

Lignes directrices

de ma carrière d'enseignant-chercheur en mathématiques

Jacques BAIR

Le seul objet de ce [texte] est de vous confier des souvenirs. Les dates, les propos, les faits sont ce qu'ils sont dans ma mémoire. Il y a sans doute quelques erreurs factuelles. Mais peu importe. Le fond est réel. Ces souvenirs sont les miens et j'avais envie de les partager. Ces souvenirs sont une (petite) partie de ma vie.

(Extrait de la préface du livre « Histoire de scoops en Belgique », par Patrick HAUMONT, Editions du Pandore, 2017)

0. Introduction

*Le hasard souvent fait bien les choses.
Surtout quand on peut l'aider un peu.*

(Charles Aznavour)

Ma carrière professionnelle fut consacrée, d'une part, à l'enseignement de mathématiques de base pour un public composé surtout de futurs économistes ou gestionnaires, ainsi que, d'autre part, à des travaux de recherches et de publications sur six thèmes qui souvent s'imposèrent graduellement en fonction de mes préoccupations et missions du moment. Chacune de ces six directions est traitée succinctement dans une des sections 3 à 8 ci-après.

Pourquoi et comment en suis-je arrivé à exercer une telle profession et à m'intéresser spécialement à ces six thèmes ? Quelles ont été mes pistes de travaux ?

Je vais tenter d'apporter des réponses à de telles questions en me basant souvent sur des souvenirs parfois anciens, donc subjectifs et dès lors peut-être quelquefois approximatifs.

Ainsi, un peu à la manière de Maurice Allais (mais toute proportion gardée bien évidemment) qui avait tracé « les lignes directrices » de son œuvre¹, je vais essayer de jeter un regard rétrospectif et introspectif sur ma carrière d'enseignant-chercheur.

Pour commencer ce texte, je m'attarderai quelque peu sur le choix de mes études et de ma profession : toute ma carrière en a résulté.

Ensuite, je décrirai sommairement mon parcours d'enseignant, principalement au sein de la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences sociales (la FEGSS en abrégé) de l'Université de Liège (anciennement ULG, mais actuellement ULiège en abrégé), ainsi que mes idées principales sur cette profession.

Par après, j'aborderai les six thèmes de mes recherches en cherchant à expliquer les raisons qui m'ont poussé vers eux, en donnant un échantillon (non exhaustif) de résultats que j'y ai enregistrés et en dégagant quelques informations générales sur mes publications.

Le document se termine par trois annexes. La première contient la liste intégrale de mes publications, la liste étant clôturée au moment où sont écrites ces lignes (en juillet 2023, à l'occasion de mon 75^{ème} anniversaire). La deuxième reprend la liste des abréviations, ordonnées par ordre alphabétique, utilisées dans le corps du texte, ainsi que leur signification. Enfin, la troisième consiste en la liste des auteurs cités.

Ce texte a été rédigé de façon discontinue et un peu désordonnée. Il pourra ainsi paraître quelquefois décousu, avec des passages plus ou moins développés selon mes souvenirs et mes

¹ Maurice Allais (1911-2010) était un économiste et un physicien français qui s'est vu notamment décerner un Prix Nobel d'Economie en 1988. Un aperçu de sa brillante carrière est donné dans le document, dont il est l'auteur, intitulé « *Les lignes directrices de mon œuvre* ». Ce texte a été publié dans *L'Actualité économique*, 65(3), pp. 323–345 ; il est disponible à l'adresse électronique suivante : <https://doi.org/10.7202/601494ar>.

priorités au moment de la rédaction, avec des renvois à d'autres endroits mais aussi probablement certains doublons difficilement évitables dans ce genre d'exercice ; en effet, les différentes sections abordées ne sont pas toujours indépendantes.

1. Choix des études et de la profession

Pourquoi ai-je choisi d'étudier les mathématiques ?

Très tôt, pratiquement dès le début de ma scolarité, j'ai décidé de devenir mathématicien, sans trop bien savoir au début où j'allais car on ne possède une idée assez précise (pour autant qu'il soit possible d'en avoir une) sur cette profession qu'après de nombreuses années de formation.

Grosso modo, j'ai découvert à chaque étape de mes études des arguments additionnels me rapprochant sans cesse davantage des mathématiques.

Lors de mes études primaires, j'étais surtout attiré par le côté technique de la discipline. Les mathématiques qui y étaient pratiquées me paraissaient faciles : je trouvais que pour y être performant, il suffit d'appliquer des règles claires, précises, valables pour tous et en tout temps, et il faut constamment raisonner de manière logique et cohérente. De la sorte, les mathématiques produites sont indiscutables, certaines, sans surprise ; elles ne peuvent pas être interprétées subjectivement ; dès lors, si on applique les bonnes règles, le travail est inévitablement récompensé à sa juste valeur. J'ai toujours été sensible à cet aspect de la discipline. D'ailleurs, plus tard, je disais souvent à mes étudiants en économie et en gestion que le cours de maths est le seul pour lequel la cote maximale (de 20 sur 20) peut (et est parfois) attribuée.

Dans le secondaire, j'avais choisi, sans hésitation, la section « latin-maths » en humanités, de sorte que j'ai suivi des programmes « forts » en mathématiques, avec 9 heures de cours par semaine en Rhétorique.

J'ai fait alors connaissance avec de véritables démonstrations ; elles étaient relatives à de la géométrie (euclidienne) de base, dans le plan puis dans l'espace. J'ai de suite apprécié ces raisonnements irréfutables.

Par ailleurs, en fin de secondaire, j'ai été sensibilisé au côté utilitaire des maths. J'étais séduit par le fait que toutes les sciences, au moins celles qui sont souvent qualifiées de 'dures' (car je n'avais à cette époque aucune connaissance sur les sciences parfois appelées 'humaines') ont recours aux maths. J'ai été notamment attiré et marqué par la lecture d'un livre qui nomme les maths « *la reine et la servante des sciences* »².

Il y a quelque temps seulement, j'ai découvert un livre, écrit par le philosophe français Alain Badiou, qui reprend savamment les principaux arguments que j'avais découverts progressivement en faveur des mathématiques. J'en reproduis ci-après quelques extraits qui me semblent bien correspondre à mes pensées (et qui sont présentés sous une formulation que je ne suis pas capable d'exprimer aussi pertinemment). « *Au fond, les mathématiques sont la plus convaincante des inventions humaines pour s'exercer à ce qui est la clé de tout progrès collectif comme de tout bonheur individuel : oublier nos limites pour toucher, lumineusement, à l'universalité du vrai. [...] C'est la simplicité des mathématiques, le fait qu'elles sont*

² Bell E.T., « *La mathématique, reine et servante des sciences* », 1953.

*univoques, sans rien de caché, d'obscur, sans double sens ou tromperie calculée, qui peut nous émerveiller. Et leur indifférence aux opinions dominantes est un modèle de liberté. [...] Loin d'être l'exercice ingrat ou vain que l'on imagine, les mathématiques pourraient bien être le chemin le plus court pour la vraie vie, laquelle, quand elle existe, se signale par un incomparable bonheur. »*³

C'est donc tout naturellement que j'ai décidé d'entreprendre des études supérieures qui privilégient la discipline que j'appréciais le plus et dans laquelle je performais le mieux. Comme le métier d'ingénieur civil ne m'attirait guère, à cause parfois du côté pragmatique ou de certaines conclusions approximatives, je me suis orienté, quasi automatiquement, vers une licence universitaire en mathématiques, sans trop réfléchir à ma future carrière professionnelle. Mais, il était toutefois clair que, en ce temps-là, la licence en mathématiques aboutissait le plus souvent à exercer ultérieurement le métier de professeur dans le secondaire (au degré supérieur).

A l'Université⁴, j'ai ajouté de nouveaux arguments à mes réflexions.

Tout d'abord, j'ai été sensible aux côtés « éthique et esthétique » des maths. En plus d'être certains et utiles, les raisonnements en maths peuvent souvent être beaux par leur simplicité, leur côté inéluctable, leur agencement logique, leur astuce éventuelle, parfois leur soudaineté, voire leur mystère, ... ; de plus, ils sont conformes à une logique en principe connue de tous et sont dès lors équitables, à tout le moins incontestables. C'est d'ailleurs cet aspect des mathématiques que mes amis de la revue française *Tangente*, emmenés par le Bruxellois Daniel Justens, ont décidé de mettre en avant lorsqu'ils ont conçu un numéro Hors Série pour m'honorer au moment de mon départ à la retraite⁵.

Les programmes des candidatures comprenaient des cours obligatoires abordant diverses disciplines liées, de près ou de loin, aux mathématiques ; elles étaient de deux types⁶ : en mathématiques 'pures' (analyse, algèbre, géométrie) et en mathématiques 'mixtes' (physique, mécanique, astronomie et chimie). Ceux de licence prévoyaient notamment deux cours option et le choix d'un promoteur pour guider le travail de fin d'étude (TFE en abrégé). Je n'appréciais guère les cours à orientation pratique et décidais donc de les éliminer pour mes options. Mais ce choix était plutôt instinctif et je n'aurais pas su alors valablement l'expliquer. Ce n'est que bien plus tard, en lisant un livre de G. Polya⁷, que j'ai découvert une explication a posteriori qui m'agrée. Cet auteur affirme, d'après ce que j'en ai compris et retenu, que parmi toutes les disciplines scientifiques, seules les mathématiques pures reposent sur des

³ Extraits du livre « *Eloge des mathématiques* », par Alain Badiou (avec Gilles Haéri), Collection "Café Voltaire" de Flammarion, France ; 2016, 136 pages. Les citations sont reprises des pages 116, 117, et pour la dernière phrase, du dos de couverture. J'ai publié une analyse de cet ouvrage dans la revue *Losanges*, n° 34, 2016, pp. 70-71.

⁴ Mes études universitaires (de base) ont été accomplies de 1966 à 1970. Elles comprenaient à cette époque deux années de candidature et deux de licence.

⁵ « *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique. Une dimension insoupçonnée* », sous la direction de D. Justens, Bibliothèque Tangente, HS n° 51, Editions Pole, Paris, mars 2014, 162 pages.

⁶ Cette distinction est ancienne. Déjà en 1605, F. Bacon écrivait : « les mathématiques sont soit pures soit mixtes (c'est-à-dire mêlées de matière). » Cette citation est extraite de son livre « *Du progrès et de la promotion des savoirs* », Collection Tel, Gallimard, 1991, p. 130.

⁷ « *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"* », par G. Polya, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

raisonnements démonstratifs, faits de preuves dont la conclusion est certaine et doit être admise par tous, sans devoir être confirmée (ou infirmée) par une confrontation avec des situations de la vie réelle (ou de la nature)⁸ ; les autres sciences font appel à des raisonnements ‘plausibles’ dont la conclusion doit être confrontée à la vie réelle pour être confirmée ou rejetée, ce qui ne fournit finalement, selon Polya, « *qu’une présomption plus raisonnable que d’autres présomptions qui le sont moins* »⁹. Or, j’ai toujours préféré des preuves et des certitudes plutôt que des présomptions que je trouve généralement insuffisantes en sciences.

C’est pourquoi, j’ai choisi en licence des cours de mathématiques pures.

Le cours de candidature qui avait ma préférence était celui d’analyse ; c’était par ailleurs le plus imposant. Toutefois, je ne retins pas en option le cours d’analyse supérieure, essentiellement sur base de rumeurs colportées alors sur son titulaire (F. Bureau) : il n’avait pas la réputation d’être un bon pédagogue (mais nous les étudiants ignorions complètement sa réelle valeur scientifique¹⁰).

Néanmoins, dans un premier temps, j’avais décidé de choisir comme futur promoteur de mon TFE notre professeur (H. Garnir) d’analyse en candidature. Au début de la troisième année, je me rendis au dixième étage du Val Benoit, où était installé son service, pour lui demander de diriger mon travail. Mais, à cette époque, il était absent (pour assister à l’étranger à un colloque). Avant son retour, je reçus un cours de topologie (discipline qui m’était alors inconnue). Ce fut un véritable ‘coup de foudre’ pour cette matière. J’étais particulièrement séduit par la rigueur et la clarté des raisonnements, l’approche axiomatique que je n’avais pas souvent rencontrée auparavant¹¹, la généralité du propos et le souci pédagogique manifesté par le titulaire du cours (F. Jongmans).

⁸ Selon H. Breny, « *la mathématique est fondamentalement abstraite et indifférente à l’existence même de son objet, alors que la “physique” (au sens le plus large du terme) baigne dans l’existentiel, qui joue pour elle le rôle de principe (ce sont toujours les observations qui “jugent” une théorie physique).* » (Dans « *Petit traité élémentaire de théorie des probabilités* », Edition et diffusion “Edibon”, Liège, 1968, p. 15).

Une autre façon assez proche de présenter une classification des sciences est donnée par Chr. De Bruyn. Pour lui, on pourrait distinguer les catégories des sciences par leur mode et degré de validation. En faisant implicitement référence à certaines écoles de la Grèce antique et à leurs disciples, cet auteur considère les modes

- “Ésotériques”, auxquels se réfèrent les mathématiques pures : ils sont caractérisés par les mots « *élégance, esthétique, simplicité, pertinence, généralité, preuve, vraisemblance, non-contradiction par l’expérience, conclusion de diagnostic, risque d’inversion de l’assertion* » ;
- “Exotériques”, qui concernent les autres domaines scientifiques : ils sont associés aux termes suivants : « *constatation, admissibilité, présomption, plausibilité, crédibilité, confiance, résultats observables, autorité, caution d’experts, gain de cause, agréation, ratification, solution acceptée, survie de l’investigateur.* » (Chr. De Bruyn, dans *Exposés de systémique en gestion avec référence à la gestion hospitalière*, Tome d’Ouessant, chapitre Y “La validation de l’investigateur”, pp. Y-6 et Y-7).

⁹ G. Polya (1958), op. cit., p. X.

¹⁰ Voir les deux bibliographies sur “Florent J. Bureau” rédigées par J. Mawhin et publiées dans *l’Annuaire de l’Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* (2002, pp. 1-27) et dans *Nouvelle Bibliographie Nationale* (vol. 8, 2005, pp. 48-52).

¹¹ Par exemple, lors du premier cours, le professeur présenta la notion fondamentale d’ensemble ouvert par deux jeux d’axiomes dont il démontra bien sûr l’équivalence. Cette présentation pouvait être comparée avec celle donnée dans le cours d’analyse reçu antérieurement : le professeur y appelait ouvert « dans E_n un ensemble qui contient, en même temps que chacun de ses points, tous ceux qui en sont à distance suffisamment petite » (Garnir, dans *Fonctions de variables réelles I*, Librairie Universitaire de Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1963, p. 61).

A l'issue du premier cours de topologie, je contactais ce dernier pour lui demander de bien vouloir guider la fin de mes études ; il accepta de suite ma requête. Comme il était titulaire de la chaire de Géométrie Supérieure, les deux options que je décidais d'inclure dans mon programme concernaient dès lors la Géométrie Supérieure (par F. Jongmans) et la Géométrie Infinitésimale (par O. Rozet), simplement parce que je trouvais a priori ces deux disciplines (qui m'étaient quasiment inconnues) assez complémentaires ¹².

Jusqu'à la candidature (comprise), un étudiant en mathématiques est invité à comprendre et à s'approprier des théories élaborées la plupart du temps par de grands savants du passé, tels que Pythagore, Euclide, Newton, Leibniz, Euler, Cauchy, ... ; puis, il est amené à résoudre des exercices et des problèmes posés par un professeur (qui généralement connaît la réponse, le plus souvent unique, à la question posée) ; dans ce cas, le travail de l'étudiant consiste essentiellement en de la restitution (de préférence intelligente) de théories connues.

Un grand changement s'est opéré avec mon travail de fin d'études (TFE en abrégé).

Lors de la réalisation de mon TFE, je fus amené progressivement à me rendre compte que les mathématiques sont loin d'être figées, contrairement à ce que l'on pense souvent ; en fait, il y a toujours moyen de créer de nouveaux résultats en se posant des questions non encore abordées dans la littérature. En d'autres termes, mon professeur me donna l'occasion de découvrir ce que peut être la recherche en mathématiques ; il m'y initia par la guidance efficace de mon mémoire et lança véritablement ma vocation de chercheur (voir les sections suivantes).

Aussi, lorsqu'en fin de seconde licence, le directeur de mon TFE m'offrit une place d'assistant dans son service pour l'année suivante, je n'ai guère réfléchi et ai accepté son offre : il me proposait un contrat (à titre temporaire) d'une durée de deux ans, avec deux renouvellements possibles, puis me confia que, dans l'hypothèse où le métier m'agrèerait et où je me montrerais performant en réalisant notamment un doctorat dans un délai « normal » (de trois ou quatre ans environ), trouverais des résultats originaux et les publierais dans des revues spécialisées, je pourrais envisager une carrière académique complète comme c'était quasiment automatique à cette époque pour les jeunes assistants méritants ¹³.

Dès lors, je me dirigeais alors vers une carrière d'enseignant-chercheur à l'Université. Elle réunissait apparemment toutes les facettes des mathématiques que j'avais découvertes et que j'appréciais. Elle semblait me convenir, car j'aimais, a priori (mais je n'avais alors guère d'expérience dans ce domaine), élaborer de nouvelles théories mathématiques, imaginer des présentations inédites de résultats connus et trouver des applications concrètes de théories existantes, avant de les exposer adéquatement au public visé.

¹² A ce moment, j'ignorais complètement que la théorie infinitésimale allait me passionner plus tard (voir la section 5). A posteriori, je me suis rendu compte de mes lacunes en algèbre (que j'aurais probablement dû choisir à la place de la géométrie infinitésimale).

¹³ Ce contrat fut, me semble-t-il, rempli. Mais l'Université fut par la suite confrontée à des difficultés budgétaires et modifia son mode de recrutement ; je fus victime de ce changement et dus quitter ULiège à l'issue de mon troisième mandat d'assistant, comme L. Bragard l'a expliqué dans son article intitulé « Le développement de l'enseignement des méthodes quantitatives au sein de l'Ecole d'Administration des Affaires de l'Université de Liège », paru dans le livre « *Regards croisés sur les méthodes quantitatives de Gestion en hommage aux professeurs Christian De Bruyn et René Moors* », sous la coordination de J. Bair et V. Henry, Les Editions de l'Université de Liège, 2004, pp. 1-18.

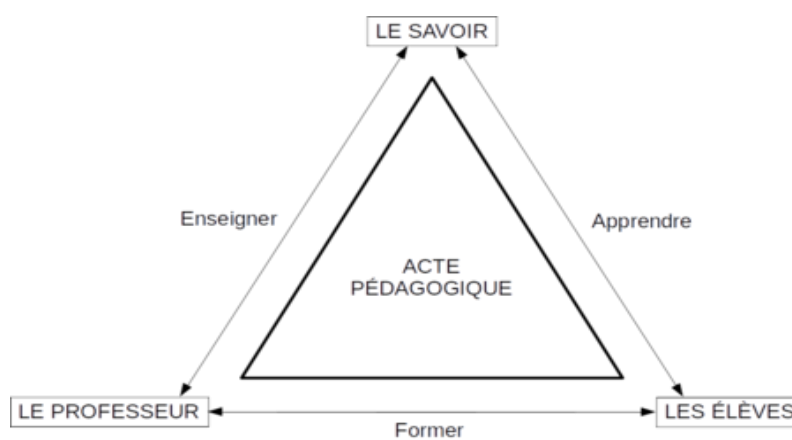
J'eus l'opportunité d'accomplir de telles tâches tout au long de ma carrière professionnelle. Celle-ci ne démarra pas facilement parce que, à l'issue de mes trois mandats d'assistant temporaire, je n'avais pas été nommé à titre définitif dans le corps scientifique de ULiège et que j'avais été amené à enseigner pendant 11 ans (de 1977 à 1987) dans une Haute Ecole d'ingénieurs industriels (à l'Institut Supérieur Industriel de Huy). Je parvins à réintégrer mon Université de formation en 1987 très probablement parce que j'avais obtenu un peu plus tôt (en 1984) le diplôme d'Agrégé de l'Enseignement Supérieur¹⁴, ce qui ne fut possible que grâce aux encouragements, aux conseils et à la guidance éclairée de F. Jongmans.

¹⁴ Voir mon article « Flash-back sur l'Agrégation de l'Enseignement Supérieur en mathématiques à l'Université de Liège », (2021-04-12) ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.net/2268/258816>.

2. Parcours d'enseignant

Quand je suis devenu assistant, je ne possédais pratiquement aucune expérience d'enseignement ; j'avais juste suivi les cours débouchant sur le diplôme d'AESS (Agrégation de l'Enseignement Secondaire Supérieur) ; mais ce programme était assez léger et il était d'ailleurs suivi simultanément à celui de la seconde licence. Heureusement, j'arrivais dans un service universitaire soudé composé de jeunes de ma génération, à savoir A. Dessard et R. Fourneau, qui purent profiter des conseils de personnes chevronnées : le chef de travaux J. Vangeldère et l'assistant L. Bragard assuraient des exercices pratiques depuis plusieurs années et transmirent aux débutants les exercices qu'ils résolvaient avec les étudiants ainsi que des conseils avisés ; par ailleurs, les deux académiques du service performaient relativement au volet pédagogique de leur charge : F. Jongmans avait l'art de construire des cours originaux bien adaptés à ses étudiants, tandis que J. Varlet maîtrisait tous les aspects de l'enseignement puisqu'il avait successivement obtenu un diplôme d'instituteur, avant d'en décrocher un de régent, puis de licencié et enfin de docteur en mathématiques. Le service universitaire dans lequel j'entrais avait donc la particularité, peu courante à l'époque, d'attacher une grande importance sur ce que l'on appelait alors la pédagogie et est connu aujourd'hui sous le nom de didactique ¹⁵.

Attardons-nous sur certaines spécificités d'un tel enseignement en analysant succinctement les trois sommets du triangle didactique qui schématise le processus d'enseignement.



(source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_p%C3%A9dagogique)

¹⁵ Jusque dans les années 1970, le terme de pédagogie était le seul utilisé quand il était question d'enseignement. Plus tard, est également apparu le terme de didactique et ces deux mots étaient alors quasiment synonymes. Mais, vers les années 1980, des français, emmenés principalement par G. Brousseau, G. Vergnaud ou encore Y. Chevallard, ont créé une école de didactique en mathématiques qui s'est développée dans certains milieux ; elle était alors caractérisée notamment par l'utilisation d'un vocabulaire précis mais jargonnant.

On peut remarquer que certains professeurs du passé, tels que F. Jongmans et J. Varlet, dispensaient d'excellents cours bien qu'ils ignoraient tout du vocabulaire de la didactique utilisé de nos jours. Actuellement, en ce qui concerne les mathématiques, on peut schématiquement constater que les pédagogues sont généralement issus d'une Faculté de Psychologie ou de Sciences de l'Éducation et s'intéressent à l'art d'enseigner en général, tandis que les didacticiens sont des mathématiciens qui se spécialisent dans l'enseignement de leur discipline.

A l'Université, un professeur se voit désigné par ses pairs (d'abord par une commission composée de spécialistes du domaine considéré, puis par le conseil facultaire regroupant tous les académiques de la Faculté et enfin par le Conseil d'Administration de l'Institution) pour une charge de cours. L'enseignant ne reçoit que l'intitulé de ses cours et le moment de les donner ; il a carte blanche pour choisir sa matière ainsi que la façon de la présenter et le timing à respecter dans le cadre du programme établi ; en d'autres termes, il jouit de ce que l'on appelle la « liberté académique » pour organiser ses cours.

Avant de dissertar davantage sur mes enseignements, recensons quelques conditions qu'un professeur d'Université doit en principe satisfaire pour élaborer ses cours. Avant tout, il convient évidemment que l'enseignement dispensé soit conforme à la charge confiée par les autorités ; il faut également qu'il s'intègre harmonieusement au sein du programme d'études auquel il appartient et reçoive l'approbation des professeurs délivrant les autres matières¹⁶ ; il doit aussi convenir aux étudiants, en étant formateur et en leur inculquant des valeurs assez caractéristiques des mathématiques (comme la rigueur, la précision, la cohérence, l'abstraction, la généralité) et en faisant éventuellement le lien avec d'autres cours comme, dans mon cas, l'économie politique, la finance, la statistique, la physique (pour les ingénieurs de gestion). Il importe également que le cours enseigné soit en adéquation avec la personnalité de l'enseignant : idéalement, il faudrait que le professeur fasse intervenir, sous une forme assimilable par les apprenants, des résultats provenant de ses recherches personnelles. Ce dernier point est une spécificité de l'enseignement universitaire : un professeur d'Université est un enseignant-chercheur qui est d'ailleurs recruté sur base de son curriculum vitae, axé principalement sur l'activité scientifique, ce qui n'est pas le cas dans les autres niveaux d'enseignement (les maternelles, le primaire, le secondaire et le supérieur non universitaire).

