces rapports complexes. Identifier qu'il y a, entre deux concepts, certains rapports d'implication tels que certains jugements les rapportant l'un à l'autre sont analytiquement vrais constitue dès lors une tâche nettement plus subtile que la simple énumération de leurs traits déterminants. C'est pourquoi un jugement analytique n'est pas forcément trivial⁴.

PRENDRE AU SÉRIEUX LE PROBLÈME KANTIEN DU « SYNTHÉTIQUE A PRIORI »

Comme le souligne encore Chauviré, un élément intéressant du travail de Peirce consiste d'ailleurs précisément à s'efforcer de distinguer, parmi les jugements analytiques – tous nécessairement vrais –, ceux qui sont relativement triviaux, au sens où ils résultent assez directement de l'analyse des concepts impliqués et se démontrent donc assez facilement, de ceux qui exigent une certaine astuce et quelques « pas théoriques »⁵ inhabituels pour les mettre en évidence. Peirce qualifie les premiers de simplement « corollariels » dans la mesure où il s'agit de conséquences relativement triviales de théorèmes déjà bien connus, et il

3. C. CHAUVIRÉ, *L'œil mathématique*, p. 28.

4. C. CHAUVIRÉ (*op. cit.*, p. 20-21, 25, 118, 126) distingue à cet égard deux sens de l'analyticité. Pour la critique peircienne de la notion kantienne d'analyticité et sa comparaison avec la critique fréguénne, *op. cit.* p. 25, 30, 32.

5. Charles Sanders PEIRCE, *Collected papers*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, vol. 1-6, éd. Charles Hartshorne et Paul Weiss, 1931-1935; vol. 7-8, éd. Arthur W. Burks, 1958, vol. 4, § 613 [désormais CP 4.613].

réserve l'appellation « théorématiques » aux jugements qui n'ont pu être démontrés qu'au terme d'une démonstration subtile et relativement créative. Comme l'indique ici l'usage répété des adverbess « assez » ou « relativement », cette distinction entre jugements proprement théorématiques et simplement corollariels n'est toutefois pas, pour Peirce, absolue mais plutôt graduelle et surtout dépendante de l'état du savoir et des méthodes de preuve en vigueur⁶.

Par cette distinction au sein des jugements analytiques, Peirce remet clairement en cause la thèse kantienne selon laquelle seuls les jugements synthétiques seraient informatifs et réellement susceptibles d'accroître nos connaissances. Pour Kant⁷, l'analyse logique n'est pas proprement informative car elle ne fait que déployer ce qui est déjà implicitement connu ; seule une intuition peut fournir une information nouvelle permettant d'établir un lien encore inconnu entre sujet et prédicat d'un jugement. Dans le cas des jugements empiriques, l'intuition sensible joue ce rôle et permet ~~par exemple~~ d'établir, par exemple, que « les corps sont pesants » là où l'analyse logique suffisait pour établir que « les corps sont étendus ». Or, parce qu'il voyait bien que certains jugements mathématiques ne sont pas triviaux mais énoncent des rapports nouveaux, Kant en était venu à supposer que l'intuition devait là aussi jouer un rôle pour les établir. Mais, dans la mesure où ces jugements sont néanmoins nécessaires et connaissables a priori, l'intuition devait dans ce cas être « pure », c'est-à-dire indépendante de toute donnée sensible singulière et contingente.

Comme Frege et plus tard Russell, Peirce récuse cette théorie kantienne. Mais, contrairement à eux⁸, il ne se contente pas d'affirmer le caractère analytique des jugements mathématiques ; il entend tout de même expliquer ce que Kant cherchait à comprendre, à savoir que les jugements mathématiques, bien que nécessaires, sont (à des degrés divers) informatifs et donc apparemment « synthétiques » au sens de Kant. À cet égard, la distinction entre jugements « corollariels » et « théorématiques » entend tout à la fois reconduire et recomposer la distinction kantienne entre jugements analytiques et synthétiques a priori. Tout à la fois informatifs et nécessaires, les jugements théorématiques ont en quelque sorte les traits qui intriguaient Kant dans ce qu'il jugeait être des jugements synthétiques a priori. Mais, pour Peirce, ces jugements, bien que plus intéressants que les jugements corollariels, sont néanmoins aussi analytiques qu'eux.