Le savoir

Personnellement, ma charge de cours a varié au cours du temps, mais j'ai toujours été responsable de la formation mathématique de base (en Candidatures au début, puis en les deux premières années du Bac par la suite) des étudiants inscrits à la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, devenue, dès 2005, HEC-Ecole de Gestion. Toutefois, les cours de statistique et de probabilités figuraient dans une autre charge de cours assurée par L. Bragard jusqu'à son départ, en 1996, vers de hautes fonctions administratives au sein de l'Université.

Au début de ma carrière, j'enseignais en sciences économiques et en sciences de gestion, puis en ingénieur de gestion (depuis la création de ce programme en 1996 et jusqu'à mon départ à la retraite en 2013). L'intitulé de mes cours était de mathématiques générales en première année et de mathématiques appliquées en deuxième année. Puis, avec la « quadrimestrialisation » des programmes, mes enseignements furent répartis, à une certaine époque, en cinq parties : 1) mathématiques discrètes, 2) analyse (des fonctions à une variable), 3) algèbre linéaire, 4) analyse (fonction à plusieurs variables), 5) méthodes mathématiques de la gestion. Chacun de ces partims se donnait sur un quadrimestre, avec la possibilité de moduler la matière en fonction des sections : les étudiants en sciences (économiques ou de gestion) recevaient en première année le partim 1) au premier semestre et le partim 2) au

¹⁶ Pour essayer de satisfaire ce point, j'avais largement consulté les collègues concernés lorsque je préparais mes cours.

deuxième, tandis qu'en deuxième année, ils recevaient respectivement les partims 3 et 4). En ce qui concerne les étudiants inscrits en ingéniorat de gestion, leur programme comprenait les partims 2) et 3) en première année et les partims 4) et 5) en deuxième. Après la fusion avec HEC en 2005, je n'ai plus enseigné qu'aux étudiants inscrits en ingéniorat : en première année, le programme prévoyait l'algèbre linéaire et l'analyse à une variable, tandis qu'en deuxième année, les cours dispensés étaient l'analyse à plusieurs variables et une introduction à la modélisation mathématique en gestion.

Tous ces cours faisaient l'objet de livres ou syllabi se rapportant aussi bien à la théorie qu'aux exercices et problèmes, diffusés souvent par les Presses Universitaires de Liège; certains ont fait l'objet de livres publiés par des maisons d'édition universitaire en Belgique (De Boeck Université, Bruylant) et en France (Cassini, Pole).

En fait, ma charge de cours avait été créée, à la naissance de la FEGSS (Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales), pour assurer la succession des professeurs F. Jongmans et J. Varlet admis à la retraite en 1986 et 1987 respectivement. Les cours que ceux-ci avaient construits étaient, selon moi, excellents tant au niveau du choix des thèmes abordés que de la présentation de la matière ; ils comprenaient essentiellement de l'algèbre linéaire et de l'analyse mathématique ; ces deux disciplines étaient bien abordées dans la plupart des autres universités du pays proposant les mêmes programmes, mais les cours liégeois se distinguaient de leurs concurrents par l'ordre de présentation de la matière. J'ai repris les idées de mes prédécesseurs car leur exposé me semblait le meilleur de tous ceux que j'avais consultés : il convenait aussi bien aux étudiants qu'aux collègues de la Faculté et m'étaient familiers puisque j'avais assuré auparavant les travaux pratiques qui leur étaient associés.

J'ai d'abord travaillé le cours d'algèbre linéaire (voir la section 4).

Quand mon cours d'algèbre linéaire fut jugé au point, je me suis intéressé plus spécialement à celui d'analyse et ai été amené à le modifier progressivement. La présentation de l'analyse mathématique que j'ai adoptée dès le début de ma carrière diffère de celle qui m'a été enseignée quand j'étais étudiant. En effet, pour étudier les fonctions (réelles à une variable), mon professeur d'analyse, H. G. Garnir, commençait par un exposé sur la théorie des fonctions en général, puis des limites de valeurs d'une fonction et des concepts qui en découlent (continuité, dérivée, ...) et les limites de fonctions (convergence ponctuelle ou uniforme). Par après seulement venait une analyse détaillée, sur base de ce qui précède, les fonctions élémentaires usuelles ; ceci était suivi d'une étude de primitives de fonctions et d'équations différentielles élémentaires.

J'ai préféré m'inspirer des enseignements donnés par F. Jongmans et J. Varlet, c'est-à-dire d'inverser l'ordre de la présentation suivi par Garnir : il s'agissait d'abord d'établir la théorie et les applications des principales fonctions élémentaires, puis, à partir de là, d'en dégager la structure de fonction en toute généralité. Ce principe est d'ailleurs cohérent à l'approche adoptée pour le cours d'algèbre linéaire : pour bien assimiler le cas général, qui est forcément plus abstrait, il faut, me semble-t-il, avoir du « vécu » et donc connaître des exemples de situations particulières que l'on peut ensuite globaliser et généraliser ; cette réflexion va dans le même sens que ce que l'on a constaté par le passé avec l'échec de la réforme des mathématiques modernes dans le secondaire (voir la section 7).

Pendant toute ma carrière professorale à ULiège, j'enseignais essentiellement l'analyse et l'algèbre linéaire à des étudiants inscrits en sciences économiques ou de gestion ou encore en ingénierat de gestion. Mais, à une certaine époque, j'ai aussi été titulaire d'un cours réservé exclusivement aux futurs gestionnaires. Son intitulé et son contenu ont varié au fil des ans : il a figuré dans les programmes sous différentes appellations : théorie des graphes, méthodes mathématiques de la gestion, modélisation mathématique en gestion. Son objectif consistait à fournir aux étudiants des outils mathématiques nouveaux leur permettant d'aborder avec efficacité des problèmes concrets rencontrés dans le monde des affaires et de la finance. C'est ainsi que, selon les années, des thèmes tels que ceux-ci ont été abordés : applications concrètes de la théorie des graphes (problèmes de cheminement, d'affectation, d'ordonnancement, de transport, de flux, ...), théorie de l'aide multicritère à la décision et du choix collectif (comprenant notamment une introduction à l'optimisation multicritère ainsi qu'un exposé, avec démonstration complète et rigoureuse, du théorème d'impossibilité d'Arrow), logique floue, algèbre de Boole, chaos déterministe, modèles mathématiques déterministes ou stochastiques en gestion, et spécialement en finance, ... Ainsi, ce cours, qui se trouvait au programme de la deuxième année en gestion, rassemblait des matières le plus souvent récentes et peu abordées à cette époque dans des programmes universitaires au niveau considéré; il avait pour mission d'établir un lien (utile) entre les enseignements classiques de base en mathématique (assurés, durant les deux premières années, par les cours d'analyse et d'algèbre linéaire) d'une part, et entre des enseignements plus spécialisés dispensés en masters (anciennement la licence) d'autre part, à savoir ceux de recherche opérationnelle, de finance, de méthodes quantitatives (mathématiques) de la gestion. Ce cours présentait notamment des travaux effectués par des chercheurs travaillant à ULiège et bénéficiait ainsi de l'expertise de la recherche universitaire locale ; il a d'ailleurs fait l'objet de plusieurs publications (voir la section 4); il était une spécificité des programmes proposés par l'Ecole d'Administration des Affaires (EAA, en abrégé) ; il semblait apprécié par les étudiants et par les collègues s'occupant de la confection des programmes. Au risque d'apparaître nostalgique, je pense sincèrement que cet enseignement (qui n'existe plus) valorisait le cursus proposé aux futurs ingénieurs de gestion.

Les apprenants

Tout au long de ma carrière, j'ai enseigné les mathématiques supérieures de base, et ce dans trois Institutions de niveau universitaire. Ainsi, mes étudiants ont présenté un profil pouvant être variable.

Voici une analyse succincte des différents publics qui ont assisté à mes cours.

a) J'ai travaillé onze années à l'ISI (ou Institut Supérieur Industriel) de l'Etat, à ses sièges de Huy (pour une section en agronomie) et à celui de Verviers (pour une section en textile) ; j'y ai été chargé de cours, puis assistant et chef de travaux. Cet Institut conférait un diplôme, de niveau universitaire, d'Ingénieur Industriel¹⁷ en quatre années, deux de candidature et deux autres de finalité. La première année comprenait entre cent et cent cinquante étudiants à Huy,

¹⁷ Anciennement (en fait, jusqu'en 1977), le titre conféré était celui d'ingénieur technicien délivré après la réussite de trois années d'études.

et environ trente à Verviers. Ceux-ci s'engageaient dans des études d'ingénieur et n'étaient pas a priori hostiles aux mathématiques. Leur origine était différente selon le site.

A Huy, les apprenants provenaient généralement d'un milieu familial travaillant dans le secteur agricole ; pour les trois quarts d'entre eux, environ, ils avaient été inscrits l'année précédente aux Facultés Universitaires de Gembloux¹⁸ qui étaient réputées en agronomie ; ils n'y avaient pas réussi leur année. Ces étudiants étaient certes de bonne volonté et sympathiques, mais ils n'étaient pas toujours à l'aise avec des matières abstraites, de sorte qu'il me fallait insister sur le savoir-faire en mathématiques et sur l'exploitation de l'outil théorique dans des applications concrètes.

A Verviers, les étudiants provenaient majoritairement de pays maghrébins (car l'industrie textile locale, jadis florissante dans la région avoisinante, avait conservé une bonne réputation dans ces contrées). Ils avaient souvent reçu une solide formation mathématique durant leurs études secondaires, basées sur les programmes de mathématiques en vigueur dans le secondaire en France. Le cours de statistique était assez poussé, avec des applications concrètes (issues souvent des travaux de recherche menés par deux statisticiens de ULiège qui avaient enseigné jadis à l'Ecole Textile, à savoir H. Breny et F. Monfort).

L'ISI m'offrait une place confortable, avec une nomination à titre définitif, un salaire équivalent à celui d'un enseignant universitaire de même ancienneté, une ambiance de travail conviviale avec des collègues agréables. Malgré ces avantages appréciables, j'ai décidé de postuler à l'Université de Liège après l'obtention de mon diplôme AES. La raison de ce désir de changement de cap était double. D'une part, le niveau global des étudiants diffère dans les deux types d'enseignement en question : à l'Université se retrouvent généralement les plus studieux et avides de savoirs (même sophistiqués et abstraits). D'autre part, l'Université accorde une place importante à la recherche scientifique ; le professeur y est amené à encadrer des jeunes chercheurs, à former et diriger des équipes d'enseignants-chercheurs, ce qui n'est pas forcément le cas dans un autre type d'enseignement supérieur (même de niveau universitaire).

b) En 1998, j'étais professeur ordinaire (nommé à titre définitif) à l'Université de Liège (voir ci-dessous). Au début du mois d'août de cette année, j'avais assisté au cinquantième congrès international de la CIEAEM (*The International Commission for the Study and improvement of Mathematics Teaching*), à l'Université de Neuchâtel en Suisse, sur le thème « *Links between theory and practice* ».

J'y avais donné une conférence intitulée « la formation mathématique en Economie ».

Après mon exposé, un des auditeurs tint à me rencontrer ; il s'agissait de René Klopp dont j'ai appris par la suite qu'il présidait la commission nationale des programmes de mathématiques dans le secondaire au Grand-Duché de Luxembourg et qu'il dirigeait le Centre Universitaire du Luxembourg où était notamment organisée une première candidature en sciences économiques ; il souhaitait mettre sur pied une seconde candidature, les étudiants la réussissant étant ensuite invités à continuer leur licence (ou maîtrise) à l'étranger (généralement, j'en Belgique, France ou Allemagne). Dans cette optique, il m'invitait à exposer les idées que j'avais développées lors de ma conférence en Suisse au Centre Universitaire du

¹⁸ Depuis cette époque, les Facultés en question forment une Faculté (Gembloux Agro-Bio Tech) de l'Université de Liège.

Luxembourg devant ses collègues ¹⁹. Je répondis favorablement à cette invitation et donna une conférence au Centre luxembourgeois (rue de la Faïencerie) en mai 1999 ; un compte-rendu de cet événement est paru le lendemain dans un journal grand-ducal ²⁰.

A cette occasion, je fis la connaissance d'économistes et de gestionnaires luxembourgeois, probablement plus favorables aux mathématiques que mes collègues liégeois, ainsi que du mathématicien Jean-Claude Delagardelle qui allait devenir le successeur de René Klopp dans le cercle luxembourgeois de l'enseignement des mathématiques, puis mon collègue et ami. En effet, dès l'année académique suivante, donc en 1999-2000, je fus engagé par le Centre universitaire de Luxembourg pour donner le cours de mathématiques aux étudiants de la deuxième année en économie qui venait d'être créée. Les mathématiques étaient alors enseignées aux futurs économistes inscrits au Centre par trois mathématiciens qui formaient une équipe soudée dirigée par J.C. Delagardelle : celui-ci donnait les cours de première année avec le louvaniste Paul Henrard, et ceux de la seconde année avec moi. La politique luxembourgeoise consistait à confier les enseignements de mathématiques au président de la Commission des programmes (qui était le professeur de mathématiques le plus influent du pays) et de le seconder par des personnes d'expérience enseignant en Belgique (à Louvain et à Liège).

De 1999 à 2007, je me rendais chaque semaine, le vendredi, à Luxembourg, pour donner cours à une quinzaine d'étudiants inscrits en seconde candidature en économie. Ceux-ci avaient reçu une bonne formation antérieure, tant dans l'enseignement secondaire que lors de leur première année au Centre, de sorte que les cours qui leur étaient dispensés semblaient bien adaptés, malgré le fait qu'ils étaient donnés en français qui n'était généralement pas leur langue maternelle (le luxembourgeois).

Après huit années d'enseignement en seconde année d'économie, j'ai continué à me rendre régulièrement au Grand-Duché, mais cette fois sur le site de Walferdange du Centre devenu l'Université du Luxembourg. J.-C. Delagardelle avait été désigné comme responsable de la FOPED (la Formation Pédagogique), et à ce titre m'invitait à y donner cours. Les étudiants de cette formation étaient porteurs d'un diplôme de licence ou de master en mathématiques, donc étaient généralement d'un niveau qualifié de Bac +5, provenant d'une université étrangère. Ils étaient déjà engagés comme professeurs de mathématiques dans le secondaire, souvent au degré inférieur, et y exerçaient une charge partielle rémunérée par l'Etat, leur deuxième mi-temps étant consacré à parfaire leur formation pédagogique.

c) La plus grande partie de ma carrière professionnelle s'est déroulée à l'Université de Liège, plus précisément à la FEGSS (Faculté d'Economie, de Gestion et de Science sociales) devenue, en 2005, HEC-Ecole de Gestion. Mes étudiants se consacraient donc essentiellement à l'économie, à la gestion au sein de l'Ecole d'Administration des Affaires (EAA en abrégé) ou aux sciences sociales ²¹.

¹⁹ Cette invitation émanait « du département de Droit et des Sciences économiques, du département des Etudes en Gestion et en Informatique du Centre universitaire de Luxembourg ainsi que de la Commission nationale des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire ».

²⁰ Dans son édition du 21 mai 1999, le journal « *La voix du Luxembourg* » publiait un article intitulé « Les mathématiques dans la formation des économistes et des gestionnaires » ; il était signé par René Klopp.

²¹ J'ai également eu, à certains moments de ma carrière, des étudiants en philosophie (option sciences), en sciences politiques ou même en droit ; mais ils étaient peu nombreux.

La plupart d'entre eux sortaient des humanités, mais certains de mes étudiants étaient plus âgés, souvent déjà engagés dans leur vie professionnelle : ils souhaitaient se recycler en économie ou en gestion dans des cours organisés dans le cadre du Diplôme d'Economie et de Gestion (DEG en abrégé) créé, à horaire décalé, à l'initiative du Professeur J. Stassart²². Le nombre de mes auditeurs changeait chaque année, mais j'étais souvent en présence de grands auditoires ; à une certaine époque, mon cours de première année devait se donner à plus de mille étudiants et, comme il n'existait aucun local suffisamment grand pour les accueillir tous simultanément, je devais dédoubler chacune de mes prestations.

Il va sans dire qu'un public aussi nombreux est forcément hétérogène.

La motivation pour s'inscrire à la FEGSS (ou HEC-Ecole de Gestion) peut différer d'un individu à l'autre.

Bien sûr, le choix des études est libre, puisque l'obligation scolaire n'est plus de mise au niveau universitaire. Il peut être influencé par des motifs externes, tels que des avis de l'entourage ou encore la réputation de l'établissement.

En particulier, l'étudiant recherche parfois la formation la plus exigeante d'un point de vue intellectuel dans le domaine concerné, ce qui l'amène automatiquement à l'Université, et donc, au niveau régional, à la FEGSS. Quoi qu'il en soit, son choix s'est de toute façon porté sur des études préparant directement et concrètement à une profession dans un secteur réputé offrir un large éventail de débouchés potentiels de haut niveau (et donc souvent bien rémunérateurs).

Une autre raison pouvant paraître attractive pour des étudiants est le caractère généraliste des études. Alors que, parfois les programmes universitaires sont dirigés dans une même direction (par exemple c'est le cas en mathématiques, en droit, en médecine, en psychologie, ...), ceux en économie ou en gestion réclament une grande ouverture d'esprit puisqu'ils prévoient des cours variés comme l'économie politique, la comptabilité, la finance, la sociologie, le droit, des langues modernes, des mathématiques (y compris de la statistique). Selon une métaphore qu'utilisait jadis le professeur Guy Dister quand il rencontrait des étudiants pour la première fois, un étudiant qui s'inscrit à la FEGSS doit ressembler à un coureur cycliste du Tour de France : il doit bien se défendre sur tous les terrains (en plaine ou en montagne), dans toutes les formes de courses (en peloton, au sprint, contre la montre en individuel ou par équipe). Cette polyvalence peut donner l'illusion, assurément erronée, que les divers cours à la FEGSS sont peu poussés, ce qui provoque quelquefois une inscription par choix négatif. En effet, certains apprenants sortent des humanités sans réel projet pour leur avenir et ainsi ne souhaitent pas se diriger vers des études universitaires spécialisées dans un domaine précis ; ils choisissent donc l'économie ou la gestion par élimination d'autres options. Ce point ne s'applique certainement pas à tous les étudiants, loin de là, mais peut expliquer en partie le nombre élevé d'abandons au cours de la première année ainsi que la différence de niveau des primants dans cette orientation.

²² Il s'agissait du diplôme d'économie et de gestion (DEG), du diplôme complémentaire en administration des affaires (DCAA) ou d'une licence à horaire décalé en administration des affaires (LhdAA) . J'ai dirigé ces programmes pendant une dizaine d'années. L'épopée des enseignements à horaire décalé à la FEGSS est décrite dans le livre « L'économie, la gestion et les sciences sociales à l'Université de Liège 1896 - 1996 », ouvrage édité à l'occasion du centenaire de la création des enseignements de sciences sociales et de gestion à l'Université de Liège ; les auteurs en sont J. Bair, L. Bragard, G. Dister, P. Fraipont, J. Gadisseur, H.J. Gathon, Y. Gelard, P. Lebrun et G. Quaden.

Après mon admission à l'éméritat, il m'est arrivé plusieurs fois de rencontrer d'anciens étudiants venant spontanément me saluer et me dire qu'ils avaient apprécié mes cours qui mettaient en évidence l'utilité des mathématiques dans des situations réelles (ou pouvant l'être) : ils avaient alors compris à quoi peuvent servir les mathématiques enseignées, ce qui n'avait pas été le cas auparavant lors de leurs études secondaires. Une telle appréciation est évidemment gratifiante pour moi, car elle atteste qu'un objectif que j'avais recherché dans l'élaboration de mes cours avait été bien perçu par les apprenants. Mais il me faut reconnaître que ma tâche dans ce domaine était facilitée par la motivation des étudiants qui avaient choisi de suivre des études supérieures en économie ou en gestion. Par contre, dans le secondaire, les professeurs n'ont pas la tâche aussi facile : ils ne connaissent pas forcément les applications économiques²³ ; par ailleurs, leurs élèves ne vont pas nécessairement s'orienter plus tard dans des études universitaires visant à performer dans le monde des affaires et, de plus, ne possèdent pas nécessairement le bagage théorique suffisant pour comprendre des problèmes rencontrés en économie.

Le professeur

Le recrutement par l'Université d'un enseignant est quelque peu paradoxal : l'appel à candidature est lié à la pédagogie puisqu'il concerne un ensemble de cours à donner, tandis que la sélection des candidats est essentiellement de nature scientifique puisqu'elle accorde une importance primordiale aux activités scientifiques de recherche.

Pour ma part, j'ai posé ma candidature pour un ensemble de six cours (soit un total de 370 heures) qui reconstituaient à peu près la chaire que détenait F. Jongmans à la Faculté des Sciences. Quatre de ces cours étaient réservés à la licence en sciences mathématiques, à savoir ceux de topologie, géométrie supérieure, méthodes mathématiques en économie et en gestion, recherche opérationnelle (ces deux derniers cours ayant été créés à l'occasion de l'appel à candidature); ils formaient un bloc cohérent puisqu'ils portaient tous sur des matières fondamentales pour les mathématiques exploitées en économie, en gestion et dans les sciences sociales. Les deux premiers de ces cours furent attribués à un membre de l'Institut de Mathématique (P. Lecomte) ; le cours de méthodes mathématiques de la gestion ne fut jamais organisé, tandis qu'un enseignement de la recherche opérationnelle forma avec celui de statistique (anciennement détenu par H. Breny) une chaire composée de deux parties et attribuée à une personne recrutée à l'extérieur (M. Roubens). Les deux autres cours sollicités concernaient l'enseignement des mathématiques générales et appliquées à des futurs économistes, gestionnaires et sociologues. Ils m'étaient familiers puisque j'avais assuré des travaux pratiques pendant six années comme assistant de F. Jongmans et donné un cours théorique pendant près de 10 ans dans le cadre du DEG.

Ainsi, mon recrutement dans le corps académique de ULiège fut inédit. En effet, F. Jongmans, le professeur qui donnait avant moi les cours de mathématiques aux économistes et aux gestionnaires, appartenait à la Faculté des Sciences, ainsi que ses assistants. C'est donc tout naturellement au sein de cette dernière que j'avais postulé pour succéder à mon prédécesseur à la Faculté de Droit. Je fus nommé non pas à la Faculté des Sciences (où je m'étais formé) ni à la Faculté de Droit (où allaient se donner les cours convoités), mais bien à

²³ Au cours de mes études secondaires ou universitaires, je n'avais jamais abordé de questions concernant l'économie ou la gestion.

la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales qui venait de naître, de sorte que je fus le premier mathématicien nommé à la FEGSS. Mon arrivée dans la nouvelle Faculté sembla naturelle à l'époque.

Toutefois, je ne possédais alors aucun assistant propre ; mais l'Institut de Mathématique mettait à ma disposition du personnel (qui appartenait donc à la Faculté des Sciences) pour assurer les travaux pratiques de mes cours ; la situation n'était pas idéale parce que je n'avais en principe rien à dire aux nombreux assistants qui prestaient pour mes cours, mais la collaboration avec les mathématiciens fut bonne et assez efficace.

A mon arrivée à la FEGSS, donc, la question de savoir si les cours de mathématiques aux économistes devaient être assurés par un mathématicien ou par un praticien ne s'est pas posée et ne fut, à ma connaissance, pas soulevée par des collègues. Mais, par la suite, notamment lorsque ma charge devint importante et que l'on envisagea de la soulager par la désignation d'un autre enseignant de mathématiques supplémentaire, se posa la question de la nature de la personne à recruter : fallait-il engager un(e) mathématicien(ne) ou un(e) économiste ? Une telle question, qui revint de façon récurrente dans d'autres Universités, fut alors d'actualité à ULiège, car la FEGSS était devenue autonome, cherchait bien sûr à se développer en recrutant, si possible, des économistes.

Mon point de vue à ce propos a toujours été, et est encore, tranché. Pour assurer, à l'Université, des cours de mathématiques en sciences économiques ou de gestion (et d'ailleurs dans toute autre section où cette discipline est enseignée) doivent être assurés par des mathématiciens de formation, qui doivent toutefois s'adapter à leur public dans le choix de la matière enseignée et des exigences requises. Cet avis n'est pas dicté par du corporatisme ou de l'ostracisme ; c'est simplement une question de qualité : tout enseignement universitaire doit « privilégier l'excellence »²⁴ et ne peut dès lors qu'être assuré par un docteur en mathématiques. En effet, celui-ci, qui possède le plus haut diplôme pouvant être acquis en mathématiques, est a priori le mieux armé pour maîtriser en profondeur le savoir à transmettre, ou s'y initier au besoin, pour communiquer son savoir-faire (au niveau des raisonnements et de la résolution de problèmes) ainsi que son enthousiasme pour la matière que lui-même a choisi d'approfondir (notamment par des recherches originales). C'est, selon moi, une condition nécessaire, mais qui n'est pas toujours suffisante, pour atteindre l'excellence souhaitée.

²⁴ Conformément à la devise qu'avait adoptée dans le temps l'EAA.

3. Recherches en géométrie convexe

Mes premières recherches en mathématiques ont été consacrées aux ensembles convexes. Elles ont débuté quand F. Jongmans me proposa, comme sujet pour mon TFE, d'examiner en profondeur l'article « *Maximal Separation Theorems for Convex sets* », de Victor Klee, paru dans la revue *Transactions of the American Mathematical Society* (vol. 134 (1), 1968, pp. 133-147). Je me trouvais alors en première licence ; à peine connaissais-je, au sein d'un espace euclidien de dimension finie, la définition d'un ensemble convexe, ainsi que quelques propriétés générales de base figurant dans le livre d'analyse de Garnir²⁵.

L'article que je devais étudier était rédigé par un mathématicien d'envergure²⁶ ; il venait d'être publié dans une revue réputée. L'auteur y présentait six types de séparation de deux ensembles convexes - à savoir les séparations ordinaire, fine, ouverte ou fermée²⁷, stricte et forte - dans un espace euclidien de dimension n , mais il laissait entrevoir la possibilité de généraliser certains résultats dans des espaces plus généraux.

J'étais attiré par le sujet : celui-ci semblait présenter des perspectives intéressantes pour mener des recherches originales qui pouvaient a priori se baser sur une certaine intuition géométrique abordable.

Il est à noter que je ne me suis jamais posé alors des questions sur l'utilité pratique de cette théorie²⁸ ; d'une part, il me fallait réaliser un TFE qui satisfierait mon promoteur et, d'autre part, je trouvais ce sujet idéal pour lancer une carrière de chercheur en mathématiques pures. Le service au sein duquel j'effectuais mon mémoire étudiait la convexité non pas seulement dans un espace vectoriel réel de dimension finie, comme cela était souvent réalisé à cette époque, mais dans un espace vectoriel de dimension quelconque (même infinie), ce qui était évidemment plus général et original. En particulier les chercheurs liégeois, qui formeront ce qui a été plus tard appelé l'« Ecole Liégeoise de Convexité » (ELC en abrégé), tentaient, d'après le directeur F. Jongmans de celle-ci, de « distinguer aussi clairement que possible, dans les propriétés d'un espace vectoriel topologique, ce qui est lié à la seule structure vectorielle et ce qui fait appel à la structure topologique surimposée.²⁹»

C'est dans ce contexte favorable que j'ai débuté ma carrière de chercheur en mathématiques. Ainsi, j'ai eu, à cette époque, l'opportunité de pouvoir bénéficier d'une guidance attentionnée et remarquable de la part du promoteur de mon TFE et de conseils éclairés de deux chercheurs chevronnés du Service, à savoir Chr. Heuchenne et J. Vangeldère, qui commençaient à s'intéresser à la géométrie convexe.

²⁵ « *Fonctions de variables réelles I* », H. G. Garnir, Paris Gauthier-Villars & Louvain Librairie Universitaire, 1963, pp. 32 – 34.

²⁶ Voir mon article « *Sur la convexité dans le sillage de V. Klee* » ; Orbi : <http://hdl.handle.net/2268/288794>.

²⁷ Mais ces deux dernières forment une même notion (en échangeant les rôles des deux ensembles) ; j'ai qualifié celle-ci de nette.

²⁸ Par après, j'ai quelque peu abordé cette question en appliquant certains de mes résultats pour étudier des questions liées à l'optimisation de fonctions (convexes ou non), puis, bien plus tard, je me suis intéressé à des applications plus concrètes, essentiellement en économie (voir la section 4).

²⁹ Citation de F. Jongmans, dans l'article « *Quelques développements récents liés à la notion de convexité* » paru dans les « Comptes rendus des journées nationales du Centre belge de recherches mathématiques », 1970, pp. 22 – 36.

Dans ce travail, j'introduisis puis étudia un nouveau type de séparation pour deux ensembles (convexes ou non), à savoir la séparation franche. Cette étude a fait l'objet de mon premier article scientifique, rédigé en collaboration avec F. Jongmans et publié dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* (BSRSL en abrégé)³⁰.

J'ai privilégié le thème de la séparation pendant de nombreuses années. J'ai ainsi introduit et caractérisé de nouveaux types de séparation pour deux ensembles : les séparations appelées franche, vraie, branlante, k-branlante ; je me suis intéressé à la séparation de plus de deux ensembles (à savoir les séparations au sens de Vlach, de Gale ou de Klee) ; je me suis encore efforcé d'étudier de tels concepts dans des espaces plus généraux que le classique espace euclidien de dimension n (dans des espaces vectoriels topologiques, des espaces vectoriels, ou même des espaces à convexité).

Pour approfondir de tels sujets, il fallait maîtriser la géométrie des espaces vectoriels. C'est pourquoi, j'ai donné, en collaboration avec R. Fourneau et pendant deux ans, des séminaires sur les bases de l'« étude géométrique des espaces vectoriels ». Les séances étaient suivies par les membres de l'ELC et des invités venant de Bruxelles (à savoir G. Valette et ses élèves J.P. Doignon et M. Geivaerts et E. Degreef) ainsi que, à l'occasion, par des spécialistes de la convexité venant de France (G. Coquet, J.C. Dupin et J.L. Valein) ou d'Allemagne (T. Zamfirescu et certains de ses étudiants). Elles firent l'objet de livres publiés dans la réputée Collection « *Lecture Notes in Mathematics* » des Editions Springer-Verlag (Berlin – Heidelberg – New York) : le volume 489 sous-titré « Une introduction » en 1975 et le volume 802 avec le sous-titre « Les polyèdres et polytopes convexes » en 1980).



Une analyse en profondeur de propriétés de séparation m'a conduit à étudier de près certaines questions géométriques connexes. Ainsi, j'ai apporté de nouveaux résultats sur les structures extrême ou asymptotique d'ensembles. En particulier, je me suis intéressé à une flopée de cônes associés à un ensemble (par exemple, les cônes asymptote ou encore asymptotique, caractéristique, visuel, support, d'ouverture interne, d'infinitude, prépolaire). Je me suis notamment interrogé sur le caractère fermé d'une enveloppe conique d'un convexe fermé ; en collaboration avec F. Jongmans, nous avons résolu l'« énigme de l'enveloppe conique fermée » (BSRSL, 52, 1983, pp. 285 – 294).

³⁰ « Séparation franche dans un espace vectoriel », par J. Bair et F. Jongmans, BSRSL, 39, 1970, pp. 558 – 566.

La plupart de mes résultats en géométrie convexe ont fait l'objet de trois mémoires : de licence (« Différentes types de séparation pour deux ensembles convexes », 1970), de doctorat (« Séparation d'ensembles dans un espace vectoriel », 1974), et pour l'agrégation de l'enseignement supérieur (« Structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe », 1984). Tous ont été publiés dans plus de septante revues scientifiques éditées pendant une trentaine d'années conformément aux données figurant dans le tableau suivant: sur la deuxième ligne figurent les nombres (arrondis à des dizaines) de fois que j'ai été auteur, ainsi que, entre parenthèses, les nombres de fois où j'ai eu des coauteurs, tandis que sur la dernière ligne se trouvent les pourcentages correspondants d'articles publiés dans des revues belges :

Périodes	1970 – 1977	1978 – 1987	1987 – 1997
Articles (avec coauteurs)	40 (14)	20 (7)	10 (7)
Revue en Belgique	75 %	50 %	50 %

Voici quelques commentaires relatifs à mes publications dans le domaine de la convexité.

- C'est pendant la première période, de 1970 à 1977, que j'ai produit le plus d'articles. J'étais alors assistant au service du Professeur Jongmans et pouvais consacrer (presque) tout mon temps à des recherches pour préparer, puis passer, mon doctorat. Pendant la période suivante, de 1978 à 1987, j'enseignais à l'ISI de Huy et avais un horaire assez chargé (20 heures par semaine), mais me préparais à passer mes épreuves pour obtenir le diplôme d'Agrégé de l'Enseignement Supérieur. Pendant la troisième période, je commençais mon travail au sein du corps académique de l'Université de Liège et avais évidemment peu de temps à consacrer à des recherches en géométrie convexe. Au surplus, l'ELC s'était petit à petit disloquée suite au départ de la plupart de ses membres en 1977 ou 1978, et aussi en raison de la retraite (en 1987) de son Directeur (qui a continué à publier mais non plus en convexité, mais bien en histoire des mathématiques). Néanmoins, j'ai continué à publier, surtout en travaillant sur d'autres sujets en rapport avec ma charge universitaire.
- 37 % de mes articles de recherches en convexité ont été produits en collaboration avec divers coauteurs. Ceux-ci ont été nombreux. Pendant la première période, on y trouve surtout des membres de l'ELC, à savoir André Dessard (3 fois), René Fourneau (2 fois), François Jongmans (3 fois), René Moors (1 fois), Joseph Vangeldère (3 fois). Pendant la deuxième période, je continuais à collaborer avec F. Jongmans et J. Vangeldère, qui étaient les seuls membres de l'ELC à rester dans le personnel de ULiège, mais aussi avec trois chercheurs allemands, à savoir Joachim Gwinner (1 fois), Karl-Heinz Elster (1 fois), Reinhard Nehse (1 fois). Pendant la troisième période, je collaborais surtout avec deux français, Jean-Claude Dupin (5 fois) et Jean-Luc Valein (2 fois), et avec l'argentin Guillermo Hansen (2 fois).
- Dans un premier temps, j'ai surtout publié mes articles dans BSRSL. Ce choix était peut-être critiqué par certains académiques (surtout liégeois), mais il suivait les recommandations de mon mentor F. Jongmans : celui-ci conseillait à ses assistants de l'époque de publier à Liège pour faire vivre la revue locale (et donc la Société éditrice). Cette stratégie présentait des avantages :

- le dépôt d'un article devait être approuvé par un membre effectif de la Société, dans mon cas par F. Jongmans, qui tenait alors le rôle de referee³¹.

- la publication était soignée et assez rapide, en tout cas plus rapide que dans d'autres revues scientifiques.

- la diffusion était large. Par exemple, mes coauteurs et correspondants étrangers connaissaient tous la revue ; par ailleurs, j'ai trouvé des exemplaires du BSRS� dans une bibliothèque de l'Université de Buenos Aires quand j'ai été invité à donner une série des cours en géométrie convexe pendant l'été 1997.

Par la suite, c'est-à-dire à partir de la deuxième période, j'ai publié, sur ce thème et surtout à l'étranger, dans une vingtaine de revues internationales (voir le détail dans l'annexe 1).

- De façon anecdotique, on peut remarquer que certains articles rédigés en collaboration avec F. Jongmans portent un titre peu conventionnel. En effet, mon coauteur maîtrisait l'art de trouver des formulations sortant des sentiers battus et quelque peu surréalistes ; par exemple, « *De frictions internes en incidents de frontière* », ou « *Sur les graves questions qui naissent quand la décomposition atteint un stade avancé* », ou encore « *Du bon usage des cônes dans l'aménagement de la tour de Babel* ».

³¹ F. Jongmans était assurément un des plus grands spécialistes au monde sur les sujets que j'abordais.

4. Applications des mathématiques à l'économie et à la gestion

Etant donné que le professeur Jongmans m'avait engagé en 1970 comme assistant pour assurer des répétitions relatives aux cours qu'il donnait aux futurs économistes, gestionnaires et sociologues (qui étudiaient à la Faculté de Droit ou à l'Ecole d'Administration des Affaires), je m'orientais dès le début de ma carrière professionnelle, et tout naturellement, vers un enseignement des mathématiques basé sur des applications en sciences humaines. A cette époque, je ne connaissais rien sur ces sciences parfois qualifiées de molles (par opposition aux sciences dures comme les mathématiques, la physique, la chimie, ...). Auparavant, je n'avais suivi aucun cours d'économie au sens large (c'est-à-dire sur l'économie politique, la gestion, la finance, ...) et ne m'étais guère intéressé à ce sujet. Heureusement, je pouvais alors bénéficier du remarquable travail accompli dans ce domaine par mes deux prédécesseurs : leurs cours étaient, selon moi, les meilleurs que j'ai rencontrés pour le public visé.

Dès mes débuts professionnels, j'ai cherché à trouver de nombreuses applications concrètes, en économie ou en gestion, pouvant illustrer les notes de cours de mes deux mentors. Certes, l'on rencontrait occasionnellement des applications concrètes des mathématiques générales enseignées dans la littérature spécialisée anglo-saxonne, mais celles-ci étaient assez rares à l'époque en langue française.

A partir de 1987, j'ai publié des articles sur le sujet : plus de 30 au total, deux tiers environ dans des revues belges³², les autres dans des revues françaises³³.

Mais, j'ai rassemblé des applications concrètes relatives à mes cours dans des livres.

Le premier livre que j'ai rédigé dans cette direction fut celui de « Mathématiques générales » publié par les Editions De Boeck - Université. Au fil des ans, plusieurs éditions virent le jour avec les sous-titres suivants :

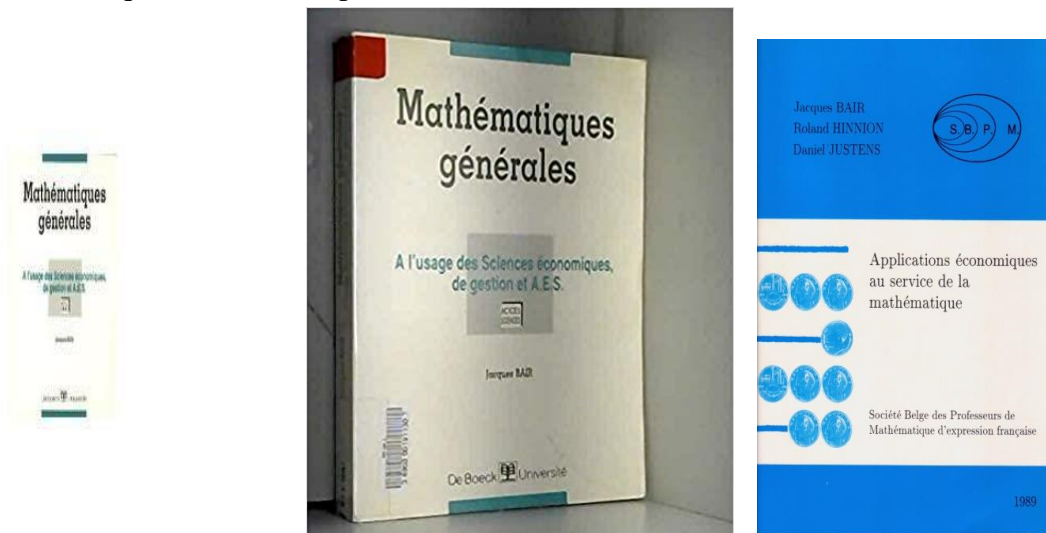
- 275 exercices et 360 problèmes avec leurs solutions (en 1988) ;
- Deuxième édition : 320 exercices, 380 problèmes avec leurs solutions, 160 tableaux, 1990 ;
- Problèmes résolus, en collaboration avec Geneviève Hamende, 1992 ;
- Troisième édition, à l'usage des sciences sociales, de gestion et A.E.S, 1993.

Au départ, cet ouvrage servait de support pour un cours que je donnais, à horaire décalé (et en supplément de la charge à l'ISI de Huy-Verviers), au titre d'assistant volontaire, dans le cadre du DEG. C'est après avoir lu (en 1987), en tant que referee, le manuscrit soumis pour publication chez l'éditeur que le Bruxellois Daniel Justens me contacta parce qu'il adhérait à mon approche pédagogique. Ce fut le point de départ d'une longue et fructueuse collaboration qui a perduré pendant toute ma carrière (et encore par après).

³² Surtout dans « *Mathématique et Pédagogie* » qui était la revue éditée par la Société Belge des professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef en abrégé). J'ai dirigé cette revue pendant une dizaine d'années.

³³ Principalement dans le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (APMEP en abrégé) dont l'équivalent belge francophone est la SBPMef. Cette revue était communément appelée le « Bulletin vert » en raison de la couleur de sa couverture. Depuis lors, son nom a été changé et est devenu « Au fil des maths ».

Deux années plus tard, nous avons rédigé ensemble, et en collaboration avec notre collègue R. Hinnion, un livre faisant le point sur les principales applications économiques des mathématiques ; il fut édité par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef) ; cet ouvrage s'avérait efficace en proposant un aperçu du sujet : il a servi ultérieurement à former sur ce thème mes collaborateurs que je choisisais mathématiciens de formation et qui, dès lors, ignoraient, au moment de leur engagement, les applications économiques de leur discipline.



A propos de mes recherches d'applications concrètes, je me suis quelque peu démarqué de mes deux Maîtres Jongmans et Varlet. En effet, ceux-ci présentaient la matière de façon, selon moi, optimale, puis illustraient très brièvement leur matière en suggérant des applications économiques incontournables, mais ils laissaient aux collègues économistes ou financiers le soin de détailler l'exploitation des mathématiques dans les situations disciplinaires. J'ai repris cette philosophie en ajoutant de nouvelles applications telles que l'analyse input-output ou le surplus du consommateur en économie, les principaux modèles mathématiques pour l'évolution d'un capital, la recherche du revenu maximum du revenu d'un consommateur soumis à une contrainte budgétaire ou d'un objectif linéaire de plusieurs variables sur un polyèdre convexe, ... ; j'ai également travaillé en revenant plusieurs fois sur un même sujet selon le principe didactique de l'enseignement en spirale : ainsi, pour motiver les apprenants, je présentais très tôt un exemple d'une situation concrète à résoudre, avant d'exposer la théorie générale sous-jacente, puis de proposer des illustrations additionnelles et variées.

De suite après avoir reçu ma charge universitaire (en 1987-1988), j'ai travaillé le cours d'algèbre linéaire.

Très souvent, le cours d'algèbre linéaire débute par l'introduction de la structure d'espace vectoriel et des concepts de base qui lui sont associés : vecteurs linéairement ou affinement (in)dépendants, sous-espace, base, dimension, ... Puis est présentée la notion d'application linéaire, avec notamment sa représentation matricielle et des questions qui en découlent (opérations algébriques sur les matrices, déterminant, valeurs et vecteurs propres, diagonalisation, ...), avec éventuellement quelques applications spécifiques à l'économie (comme l'analyse input-output, les chaînes de Markov, ...).

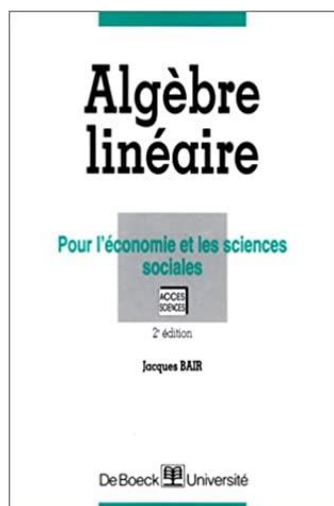
Cette façon de procéder est mathématiquement irréprochable, mais elle me semble abstraite et même abrupte pour des débutants ; les développements théoriques peuvent être tellement développés que la simplicité, la pertinence et l'efficacité de ces outils semblent généralement occultées et ainsi les applications concrètes dans l'univers économique (au sens large) sont souvent trop peu développées.

C'est pourquoi, j'ai de suite décidé de suivre l'approche de mes deux anciens Maîtres Jongmans et Varlet : ceux-ci avaient organisé leur enseignement de l'algèbre linéaire en adoptant en quelque sorte l'ordre inverse de ce qui se fait généralement dans la plupart des autres Universités : il s'agit de présenter d'abord le calcul matriciel, en insistant sur des applications concrètes et variées, avant de présenter le minimum requis sur la structure générale d'espace vectoriel. Mon cours d'algèbre linéaire pour les sciences humaines comprenait un grand nombre d'exemples concrets et réels de l'exploitation de cet outil ; il a fait l'objet de plusieurs éditions successives (chez l'éditeur De Boeck) qui ont connu un certain succès au vu de leur originalité ; la dernière version nettement remaniée et augmentée, rédigée en collaboration avec D. Justens, s'intitule « Algèbre linéaire appliquée » ; ce livre met en évidence le fait que tous les concepts importants introduits en algèbre linéaire peuvent être exploités dans des situations rencontrées réellement dans l'univers économique.

Cette matière est élémentaire car le modèle linéaire est le plus simple possible en mathématiques puisqu'il concerne essentiellement du premier degré ; elle est dès lors classique et peu originale dans son contenu de base. Toutefois, au fil des années, j'ai introduit dans mes cours une approche inédite et des résultats qui ont fait l'objet de publications scientifiques. Ainsi, j'y ai glissé quelques éléments de la géométrie des espaces vectoriels. Par ailleurs, à la fin du cours figurait un chapitre imposant sur les formes quadratiques ; ce sujet m'était familier parce que j'avais préparé sur lui une éventuelle leçon publique dans le cadre de mes épreuves pour l'obtention du grade d'Agrégé de l'Enseignement Supérieur³⁴ ; il me semblait important pour de futurs économistes ou gestionnaires car il est largement exploité dans des applications, notamment en micro-économie (par exemple, pour étudier la maximisation du profit d'un consommateur devant respecter une contrainte budgétaire). Dans mon cours, j'avais en particulier introduit un énoncé qui précisait un résultat³⁵ obtenu par Gérard Debreu (1921-2004), ce dernier ayant été (en 1983) lauréat du Prix Nobel d'Économie.

³⁴ Finalement, ce sujet ne fut pas retenu par le Jury.

³⁵ Le résultat du français figurait dans l'article intitulé *Definite an Semidefinite Quadratic Forms*, publié dans la revue *Econometrica*, Vol 20, N° 2, 1952, pp. 295-300. L'énoncé nouveau concernait la « Classification des formes quadratiques sous contraintes linéaires » ; il fut publié dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* (55, 1986, pp. 339-345).



A côté de l'algèbre linéaire, la matière principale de ma charge d'enseignement a été l'analyse mathématique. Je l'ai dès lors travaillée dès le début de ma carrière. Dans un premier temps, mon enseignement de l'analyse suivait d'assez près les notes de cours de mes prédécesseurs F. Jongmans et J. Varlet. Leur présentation me paraissait parfaitement adaptée à leur public (qui était semblable au mien). Elle était essentiellement construite pour déboucher sur le théorème de Lagrange relatif à l'obtention d'un extremum sous contrainte souvent recherchée en économie (maximum de l'utilité d'un consommateur, minimum du coût de production d'un entrepreneur devant fabriquer une quantité prédéterminée de son output, ...). Ce résultat était expliqué de façon assez simple mais rigoureuse, en insistant sur la signification économique des multiplicateurs de Lagrange. Je maîtrisais ce sujet car il avait fait l'objet de ma leçon publique lors de mon épreuve d'AES³⁶.

Pendant toute ma carrière, j'ai toujours veillé à illustrer mes cours par des applications rencontrées dans l'univers économique. Dans ce cas-ci, il m'a suffi de relier les cours de mathématiques à ceux dispensés par des collègues économistes³⁷.

Après quelques années d'expérience dans l'enseignement de l'analyse, j'ai envisagé l'opportunité de modifier en profondeur la façon d'abord la théorie et suis passé progressivement, au fil de mes réflexions et de mes recherches, d'une présentation classique à celle qualifiée de non-standard (voir la section suivante).