C'est aussi dans une certaine filiation avec Kant que Peirce s'efforce de montrer que de tels jugements théorématiques ne sont généralement obtenus qu'au terme d'un travail d'observation et de manipulation de diagrammes. À cet égard, comme le souligne à juste titre Chauviré⁹, c'est la problématique kantienne du schématisme que Peirce s'efforce d'explorer à nouveaux frais. Et, sur ce point, Peirce rompt plus clairement encore avec les préoccupations logicistes. Car ~~la~~ ~~préoccupation~~ principale de Peirce ne consiste pas tant à justifier, en logicien,

6. Sur la redéfinition peircienne des termes classiques de « corollaire » et de « théorème », voir C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 37, 40. Sur la relativisation de la distinction, voir p. 84-86.

7. Immanuel KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, 1781-1787, A 6-10 / B 10-17 (trad. fr. A. J.-L. Delamarre et F. Marty, *Critique de la raison pure*, Paris, Gallimard, 1980, p. 71-77).

8. Sur l'éventuel logicisme de Frege, voir C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 155-156, 162-163, 166, 173-174.

9. « La dette de Peirce à l'égard de Kant nous paraît si importante qu'il n'est pas exagéré de dire que toute la théorie peircienne de l'inférence mathématique résulte d'un effort pour penser jusqu'au bout le schématisme kantien » (C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 56).

les jugements et inférences mathématiques qu'à préciser, en sémioticien, comment on peut produire l'évidence de rapports nouveaux – et donc tirer des conséquences nouvelles – par le travail d'observation et de manipulation de « diagrammes », expression par laquelle Peirce entend non seulement les figures géométriques, mais aussi les expressions algébriques dans la mesure où elles figurent elles aussi des rapports abstraits.

L'objectif de Peirce n'est pas, comme c'est le cas chez Frege, de sécuriser le raisonnement mathématique intuitif appuyé sur les figures en le fondant sur des inférences purement logiques exprimées dans un langage formel rigoureux. Il s'agit bien plutôt, pour lui, de montrer comment le raisonnement appuyé sur les expressions algébriques aussi bien que sur les figures géométriques permet des inférences et des thèses nouvelles qui, pour être « intuitives » – au sens de fondées dans l'évidence –, n'en sont pas moins rigoureusement déductives.

C'est sur cet aspect de la production d'évidence que nous allons plus particulièrement nous attarder ici.

OBSERVATION ABSTRACTIVE

Si les figures géométriques, mais aussi les expressions algébriques, permettent des jugements et inférences « nécessaires », c'est parce qu'elles sont iconiques, c'est-à-dire qu'elles reproduisent dans leur configuration matérielle un certain nombre de rapports abstraits qui peuvent alors être observés sur elles par des actes d' « observation abstractive »¹⁰. Toute la problématique du schématisme kantien consistait déjà à expliquer comment l'observation sensible d'un diagramme singulier, par exemple d'une figure géométrique singulière, peut fonder des jugements dont la validité est générale – pour toute figure similaire – et même nécessaire¹¹.

Kant s'efforçait de montrer que la construction de cette figure singulière était en fait guidée par un concept – dont la portée est générale – et que ce sont donc les caractéristiques – générales – de ce concept qui sont explorées dans son exemplification par cette figure singulière. Kant appelait précisément « schème » le procédé pour donner à un concept une image sensible qui le représente et sur laquelle ses caractéristiques générales peuvent donc être lues. Peirce ne dit rien d'autre, si ce n'est que ce sont surtout et avant tout des rapports qui sont ici représentés par des diagrammes singuliers. Qu'ils soient figures géométriques ou expressions algébriques, les diagrammes représentent iconiquement un certain nombre de rapports abstraits¹².