En 1996, l'EAA a créé pour ses étudiants un programme d'étude aboutissant à l'obtention du titre d'Ingénieur de Gestion (IG en abrégé) : les matières quantitatives y étaient fortement développées et les cours de mathématiques nettement renforcés. Dans ce cadre, j'ai mis au point des cours nouveaux orientés vers des matières moins classiques que l'algèbre linéaire et l'analyse ; ils portaient sur des théories assez récentes permettant de résoudre des problèmes concrets rencontrés dans la vie courante, spécialement en gestion ; ils préparaient les étudiants à recevoir dans la suite de leurs études des cours approfondis sur les méthodes quantitatives

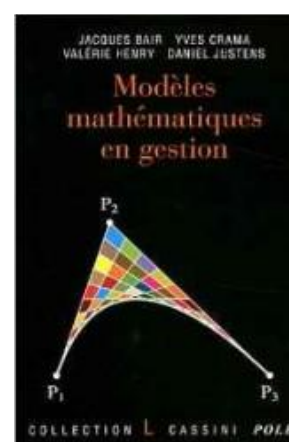
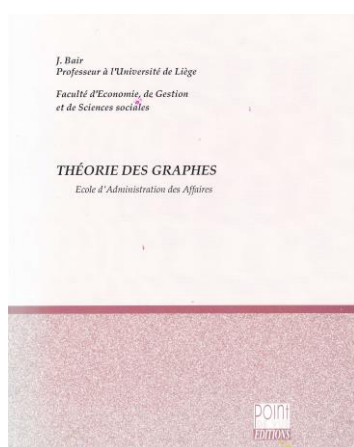
³⁶ Un texte a fait l'objet de notes publiées dans le cadre du séminaire Jongmans-Varlet, parues sous le titre « *Méthode De Lagrange pour les extrema d'une fonction sous contrainte* », Université de Liège, 1985, 36 pages ; ce document peut être trouvé à la Bibliothèque de mathématiques de ULiège sous le rubrique MAT :ANA :OPT :BAI :1985.

³⁷ B. Jurion, A. Minguet et B. Thiry (traducteur d'un célèbre ouvrage de microéconomie rédigé par Varian)

de gestion (cours dispensés par C. De Bruyn) et sur la recherche opérationnelle (cours figurant dans la charge de Y. Crama).

Citons dans cette direction trois livres consacrés à des applications pratiques :

- ❖ *Théorie des graphes* ; Editions Point de Vue, EAA (Université de Liège), 1995, 148 pages. Cet ouvrage a été le support écrit d'un cours réservé aux seuls étudiants en IG. Il présente tout d'abord les éléments de la théorie des graphes, puis fournit une initiation à la programmation dynamique ; ensuite, il aborde des problèmes concrets d'ordonnancement, d'affectation, de flot dans un réseau, ainsi qu'une introduction à la théorie de l'aide multicritère à la décision, contenant notamment une démonstration complète et rigoureuse du théorème d'impossibilité d'Arrow (ce qui constitue une matière rarement enseignée à de tels étudiants)³⁸.
- ❖ *Situations concrètes exploitant des barycentres*, par J. Bair – V. Henry. Cette brochure, éditée par la Commission pédagogique de la SBPMef (2008, 62 pages), débute par des généralités (notamment un bref historique) sur la notion de barycentre qui est apparentée à celle de convexité. Elle contient ensuite des applications en mécanique et en statistique, avec notamment le lissage d'une série chronologique et une présentation de graphiques triangulaires (et des exploitations en politique, en diététique et en didactique). On y expose encore une introduction au contrôle flou, avec un exposé sur la logique éponyme, ainsi qu'aux courbes de Bézier.
- ❖ *Modèles mathématiques en gestion*, par J. Bair – Y. Crama – V. Henry et D. Justens, Collection L, Editions Cassini & Pole, Paris, 2011, 297 pages. Cet ouvrage collectif débute par des réflexions de nature épistémologique sur les modèles mathématiques, puis aborde la question de la construction d'une fonction à partir de données expérimentales. Ensuite, il traite de questions concrètes, à savoir des problèmes d'ordonnancement, de préférences et de choix, de production, de gestion de stocks, de files d'attente, de mathématique financière.



³⁸ Ce théorème stipule, de façon vulgarisée, qu'il est impossible d'agréger de 'façon démocratique' des préférences individuelles en un choix collectif rationnel. Ce résultat a été trouvé par l'économiste américain K.J. Arrow (1921-2017) ; ce travail valut à son auteur de recevoir le Prix Nobel d'Economie en 1972.

De nos jours, l'économie (au sens large, incluant la gestion, la finance, ..) et les mathématiques sont devenues indissociables. D'une part, les théories mathématiques peuvent solidifier les raisonnements des économistes et permettent à ceux-ci de travailler rationnellement. D'autre part, les travaux en économie illustrent parfois des concepts mathématiques et peuvent soulever des questions théoriques intéressant des mathématiciens, ce qui débouche quelquefois sur des théories nouvelles de mathématiques appliquées ; en guise d'exemples frappants et connus, citons les progrès en programmation mathématique, le développement de la recherche opérationnelle, des méthodes mathématiques d'aide à la décision, la création de modèles financiers stochastiques. Ainsi, économie et mathématiques progressent de concert. C'est pourquoi, je plaide « pour une coordination entre économistes et mathématiciens »³⁹, aussi bien dans l'enseignement qu'en recherche.

C'est avec une telle philosophie, qu'Yves Crama et moi avons créé, en 1996, le Groupe d'Etude des Mathématiques du Management et de l'Economie (GEMME en abrégé). Il visait à rassembler les enseignants-chercheurs travaillant à la FEGSS ou à la FS dans l'un au moins des domaines des mathématiques pures, de la statistique, de la recherche opérationnelle, de l'informatique, ... ou de l'économie mathématique, la finance, les méthodes quantitatives de gestion, l'économétrie, ... L'objectif était de faire connaître les travaux réalisés à ULiège dans cette direction et d'échanger et partager des idées sur ceux-ci. Dans la pratique, deux actions furent réalisées et connurent un certain succès avant la fusion entre l'EAA et HEC.

- 1) Un séminaire mensuel était organisé. En règle générale, il proposait aux membres du Groupe deux exposés réalisés par un jeune chercheur liégeois ou par un expert provenant d'une Université avec laquelle des universitaires liégeois travaillaient.
- 2) Une collection de tirés-à-part d'articles originaux de membres du GEMME qui pouvaient ainsi diffuser rapidement une première version de leurs travaux de recherches. L'objectif visé recherchait à provoquer des discussions scientifiques. Cette collection comptait une vingtaine d'articles nouveaux chaque année ; elle était largement diffusée dans les bibliothèques universitaires en Belgique et dans les pays voisins.

³⁹ Cette citation est le titre d'un article que j'ai publié dans le livre « *Mathématiques et économie. Une vision scientifique de l'économie* », Tangente Hors-Série, n° 62, 2018, pp. 10-13.

5. Réflexions sur les fondements et l'enseignement de l'analyse

Dans un premier temps, j'ai présenté à mes étudiants, pendant une vingtaine d'années, une version dite « classique » de l'analyse ; elle repose sur le concept de limite introduit à l'aide d'un formalisme sophistiqué (à savoir la définition dite en « epsilon-êta » faisant appel au concept d'infini potentiel) qui avait été introduit par de grands mathématiciens (tels que Cauchy, Weierstrass, ...) pour être inattaquable sur le plan de la rigueur ; c'est d'ailleurs comme cela que tous les cours d'analyse d'un certain niveau procédaient alors (et la plupart travaillent encore de cette manière à l'heure actuelle). A l'usage, je me suis rendu compte que cette approche de l'analyse semblait véritablement ardue à être maîtrisée par mes étudiants, exigence qui me semble impérative dans un enseignement universitaire de qualité. C'est pourquoi, je me suis tourné petit à petit, au fur et à mesure de ma découverte de cette matière qui ne m'avait jamais été enseignée, vers l'analyse non standard (ANS en abrégé).

Il s'agit de présenter l'analyse en se basant sur le concept d'infinitésimal (ou d'infiniment petit⁴⁰). Celui-ci avait été introduit par les créateurs de l'analyse, Leibniz et Newton, mais autrefois était critiquable au niveau de la rigueur. Désormais, en fait depuis la fin du siècle dernier, il peut être présenté de façon incontestable. Il est intuitif et permet également de justifier tous les résultats de base de l'analyse (comme les théorèmes de Rolle, Fermat, Weierstrass, Bolzano, ...) de façon plus abordable que par l'approche classique, ce qui me semblait être un atout important pour la formation intellectuelle de mes étudiants. De plus, il est particulièrement bien adapté pour de futurs économistes, puisqu'il fait appel à un infini actuel et non plus à un infini potentiel ; il permet ainsi d'expliquer, sans formalisme lourd et avec un raisonnement mathématiquement correct, la théorie microéconomique du marginalisme.

Enfin, j'ai découvert ultérieurement que cette nouvelle présentation non standard est également esthétique puisqu'elle apparaît, selon T. Tao, comme étant « une complétion élémentaire de l'analyse classique, de la même manière que, par exemple, l'algèbre complexe est une complétion élémentaire de l'algèbre réelle ». Or, d'après ce même auteur, « lorsqu'on travaille dans une complétion élémentaire d'une structure, on obtient une propriété de compacité séquentielle, analogue au théorème de Bolzano-Weierstrass, qui peut être interprété comme le fondement d'une grande partie de l'analyse non standard, et qui fournit également un cadre unifié pour décrire divers principes de correspondance entre les mathématiques finitaires et infinitaires »⁴¹ Ce point me semble aujourd'hui important : c'est, selon moi, un joli et efficace "tour de force" que réalise donc la nouvelle approche.

Ainsi, je constate que mon passage de l'approche classique de l'analyse vers l'ANS peut être justifié, a posteriori, par les mêmes arguments que ceux relatifs à mon attirance initiale pour les mathématiques (voir la section 1). De fait, il est fondamentalement guidé par la simplicité

⁴⁰ Les termes « infinement petit » et « infinitésimal » sont synonymes, à ceci près qu'un infinement petit n'est jamais nul (au contraire éventuellement d'un infinitésimal).

⁴¹ Traduction d'un extrait de l'article « *Nonstandard analysis as a completion of standard analysis* », par T. Tao. Cet article est publié sur le blog « *What's new* » de l'auteur à l'adresse électronique : terryrao.wordpress.com/2010/11/27/.

⁴², les démonstrations indiscutables et aisées, l'utilisation pratique dans d'autres disciplines (dans ce cas particulier, en microéconomie) et un certain esthétisme.

J'ai enseigné l'analyse non standard pendant une vingtaine d'années, en me basant sur le livre « *Analyse infinitésimale. Le calcul redécouvert* » publié en 2008 avec la collaboration de V. Henry.



La rédaction de ce livre s'est faite pendant une longue période, parce qu'il n'existait, à ma connaissance, aucun cours présentant en profondeur à la fois la théorie et des applications de cette matière et restant abordable pour des étudiants entamant des études universitaires en économie ou en gestion.

En plus de cet ouvrage, j'ai rédigé plusieurs articles sur le sujet, la plupart avec divers coauteurs. Ces derniers peuvent être répartis schématiquement en deux groupes.

Dans le premier se trouvent des collaborateurs qui me sont proches, spécialement Valérie Henry avec qui j'ai fait l'essentiel de mon parcours ⁴³ dans cette direction, mais aussi deux autres infimicoles ⁴⁴ liégeois, à savoir André Pétry et Jean Mawhin, ainsi que le fidèle ami bruxellois Daniel Justens et le mathématicien-didacticien André Antibi ⁴⁵ de Toulouse. Seul ou en collaboration avec un ou plusieurs membres de ce groupe, j'ai publié une vingtaine d'articles dans des revues scientifiques en Belgique (3 fois) et à l'étranger (17 fois). J'y ai traité des concepts de base comme les limites de courbes, l'utilisation de microscopes 'infiniment puissants' pour trouver une tangente ou un cercle osculateur ainsi que pour introduire les concepts de dérivée et de différentielle (dans les cas univarié ou multivarié), mais aussi pour démontrer aisément les théorèmes fondamentaux de l'analyse. J'ai

⁴² On peut se demander où est le gain entre l'analyse classique et l'analyse non standard, étant donné qu'« un énoncé du langage classique qui est un théorème dans la théorie étendue l'est aussi dans la théorie classique. » Voici une réponse didactique pertinente : « Pas dans le résultat, mais dans l'économie de la démonstration. La classique sera souvent contravariante alors que la nouvelle [c'est-à-dire la non standard] sera covariante, donc beaucoup plus facile à comprendre et à pratiquer par des élèves. » Ces deux citations sont extraites du livre « *Fondement pour un enseignement de l'analyse en ter d'ordres de grandeur : les réels dévoilés* », par R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer, Publication de l'A.P.M.E.P., n° 103, 1996, p.5.

⁴³ Voir le livre « *Parcours et détours en analyse infinitésimale* » en collaboration avec V. Henry, 2013, Université de Liège, Orbi, <https://hdl.handle.net/2268/156549>.

⁴⁴ Voir l'article « *Des Infimicoles liégeois* », 2020, Université de Liège, Orbi, <https://hdl.handle.net/2268/247773>.

⁴⁵ Voir l'article « *Souvenirs de rencontres avec le mathématicien et didacticien André Antibi* », 2022, Université de Liège, Orbi, <https://hdl.net/2268/296490>.

également eu recours à des angles mixtilignes (par exemple corniculaires) pour illustrer l'existence possible de nombres non réels, notamment d'infiniment petits ou infiniment grands. Je me suis encore attelé à réaliser une présentation épistémologique de l'ANS, avec un survol de l'histoire des infinitésimaux en mathématiques, ainsi qu'une comparaison entre les présentations classique et non standard de l'analyse. J'ai encore abordé d'autres approches non classiques de l'analyse en rédigeant des introductions aux infinitésimaux nilpotents, ainsi qu'aux nombres superréels ou surréels. Le second groupe est international et dirigé par l'israélien Michail Katz ; il est composé de membres qui sont essentiellement des mathématiciens ou des philosophes de nationalités variées. J'ai écrit des articles avec une vingtaine de co-auteurs appartenant à ce groupe, à savoir Piotr Blaszczyk (Pologne), Alexandre Borovik (Royaume Uni), Robert Ely (Russie), Elias Fuentes-Guillen (Tchécoslovaquie), Peter Heinig (Allemagne), Valérie Henry (Belgique), Vladimir Kanovei (Russie), Karin Katz (Israël), Michail Katz (Israël), Taras Kudryk (Ukraine), Karl Kuhlemann (Allemagne), Semen Kutateladze (Russie), Thomas McGaffey (USA), Thomas Mormann (Allemagne), Jan-Peter Schäfermeyer (Allemagne), Sam Sanders (Allemagne), David Schaps (Israël), David Sherry (USA), Steven Shnider (Israël), Monica Ugaglia (Italie), Mark van Atten (France). En collaboration avec plusieurs membres de ce groupe, j'ai signé une douzaine d'articles, tous parus dans des revues internationales n'acceptant les publications qu'après un examen critique effectué par des pairs. L'objectif principal du groupe consiste, selon moi, à faire découvrir ou redécouvrir l'évolution historique du concept d'infinitésimal, depuis son apparition dans les œuvres des premiers analystes (principalement Fermat, Leibniz, Euler et Cauchy), jusqu'à son historiographie moderne (principalement avec la création de l'ANS par Robinson).

Certains auteurs, notamment Gert Schubring (Allemagne) critiquent⁴⁶ notre travail et affirment que « depuis plusieurs années, notre groupe mène croisade contre l'historiographie des mathématiques, notamment dans ses formes anciennes, et s'efforce de réécrire l'histoire du calcul infinitésimal comme précurseur de l'ANS. »⁴⁷ Je ne désire pas polémiquer sur les critiques ; j'écrirai simplement que chacun est libre de penser ce qu'il veut, car c'est souvent comme cela que la science progresse ; j'ajoute que nos publications, qui se basent sur des citations clairement référencées pour que chacun puisse se faire sa propre opinion, ont été acceptées pour publication par des referees. Quoi qu'il en soit, toute étude historique se base évidemment sur une lecture personnelle et des interprétations inévitablement subjectives d'écrits anciens ; par exemple, on ne saura jamais pourquoi Fermat n'a pas utilisé le mot « infinitésimal » dans sa recherche du maximum ou minimum d'une fonction, mais on peut à l'heure actuelle formuler des hypothèses plus ou moins plausibles pour expliquer cet "oubli"⁴⁸.

⁴⁶ M. Katz repère systématiquement les critiques à l'égard de nos travaux : voir son site à l'adresse électronique : u.cs.biu.ac.il/~katzmik/infinitesimals.html.

⁴⁷ Traduction d'une note publiée en anglais dans « *MathSciNet Mathematical Reviews* », MR 4196072. Cette note (de 9 pages) a été suivie par un article contenant une « attaque bizarre » contre notre travail, intitulé « *A Question of Fundamental Methodology* » rédigé par un collectif d'auteurs comprenant comme co-auteurs T. Archibald, R. Arthur, G. Ferraro, J. Gray, D. Jessef, J. Lützen, M. Panza, D. Rabouin, G. Schubring. Cet article a été publié dans la revue *The Mathematical Intelligencer (TMI)*, 2022, <https://doi.org/10.1007/s00283-022-10217-> Notre groupe y a répondu en détail dans l'article « *Historical infimalists and modern historiography of infinitesimals* », publié sur le site arXiv. (<https://arxiv.org/abs/2210.14504v1>, ainsi que dans une lettre à l'éditeur intitulée « *Is Pluralism in the History of Mathematics Possible ?* » parue dans TMI (2023, n° 45 (1), p. 8).

⁴⁸ C'est ce qui a été réalisé dans l'article suivant, rédigé en collaboration avec M. Katz et D. Sherry : « *Fermat's dilemma: Why did he keep mum on infinitesimals? and the European theological context.* » *Foundations of Science* **23** (2018), no. 3, 559-595. Voir aux adresses électroniques suivantes: <http://doi.org/10.1007/s10699-017-9542y> <https://arxiv.org/abs/1801.00427> et <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3836239>.

Quant à notre prétendue « croisade » en faveur de l'ANS, il convient de se comprendre sur ce point. Bien entendu, je sais bien que l'ANS est née dans les années 1960 et repose sur des théories modernes de la logique qui n'existaient pas du temps des premiers analystes. En conséquence, je n'ai jamais pensé que les travaux de ceux-ci annonçaient une construction rigoureuse des nombres hyperréels grâce auxquels a pu se développer l'ANS.

Je me contente ici d'expliquer, aussi simplement que possible, quelle a été pour moi, et pour mes co-auteurs, la genèse du travail produit par notre groupe international.

On constate que durant grosso modo deux siècles suivant sa création (essentiellement par Newton et Leibniz), le '*calculus*'⁴⁹ s'est développé à partir de la notion fondamentale de dérivée. Celle-ci était introduite initialement en suivant deux chemins différents : la 'méthode des limites' qui voyait la dérivée comme la limite du 'quotient différentiel' $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quand l'accroissement Δx s'approche de 0 et la 'méthode des infinitésimaux' pour qui la dérivée est la valeur égale (ou plutôt, comme on disait parfois à l'époque, 'adégale') du quotient différentiel lorsque l'accroissement Δx est infiniment petit. Ces deux voies se retrouvent dans les travaux et les lettres des deux fondateurs, mais aucun des deux ne définissait clairement ce qu'il entendait précisément par limite et le concept d'infinitésimal (ou infiniment petit) restait encore assez vague⁵⁰.

Les successeurs immédiats des deux 'pères' de l'analyse, notamment Jacob et Johann Bernoulli ou encore L. Euler, ont essentiellement utilisé la méthode infinitésimale avec laquelle ils ont obtenu bien des résultats nouveaux qui se révélèrent fondamentaux en analyse et utiles dans des applications. Ils en percevaient toute l'efficacité de cette méthode, mais ne la justifiaient guère. Aussi, d'Alembert (dans l'Encyclopédie) suggéra de se concentrer sur la méthode des limites. Cauchy suivit cette recommandation et fit une avancée décisive en faveur de celle-ci, bien qu'il n'abandonna pas complètement l'idée des infinitésimaux puisqu'il envisageait ceux-ci comme étant des variables ayant 0 pour limite.

Au cours du 19^{ème} siècle, l'approche de Cauchy fut formalisée, notamment via le 'programme de l'arithmétisation de l'analyse' initié par Bolzano, puis finalisée par Weierstrass qui présenta le concept de limites avec la formulation dite en 'epsilon-êta'. Celle-ci est basée sur la construction préliminaire des réels qui exclut les infiniment petits et les infiniment grands de l'ensemble des nombres réels. Dès lors, la présentation weierstrassienne se réalise exclusivement au sein de l'ensemble des réels ; elle s'imposa au sein de la communauté des mathématiciens du 20^{ème} siècle, ce qui provoqua la disparition⁵¹ des infinitésimaux en analyse.

Toutefois, dans les années 1960, les infinitésimaux refirent surface grâce aux travaux de Abraham Robinson : il découvrit que « les concepts et méthodes de la logique mathématique contemporaine sont capables de fournir un cadre approprié pour le développement du calcul différentiel et intégral au moyen de nombres infiniment petits et infiniment grands⁵² ». Il réhabilita donc la méthode des infinitésimaux des anciens et construisit ce qu'il appela l'Analyse Non Standard parce qu'il avait été inspiré en partie par des travaux en arithmétique de T. Skolem, en particulier par sa théorie non

⁴⁹ Il s'agit du nom donné par les anglo-saxons pour désigner ce que l'on appelle en langue française « le calcul différentiel et intégral ». Mais ce terme latin est aussi quelquefois utilisé en français dans le même sens.

⁵⁰ A ce sujet, on peut remarquer que Leibniz lui-même a changé sa façon de concevoir un infinitésimal. Voir par exemple l'ouvrage « *Aspects mathématique et métaphysique du continu chez le jeune Leibniz (1671-1676)* », par Claude Olivier. Il s'agit d'un mémoire réalisé pour l'obtention d'un Master en Philosophie à ULiège en 2021 ; il est disponible sur « matheo » (*Master Thesis Online*) à l'adresse électronique suivante : <http://hdl.handle.net/2268.2/12117>.

⁵¹ Il est tout de même intéressant de noter que, dans son classique et réputé « *Cours d'analyse infinitésimale* », Charles de la Vallée Poussin conserva les deux approches, par les limites et par les infinitésimaux, dans les 12 éditions de son livre publiées entre 1903 et 1959.

⁵² Traduction d'un extrait du livre « *Non-Standard Analysis* » de A. Robinson, North-Holland, Amsterdam, 1966.

standard des modèles. Ainsi, selon la jolie formule de J. Mawhin ⁵³, « Robinson réalisa, pour la méthode infinitésimale, ce que Weierstrass avait réalisé, un siècle plus tôt, pour la méthode des limites ».

On pourrait se demander pourquoi il fallut attendre si longtemps pour que la méthode des infinitésimaux, qui était probablement la première à avoir été utilisée et aussi la plus simple à exploiter dans bien des cas, a dû attendre si longtemps avant d'être rigoureusement justifiée. Plusieurs explications peuvent être avancées, dont ces deux-ci (dont la première est de toute évidence une lapalissade) :

- d'une part, Weierstrass est venu au monde avant Robinson, et sa méthode fut reconnue des mathématiciens de l'époque, de sorte que ceux-ci ne se préoccupèrent plus guère des infinitésimaux ;
- d'autre part et surtout, Weierstrass exploita des mathématiques familières et situa son travail au sein de l'ensemble des nombres réels qui respectent l'axiome d'Archimède ⁵⁴, tandis que Robinson utilisa des théories récentes et sophistiquées de la logique et sortit du cadre des réels pour travailler avec des nombres hyperréels qui forment un ensemble non archimédien.

Quoi qu'il en soit, les deux méthodes des limites et des infinitésimaux, qui ont connu des fortunes diverses depuis leur création et qui ont pris chacune à leur tour le pas sur l'autre, sont désormais admises par les scientifiques contemporains les plus exigeants ; elles sont donc aujourd'hui également reconnues. Ou plutôt, elles devraient l'être, car force est de constater que la version moderne de la méthode infinitésimale est encore souvent mal connue de certains mathématiciens, didacticiens, historiens ou philosophes des sciences. Il existe bien différentes versions axiomatiques abordables de l'ANS, comme celles de Nelson, Reeb, Lutz et al, Keisler, etc., mais celles-ci sont souvent ignorées ou génèrent parfois des confusions. Un important travail d'information et de clarification à ce sujet doit être entrepris : il justifie, je crois, mon engagement personnel et celui de mes co-auteurs dans notre travail commun.