Le diagramme est iconique en ce qu'il figure, par sa propre configuration spatiale – sa « toposyntaxe »¹³ –, un certain nombre de rapports abstraits ou « idéaux » (au sens platonicien). Dans la mesure où les formes visibles (Gestalten)

10. PEIRCE, CP 2.227 (trad. fr. Gérard Deledalle, *Écrits sur le signe*, Paris, Seuil, 1978, p. 120).

11. PEIRCE, CP 4.532.

12. PEIRCE, CP 2.277 (trad. fr. Deledalle, p. 149). Cf. aussi CP 4.433 et CP 4.531.

13. Jean-Marie KLINKENBERG, « À quoi servent les schémas ? Tabularité et dynamisme littéraire », *Protée* n° 37 (3), 2009, p. 66.

représentent iconiquement des formes intelligibles (εἶδη)¹⁴, leur observation sous-tend une conscience de généralité et même de nécessité. Et ce qui est vrai pour les figures géométriques – le triangle tracé sur papier représente iconiquement un certain nombre de rapports rationnels qui structurent le concept de triangle – est également vrai pour les expressions algébriques – les rapports entre symboles d'une équation, par exemple, représentent iconiquement les rapports abstraits entre éléments du problème que cette équation formalise¹⁵. Et ces rapports abstraits que la figure ou que l'équation exhibent peuvent alors être investigués en observant cette figure ou cette équation et les transformations auxquelles elle se prête.

Bien qu'il s'agisse essentiellement d'étudier des relations abstraites et leurs conséquences nécessaires, il faut en passer par leur illustration singulière parce que cette dernière permet précisément de les rendre évidents. À cet égard, remarque Peirce, la démarche diagrammatique est très proche de celle que pratiquait déjà un mathématicien comme Euclide. Euclide, en effet, énonçait d'une part les éléments d'un problème en termes généraux et, d'autre part, illustrait ce problème par une figure singulière, laquelle permettait non seulement de rendre visibles les rapports abstraits concernés mais aussi de faire apparaître d'autres rapports nécessairement liés aux précédents mais qui n'étaient pas explicites dans la formulation initiale du problème en termes généraux¹⁶.

Les raisonnements d'Euclide s'appuyaient sur l'observation d'un cas singulier tout en ne retenant de lui que ce qui est conforme à la généralité des rapports abstraits théoriquement énoncés. C'est pourquoi les éléments singuliers de la figure représentent en fait des entités abstraites et ont valeur non pas singulière mais quelconque, c'est-à-dire interchangeable avec n'importe quel élément singulier du même type¹⁷. Euclide désignait certains des éléments de sa figure par des lettres, mais il ne s'agissait pas là de noms propres désignant des individus singuliers, plutôt d'arguments¹⁸ à valeur quelconque au sein du type général concerné par le raisonnement.

Et, pour Peirce, c'est le même principe qui est au fondement de l'écriture algébrique :

La démonstration du genre dit mathématique se fonde sur des suppositions de cas particuliers. Le géomètre trace une figure ; l'algébriste part du présupposé qu'une lettre signifie une seule quantité remplissant les conditions requises. Mais alors que le mathématicien suppose un cas individuel, son hypothèse est cependant parfaitement générale, parce qu'il ne considère pas les caractères du cas individuel mais ceux qui doivent appartenir à tous les cas de ce genre. L'avantage de sa procédure réside dans le fait que les lois logiques des termes individuels sont plus simples que celles qui se rapportent aux termes généraux, parce que les individus sont soit identiques soit mutuellement exclusifs, et ne peuvent se recouper ou être subordonnés l'un à l'autre comme le

14. C. CHAUVIRÉ (*op. cit.*, p. 140-147, 208-209) insiste toutefois sur la défiance de Peirce à l'égard du platonisme.

15. PEIRCE, CP 2.282 (trad. fr. Deledalle, p. 152).

16. PEIRCE, CP 2.55.

17. PEIRCE, CP 4.616.

18. «Un argument est un signe qui, pour son interprétant, est un signe de loi.» (CP 2.252, trad. fr. Deledalle, p. 141).

peuvent les classes. La démonstration mathématique n'est donc pas plus limitée à des questions d'intuition que n'importe quelle sorte de raisonnement. En vérité, l'algèbre logique prouve de manière concluante que les mathématiques s'étendent à tout le domaine de la logique formelle; et il faut abandonner toute théorie de la cognition qui ne peut s'ajuster à ce fait. Nous pouvons récolter tous les avantages que le mathématicien est supposé dériver de l'intuition en faisant simplement des suppositions générales de cas individuels¹⁹.

Corrélatrice de la représentation sensible iconique de rapports abstraits, l'observation abstractive peircienne²⁰ entend répondre à la question centrale du schématisme – expliquer la conscience de généralité, et même de nécessité, qui peut se dégager de l'observation de figures ou plus généralement diagrammes singuliers – d'une manière un peu plus satisfaisante que ce que faisait Kant, qui, après avoir nettement séparé intuition sensible et entendement, devait ensuite s'efforcer de les réconcilier²¹.

DÉVELOPPER CE QUI ÉTAIT INCLUS

Ce qui a été dit des rapports iconiques entre diagramme singulier et rapports abstraits (à valeur générale) explique aussi un autre élément essentiel du schématisme, à savoir que le passage par la représentation singulière permet d'investiguer les rapports abstraits et leurs conséquences nécessaires d'une manière différente de ce que la simple analyse logique de ces rapports abstraits permet de faire. Dans les deux cas, il s'agit de «développer ce qui était inclus» (evolve what was involved²²), c'est-à-dire d'explicitier des rapports nécessairement impliqués par les rapports abstraits formulés initialement. Mais la représentation sensible permet de faire apparaître certaines propriétés «implicitement contenues»²³ qui sont plus difficilement accessibles à l'analyse logique²⁴. Car la représentation imageante d'un diagramme singulier conforme à un concept met en évidence certaines contraintes de construction révélatrices de propriétés nécessaires du concept que ne contenait pas sa simple conception abstraite²⁵.

Et, une fois de plus, il importe de souligner que, pour Peirce, les expressions algébriques ont, à cet égard, exactement le même rôle que les figures

19. PEIRCE, CP 3.92, trad. fr. sous la direction de Claudine Tiercelin et Pierre Thibaud, *Œuvres III, Écrits logiques*, Paris, Cerf, 2006, p. 150. Cf. aussi CP 3.94, ainsi que CP 5. 148, trad. fr. dir. C. Tiercelin et P. Thibaud, *Œuvres I, Pragmatisme et pragmaticisme*, Paris, Cerf, 2002, p. 382-383. Sur ce point, voir aussi les belles analyses de Reviel NETZ, *The shaping of deduction in greek mathematics: a study in cognitive history*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

20. Sur cette observation dotée d'une conscience de nécessité, où un cas singulier vaut pour tous les autres, voir C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 47-48, 51, 62-82, 184-187, 190, 200, 205.

21. PEIRCE, CP 1.35.

22. PEIRCE, CP 4.86.

23. PEIRCE, CP 4.52.

24. Il s'agit toujours bien d'explorer des concepts et d'en déduire des propriétés nécessaires, mais une simple analyse de la définition initiale ne suffit pas; il faut aussi ingénieusement faire apparaître des rapports nouveaux. C'est à cela que sert la médiation diagrammatique guidée par des règles; Kant a sur ce point parfaitement raison. Mais, pour Peirce, cela reste quand-même de l'inférence déductive. Voir C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 38-39, 46-48, 50, 53-55, 59-61.

25. PEIRCE, CP 1.54, CP 1.239-240, CP 2.216.

géométriques; elles rendent visibles des rapports abstraits qui n'étaient pas immédiatement énoncés dans la formulation abstraite :

Les icônes dont la ressemblance a pour support des règles conventionnelles méritent particulièrement d'attirer notre attention. Ainsi une formule algébrique est une icône devenue telle par les règles de commutation, d'association et de distribution des symboles. Il peut sembler, à première vue, qu'il est arbitraire de classer les expressions algébriques parmi les icônes; qu'il serait tout aussi bien ou mieux de les considérer comme des signes conventionnels composés. Mais il n'en est pas ainsi, car une des grandes propriétés distinctives de l'icône est que par son observation directe peuvent être découvertes concernant son objet d'autres vérités que celles qui suffisent à déterminer sa construction²⁶.