Je termine cette section en donnant deux réflexions générales déduites présentement (et peut-être provisoirement) de mon expérience personnelle et de mes collaborations.

- Les résultats fondamentaux des premiers analystes, tels Fermat, Leibniz, Euler, Cauchy, etc., sont encore valides de nos jours et sont d'ailleurs toujours enseignés; ils peuvent, en principe, être démontrés par la méthode des limites comme par celle des infinitésimaux. On peut souvent trouver des similarités significatives entre les preuves originales et celles pouvant être menées dans le cadre des hyperréels (et donc en termes de l'ANS), alors que de telles similitudes procédurales sont absentes lorsque l'on compare les démarches initiales avec celles pouvant être construites aujourd'hui en ayant recours à la présentation weierstrassienne de l'analyse. Ceci est une simple constatation émise a posteriori.
- En tant que professeur dans le supérieur, j'ai eu l'opportunité de choisir la matière enseignée. Comme je l'ai déjà signalé, j'ai successivement présenté les bases de l'analyse avec la méthode des limites pendant une vingtaine d'années, puis je suis passé à la méthode des infinitésimaux durant la deuxième moitié de ma carrière. Je ne regrette nullement mon basculement vers l'ANS : à recommencer, et toutes choses égales par ailleurs, je ferai à nouveau le même choix, mais abandonnerai plus vite la présentation classique. Bien entendu, une pareille décision dépend du contexte d'enseignement et doit tenir compte du public et des objectifs visés (ainsi que des connaissances de l'enseignant). Dans l'absolu, et en éliminant

⁵³ Traduction d'une citation extraite de l'introduction du livre « *Non standard analysis* » publié dans un supplément du *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 1996, p. ii.

⁵⁴ On dit qu'un corps commutatif totalement ordonné est archimédien si, pour tout $a > 0$ et tout $b \geq 0$, il existe un entier naturel n tel que $b < n a$.

toute contrainte (notamment du volume horaire imposé au cours), je présenterai à mes étudiants les deux méthodes, car chacune possède des avantages (mais aussi, bien sûr, des inconvénients) et la maîtrise de chacune d'elles est bénéfique pour favoriser une meilleure ouverture d'esprit chez les apprenants. Une telle pluralité des méthodes a d'ailleurs été effectivement pratiquée par certains de mes co-auteurs, par exemple J. Mawhin et M. Katz ; je n'ai malheureusement pas eu l'occasion d'agir de même, car mon temps d'enseignement était limité vu que mes étudiants s'orientaient vers l'économie ou la gestion et non vers mathématiques.

6. Intérêt pour la didactique des mathématiques

Dès que je me suis orienté vers des études universitaires en mathématiques, je savais que j'allais consacrer une partie de ma vie à l'enseignement de cette science. Or, la mission essentielle d'un enseignant consiste à être didacticien, plus précisément à faire ce que l'on appelle de la transposition didactique: il s'agit de transformer le savoir savant (c'est-à-dire le savoir produit par les chercheurs) pour le transmettre aux apprenants (donc les étudiants) en tenant compte du public visé (sa formation antérieure, ses aspirations, ...) et du contexte d'enseignement (le programme d'études, les besoins spécifiques pour les autres cours du programme, les contraintes horaires, ...).

Dès le début de ma carrière, j'ai donc été attiré par la didactique des mathématiques. Cet attrait s'est bien sûr nourri de mes expériences personnelles, de mes lectures et surtout de mes rencontres. Au risque d'en oublier, voici les personnes qui m'ont fait réfléchir puis aider à progresser dans « l'art d'enseigner ».

- Mes prédécesseurs F. Jongmans et J. Varlet furent mes modèles car les cours qu'ils avaient construits étaient parfaitement adaptés à ceux que j'ai dispensés ultérieurement. Tous deux étaient d'excellents didacticiens avant l'avènement de la didactique moderne des mathématiques à la fin du siècle dernier.
- Les collaborateurs L. Bragard, A. Dessard, R. Fourneau et J. Vangeldère du Professeur Jongmans quand j'étais assistant au service de celui-ci. Nous avons eu ensemble bien des discussions sur la matière enseignée.
- Les nombreux étudiants⁵⁵. Tous n'étaient pas au départ friands de mathématiques (car ils avaient choisi une orientation tournée vers l'économie et la gestion, et non vers les mathématiques pures). Le travail de transposition didactique était d'autant plus important pour accrocher leur attention et leur intérêt.
- Les assistants qui ont travaillé à mon service et ont joué un rôle fondamental dans l'élaboration et l'évaluation de mes cours. J'ai eu l'opportunité d'avoir à mon service de nombreux assistants, mais, quatre sont restés plus longtemps que les autres : G. Haesbroeck, V. Henry, P. Paquay et F. Sart. Tous les quatre manifestaient du goût et des aptitudes pour l'enseignement ; V. Henry s'est spécialisée en didactique des mathématiques pour y faire sa carrière⁵⁶ ; c'est même grâce à elle que je fus amené à m'investir autant dans cette direction. Je ne puis pas oublier tous les assistants pédagogiques qui ont travaillé au sein de mon service ; ils me firent profiter, ainsi qu'à mes étudiants, de leur grande expérience dans l'enseignement des mathématiques. Je mentionne spécialement le cas d'A. Coolen qui a travaillé treize années dans mon service.
- Peu après ma nomination au sein du corps académique de ULiège, j'ai été invité à entrer au Conseil d'Administration (CA en abrégé) de la SBPMef. Je fus ainsi le

⁵⁵ D'après une estimation grossière, il y en a eu plus de 10000.

⁵⁶ Elle est actuellement titulaire d'une chaire de didactique des mathématiques à UNamur et l'a été aussi par le passé à l'Université du Luxembourg. Elle est encore présidente de la SBPMef, secrétaire du Centre de Recherches en Mathématiques (en abrégé CREM) à Nivelles et est une cheville ouvrière de l'Unité de recherche en Didactique et Formation des Enseignants (en abrégé DIDACTifen) à ULiège.

premier universitaire liégeois à y participer. Un peu plus tard, je rejoignais aussi le CA du CREM. Dans ces deux assemblées, je fis la connaissance du louvaniste Nicolas Rouche et du montois Guy Noël. Je les considère comme les « pères » de la didactique belge moderne ; celle-ci est un subtile et efficace mélange entre la tendance pragmatique des didacticiens anglo-saxons et celle plus théorique de la plupart des collègues français. Tous les deux m'ont grandement inspiré.

- Mon collègue toulousain A. Antibi m'initia, en même temps que V. Henry et le bruxellois P. Langenaeken, à la théorie contemporaine de la didactique ⁵⁷. Comme lui, et à l'opposé de certains didacticiens qui font des recherches dans l'absolu et l'abstrait comme on en fait dans d'autres disciplines scientifiques (notamment en mathématiques), je pense que des travaux en didactique des mathématiques doivent avoir une portée pratique et servir concrètement à l'amélioration effective (même modeste) de l'enseignement des mathématiques en partant d'expériences, lectures, réflexions du chercheur-enseignant.
- Mon collègue liégeois J. Navez qui fut titulaire de la chaire de didactique des mathématiques à ULiège. Notre collaboration fut fructueuse. Il fut le directeur de l'Institut de Recherches sur l'enseignement des mathématiques (IREM en abrégé) qu'on créa à Liège ⁵⁸ grâce au concours de A. Antibi alors responsable de la création et du développement d'IREM en dehors de la France.
- Ma collègue géographe Bernadette Merenne qui présida notamment le Centre de Didactique Supérieure (CDS en abrégé) à ULiège. Celui-ci organisait des séminaires ou des journées de réflexions et d'échanges sur des expériences d'enseignement menées dans des auditoriums, ces séances étant guidées et conseillées efficacement par des membres des services d'orientation et de guidance des étudiants de l'Institution où mes interlocuteurs privilégiés (car étant de ma génération) y étaient J.-P. Broonen et M. Delhaxhe. J'ai assisté régulièrement aux organisations du CDS qui étaient quelquefois chapeautées par l'Institut de Formation et de Recherche en Enseignement Supérieur) (IFRES en abrégé).
- Mon collègue luxembourgeois Jean-Claude Delagardelle qui était responsable de l'enseignement secondaire au Grand-Duché et enseignait à l'Université du Luxembourg où nous avons partagé, dans un premier temps, un cours de mathématiques en deuxième année de la formation pour économistes. Il m'attira ensuite comme intervenant à la FOPED qu'il dirigeait. Les étudiants y effectuaient des travaux de didactique de haut niveau ⁵⁹. Ces derniers étaient théoriques ou relataient des expériences pratiques dans des classes du secondaire. J'ai eu l'opportunité d'en diriger pendant plusieurs années.
- Mon collègue bruxellois Daniel Justens qui, à partir de 1998, commença avec moi une collaboration intense. Il organisait notamment des journées pédagogiques sur des

⁵⁷ Voir mon article « *Souvenirs de rencontres avec le mathématicien et didacticien André Antibi* », Orbi (ULiège), op. cit..

⁵⁸ Idem

⁵⁹ Les étudiants étaient tous titulaires d'un Master en Mathématique ; ils étaient donc du niveau « Bac +6 » jusqu'à « Bac +8 ».

thèmes variés, ainsi que diverses et multiples activités se situant dans le cadre de l'IREM de Bruxelles qu'il avait fondé et qu'il dirigeait.

Toutes ces collaborations furent fructueuses. Elles ont fréquemment débouché sur toute une série de travaux en didactique, qui venaient s'ajouter à l'élaboration de mes cours eux-mêmes et du déploiement de divers moyens pédagogiques pour en améliorer la transmission.

Voici une liste donnant un aperçu de ces recherches.

- Quand j'ai terminé mes études, je ne connaissais rien en didactique des mathématiques ; on n'en parlait d'ailleurs pas dans la sphère des mathématiciens que je fréquentais (si ce n'est éventuellement pour en dire du négatif). Je me suis donc formé en autodidacte en profitant tout de même des idées données par A. Antibi⁶⁰ et en essayant de suivre la progression de mon assistante V. Henry qui avait décidé de passer son doctorat en didactique des mathématiques (mais je lui avais déconseillé de le présenter à Liège, c'est pourquoi elle l'a fait à Toulouse, précisément chez A. Antibi). Cette phase, assez longue, d'auto-apprentissage s'est conclue, en quelque sorte, par la rédaction d'un article au sein duquel j'expliquais, à ma façon, la didactique de ma discipline en comparant l'apprentissage mathématique à la formation tennistique⁶¹ (que je connaissais pour l'enseigner depuis le début de mes études universitaires).
- Mon véritable premier sujet de recherches en didactique a concerné la résolution de problèmes, ce qui me paraît une question capitale dans la mesure où, selon moi, « faire des mathématiques » consiste à résoudre des problèmes ; ceci n'est, à mon goût, que trop rarement enseigné.
J'ai d'abord produit, en collaboration, des livres contenant des énoncés de problèmes adaptés à mes étudiants. Citons ici l'ouvrage rédigé en collaboration avec G. Haesbroeck et J.-J. Haesbroeck, intitulé « La Formation mathématique par la résolution de problèmes » (De Boeck Université, 2000) et celui, coécrit par D. Justens, S. Maron et J. Rosoux, dont le titre est « Applications pédagogiques de la mathématique financière » (Editions Ferrer et Editions Pire, 2001). Le premier est une sorte de version française, augmentée et adaptée à notre enseignement, du célèbre ouvrage de référence « *How to solve it* » par G. Polya. Quant au second, il possède l'originalité de présenter une multitude de problèmes concrets (ou pouvant l'être) de mathématiques financières illustrant tous les concepts mathématiques enseignés dans le secondaire.

⁶⁰ Voir mon article « *Souvenirs de rencontres avec le mathématicien et didacticien André Antibi* », op. cit.

⁶¹ Voir l'article « *Didactique des mathématiques et formation tennistique* », dans « *Mathématique et Pédagogie* », n° 150, 2005, pp. 5-19.



- En plus de la collecte d'énoncés de problèmes concrets, j'ai abordé le volet psychologique de cette question. Par exemple, j'ai réfléchi sur des sujets théoriques tels que, par exemple, le rôle du mental en résolution de problèmes mathématiques ; j'ai aussi tenté d'expliquer un peu comment travaillent de grands mathématiciens, les cas de H. Poincaré, T. Gowers et de T. Tao ayant été quelque peu analysés ⁶²
- Pendant de nombreuses années, j'ai donné à la FOPED des séminaires sur des sujets de didactique disciplinaire. Je n'avais pas d'examens à organiser sur mes exposés, mais étais chargé de la guidance de certains mémoires dont la réussite donnait officiellement accès à la profession enseignante organisée par l'Etat luxembourgeois; j'encadrais également des Travaux de Candidature (en abrégé TC) qui étaient des mémoires de didactique comparables à des doctorats de troisième cycle existant naguère en France, c'est-à-dire d'un niveau intermédiaire entre un master et un doctorat (d'Etat) ; ce diplôme, accessible après l'obtention de celui délivré par la FOPED, donnait l'accès à un poste de fonctionnaire d'Etat, et donc à une rémunération confortable.

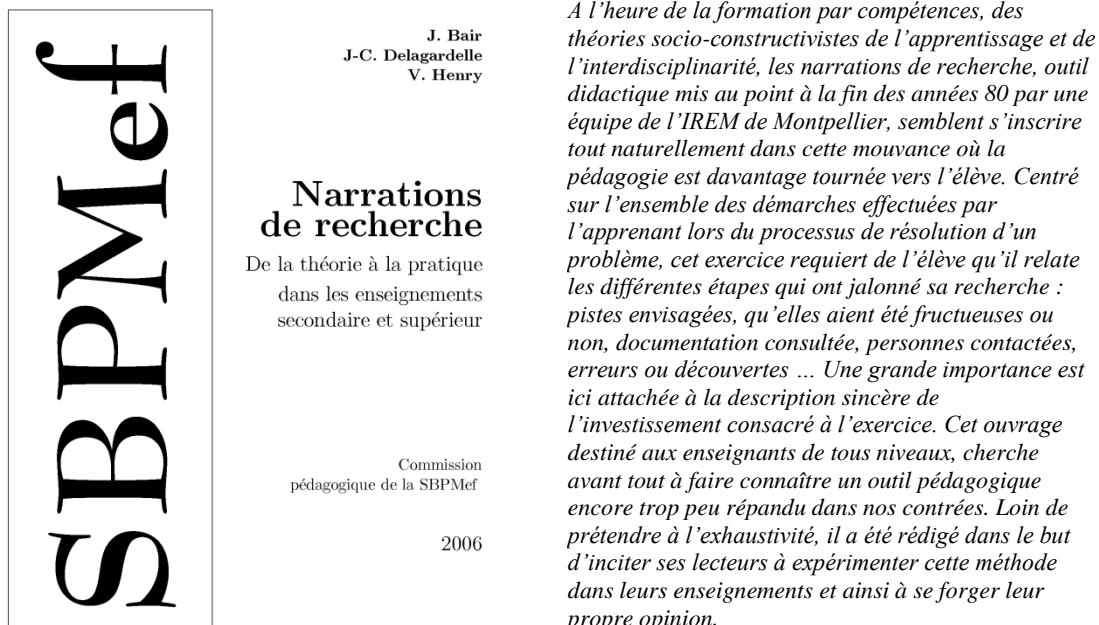
Il va sans dire que ce travail au Luxembourg m'a paru agréable (malgré les longs déplacements, parfois dans des conditions climatiques hivernales) et passionnant car les étudiants que j'y ai fréquentés étaient des mathématiciens de formation, d'un niveau Bac +6 au moins, et effectuaient sous ma guidance de véritables travaux de recherche en didactique des mathématiques. Ceux-ci étaient souvent axés sur le concept de métacognition qui me semble fondamental pour une bonne formation en mathématiques. Ils concernaient souvent des narrations de recherche (NR en abrégé) que les stagiaires luxembourgeois étudiaient théoriquement puis expérimentaient dans

⁶² Voir notamment mes deux articles :

- « *Un mathématicien contemporain emblématique : Sir William Timothy Gowers* » 2018, Orbi (ULiège), <https://hdl.handle.net/2268, 221380>

- « *Pensées (mathématiques) de Tao* », 2013, *Losanges*, n° 23, pp. 33-41 ou Orbi (ULiège), <https://hdl.handle.net/2268, 205141>.

leurs classes. En synthèse de tous ces travaux, nous avons rédigé, J.-C. Delagardelle, V. Henry et moi, une brochure, théorique et pratique, publiée par la SBPMef : elle fait le point sur les NR et relate quelques expériences menées dans des classes du secondaire au Grand-Duché ou à l'Université de Liège (en seconde année du programme des ingénieurs de gestion). Voici, en guise de présentation, la couverture de cette brochure ainsi que le quatrième de couverture.



- Donnant cours principalement à des étudiants issus des humanités, je me devais de me tenir au courant sur les mathématiques du secondaire. De plus, je tenais également à répandre mes idées pédagogiques parmi les collègues travaillant avec des jeunes (essentiellement au niveau du secondaire supérieur). C'est ainsi que je participais activement à des activités organisées au profit du secondaire.
1. La SBPMef : j'en fus longtemps membre du CA ; je dirigeais, pendant une dizaine d'années, sa revue *Mathématique et Pédagogie* ; j'y publiais souvent et y ai présenté plusieurs exposés.
 2. Le FOPEM dirigé par J. Navez : j'y donnais régulièrement des séances de recyclage à destination surtout de membres de l'AMULG.
 3. Les IREM de Liège, Luxembourg et Bruxelles, dirigés respectivement par J. Navez, J.-C. Delagardelle et D. Justens avec qui nous travaillions en étroite collaboration. Une réalisation majeure de l'IREM de Liège fut la rédaction d'un « Manuel de référence de mathématiques pour l'enseignement secondaire » réalisé dans le cadre d'une recherche subsidiée par la Communauté française de Belgique⁶³. Un bref historique et les titres des

⁶³ ISBN 978-2-87344-589-8 ; D/2007/3125/5.

principaux travaux réalisés à l'IREM de Liège peuvent être consultés sur le site de l'IREM ⁶⁴.

4. J'ai été invité (en 1991 et en 1994) par le FOPEMA (centre de Formation de pédagogie mathématique) de Namur pour y donner des conférences de recyclage pour professeurs de mathématiques. Mes exposés étaient consacrés à l'usage des mathématiques au service de l'économie.
J'ai également présenté mes idées sur le même thème dans diverses conférences données en Belgique (dans le cadre de journées du FNRS ou du Csiptic à Liège, à divers congrès annuels de la SBPMef, à celui de la VVW (*Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars*) à Neerpelt, à celui de la (SMB) Société Mathématique de Belgique à Bruxelles ou à Mons, à des journées organisées à Louvain-la-Neuve, mais aussi à l'étranger (à l'Irem de Dijon, au Congrès de l'APMEP à Gérardmer ou à Lille, au Congrès EM2000 à Grenoble, au congrès de la CIEAEM à Neuchatel, au Centre Universitaire de Luxembourg).
- D'un point de vue didactique, ma charge d'enseignement m'a tout naturellement conduit à m'intéresser en profondeur à toutes les questions liées à la (parfois délicate) « Transition Secondaire-Université » (TSU en abrégé). Sur ce point, j'ai beaucoup appris en assistant à des journées, séminaires ou colloques organisés par l'IFRES : des spécialistes internationaux de la didactique universitaire venaient régulièrement donner des aspects théoriques de la profession, en insistant particulièrement sur la métacognition. Par ailleurs, des séminaires du CDS rassemblaient fréquemment des enseignants du premier cycle qui venaient présenter à l'assemblée des initiatives pédagogiques qu'ils avaient suivies lors de leurs cours. J'y ai moi-même exposé mes propres expériences et, bien sûr, j'y parlais de ce que je connaissais le mieux, à savoir de la TSUM (Transition Secondaire-Université en Mathématiques). Après mon admission à l'éméritat, j'ai rassemblé quelques idées que j'avais sur le sujet, de manière à en laisser une trace écrite qui pourrait éventuellement intéresser à l'avenir certains enseignants. C'est ainsi que j'ai déposé, en 2017 et sur le site institutionnel Orbi, les articles suivants (en accès ouvert) :
 - « Quelques idées générales à propos de la compréhension en mathématiques » ⁶⁵,
 - « Sur l'évaluation de compétences en mathématiques » ⁶⁶,
 - « Bien raisonner en TSUM » ⁶⁷,
 - « Méditations expérimentées sur la TSUM » ⁶⁸.
 - Ayant travaillé avec deux collaboratrices qui sont devenues enseignantes de la statistique à ULiège, à savoir G. Haesbroeck (à la Faculté des Sciences et à HEC-Ecole de Gestion) et V. Henry (à HEC-Ecole de Gestion), je me suis assez naturellement intéressé particulièrement à la didactique de la statistique. Cette

⁶⁴ <http://www.irem.ulg.ac.be>.

⁶⁵ <https://hdl.handle.net/2268/205282>.

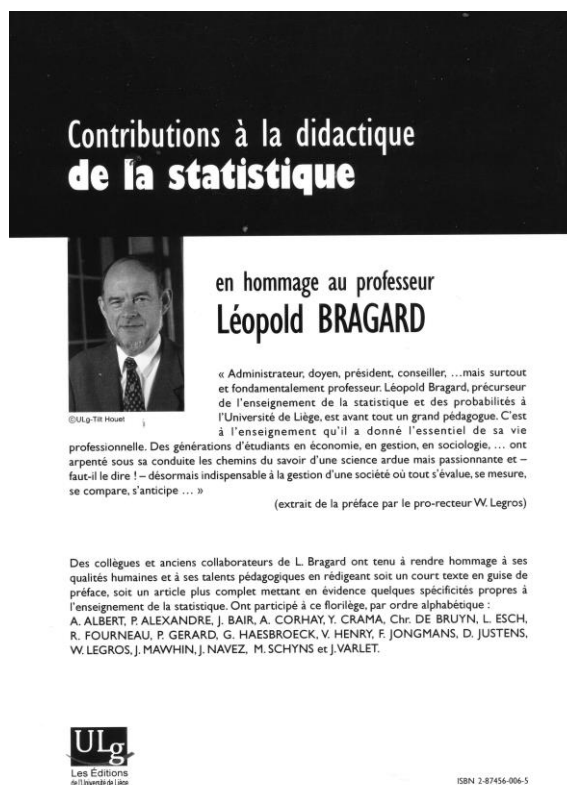
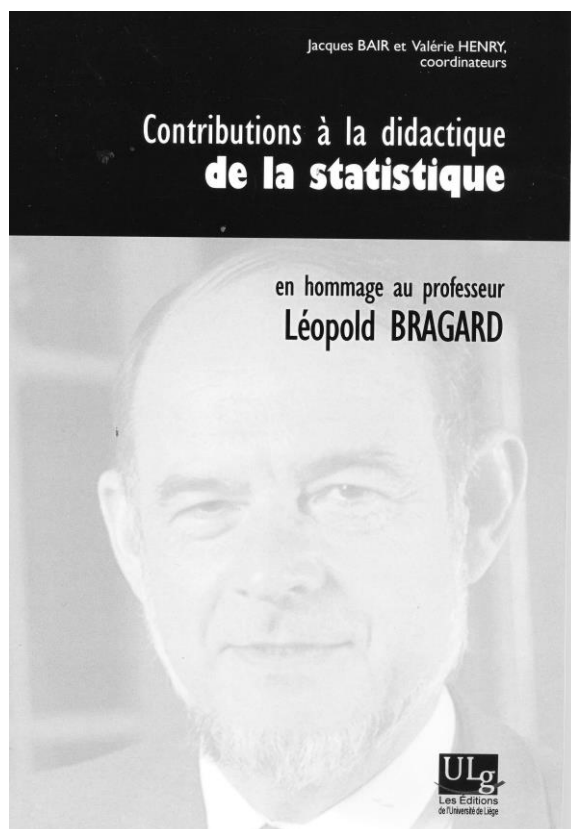
⁶⁶ <https://hdl.handle.net/2268/207355>.

⁶⁷ <https://hdl.handle.net/2268/207472>.