Il ne convient donc pas d'opposer raisonnement géométrique sur les figures et raisonnement algébrique en langage symbolique formel et de considérer que le premier serait intuitif tandis que le second serait purement logique. Pour Peirce, les deux sont tout à la fois déductifs – en ce qu'ils ne tirent que des conséquences nécessaires – et « intuitifs » ou plutôt diagrammatiques – en ce qu'ils mettent ces conséquences déductives en évidence au moyen de la figuration visible des rapports abstraits.

Dans la mesure où il passe par des expressions algébriques en langage formel, le raisonnement logique lui-même, dit Peirce, est diagrammatique :

[...] tout raisonnement déductif, même le simple syllogisme, implique un élément d'observation; à savoir que la déduction consiste à construire une icône ou diagramme dont les relations des parties doivent présenter une complète analogie avec celles des parties de l'objet du raisonnement, à expérimenter sur cette image dans l'imagination et à observer le résultat de façon à découvrir des relations entre les parties qu'on n'avait pas remarquées et qui étaient cachées. Prenez, par exemple, la formule syllogistique

Tout M est P

S est M

∴ S est P.

C'est réellement un diagramme des relations entre S, M et P. Le fait que le moyen terme se trouve dans les deux prémisses est réellement montré, et il faut que cela se fasse, sans quoi la notation n'aura aucune valeur. Quant à l'algèbre, l'idée même de cet art est qu'il présente des formules que l'on peut manipuler et que par observation des effets de cette manipulation on découvre des propriétés qu'on ne pourrait autrement discerner. Dans cette manipulation, on est guidé par les découvertes antérieures qui prennent corps dans des formules générales. Celles-ci sont des schémas que nous avons le droit d'imiter dans notre façon de procéder et ce sont les icônes par excellence de l'algèbre. Les lettres de l'algèbre appliquée sont d'ordinaire des tokens, mais les x, y, z, etc. d'une formule générale telle que

(x+y)z = xz + yz,

26. PEIRCE, CP 2.279 (trad. fr. Deledalle, p. 150). Cf. aussi CP 2.601-605, CP 4.544.

sont des blancs à remplir avec des tokens; ce sont des indices des tokens. Une telle formule pourrait être, il est vrai, remplacée par une règle formulée abstraitement (ici que la multiplication est distributive); mais l'on ne saurait faire aucune application d'un tel énoncé abstrait si on ne le traduisait pas en une image sensible²⁷.

C'est pourquoi, il ne s'agit pas, pour Peirce, de se débarrasser des preuves intuitives fondées sur des diagrammes et de les remplacer par des preuves formelles qui leur garantiraient un fondement logique. Au contraire, toute preuve formelle est elle-même « mathématique » au sens où elle est diagrammatique²⁸.

L'éventuelle formalisation des preuves n'a donc pas, chez Peirce, pour objectif de se passer des diagrammes au profit d'une fondation purement logique. Les preuves formelles sont des diagrammes. On verra par contre que certains modes de représentation sensible, et notamment certains langages formels, sont plus propres que d'autres à l'analyse – et non pas à la fondation – logique de certaines inférences.

EXPÉRIENCES IMAGINAIRES

Deux éléments du schématisme – la conscience de nécessité sur la base d'observations singulières et la capacité de développer par là ce qui était déjà implicitement inclus – ont été expliqués. Un troisième élément important est que ce travail d'explicitation de l'implicite est d'autant plus puissant que l'on ne se contente pas d'observer les diagrammes, mais que l'on se met également à les manipuler pour leur imprimer un certain nombre de transformations – réglées par la nature des rapports abstraits en jeu – qui révèlent certaines potentialités de l'état initial. Ainsi, les constructions géométriques ne se contentent généralement pas de représenter une figure, mais elles lui ajoutent d'autres éléments diagrammatiques destinés à faire apparaître certaines propriétés de la figure qui n'apparaissent pas facilement sans ses constructions auxiliaires. Et, de même, les transformations imprimées à une expression algébrique font apparaître certains rapports nouveaux découlant des rapports abstraits exprimés dans la formule initiale²⁹.