⁶⁸ <https://hdl.handle.net/2268/213509>.

discipline est certes une branche à part entière des mathématiques (au même titre que l'algèbre, la géométrie, l'analyse par exemple), mais elle occupe une place spéciale au niveau de l'enseignement dans la mesure où elle n'est pas de mode aussi ésotérique (voir la note en bas de page n° 8) que les autres ; en effet, on y travaille sur des données issues du monde sensible, ce qui n'est généralement pas le cas ailleurs en mathématiques. J'ai notamment construit « Un modèle relatif à la TSUS » (ou Transition Secondaire-Université en Statistique)⁶⁹.

Mais mon apport principal dans ce domaine fut, outre l'article rédigé (en 2002) avec G. Haesbroeck et comportant une étude statistique « Sur l'enseignement de la statistique en Communauté française de Belgique »⁷⁰, la coordination, en collaboration avec V. Henry, du livre « Contributions à la didactique de la statistique. En hommage au professeur Léopold Bragard »⁷¹. Dans cet ouvrage, des collègues ou anciens collaborateurs de L. Bragard, qui ont enseigné la statistique, ont tenu à rendre hommage à ce dernier à l'occasion de son départ à la retraite en mettant notamment en évidence ses qualités humaines et ses talents pédagogiques. C'est ainsi que des contributions inédites à la didactique de la statistique ont été rédigées par : A. Albert, P. Alexandre, J. Bair, L. Esch, R. Fourneau, P. Gérard, G. Haesbroeck, V. Henry, D. Justens, J. Navez, M. Schyns. Chacun de ces auteurs a tenu à exposer des réflexions liées à son expérience professionnelle et à son domaine d'expertise.



⁶⁹ Orbi, 2020; <https://hdl.handle.net/2268/253869>.

⁷⁰ *Repères: Revue des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*, 48, 41-58 ; <https://hdl.handle.net/2268/66879>.

⁷¹ Les Editions de l'Université de Liège, 2005, 154 pages.

7. Travaux en histoire locale des mathématiques

D'après mon expérience, je pense que tout enseignant-chercheur doit s'intéresser, et même approfondir (selon ses capacités et besoins spécifiques) l'histoire de sa discipline.

D'une part, l'enseignant doit connaître et transmettre de façon appropriée l'idée que les concepts enseignés ne sont pas apparus dans le passé comme ils sont maintenant présentés, mais peuvent avoir connu un long et parfois tortueux cheminement avant d'atteindre leur formulation actuelle. Très schématiquement, leur évolution historique peut fréquemment être expliquée en faisant référence à la dialectique hégélienne⁷² selon laquelle un savoir déterminé se développe par 'triade', à savoir selon trois stades appelés respectivement « thèse », « antithèse » et « synthèse ».

Le concept d'infinitésimal (voir section 6) fournit un exemple emblématique pour illustrer ceci. La thèse de l'existence d'infinitésimaux était latente depuis l'Antiquité (par exemple avec le paradoxe de Zénon), puis fut introduite explicitement et exploitée par des savants des 17^{ème} et 18^{ème} siècles (comme, initialement, Leibniz et Newton) pour résoudre de façon pragmatique des problèmes fondamentaux tels que la recherche d'une tangente à une courbe ou la détermination du maximum (ou minimum) d'une fonction ; des raisonnements, essentiellement heuristiques faisant intervenir des infiniment petits s'avéraient efficaces, mais n'étaient guère satisfaisants d'un point de vue théorique. De là est née, grosso modo au 19^{ème} siècle et durant la première moitié du siècle suivant, l'antithèse selon laquelle les infinitésimaux doivent être bannis des raisonnements mathématiques. Enfin, vers le milieu du 20^{ème} siècle, est apparue une synthèse proposée initialement par A. Robinson : grâce à des résultats récents et sophistiqués de la logique, il construisit de façon incontestable des nombres infiniment petits (qui ne sont pas réels mais bien hyperréels) ; il réhabilitait ainsi l'intuition des premiers analystes et satisfaisant les mathématiciens contemporains au point de vue de la rigueur.

D'autre part, un chercheur se base généralement sur des travaux effectués par des savants du passé pour élaborer des théories originales ; comme on le dit dans le langage courant : « il ne faut pas toujours réinventer la roue ».

Pour ma part, mon attrait pour l'histoire des mathématiques fut principalement suscité, puis nourri par trois mathématiciens qui m'étaient proches. Je leur suis « infiniment » reconnaissant.

- 1) Mon premier « mentor » en histoire des mathématiques fut mon ancien Patron F. Jongmans qui avait guidé toutes mes recherches en géométrie convexe (voir la section 3). En fait, sa carrière scientifique a porté successivement sur deux thèmes où il a excellé ; il fut d'abord un géomètre de premier plan, puis il s'est lancé avec succès dans des recherches historiques. Ses deux demi-carrières sont décrites dans des articles

⁷² Selon Wikipédia : « Georg Wilhelm Friedrich Hegel, né le 27 août 1770 à Stuttgart et mort le 14 novembre 1831 à Berlin, est un philosophe allemand. Son œuvre, postérieure à celle de Emmanuel Kant, appartient à l'idéalisme allemand et a eu une influence décisive sur l'ensemble de la philosophie contemporaine ».

parus peu après son décès : j'ai rédigé le volet géométrique ⁷³, tandis que l'australien Eugène Seneta a détaillé sa production historique ⁷⁴.

J'ai eu le privilège d'avoir été un témoin privilégié du changement d'orientation dans les recherches de F. Jongmans, parce que celui-ci me demandait quelquefois une petite aide technique pour encoder ses travaux. Ainsi, j'ai pu observer sa méthode de travail et ai vu avec quel soin il analysait les documents originaux provenant de la correspondance de Catalan découverte dans des archives locales. J'ai également appris à connaître quelques-uns de ses contacts à l'étranger, principalement le français Norbert Verdier et l'australien Eugène Seneta ⁷⁵, avec qui il avait si souvent travaillé. C'est probablement pourquoi j'ai quelque peu poursuivi, après mon admission à l'éméritat, les travaux historiques de mon ancien Patron sur des scientifiques locaux de l'ancien temps qui méritent, à mon avis, de ne pas être oubliés.

Ainsi, je me suis penché sur la vie et des travaux de trois mathématiciens locaux marquants du passé, à savoir, par ordre chronologique Sluse, Noël et Catalan.

- a) René-François de Sluse (1622-1685), encore appelé simplement Sluse, fut un ecclésiastique liégeois et un mathématicien influent du 17^{ème} siècle. A l'occasion de son tricentenaire fut organisé, du 20 au 22 mars 1986, un « Congrès Sluse » à Amay, Liège et Visé, les trois villes où le savant avait vécu une partie de sa vie ; des actes de ce colloque international ont été publiés dans le BSRSL (tome LV, 1986, Fasc. 1) à l'initiative d'un « Comité Sluse », présidé par F. Jongmans et avec R. Halleux comme secrétaire. Parallèlement à ce congrès eurent lieu, dans ces villes, des expositions sur le thème « Les Sluse et leur temps ». Je visitais celle se déroulant dans la cathédrale d'Amay, car, à cette époque, je donnais cours pas loin de là (plus précisément à Huy). C'est alors que j'entendais parler pour la première fois de Sluse. A cette occasion, F. Jongmans me conseilla de me renseigner notamment ce que l'on connaît encore aujourd'hui sous les noms d'algorithme de Sluse (un algorithme pour déterminer la tangente en un point d'une courbe algébrique) et de perles de Sluse (des courbes particulières ainsi appelées par le français B. Pascal qui entretenait de la correspondance avec le liégeois). Par la suite, j'ai suivi les conseils judicieux donnés par ancien Patron. En collaboration avec V. Henry, j'ai rédigé plusieurs articles sur l'algorithme en question, montrant notamment qu'il peut être facilement (mais bien sûr a posteriori) expliqué dans le cadre de l'ANS. J'ai également souvent demandé à mes étudiants (de la seconde candidature en IG) de rechercher la tangente en des points de certaines perles éponymes.

Il est à noter qu'à la fin du 19^{ème} siècle, le professeur de ULiège C. Le Paige a étudié la correspondance de R.-F. de Sluse. Selon lui, des travaux du savant liégeois ont eu une influence certaine sur Newton et sur Leibniz lorsque ces derniers donnèrent

⁷³ « A la mémoire du géomètre François Jongmans (1921-2014) », par J. Bair, (2014), *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 11 ; Orbi (ULiège) <https://hdl.handle.net/2268/259491>.

⁷⁴ « In Memoriam François Jongmans (1921-2014) : Mathematical Historian », par E. Seneta, *Mathematical Scientist*, 2015, vol. 40 (2), pp. 67-79.

⁷⁵ Voir la brochure intitulée « Eugène Catalan (1814-1894, X 1833). Le bicentenaire et le « fonds d'archives Catalan-Jongmans », dans le *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'Ecole polytechnique (Sabix)*, n° 57, octobre 2015.

naissance à l'analyse mathématique. En ce sens, on peut sans conteste ranger Sluse parmi les plus grands mathématiciens liégeois, et même belges, du passé.

Il convient toutefois de remarquer que Sluse n'a jamais appartenu à l'Université de Liège, pour la bonne raison que celle-ci n'existait pas encore à son époque.

- b) J'ai entendu parler pour la première fois de Jean-Nicolas Noël (1783-1867) dans un train, alors que je me rendais à Bruxelles pour assister à des exposés organisés à l'Académie ; je voyageais en compagnie (très agréable d'ailleurs) de Jean Mawhin. Celui-ci me parla d'une conférence qu'il venait de donner à Luxembourg sur l'apport de mathématiciens luxembourgeois dans des Universités belges au début de celles-ci. Il m'apprit qu'au 19^{ème} siècle avait fait rage, dans le monde éducatif belge, une vive querelle opposant d'une part les infinifuges (qui 'fuyaient' les infiniment petits) aux infinicoles (qui, au contraire, étaient partisans des infinitésimaux) ; le camp de ces derniers était dirigé par J.-N. Noël, un mathématicien français qui s'était fait une fameuse réputation d'enseignant à Luxembourg avant d'être nommé à l'Université de Liège où il fit une belle carrière, y devenant même Recteur.

Après ce voyage instructif, je me suis rappelé que F. Jongmans avait rédigé un article sur « le recrutement, au 19^{ème} siècle, de mathématiciens étrangers par l'Université de Liège »⁷⁶. Il y mentionnait aussi le nom de Noël dont il soulignait l'« extraordinaire rayonnement didactique ». Ainsi, J.-N. Noël était non seulement un infinicole, mais aussi un bon didacticien. Cette double caractéristique suscita ma curiosité.

J. Mawhin me transmit le fichier qu'il avait utilisé lors de sa conférence luxembourgeoise. De mon côté, j'approfondis la vie et les travaux de ce mathématicien. Avec ces deux sources, et après plusieurs échanges de courrier avec J. Mawhin, nous avons rédigé en collaboration un article intitulé « Le mathématicien Jean-Nicolas Noël (1783-1867). Un didacticien infinicole du 19^e siècle »⁷⁷.

Dans la foulée, j'ai étendu mes investigations en remarquant que plusieurs mathématiciens liégeois ont été, au moins à un moment de leur carrière, des infinicoles. Ceci me semble intéressant à relever et me paraît, à première vue, assez surprenant. Une note a donc été rédigée sur « Des infinicoles liégeois »⁷⁸.

- c) Comme il est signalé ci-dessus, j'ai été un témoin privilégié des recherches historiques menées par F. Jongmans sur E. Catalan.

C'est assez naturellement que Norbert Verdier, qui avait été en contact direct avec mon ancien mentor et qui faisait partie, comme moi, du comité de rédaction de la revue *Tangente* (voir la section suivante), me contacta en 2013 pour me demander si l'Université de Liège allait célébrer l'année suivante le bicentenaire de la naissance de l'ancien professeur de l'Université. J'ai fait part de cette requête auprès de collègues de l'Institut de Mathématique. Ils mirent sur pied deux journées pour fêter cet anniversaire. L'une était de vocation pédagogique et visait de nombreux étudiants du secondaire de la région. L'autre était réservée à un public plus spécialisé ; celui-ci eut notamment l'opportunité d'entendre un exposé au cours duquel Preda Mihalescu, de

⁷⁶ Dans les Actes du Congrès de Liège 20-23/VII/1992. Tome 2, pp. 600-611.

⁷⁷ Cette note est parue dans la « *Revue des Questions scientifiques* » (en abrégé RQS), Tome 190, N° 1-2, 2019, pp. 27-59.

⁷⁸ Voir Orbi (2020), op. cit.

l'Université de Göttingen, présenta sa démonstration de la célèbre « conjecture de Catalan »⁷⁹, énoncée à Paris en 1844 par l'auteur sous la forme suivante d'un « théorème que je [Catalan] crois vrai bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer complètement ; d'autres seront peut-être plus heureux ». Malgré des efforts incessants de nombreux chercheurs, c'est P. Mihăilescu qui eut le bonheur de démontrer⁸⁰ ce résultat plus de 150 ans après son énoncé.

Ces célébrations, qui s'inscrivirent dans les manifestations organisées par ULiège pour célébrer aussi son bicentenaire, resteront longtemps gravées dans la mémoire des liégeois qui ont eu l'opportunité d'y assister. Elles firent en tout cas connaître Catalan et suscitèrent de nouveaux travaux sur la vie et sur l'œuvre de cet illustre mathématicien.

- 2) F. Jongmans a probablement transmis son appétence pour l'histoire des mathématiques à son ancien assistant L. Bragard.

Ce dernier se restreignit à de l'histoire locale. Il souhaitait laisser un témoignage écrit sur la vie universitaire au sein du Département EAA et de la Faculté FEGSS qu'il avait dirigés, et ceci à une période cruciale de leur développement.

Il me demanda explicitement de suivre cette direction en me disant que nous avions, en quelque sorte, le 'devoir moral' de transmettre à la postérité notre regard sur ce que nous avons eu la chance de vivre en direct. J'ai suivi cette recommandation. Je me suis penché sur plusieurs épisodes, qui me paraissent dignes de ne pas être oubliés, de la vie universitaire liégeoise dans le domaine des mathématiques. En respectant, je crois, l'esprit de ce qu'aurait pu faire L. Bragard, j'ai ainsi tenu à laisser des traces écrites sur six sujets.

- a. Je rappelle que, lorsque j'étais étudiant en sciences mathématiques, faisait rage la « guerre de la mathématique moderne » (GMM en abrégé) dans le monde de l'enseignement en Belgique : pour moi, et pour la plupart des étudiants liégeois de cette période, elle opposait principalement le bruxellois G. Papy et le liégeois H.-G. Garnir. Bien plus tard, quand je me suis intéressé à l'histoire locale, j'ai lu plusieurs documents rédigés par des historiens belges sur ce sujet et j'ai été frappé par le fait que ceux-ci donnaient très peu (et c'est un euphémisme) d'informations sur la présence et l'influence des universitaires liégeois dans ce débat. Je questionnais à ce propos l'historien J. Mawhin qui semblait approuver mon diagnostic ; il le justifia par un manque probable d'écrits rapportant les idées défendues par les liégeois de l'époque. Je me suis dès lors attelé à rassembler des témoignages, écrits ou oraux, sur cette question. Ces recherches ont débouché sur un *working paper* intitulé

⁷⁹ Catalan formulait comme suit cette conjecture : « Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes ; autrement dit : l'équation $x^n - y^n = 1$, dans laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admet qu'une seule solution. » (D'après la revue *Sabix*, 2015, op. cit., p. 46)

⁸⁰ Voir l'article « Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture », par P. Mihăilescu, dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 572, 2004, pp. 167-195.

« *Témoignages d'universitaires liégeois en liaison avec la guerre de la mathématique moderne* »⁸¹.

Lors de cette étude historique, j'ai découvert qu'en adoptant un point de vue purement liégeois, on peut trouver des points communs entre la GMM et la GII dont il fut question ci-avant. C'est ainsi que j'ai produit la note « *Analogies entre deux querelles relatives à l'enseignement des mathématiques en Belgique* »⁸².

- b. Après mon 'exil' forcé vers l'enseignement supérieur à Huy durant les années 1970, il me fallait décrocher le diplôme supérieur à celui de docteur pour avoir éventuellement une chance de réintégrer le personnel (académique cette fois) de ULiège. Partant de cette évidence, j'ai tenu à décrocher mon diplôme de l'AES en mathématiques (1985). Ce dernier ayant disparu à l'Université de Liège, il m'a semblé intéressant d'en faire une brève étude historique et de réaliser une chronique détaillée des épreuves que j'ai passées en cette occasion. J'ai ainsi rédigé, en 2021, la note dont le titre est « *Flash-back sur l'Agrégation de l'Enseignement Supérieur obtenue par des mathématiciens à l'Université de Liège* »⁸³.
- c. Quand j'enseignais à l'ISI de Huy, le professeur Joseph Stassart, de la Faculté de Droit à ULiège, mit sur pied (dès 1977) un enseignement d'économie politique à horaire décalé visant des juristes dans un premier temps, puis un public fort large de personnes souhaitant s'informer ou se recycler en économie. Le programme s'appela initialement « Certificat d'Economie Politique » (CEP en abrégé). Assez vite, il se transforma en ce qu'on s'appela « Diplôme d'Economie et de Gestion » (DEG en abrégé). Dès sa création, ce programme d'étude comprit un cours de mathématiques attribué alors à L. Bragard. Celui-ci assura le cours pendant quelques années, puis me le confia en suppléance, ce qui présenta une conséquence double :
- La charge de L. Bragard, qui était alors fort lourde aussi bien pédagogiquement qu'administrativement, fut quelque peu soulagée ;
 - Ma désignation me permit de 'garder un pied' à ULiège : elle justifia ma désignation en tant qu'assistant volontaire au service de F. Jongmans et, parallèlement, me donna l'occasion de me spécialiser en mathématiques enseignées à des économistes ou gestionnaires (spécialement en microéconomie qui utilisait des théories mathématiques sophistiquées souvent méconnues des étudiants s'engageant dans cette filière).

Plus tard, quand je fus nommé dans le corps académique de la FEGSS ce cours de mathématiques à horaire décalé fut intégré dans ma charge ; il fut vite dédoublé en deux niveaux, puis se vit accompagné d'un cours en recherche

⁸¹ Cette note, rédigée en 2020, est disponible Sur Orbi (ULiège) : <https://orbi.uliege.be/2268/255230>. Sur le même sujet, voir également voir également l'article « *La querelle des maths* », par H. Dupuis, LQJ, n° 279, 2021, pp. 72-73.

⁸² Cet article peut être consulté à l'adresse électronique : <https://orbi.uliege.be/2268/249839>.

⁸³ On peut consulter ce document à l'adresse : <https://orbi.uliege.be/2268/258816>.

opérationnelle qui fut apprécié des étudiants (par le fait qu'y étaient traitées des techniques mathématiques modernes et résolvant des problèmes concrets). En 1991, je fus désigné par la Faculté comme successeur de J. Stassart à la direction du DEG ; j'ai occupé ce poste pendant une dizaine d'années. Durant cette période, je construisis, au départ du DEG, un programme complet aboutissant à la création d'une licence en gestion à horaire décalé. Cette aventure a été racontée dans le document « *Les formations à horaire décalé et les formations complémentaires en économie et en gestion* »⁸⁴, ainsi que lors de plusieurs exposés donnés lorsque le DEG fêta le 20^{ème} anniversaire de sa création.

- d. L'élaboration d'un IREM à Liège me semble importante en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, particulièrement dans la région liégeoise. Je l'ai déjà racontée à plusieurs reprises, notamment dans l'évocation de mes rencontres avec A. Antibi qui peut être considéré comme ayant été le 'père' de cet IREM⁸⁵. Cette aventure mémorable semble pour le moment à l'arrêt, mais j'espère que son souvenir inspirera, d'une façon ou d'une autre, des générations futures de professeurs de mathématiques. Dans le domaine concerné, je me mets à rêver à une certaine réalisation de l'affirmation formulée par le philosophe et historien grec Thucydide (460 av. J.C. – 397 av. J.C.) : « l'histoire n'est qu'un éternel recommencement ».
- e. En 1987, j'occupais un poste confortable à l'ISI de Huy : j'étais nommé à titre définitif et assuré d'obtenir une prochaine promotion (le seul critère étant là-bas l'ancienneté), l'établissement était d'un niveau universitaire et les cours étaient assez poussés (car ils étaient destinés à de futurs ingénieurs), l'ambiance de travail était agréable, conviviale et détendue, et enfin, je pouvais effectuer librement mes recherches (en dehors de mes heures de cours) en étant même aidé financièrement pour mes éventuels frais (documentations, déplacements, inscriptions à des congrès, ...).

Et pourtant, j'ai alors postulé pour essayer de décrocher une charge de cours à ULiège. Ce n'est guère pour des raisons matérielles que je postulais cette place : les déplacements à effectuer pour me rendre sur le lieu de travail étaient assez similaires (en fait, le trajet pour me rendre au Sart Tilman était un peu plus court que pour aller à Huy, mais la différence entre les deux me semblait assez négligeable) et le salaire proposé était pratiquement le même des deux côtés⁸⁶. Ma décision était principalement justifiée par ces trois arguments :

- L'attrait pour l'Université (et son prestige) me semblait supérieur.
- Les étudiants s'inscrivaient souvent à l'ISI après avoir auparavant tenté leur chance dans une Université (le plus souvent en l'occurrence aux Facultés

⁸⁴ Chapitre du livre « *L'économie, la Gestion et les Sciences sociales à l'Université de Liège* » édité à l'occasion du centenaire de la création des enseignements des sciences sociales et de gestion à l'Université de Liège 1896-1996 », 1996, pp. 175-185.

⁸⁵ Adresse du site Web de l'IREM : irem.ulg.ac.be. Pour rappel, l'article sur A. Antibi a été déposé sur Orbi en 2022, op. cit.

⁸⁶ Pour l'anecdote, je signale que quand j'ai été repris à ULiège, on me proposa initialement un salaire moindre que ce que je touchais à Huy. En effet, l'administration hutoise comptabilisait mes années d'assistantat passées antérieurement à Liège pour le calcul de ma rémunération, alors que celle de l'Université n'en tenait pas compte. Cette anomalie fut très vite rectifiée.

Universitaires de Gembloux) ou n'osaient pas s'inscrire dans l'enseignement universitaire réputé plus difficile que l'enseignement supérieur non universitaire.

- A l'Université, un enseignant-chercheur se doit, selon moi, de développer son service, et dès lors de guider de jeunes collaborateurs dans leurs recherches menant, si possible, à la réalisation d'un doctorat avant éventuellement de se lancer, dans les meilleurs des cas, dans une carrière académique.

Ce dernier item me semblait, de loin, le plus attirant.

Tout au long de ma carrière à ULiège, mon service a pu bénéficier de la collaboration de nombreux assistant(e)s diplômé(e)s de ULiège en sciences (essentiellement mathématiques). Tou(te)s me donnèrent entière satisfaction. Mais deux mathématiciennes, Gentiane Haesbroeck et Valérie Henry, me marquèrent davantage que les autres : elles restèrent dans mon service pendant plus longtemps et elles étaient douées de qualités scientifiques, pédagogiques et organisationnelles hors du commun. Elles travaillaient toutes deux dans un domaine que je ne connaissais guère mais qui me paraissait porteur : la statistique mathématique pour l'une et la didactique des mathématiques pour l'autre. J'ai essayé tant bien que mal de les épauler un peu et de les guider dans leurs premières recherches qui ont débouché sur l'obtention d'un doctorat dans un premier temps, puis sur une nomination dans le corps académique de ULiège, en FS pour l'une et à HEC pour l'autre. Désormais, elles y mènent toutes deux une carrière professionnelle que je crois épanouie.

Pour arriver à un tel résultat, le parcours fut évidemment semé d'embûches.

Il m'a semblé intéressant de témoigner sur la difficulté d'un tel parcours. C'est pourquoi, j'ai voulu laisser une trace écrite de mes « Souvenirs relatifs au début de la carrière professionnelle d'une statisticienne à l'Université de Liège »⁸⁷. Ils se basent principalement sur divers documents d'époque que j'avais conservés. Ils fournissent au total un exemple que j'ai la faiblesse de trouver inspirant.

- f. En 2017, l'Université de Liège fêtait les 200 ans de son existence. Pour cette occasion, j'ai rédigé un livre intitulé « *Deux siècles de statistique à l'Université de Liège* »⁸⁸.

Le but de cet ouvrage consiste à montrer comment l'enseignement et la recherche en statistique (et en probabilités) ont progressé à ULiège : ils étaient fort discrets à la naissance de l'Alma Mater pour devenir imposants au moment du bicentenaire.

Dans cette entreprise, je fus aidé efficacement par deux statisticiens liégeois, à savoir Adelin Albert et Gentiane Haesbroeck : ils relurent une première version de mon travail et m'aidèrent à y apporter des corrections, des précisions et des ajouts substantiels.

Le Recteur de l'époque, Albert Corhay, soutint le projet et accepta de préfacer l'ouvrage.

⁸⁷ Texte en préparation.

⁸⁸ Université de Liège – Atelier des Presses, 2017, 108 pages. Le texte est accessible sur Orbi à l'adresse : <https://hdl.handle.net/2268/221572>.



3) J'ai déjà évoqué ma participation active à un groupe dirigé par l'israélien Mikhaïl Katz qui se penche sur les fondements épistémologiques de l'analyse infinitésimale. Je n'y reviendrai plus, mais renvoie le lecteur éventuellement intéressé à la section 5.

Je me contente ici de souligner que cette aventure me donna l'occasion de travailler avec des mathématiciens, des historiens et des philosophes, ce qui entraîna évidemment un élargissement de mon horizon de réflexions et de recherches ; cela me donna aussi l'opportunité de publier en collaboration des articles dans des revues internationales variées qui m'étaient, pour la plupart, antérieurement étrangères, à savoir :

- *Journal for General Philosophy of Science*
- *Philosophy of Mathematics Education Journal*
- *British Journal of History of Mathematics*
- *Antiquitates Mathematicae*
- *Foundations of Sciences*
- *Mathematychni Studii*
- *Notices of the American Mathematical Society*
- *Mathematical Intelligencer.*

8. Publications de vulgarisation mathématique

De par sa fonction, un enseignant-chercheur a une double mission à réaliser : d'une part, chercher (et si possible trouver) des résultats mathématiques inédits et, d'autre part, enseigner. Il est ainsi amené à présenter oralement (lors de cours, de conférences, ...) ou par écrit (avec des articles inédits, des notes de cours, des livres, ...) des résultats (originaux ou connus) à, le plus souvent, certains de ses pairs ou de ses étudiants.

Mais, je pense qu'un professeur d'Université contemporain ne peut pas rester indifférent à un autre type de travail : il doit (ou devrait) consacrer une partie de son temps à la vulgarisation scientifique. Il existe bien sûr plusieurs degrés de vulgarisation, notamment en fonction du public visé (jeunes enfants, adolescents, ...). Ici, j'envisage la vulgarisation scientifique au sens 'propre' du terme, « c'est-à-dire conçue comme transfert d'informations scientifiques vers le grand public, habitée par des visées universalistes. »⁸⁹ Cela réclame parfois beaucoup de réflexions pour rendre les théories mathématiques traitées accessibles à un large public et donc aussi un investissement en temps important.

Par le passé, les savants n'étaient pas confrontés à ce besoin (et certains même dédaignaient ce travail). Mais, de nos jours, les moyens de communication sont omniprésents et faciles à utiliser, tandis que la société actuelle doit s'ouvrir à toute culture, y compris mathématique. De célèbres mathématiciens contemporains semblent partager cet avis et n'hésitent pas à consacrer leur (précieux) temps à cette activité. A titre d'illustres exemples, citons les médaillés Fields T. Gowers, T. Tao et C. Villani⁹⁰.

Quant à moi, mes premiers pas en vulgarisation mathématique ont été accomplis en 1992 lorsque j'ai cherché à combiner mes deux passions, à savoir les mathématiques et les sports en général, le tennis en particulier. J'ai écrit un petit livre traitant conjointement des mathématiques et des sports. Je visais un double objectif :

- me procurer du plaisir en rédigeant cet ouvrage ;
- montrer l'utilité des mathématiques en exhibant des applications variées, inhabituelles et peut-être motivantes.

Cet ouvrage était destiné, en première intention, à des professeurs de mathématiques. C'est pourquoi, il a été publié par la SBPMef.

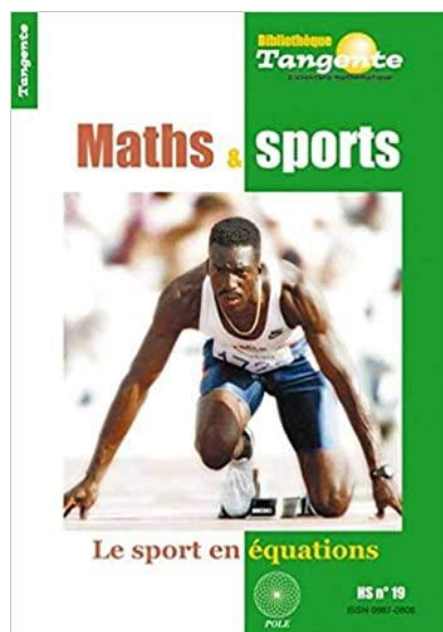
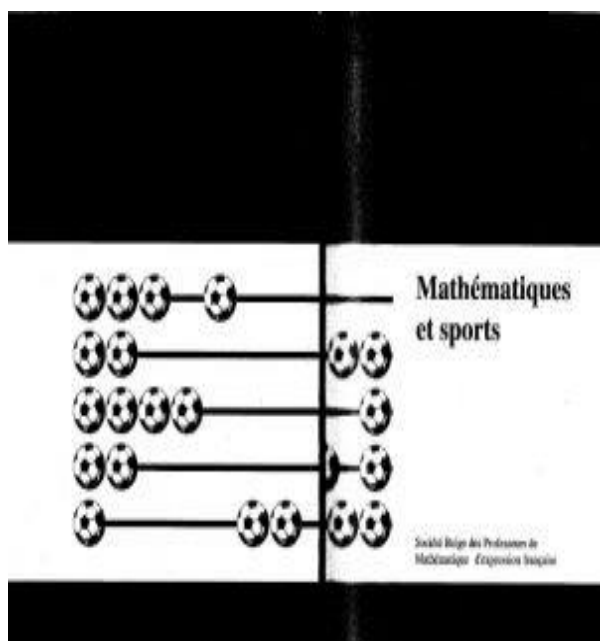
Les responsables de la revue française *Tangente* ont eu leur attention attirée par ce travail. Ils y ont fait mention dans une de leur publication⁹¹ en écrivant notamment que « Jacques Bair est sans doute le premier auteur d'un livre sur le thème Mathématiques et Sports en langue française.[...] Il a inspiré depuis un certain nombres d'auteurs. »

⁸⁹ Dans « *Henri Poincaré - Vulgarisation scientifique et philosophie des sciences* » par Laurent Rollet, *Philosophia Scientiæ*, tome 1, no 1 (1996), p. 125-153.

⁹⁰ Voir mon article sur « *Un mathématicien emblématique : Sir William Gowers* », sur Orbi, op. cit. Par ailleurs, voir mon autre article sur « *Les pensées mathématiques de Tao* » publié dans la revue *Losanges* et aussi déposé sur Orbi, op. Enfin, quant à Cédric Villani, il est l'auteur de nombreux livres et consacre pas mal de temps à vulgariser et promouvoir les mathématiques ; comme exemple assez récent, il a été interviewé par G. Cohen et B. Hauchecorne dans le numéro 200 de la revue *Tangente* (en 2021, pp. 6-7).

⁹¹ *Mathématiques & sports – Le sport en équation*, Bibliothèque Tangente, HS 19, 2004, p. 126.

Depuis lors, ils ont régulièrement publié sur des liens entre mathématiques et sports ; ils m'ont demandé de rejoindre leur équipe de rédacteurs puis de faire partie de leur Comité de rédaction.



Tangente est, au départ, le seul magazine en langue française entièrement consacré à la vulgarisation mathématique de haut niveau. Son 35^{ème} anniversaire de sa naissance a été célébré le 4 décembre 2022 au Musée des Arts et Métiers (Paris).

Sous cette appellation générique se retrouve une série de revues et livres publiés par POLE, une maison d'éditions parisienne spécialisée dans l'univers des mathématiques, des jeux et de la logique :

- *Tangente, l'aventure mathématique* (en abrégé T) est une revue bimestrielle vendue en « kiosque », présentée en format A4 ; chaque numéro comprend une cinquantaine de pages. Elle a été créée pour mieux comprendre les mathématiques et en promouvoir l'image auprès du grand public. Elle est devenue depuis lors « un catalyseur de la culture mathématique »⁹². Elle lance des passerelles entre les mathématiques et n'importe quelle activité humaine : autres sciences, arts, sports, politique, finance, ... Elle est aussi désormais accessible en version numérique (sur le site « Tangente-mag.com »).
- *Tangente Education* (en abrégé TE) est une revue trimestrielle s'adressant spécialement aux professeurs de mathématiques (surtout du niveau du secondaire). Elle traite de thèmes pédagogiques variés, répond à des questions qui peuvent se poser à des enseignants en leur procurant des solutions innovantes, relate des expériences éventuellement transposables.
- *Tangente Sup* (en abrégé TS) était un magazine bimensuel destiné surtout aux élèves (et à leurs professeurs) des classes préparatoires aux grandes écoles et de

⁹² Formule figurant sur la couverture du T 200.

l'enseignement supérieur ; ses articles étaient plus approfondis que ceux de T. Il a aujourd'hui fusionné avec la revue *Quadrature*.

- *Tangente Hors Série kiosque* (en abrégé THS) paraît quatre fois par an et est vendu en France dans les kiosques (en Belgique chez certains marchands de journaux ou bien sûr par courrier postal sur abonnement). Il se compose de 64 pages, en format A4, et explore un domaine de savoir ou de culture. Chaque numéro est consacré à un grand mathématicien du passé (par exemple, Pascal, Poincaré, Galois, ...), à un chapitre de mathématiques (par exemple, les espaces vectoriels, les surfaces, la recherche opérationnelle, la géométrie de la règle et du compas, l'optimisation, les groupes, ...), à des liens entre mathématiques et autres disciplines (par exemple, mathématiques et finance, ou économie, ou physique, ou éthique, ou imagerie, ou intelligence artificielle, ...).
- *Tangente Bibliothèque* (en abrégé TB) se présente sous la forme d'un livre de 160 pages vendu en librairie (ou sur abonnement). Chaque ouvrage est consacré au thème d'un THS, en reprenant certains articles, éventuellement plus développés ; mais il comprend aussi de nouveaux articles. Tous les ouvrages sont richement illustrés. Les TB forment, d'après la publicité, une « collection de prestige de culture mathématique, la plus belle du monde, pour tous ceux qui ont une curiosité scientifique. Elle propose une nouvelle façon de découvrir le monde sous l'angle des mathématiques ».

Depuis près de 20 ans, j'écris des articles pour ces différentes publications, en moyenne quasiment 20 fois par an, et en collaboration dans environ 40 % des cas. Plus précisément, le tableau suivant résume ma contribution chez *Tangente*⁹³ ; les nombres principaux indiquent combien d'articles publiés ; ceux inscrits entre parenthèses se réfèrent aux nombres d'articles rédigés avec des coauteurs.

T (Tangente)	TE (Tang. Educ)	TS (Tang. Sup)	THS (Tang. HS)	TB (Tang. Bib)
56 (13)	1 (1)	15 (9)	60 (27)	68 (30)

Mes coauteurs éventuels sont nombreux ; ils sont essentiellement belges. Voici leur liste, ordonnée par ordre alphabétique ; les nombres inscrits entre parenthèses indiquent combien de fois j'ai publié une note écrite en collaboration avec l'auteur considéré.

- ✓ Adelin ALBERT (11 fois) ;
- ✓ Annette COOLEN (2 fois) ;
- ✓ Yves CRAMA (1 fois) ;
- ✓ Gentiane HAESBROECK (3 fois) ;
- ✓ Valérie HENRY (18 fois) ;
- ✓ Benoit JADIN (1 fois) ;
- ✓ Daniel JUSTENS (29 fois) ;
- ✓ Joëlle LAMON (4 fois) ;
- ✓ Jean MAWHIN (2 fois) ;
- ✓ Jacques NAVEZ (1 fois) ;
- ✓ André PETRY (2 fois) ;
- ✓ Vanessa ROSSO (1 fois).

⁹³ Les données sont recensées au moment de rédiger ces lignes.

Les publications de *Tangente* se composent de plusieurs dossiers, indépendants les uns des autres pour la revue T et portant sur un même sujet pour un HS (THS ou TB). Les thèmes abordés sont déterminés par la Direction (G. Cohen, H. Lehning, B. Hauchecorne et M. Brilleaud selon les époques et les circonstances) en concertation avec le Comité de rédaction (CR en abrégé) ; le contenu des articles est publié sous la responsabilité d'un coordinateur (variable selon les numéros) travaillant de concert avec le Secrétaire de Rédaction (actuellement, et depuis longtemps déjà, E. Thomas) ou la Direction.

Tous les thèmes sur lesquels j'ai écrit m'étaient familiers. J'avais l'impression que je pouvais faire connaître, de manière accessible à un vaste public, des idées qui m'étaient relativement personnelles et assez peu courantes. J'en ai proposé quelques-uns ; j'ai même coordonné certains dossiers en collaboration avec V. Henry ou aider D. Justens à le faire ; nous avons tous trois la même conception des sujets traités.

Voici un aperçu (non exhaustif⁹⁴) de quelques thématiques que j'ai abordées en liaison avec mes activités professionnelles d'enseignant-chercheur ou mes centres d'intérêt.

- **Sports.** Comme signalé ci-dessus, mes premières contributions dans *Tangente* l'ont été, en 2004, dans les deux Hors Série « *Maths & Sport. Peut-on mettre le sport en équations* » (THS 19) et « *Maths & Sports. Le sport en équations* » (TB 19). Ces deux publications contenaient un article dans lesquels je donnais deux modèles mathématiques relatifs au service de Justine Henin⁹⁵. Dans la version Bibliothèque correspondante, j'avais aussi rédigé une note sur un choix stratégique pouvant se poser à un joueur de squash. Depuis lors, j'ai publié à l'occasion d'autres articles relatifs au tennis⁹⁶ qui est ma plus grande passion en dehors des mathématiques.

- **Recherche opérationnelle.** Mes premières expériences de publications dans *Tangente* m'ont révélé toutes les potentialités qui allaient s'ouvrir à moi si j'écrivais des articles pour la revue : je pouvais ainsi diffuser mes idées vers un large public en bénéficiant de l'expertise d'une équipe rédactionnelle professionnelle.

J'ai donc rédigé des articles, souvent en collaboration avec V. Henry, qui sont parus à cette époque initiale principalement dans TS parce que le niveau de nos écrits convenait bien pour cette revue et aussi parce que nous étions tout à fait sur le même longueur d'onde que le rédacteur en chef H. Lehning⁹⁷.

En 2009, la Direction de *Tangente* nous a confié, à V. Henry et à moi, la coordination d'un dossier sur la Recherche Opérationnelle (RO en abrégé) pour le numéro de janvier-février, soit le T 126.

Ce sujet était assez récent puisqu'il est né et s'est développé durant la seconde moitié du siècle précédent. Il fut introduit à l'Université de Liège à la fin des années 1960, simultanément et indépendamment par l'entrée dans le corps académique de la Faculté

⁹⁴ Une vision complète de mes contributions dans *Tangente* peut être obtenue en consultant les titres de mes publications figurant dans la première annexe ou en effectuant une recherche sur la base de ressources pour l'enseignement des mathématiques *Publimath* (à l'adresse électronique : Publimath.univ-irem.fr).

⁹⁵ Justine Henin était à l'époque la meilleure tennismoman du monde et j'appréciais, énormément et depuis longtemps, sa technique, ses performances ainsi que sa personnalité.

⁹⁶ Notamment dans un dossier sur « *Les maths du sport* » paru dans T 168.

⁹⁷ Voir la page, écrite en collaboration avec D. Justens, intitulée « *Hervé Lehning (1948-2022). Un "honnête homme", éclectique et généreux* » (dans T 208, 2022, p. 5). Une étude approfondie est parue sous le titre « *Hervé Lehning : l'homme aux mille publications* », par D. Justens et E. Thomas, dans T 210, 2023, pp. 8-11.

de Droit des chercheurs opérationnels Christian De Bruyn et Marc Roubens et par un cours facultatif donné aux mathématiciens, par F. Jongmans, et consacré aux bases mathématiques de la RO ; j'avais suivi ce cours en tant qu'élève-libre.

Ce thème m'intéressait car le contenu de ce dernier cours faisait partie de ma charge d'enseignement qui comprenait notamment l'analyse, l'algèbre linéaire et la théorie des graphes. Je présentais également à mes étudiants quelques applications concrètes, simples et frappantes, de ces théories dans le domaine du management.

La RO n'avait pratiquement jamais été traitée dans *Tangente*, de sorte que V. Henry et moi avons accepté la requête de la Direction de la revue et confectionné un dossier avec l'appui de quelques compatriotes spécialisés dans cette matière, notamment avec Y. Crama.

A partir de cette époque, j'ai fait partie du CR. A l'heure où j'écris ces lignes, j'en suis encore membre.

Ce dossier paru dans T 126 a été par la suite rafraîchi et complété par un hors-série entièrement consacré à la RO (THS 75, TB 75).

- **Mathématiciens belges.** A la même époque, les numéros de *Tangente* réservaient un dossier entier consacré aux mathématiques et mathématiciens d'un pays particulier. Le numéro de septembre-octobre de cette même année, le T 130, comportait un grand dossier (de 22 pages, ce qui était plus volumineux que de coutume) intitulé « *Belgique, terre de mathématiciens* ». Je fus invité à le coordonner, toujours en collaboration avec V. Henry. Nous avons fait appel à différents auteurs belges compétents pour évoquer avec nous la vie ou l'œuvre de mathématiciens marquants issus du pays. Nous présentons de nombreux mathématiciens anciens ou modernes, à savoir par ordre alphabétique : J. Bourgain, E. Catalan, G. Cuisenaire, I. Daubechies, C.-J. de la Vallée Poussin, P. Deligne, G. de Saint-Vincent, R.-F. de Sluse, M. Kraitchik, G. Lemaître, G. Mercator, D. Ruelle, J. Tits.

A propos de mathématiciens belges, signalons encore, en guise de clin d'oeil, que *Tangente* a publié deux photos (dans TB 72 et T 204) de F. Jongmans qui fut mon Maître (voir section 3).

- **Notices biographiques.** Mon double attrait pour l'histoire et la didactique des mathématiques m'a conduit maintes fois à m'intéresser à la vie et à l'œuvre de mathématiciens non belges du siècle précédent ou du 21^{ème} siècle. En effet, quand on présente ou veut prendre connaissance d'une théorie nouvelle, il peut être fructueux d'être au courant du contexte dans lequel celle-ci a été construite et, partant, de connaître à tout le moins quelques éléments biographiques sur les auteurs : le parcours des savants peut être inspirant.

Dans le cadre de mes activités de vulgarisation, j'ai fréquemment rédigé de courtes biographies ; cette pratique est d'ailleurs courante dans les diverses revues de *Tangente* : on y trouve régulièrement des notices biographiques, souvent sous la forme d'encadrés.

Parmi les auteurs ainsi traités, épinglons-en ⁹⁸ quelques-uns dont la vie et l'œuvre ont été approfondies dans un article plus détaillé paru dans la revue *Losanges* (Erdős,

⁹⁸ Les références complètes peuvent être trouvées dans l'annexe 1.

Polya, Tao), au sein d'un *working paper* déposé sur le site *Orbi* (Antibi, Klee, Gowers) ou dans une biographie rédigée pour l'*Universalis Encyclopaedia* (Lakatos).

- **Analyse non standard.** Les lecteurs de *Tangente* (précisément de T, TS, THS et TB) ont eu l'occasion de lire, au fil des ans, certains de mes articles, rédigés avec V. Henry, sur l'Analyse Non Standard (ANS en abrégé) selon l'approche de Robinson ou celle de Keisler (voir la section 5).

En fait, j'ai profité de chaque opportunité offerte par la revue pour présenter cette théorie qui était, selon moi, trop peu connue en France. C'est ainsi que pas mal d'articles ont été publiés de façon isolée dans divers magazines.

A titre d'exemples, citons une distinction entre les infinis actuel et potentiel (TB38) ou encore entre l'analyse classique et l'ANS (THS 51), différents articles sur l'utilisation des infiniment petits en économie (T 156) ou en physique (THS 69, TB 69), sur les angles corniculaires pour illustrer le concept d'infiniment petit (TS 31, THS 53, TB 53), sur l'usage de microscopes virtuels infiniment puissants (TS 46) ou de loupes (THS 84), sur les infiniment grands (T 155), sur les touchantes⁹⁹ (TS 54), sur la dérivation en ANS (T 183), sur les infiniment petits nilpotents (THS 49).

- **Biologie.** Durant ma scolarité, ma formation en biologie fut vraiment squelettique, de sorte que cette science n'a guère retenu mon attention durant une bonne partie de ma carrière. Mais en 2011, je fus amené à m'y intéresser intensément car *Tangente* proposait de réaliser un Hors Série qui fut intitulé « *Mathématiques et biologie. L'organisation du vivant* » (TB 46).

C'est Daniel Justens qui en assura la direction, car cette discipline fait partie de ses multiples centres d'intérêt ; il y excelle. Comme je travaillais souvent avec lui, je décidais de l'aider dans cette tâche et je me documentais sur le sujet.

J'ai rédigé plusieurs articles dans ce numéro. Celui-ci a été le support écrit d'un colloque que D. Justens a organisé à Bruxelles et j'y donnais un exposé sur le mouvement brownien. Cette organisation fut de haute tenue et m'a laissé un souvenir grandiose.

- **Esthétique, éthique.** En 2014, les éditions ont publié Pôle le 51^{ème} Hors-Série intitulé « *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique. Une dimension insoupçonnée* ».

Cet ouvrage a été coordonné par D. Justens. Il contient quatre dossiers :

- « *La beauté des mathématiques* ». On y trouve notamment des articles rédigés par des mathématiciens aussi réputés que C. Villani et J. Mawhin, ainsi qu'un de mes textes sur « *les bonnes mathématiques' selon Terence Tao* ».
- « *La beauté artistique révélée par les maths* ». J'y ai particulièrement apprécié l'article intitulé « *Esthétique photographique, moyenne et médiane statistiques* » par G. Haesbroeck ; l'auteur m'a réservé la surprise d'illustrer ses propos à l'aide de certains de mes portraits.
- « *Ethique et mathématiques* », avec principalement des articles rédigés par des auteurs qui me sont proches, à savoir D. Justens, G. Cohen, H. Lehning, J. Navez, P. Langenaken, A. Antibi et P. Delfosse.
- « *Eclectique Jacques Bair* ». Ce dossier est introduit par G. Cohen de la façon humoristique suivante : « *Esthétique, éthique et accessoirement analyse non standard*

⁹⁹ Ancienne appellation des tangentes.

font partie des préoccupations dominantes de Jacques Bair : ce sont ses tics. A l'occasion de son départ à la retraite de l'université de Liège (on dit 'en pension ' là-bas), *Tangente* a souhaité marquer sa reconnaissance pour le travail qu'il a accompli en publiant une édition limitée de ce hors-série contenant 16 pages liées à Jacques Bair. Nos lecteurs pourront se la procurer sur le site www.infinimath.com. » (TB 51, p. 5).

Cet hommage exceptionnel, que j'ai apprécié à sa juste valeur, fut couronné par une après-midi organisée (toujours par D. Justens) en mon honneur à la Haute Ecole Francisco Ferrer de Bruxelles, le 14 mars 2014. On a pu y entendre des exposés de G. Cohen, P. Delfosse, G. De Meur, V. Henry, H. Lehning et J. Mawhin.

Un immense merci à tous les auteurs intervenant dans ce THS et aux conférenciers en question.

- **Psychologie.** Tout enseignant-chercheur en mathématiques devrait, à mon avis, s'intéresser de près à la métacognition afin de devenir plus efficace dans ses propres recherches et pour rendre plus performants ses étudiants. C'est en tout cas ce que j'ai compris en donnant des cours de didactique à la FOPED de Luxembourg (voir ci-dessus).

J'ai tenu à faire connaître ce point en rédigeant, dans un dossier « *Maths et psychologie* » paru dans T 159, des articles de vulgarisation sur la façon dont certains illustres mathématiciens (à savoir H. Poincaré et T. Tao) travaillent, ainsi que sur « le rôle du psychologique dans la résolution de problèmes ».

- **Médecine.** Fin 2006, les éditions Pôle publièrent un 58^{ème} Hors-Série avec pour titre « *Mathématiques et Médecine. Les maths au service de notre santé* » (THS 58, TB 58). B. Hauchecorne en fut le rédacteur en chef.