Ce travail d'exploration des rapports abstraits par l'opération de diverses transformations réglées sur leur figuration visible initiale, Peirce l'assimile à une sorte d'expérimentation imaginaire analogue à celle à laquelle se livre le joueur d'échecs lorsqu'il envisage mentalement toute une série de déplacements de pièces sur le plateau pour mieux connaître les potentialités de la situation dans laquelle il se trouve ou, de même, à celle à laquelle se livre le général lorsqu'il simule le déplacement des troupes sur une carte pour mieux connaître toutes les potentialités de la situation dans laquelle se trouve son armée³⁰.

Une fois encore, Peirce y insiste, ceci vaut de la même manière pour le raisonnement appuyé sur figures géométriques et pour celui appuyé sur expressions

27. PEIRCE, CP 3.363 (trad. fr. Œuvres III, p. 281-282).

28. PEIRCE, CP 4.228.

29. PEIRCE, CP 4.246, CP 2.778. Voir C. Chauviré, *op. cit.*, p. 33-36, 42-45.

30. PEIRCE, CP 4.530.

algébriques. Dans les deux cas, il s'agit de procéder par ce que Kant appelait « construction »³¹, c'est-à-dire d'une part par la représentation sensible des rapports abstraits et d'autre part par l'opération de transformations réglées sur cette représentation sensible de manière à en révéler des aspects encore inaperçus³².

C'est bien encore et toujours à « développer ce qui était inclus » que servent les transformations opérées sur les diagrammes, qu'ils soient figures ou expressions algébriques. Mais on voit bien que l'explicitation est ici clairement révélatrice d'informations résolument nouvelles. Les jugements inférés ne sont plus simplement explicatifs (explicative) mais franchement amplifiant (ampliative)³³. Bien qu'il s'agisse encore et toujours de conséquences déductives, les inférences permises par les expérimentations imaginaires ajoutent de l'information significativement nouvelle sur les rapports abstraits initialement énoncés. De cette manière, Peirce fait droit à l'idée kantienne que, bien qu'a priori, les jugements ainsi obtenus sont informatifs³⁴.

COROLLAIRES ET THÉORÈMES

C'est là qu'intervient la distinction entre déductions théorématiques et (simplement) corollarielles. L'exploration des virtualités d'une forme par ses transformations réglées peut en effet être plus ou moins ingénieuse et créative. Les informations glanées par son moyen seront alors relativement immédiates et attendues ou au contraire assez indirectes et surprenantes.

*Une déduction nécessaire est une méthode pour produire des symboles dicents par l'étude d'un diagramme. Elle est corollarielle ou théorématique. Une déduction corollarielle est une déduction qui représente les conditions de la conclusion dans un diagramme et trouve en observant ce diagramme tel qu'il est, la vérité d'une conclusion. Une déduction théorématique est une déduction qui, ayant représenté les conditions de la conclusion dans un diagramme, réalise une expérimentation ingénieuse sur le diagramme et, en observant le diagramme ainsi modifié, constate la vérité de la conclusion*³⁵.

Qu'un travail subtil et inventif de transformations réglées de diagrammes puisse rendre évidentes des propriétés nécessaires, quoique encore inconnues, des rapports abstraits initialement représentés, n'empêche pas, insistons-y, que

31. Jaakko Hintikka, dit C. CHAUVIRÉ (*op. cit.*, p. 62-82), avait bien cerné cette problématique, mais, en traduisant la question de l'ecthèse euclidienne dans les termes logiques de l'introduction de termes singuliers libres représentant des individus nouveaux, il n'a pas rendu compte de la fonction sémiotique de l'expérimentation diagrammatique.

32. PEIRCE, CP 3.560.

33. PEIRCE, CP 4.43, 4.85. Voir aussi C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 104-110.

34. De manière intéressante, Peirce explique que là où la déduction purement explicative se contente d'explorer la compréhension des concepts en jeu, les expérimentations imaginaires peuvent quant à elle explorer toute l'information, y compris la « compréhension superflue », celle qui enrichit le sens sans réduire l'extension (CP 1.559, CP 2.364, CP 2.418, CP 2.432). Sur ce point, voir Bruno LECLERCQ, « Iconic virtues of diagrams. Peirce on ampliative reasoning », *Signata* [En ligne], vol. 10, 2019, §§ 29-31.

35. PEIRCE, CP 2.267 (trad. fr. Deledalle, p. 186). Cf. aussi CP 4.233, CP 4.613, CP 7.204.

ces propriétés soient nécessaires et que les raisonnements qui les font apparaître soient déductifs.

L'ANALYSE LOGIQUE

Peirce conçoit donc le rôle de la logique en mathématiques d'une manière très différente de ce qui est le cas chez Frege et sera le cas chez Russell. Il ne s'agit pas pour lui de garantir le raisonnement mathématique en le réduisant au raisonnement logique ou de fonder les mathématiques dans la logique. Pour Peirce, les mathématiques n'ont pas besoin de la logique pour assurer la rigueur de leurs raisonnements; elles l'assurent parfaitement elles-mêmes³⁶. La logique permet seulement l'analyse de ces raisonnements, c'est-à-dire leur décomposition en une suite d'inférences conformes à des règles d'inférence élémentaires³⁷. L'analyse logique permet alors non seulement de mieux comprendre certains raisonnements mathématiques mais aussi de mieux voir ce qui fait leur rigueur. L'analyse logique n'apporte pas la rigueur et la sécurité; elle permet seulement de les mettre en évidence, de les «faire voir».

Là encore, on reconnaît dans les remarques de Peirce le travail du sémioticien, qui s'intéresse aux avantages et inconvénients respectifs de différents modes d'expression des preuves et d'explicitation de leur analyse logique. En ce qui concerne les syllogismes et plus généralement les raisonnements prédicatifs, il souligne par exemple les limites expressives des diagrammes d'Euler, qui peinent à représenter la vacuité d'un ensemble ou les rapports de complémentarité entre ensembles et ne peuvent figurer qu'un nombre très réduit de relations algébriques, et la supériorité à tous ces égards des diagrammes de Venn, lesquels échouent toutefois à représenter les prédicats polyadiques qui sont au cœur de la logique des relations.

On sait que, de leur côté, Frege et Russell veilleront plutôt à développer un langage formel figurant la dimension fonctionnelle de ces prédicats par des symboles comportant une ou plusieurs places réservées à des variables liées par des

36. Cela est d'autant plus vrai que, pour Peirce, la multitude de principes d'inférence régissant les raisonnements mathématiques ne se réduit pas au nombre très limité de règles que la logique a mises en évidence: Les règles de raisonnement mathématique n'ont pas été exhaustivement formulées: «Seuls les mathématiciens raisonnent avec beaucoup de subtilité et une grande précision. Mais jusqu'ici personne n'a réussi à fournir une analyse logique pleinement satisfaisante du raisonnement des mathématiques. En d'autres termes, bien que chaque étape du raisonnement soit évidemment telle que les prémisses collectives ne peuvent être vraies et cependant la conclusion fausse, et, bien que pour chaque étape de ce type, A, nous puissions tirer une règle générale en soi évidente selon laquelle d'une prémisses de telle ou telle forme s'ensuivra nécessairement telle ou telle forme de conclusion, cette règle couvrant l'étape inférentielle particulière, A, personne n'a pour autant rédigé une liste complète de ces règles couvrant toutes les inférences mathématiques.» (PEIRCE, CP 4.425-426; trad. fr. *Œuvres* III, p. 334).

37. D'une certaine façon, l'analyse logique tend à remplacer les «pas théoriques» innovants des expérimentations mathématiques par des suites d'inférences immédiates et, en ce sens, à présenter des théorèmes comme de simples corollaires (voir C. CHAUVIRÉ, *op. cit.*, p. 87-90, 92-93, 102, 157-161, 176, 178-179). Mais l'objectif de cette démarche analytique n'est pas de fonder ou de justifier mieux le raisonnement mathématique, seulement de le comprendre mieux. À cet égard, contrairement à ce que laisse penser C. Chauviré (p. 26-27), même l'intérêt logique nous semble encore fondamentalement épistémique.

quantificateurs. Pour Peirce, évidemment, ce stratagème d'expression algébrique est lui aussi éminemment diagrammatique.

Mais, au regard de l'extraordinaire efficacité expressive d'un tel langage formel, on peut se demander ce que peuvent bien apporter les graphes existentiels que développe Peirce de son côté³⁸.

Une première réponse, un peu simpliste, consisterait à penser que, contrairement aux formules d'un langage formel, qui sont linéaires et « unidimensionnelles », les graphes ont l'avantage de se déployer sur deux dimensions de l'espace et dès lors de pouvoir figurer, iconiquement, des rapports bidimensionnels : « l'algèbre doit parfois "déployer" ses formules sur les deux dimensions d'une feuille. »³⁹

Cela est évidemment partiellement vrai, mais, par l'usage de quotients, d'exposants ou d'indices, les langages algébriques se donnent souvent les moyens de quitter eux-mêmes la stricte linéarité et de se déployer dans deux dimensions, et même, à vrai dire, dans bien plus de dimensions encore si on tient en compte les moyens expressifs d'artifices diagrammatiques – tels que le jeu des parenthèses – permettant en fait de figurer linéairement certains rapports de rapports ou rapports de rapports de rapports.

Pour Peirce, l'avantage des graphes existentiels tient surtout dans leur double capacité à, d'une part, favoriser l'expérimentation diagrammatique manipulatoire et par là même l'émergence d'évidences permettant un raisonnement inventif⁴⁰, mais aussi à, d'autre part, faciliter l'analyse logique par la décomposition du raisonnement en une multitude de pas inférentiels dont chacun peut voir la validité⁴¹. Produire l'évidence, telle est la fonction essentielle des graphes existentiels.

En particulier, les graphes sont plus explicites que les algèbres sur les raisons sous-jacentes aux règles d'inférence. Dans les systèmes symboliques formels, ces règles apparaissent souvent conventionnelles et en ce sens arbitraires :

C'est une preuve frappante de la supériorité des graphes existentiels par rapport à l'une ou l'autre de mes algèbres logiques. Car dans deux d'entre elles l'incongruité de cette étrange règle [qui réduit le lien conditionnel à l'inexistence d'un cas où l'antécédent est vrai et le conséquent faux] est complètement cachée par la machinerie superflue introduite pour donner une apparence de symétrie à la loi logique et faciliter le fonctionnement de ces algèbres considérées comme des machines qui raisonnent⁴².

Pour Peirce, réduire le raisonnement mathématique à un nombre limité de règles d'inférence rigoureuses d'un système symbolique formel n'est pas un but en soi. Et la chose est même à éviter si cela réduit l'évidence du raisonnement...

Là où le projet logiciste de Frege radicalise la tendance, déjà fortement affirmée au XIX^e siècle, de remplacer le travail intuitif sur les figures par le travail

38. PEIRCE, CP 4.356-367.

39. PEIRCE, CP 4.430 (trad. fr. Œuvres III, p. 336).

40. PEIRCE, CP 5.579, trad. fr. dir. C. Tiercelin et P. Thibaud, Œuvres II, Pragmatisme et sciences normatives, Paris, Cerf, 2003, p. 161-162.

41. PEIRCE, CP 4.619.

42. PEIRCE, CP 4.581, trad. fr. Œuvres III, p. 375.

BRUNO LECLERCQ

déductif sur les formules dans le but exprès de limiter l'appel à l'évidence, potentiellement trompeuse (car porteuse de prémisses cachées), au profit du strict respect de règles d'inférences logiques prédéterminées⁴³, Peirce reste pour sa part en permanence attaché à la production des évidences; c'est elle qui recommande tout à la fois le travail sur les figures ou les expressions algébriques; c'est elle aussi qui recommande l'analyse logique. C'est parce qu'il est sémioticien que Peirce est (un excellent) logicien.

Bruno Leclercq

Nous publions ici la traduction de la première partie du texte «The simplest mathematics» de Charles Sanders Peirce tel qu'il est paru aux sections 227 à 249 du volume IV des *Collected Papers* (Charles Hartshorne and Paul Weiss (éds.), Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1933). Rédigé au début de l'année 1902, ce texte devait constituer le chapitre 3 d'un grand ouvrage inachevé, *The minute logic*.

43. On pointera notamment à cet égard les figures d'Augustin Louis Cauchy et de Bernard Bolzano. Voir Hourya BENIS SINACEUR, «Cauchy et Bolzano», *Revue d'histoire des sciences*, vol. 26 (2), 1973, p. 104-105.