Dès l'annonce de cet ouvrage, nous nous sommes concertés à trois : Adelin Albert, Daniel Justens et moi. Nous avons décidé de travailler sur ce sujet assez peu courant, intéressant potentiellement tout le monde et pour lequel nous pourrions présenter à un large public des mathématiques concrètes et utiles, avec notamment de nombreuses applications de la statistique et des probabilités, théories pour lesquelles mes deux 'fidèles complices' sont experts ; en particulier, nous avons décidé que les passages sur la santé seraient supervisés par Adelin Albert qui a présidé l'Ecole de la Santé de l'Université de Liège.

Cette occasion paraissait unique pour réaliser un travail utile pour les lecteurs et agréable pour les auteurs qui se connaissent et s'apprécient depuis longtemps. A nous trois, nous avons rédigé plus du quart de ce HS (qui comporte 156 pages).

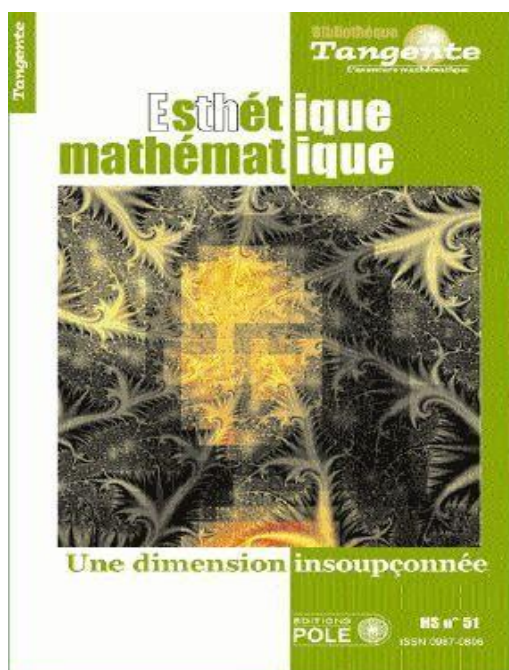
- **Economie.** Comme je l'ai mentionné ci-avant, la plupart des étudiants à qui j'ai enseigné projetaient de devenir économistes ou gestionnaires, de sorte que je me suis très vite spécialisé dans la recherche d'applications variées des mathématiques à l'économie et à la gestion ; par ailleurs, j'ai eu la chance de rencontrer très tôt Daniel Justens qui partageait cette même préoccupation et nous avons rédigé pas mal de documents ensemble (voir ci-avant). Nous étions, je crois, des sortes de pionniers dans ce domaine, en Belgique mais aussi au Luxembourg et en France où les applications des mathématiques étaient, jusqu'il y a peu, assez peu présentes.

Depuis longtemps, *Tangente* a proposé de façon éparsée des sujets concernant l'économie (au sens large) et la rédaction des articles correspondants a souvent été

assurée par D. Justens et moi: sur ce point, nous étions clairement plus spécialisés que nos collègues français.

Ce n'est qu'en 2018, que la Direction de la revue a prévu de consacrer tout un Hors-Série sur l'économie. Il s'intitula « *Mathématiques et économie. Une vision scientifique de l'économie* » THS 62, TB 62). Cet ouvrage, comprenant 168 pages, fut coordonné par D. Justens en concertation avec moi. A nous deux, nous avons produit 50 pages, en demandant en plus la collaboration d'auteurs belges qui nous étaient très proches, à savoir A. Coolen, L. Esch, P. Devolder, M. Fonder, G. Haesbroeck, L. Honorez, F. Vaguener. Au total, plus de la moitié de l'ouvrage fut rédigé par des auteurs belges de notre entourage immédiat.

Le HS abordait aussi bien la microéconomie que la macroéconomie ; mais il traitait aussi des liens entre l'économie et les mathématiques avec des dossiers sur « Le triangle économie, mathématiques et politique », ou encore sur « des rencontres entre économie et mathématiques » ; il s'attardait également sur la place importante de la statistique en économie. Plus particulièrement, il présentait encore une touche de didactique avec un article sur le décalage interdisciplinaire existant avec les deux sciences et lançait un appel pour une meilleure « coordination entre économistes et mathématiciens », ainsi qu'une autre touche plutôt historique avec une note sur Cournot, qui a introduit l'analyse mathématique en économie, ainsi qu'une « saga des prix Nobel » en économie reçus par des mathématiciens.



- **Optimisation.** Les principes fondamentaux de l'analyse mathématique peuvent s'exprimer en termes de programmation mathématique, c'est-à-dire d'optimisation, puisque « Les économistes essaient de choisir parmi les utilisations alternatives de ressources rares de manière à faire l'usage le plus efficace (ou le moins gaspilleur) des

ressources pour atteindre les objectifs fixés »¹⁰⁰. Exprimé de cette façon, nous voyons clairement que l'économie implique l'optimisation et que c'est le moteur qui produit les principes de l'analyse économique.

Je me suis donc tout naturellement intéressé en profondeur à l'optimisation non seulement pour approfondir la matière que j'enseignais, et aussi en vue de mes recherches (car la géométrie convexe admet des applications en optimisation) mais aussi parce que ma leçon publique pour l'obtention de mon diplôme AES avait pour sujet les multiplicateurs de Lagrange dans la recherche des extrema d'une fonction sous contraintes.

Bien sûr, depuis qu'elles existent, les publications de *Tangente* proposaient aux lecteurs des articles relatifs à la théorie de l'optimisation ou à certaines de ses applications. Mais il fallut attendre en 2019, avec le THS 72, pour qu'un numéro spécifique complet porte le titre « *Maximum Minimum Optimum* ». Son rédacteur en chef était Benoît Rittaud ; il comportait 56 pages, dont 10 rédigées par le « duo » Bair-Justens.

Une année plus tard parut le TB 75 ; c'était une version augmentée du THS 75. Il était coordonné conjointement par D. Justens et moi qui avions pris le relais de B. Rittaud au pied levé ; nous étions tous les deux les auteurs d'une cinquantaine de pages, le livre en comptant cette fois 154. Une dizaine de mathématiciens français y collaboraient.

- **Mathématiques collaboratives.** Au cours de ma carrière, j'ai pu observer une évolution dans la façon de travailler des mathématiciens. Désormais, depuis le développement de l'informatique et des moyens de communication modernes, la collaboration entre scientifiques s'est fortement développée.

Partant de ce constat, j'ai proposé à la Direction de *Tangente* de s'intéresser aux « mathématiques collaboratives ».

Un dossier sur ce sujet est effectivement paru dans T 197 (décembre 2020 – janvier 2021). Il comporte 16 pages, dont près de la moitié écrites par moi.

Le texte d'introduction du dossier présente parfaitement le sujet qui me semble intéressant d'un point de vue épistémologique. En voici un extrait : « Depuis moins d'un siècle, les pratiques [des mathématiciens] ont été bouleversées. Aux chercheurs isolés d'autrefois se substituent de plus en plus des équipes aux compétences variées, permettant de nouvelles approches efficaces. Une recherche massive de résultats est, de plus, rendue possible par Internet et les outils de communication instantanée.

Paul Erdős fut un des pionniers de ce mouvement dont le génial mathématicien Tim Gowers est aujourd'hui l'un des moteurs.

Mais le partage des connaissances se fait aussi avec le grand public, grâce à une démarche de vulgarisation et la volonté de permettre le libre accès aux articles de recherche. Des logiciels libres collaboratifs voient le jour, tout comme des sites à auteurs multiples comme Wikipédia. Le partage des savoirs à grande échelle : les Anciens en rêvaient, notre époque le met en place ! » (T 197, p. 13)

¹⁰⁰ Traduction (par *deepl translator*) d'un extrait de « *The Role of Mathematics in Economics* » par L.R. Klein, prix Nobel d'Economie en 1980. Dans « *The Mathematical Sciences : a Collection of Essays* », the M.I.T. Press, 1969, p. 162.

- **Convexité.** Jusqu'il y a peu, je n'avais jamais eu l'occasion d'aborder le thème de mes recherches principales dans mes articles de vulgarisation. Elles concernent effectivement un sujet assez pointu, étudié par une poignée de spécialistes ; l'exposé en devient vite technique.

Mais récemment Bertrand Hauchecorne a suggéré au CR de *Tangente* d'aborder le thème de la convexité. Cette proposition a été acceptée ; la plupart des collègues français assistant à la réunion en question pensaient essentiellement, je crois, aux fonctions convexes. Je défendis l'idée qu'à côté du volet fonctionnel existait un courant géométrique qui méritait d'être traité.

Il fut décidé de construire un dossier (de 16 pages) sur la convexité dans le T 204 de mars-avril 2022. La coordination m'en fut confiée.

B. Hauchecorne s'occupa de la partie analytique sur les fonctions convexes, tandis que je pris en charge l'aspect géométrique avec l'aide de D. Justens pour des applications à la microéconomie.

Pour la première fois de ma carrière, je présentais à un public de non spécialistes l'objet de mes recherches géométriques en essayant de donner une idée intuitive et simple de problèmes étudiés et de résultats obtenus. Je réussis à y placer une photo réunissant mes deux Maîtres, F. Jongmans (à droite sur la photo ci-après) et V. Klee, (à gauche sur cette même photo) ; tous deux méritent à mon avis d'être mieux connus. Limité par la place accordée à mes articles dans T 204, je complétais mes contributions par un article additionnel de vulgarisation (déposé sur le site Orbi de l'Université de Liège ¹⁰¹) au sein duquel je présentais notamment l'Ecole Liégeoise de convexité, dirigée par F. Jongmans, ainsi que l'influence décisive qu'y exerça le mathématicien américain Victor Klee.



Via mes articles publiés dans les différentes productions de *Tangente*, j'ai donc réussi à transmettre, de façon vulgarisée, mes idées sur la plupart des sujets sur lesquels j'avais travaillé tout au long de ma vie professionnelle. J'estime dès lors que « la boucle de ma carrière n'est pas mal bouclée » !

¹⁰¹ Voir mon article « *Sur la convexité dans le sillage de V. Klee* », Orbi de ULiège, 2022, op. cit.

Annexe 1: Liste des publications scientifiques

1. Thèses et mémoires

- 1) *Différents types de séparation d'ensembles convexes*, mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de licencié en sciences mathématiques, 1970.
- 2) *Séparation d'ensembles dans un espace vectoriel*, dissertation présentée en vue de l'obtention du diplôme de docteur en sciences mathématiques, 1974.
- 3) *Structure asymptotique et propriétés de séparation en géométrie convexe*, dissertation présentée en vue de l'obtention du grade d'agrégé de l'enseignement supérieur, 1984.

2. Livres

- 1) *Etude géométrique des espaces vectoriels – une introduction*, en collaboration avec R. Fourneau, Lecture Notes in Mathematics, vol. 489, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.
- 2) *Etude géométrique des espaces vectoriels II – les polyèdres et polytopes convexes*, en collaboration avec R. Fourneau, Lecture Notes in Mathematics, vol. 802, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1980
- 3) *Mathématiques générales*, Editions De Boeck Université, Bruxelles, 1988, 254 pages.
- 4) *Applications économiques au service de la mathématique*, en collaboration avec R. Hinnion et D. Justens, Editions de la Société Belge des Professeurs de Mathématique, 1989, 139 pages.
- 5) *Mathématiques générales : 320 exercices, 380 problèmes avec leurs solutions, 160 tableaux* 2ème édition, Editions Universitaires et De Boeck Université, Paris-Bruxelles, 1990, 264 pages.
- 6) *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales*, Editions Universitaires et De Boeck Université, Paris-Bruxelles, 1990, 186 pages.
- 7) *Mathématiques générales, problèmes résolus* (en collaboration avec G. Hamende), Editions De Boeck Université, Bruxelles, 1992, 236 pages.
- 8) *Mathématiques et sports*, Editions de la Société Belge des Professeurs de Mathématique, 1992, 114 pages.
- 9) *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et AES*, Editions De Boeck Université, Bruxelles, 1993, 425 pages.
- 10) *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales*, Editions Universitaires et De Boeck Université, 2ème édition, Bruxelles, 1994, 187 pages.
- 11) *Théorie des graphes pour gestionnaires*, Editions Point de Vue, Liège, 1995, 148 pages.
- 12) *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, en collaboration avec G. & J.J. Haesbroeck, Editions De Boeck Université, Bruxelles, 2000, 204 pages.
- 13) *Applications pédagogiques de la mathématique financière*, en collaboration avec D. Justens, S. Maron & J. Rosoux, Editions Luc Pire et Ferrer, Bruxelles, 2001, 198 pages.
- 14) *Regards croisés sur les méthodes quantitatives en gestion*, en collaboration avec V. Henry, Editions de l'Université de Liège, 2004, 350 pages.

- 15) *Contributions à la didactique de la statistique*, en collaboration avec V. Henry, Editions de l'Université de Liège, 2005, 130 pages.
- 16) *Narrations de recherche : de la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur*, en collaboration avec J.C. Delagardelle et V. Henry, Commission pédagogique de la SBPMef, 2006, 148 pages.
- 17) *Modèles mathématiques : du réel au concret en passant par l'abstrait*, en collaboration avec D. Justens et V. Henry, Editions Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, 2006, 244 pages.
- 18) *Situations concrètes exploitant des barycentres*, en collaboration avec V. Henry, Commission pédagogique de la SBPMef, 2008, 62 pages.
- 19) *Analyse infinitésimale : le calculus redécouvert*, en collaboration avec V. Henry, Academia Bruylant, Louvain-la-Neuve, 2008, 192 pages.
- 20) *Modèles mathématiques en gestion*, en collaboration avec Y. Crama, V. Henry et D. Justens, Editions Cassini et Pole, Paris, 2011, 297 pages.
- 21) *Deux siècles de statistique à l'Université de Liège*, Presses Universitaires de Liège, 2018.
- 22) *Algèbre linéaire appliquée pour l'économie et les sciences sociales*, en collaboration avec D. Justens, éditions De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve, 2020, 240 pages.

3. Chapitres de livres

- 1) Les formations à horaire décalé et les formations complémentaires en économie et en gestion à l'Université de Liège, dans *L'économie, la gestion et les sciences sociales à l'Université de Liège : 100 ans*, ouvrage édité à l'occasion du centenaire de la création des enseignements de sciences sociales et de gestion à l'Université de Liège, éditions de la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, 1996, pp. 176 – 185.
- 2) Innovations en mathématiques, *Regards croisés sur les méthodes quantitatives de gestion*, Les éditions de l'Université de Liège, 2004, pp. 19-40.
- 3) Choix stratégique en squash, *Peut-on mettre le sport en équations ?*, Hors Série n° 19, Bibliothèque Tangente, éditions Pole, Paris, 2004, pp. 62 – 64.
- 4) Les services de Justine : deux modèles mathématiques, *Peut-on mettre le sport en équations ?*, Hors Série n° 19, Bibliothèque Tangente, éditions Pole, Paris, 2004, pp. 42-45.
- 5) Joindre l'utile à l'agréable en mathématiques : la théorie des graphes, en collaboration avec V. Henry, *Mathématiques amusantes*, publication des cahiers de l'IREM de Bruxelles, n° 2, éditions du Céfal, 2005, pp. 25-44.
- 6) Quel est le taux effectif d'un emprunt ? *Les équations algébriques*, Hors Série n° 22, Bibliothèque Tangente, éditions Pole, Paris, 2005, pp. 96 – 99.
- 7) Compétences et objectifs visés par les cours de statistique, *Contributions à la didactique de la statistique*, en hommage au Professeur Léopold Bragard, Les éditions de l'Université de Liège, 2005, pp. 67 – 76.
- 8) Deux présentations d'une propriété métrique de la médiane, *Contributions à la didactique de la statistique*, en hommage au Professeur Léopold Bragard, Les éditions de l'Université de Liège, 2005, pp. 85 – 95.

- 9) Joindre l'utile à l'amusant : la théorie des graphes, en collaboration avec V. Henry, *Mathématiques amusantes*, coédition Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, 2005, pp. 25 – 44.
- 10) Géométrie tennistique, *Mathématiques sportives*, Les cahiers de l'IREM de Bruxelles, n° 4, éditions Ferrer et du Céfal, Bruxelles – Liège, 2007, pp. 9 – 22.
- 11) Modèles et données dans l'univers économique, en collaboration avec Y. Crama, *Attentes d'un modèle, entre réalité du terrain et contraintes mathématiques*, Editions du Céfal et Ferrer, Liège et Bruxelles, 2008, pp. 45 – 61.
- 12) De Thalès à Black et Scholes : petite étude épistémologique sur les options en finance, en collaboration avec D. Justens, *Attentes d'un modèle, entre réalité du terrain et contraintes mathématiques*, Editions du Céfal et Ferrer, Liège et Bruxelles, 2008, pp. 63 – 84.
- 13) Translater, c'est quarrer ! *Les transformations de la géométrie à l'art*, Bibliothèque Tangente HS n°35, éditions Pôle, Paris, 2009, pp. 100 – 103.
- 14) L'algorithme du simplexe, en collaboration avec V. Henry, *Les algorithmes au cœur du raisonnement*, Bibliothèque Tangente HS n° 37, Editions Pole, Paris, 2009, pp. 90 – 94.
- 15) L'algorithme de Sluse, en collaboration avec V. Henry, *Les algorithmes au cœur du raisonnement*, Bibliothèque Tangente HS n° 37, Editions Pole, Paris, 2009, p. 95.
- 16) La réalité en maths et en physique, *Mathématiques et philosophie : en quête de vérités*, Bibliothèque Tangente HS n° 38, Editions Pôle, Paris, 2010, pp. 92 – 97.
- 17) Infinis actuel et potentiel, en collaboration avec V. Henry, *Mathématiques et philosophie : en quête de vérités*, Bibliothèque Tangente HS n° 38, Editions Pôle, Paris, 2010, pp. 114 - 119.
- 18) Le calcul booléen en gestion, une application en gestion, *Mathématiques discrètes et combinatoire*, Bibliothèque Tangente HS n° 39, Editions Pôle, Paris, 2010, pp. 66 – 68.
- 19) La programmation en nombres entiers, *Mathématiques discrètes et combinatoire*, Bibliothèque Tangente HS n° 39, Editions Pôle, Paris, 2010, pp. 76 – 79.
- 20) Le chemin du randonneur, en collaboration avec J. Navez, *Tangente Hors-série n° 40 : Mathématique et géographie*, 2011, pp. 44 – 47.
- 21) Autour de l'équation de Verhulst, en collaboration avec J. Mawhin, *Tangente Hors-série n° 40 : Mathématique et géographie*, 2011, pp. 124 – 127.
- 22) Les infiniment petits selon Fermat : prémisses de la notion de dérivée, en collaboration avec V. Henry, *Regards sur les textes fondateurs de la science, Volume I, de l'écriture au calcul – théorie des nombres*, sous la direction de A. MOATTI, Editions Cassini. Paris, 2010, pp. 35 – 44.

4. Articles dans des revues belges

- 1) Ensembles à différence convexe, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 39, 1970, pp. 555-557.
- 2) Séparation franche dans un espace vectoriel, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 39, 1970, pp. 474-477.
- 3) Ensembles lisses et strictement convexes, en collaboration avec A. Dessard, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 39, 1970, pp. 558-566.
- 4) Nouvelles propriétés des opérateurs algébriques dans un espace vectoriel, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 40, 1971, pp. 214-223.

- 5) Cônes asymptotes et cônes caractéristiques, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 40, 1971, pp. 428-437.
- 6) Sur un théorème de séparation de M. Vlach, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 1972, pp. 11-13.
- 7) Séparation forte d'une famille finie d'ensembles convexes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 1972, pp. 14-19.
- 8) La séparation vraie dans un espace vectoriel, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 1972, pp. 163-170.
- 9) Cônes associés à un ensemble et pseudo-cônes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 1972, pp. 171-178.
- 10) Sur la séparation de familles finies d'ensembles convexes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 1972, pp. 281-291.
- 11) Sur les partitions convexes dans un espace vectoriel, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 42, 1973, pp. 23-30.
- 12) Partitions ternaires proprement convexes d'un espace vectoriel, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 42, 1973, pp. 95-103.
- 13) Quelques précisions sur la notion d'internat, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 42, 1973, pp. 93-94.
- 14) Sur la nature de l'attenance des éléments d'une partition convexe, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 42, 1973, pp. 402-407.
- 15) Quelques compléments sur les partitions convexes finies d'un espace vectoriel, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 43, 1974, pp. 20-25.
- 16) De frictions internes en incidents de frontière, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 63-71.
- 17) Propriétés du lattis des ensembles linéaires dans un espace à convexité, en collaboration avec A. Dessard, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 202-208.
- 18) De l'art d'ériger sans péril des séparations branlantes, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 354-362.
- 19) Une mise au point sur la décomposition des convexes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 698-705.
- 20) Généralisation de la version géométrique du théorème de Hahn-Banach, en collaboration avec R. Moors, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 555-557.
- 21) Avatars et prospérité du théorème de Hahn-Banach, en collaboration avec F. Jongmans et J. Vangeldère, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 44, 1975, pp. 562-568.
- 22) Extension du théorème de Straszewicz, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 45, 1976, pp. 166-168.
- 23) Caractérisation de polyèdres convexes et systèmes d'inéquations linéaires, en collaboration avec R. Fourneau, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 45, 1976, pp. 175-182.
- 24) Une étude des sommants d'un polyèdre convexe, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 45, 1976, pp. 307-311.

- 25) Sur les graves questions qui naissent quand la décomposition des ensembles atteint un stade avancé, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 12-26.
- 26) Vers la domestication de l'extrémisme, en collaboration avec R. Fourneau et F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 126-132.
- 27) Décomposition d'un convexe à l'aide de certains de ses dilatés, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 167-171.
- 28) On the strong separation of families of convex sets, en collaboration avec J. Gwinner, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 224-226.
- 29) A geometric version of the Hahn-Banach Theorem, en collaboration avec K.H. Elster et R. Nehse, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 227-233.
- 30) On the convex programming problem in an ordered vector space, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 46, 1977, pp. 234-240.
- 31) A propos des points extrêmes de la somme de deux ensembles convexes, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 48, 1979, pp. 262-264.
- 32) Strict separation of several convex sets, *Bull. Soc. Math. Belgique*, XXXII, 1980, pp. 135-148.
- 33) Equivalences entre la séparation de plusieurs ensembles et la séparation de certains produits d'ensembles, en collaboration avec J. Vangeldère, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 50, 1981, pp. 153-160.
- 34) Du bon usage des cônes dans l'aménagement de la tour de Babel, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 51, 1982, pp. 74-81.
- 35) Liens entre le cône d'ouverture interne et l'intérieur du cône asymptotique d'un convexe, *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XXXV, 1983, pp. 177-187.
- 36) Relations entre l'enveloppe conique, le cône d'infinitude et la gaine d'un ensemble convexe, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 52, 1983, pp. 17-21.
- 37) Sur l'énigme de l'enveloppe conique fermée, en collaboration avec F. Jongmans, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 52, 1983, pp. 285-294.
- 38) Critères de fermeture pour l'enveloppe convexe d'une réunion, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 52, 1983, pp. 72-79.
- 39) Classification des formes quadratiques sous contraintes linéaires, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 55, 1986, pp. 339-345.
- 40) La notion d'élasticité explique l'influence des variations de prix sur le revenu brut de la vente d'un bien, *Mathématique et Pédagogie*, 64, 1987, pp. 21-24.
- 41) Parenté entre les propriétés d'intersection, de position générale et de séparation en géométrie convexe, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 56, 1987, pp. 71-80.
- 42) Une technique pour estimer l'aire d'une région microscopique plane, en collaboration avec P. Goossens, *Mathématique et Pédagogie*, 64, 1987, pp. 79-82.
- 43) Un aperçu de l'usage du calcul matriciel dans les sciences humaines, *Comptes rendus des journées FOPEMA*, Namur, 1987.
- 44) Mathématique et gestion, *Ingénieur et Industrie*, 4, 1988, pp. 121-124.

- 45) Exemples d'utilisation du calcul intégral en économie, *Mathématique et Pédagogie*, 69, 1988, pp. 37-45.
- 46) A propos du théorème d'insouciance, *Mathématique et Pédagogie*, 72, 1989; pp. 65-67.
- 47) Algèbre de Boole : théorie et applications, *Mathématique et Pédagogie*, 74, 1989, pp. 39-46.
- 48) Les mathématiques au service de l'économie et de la gestion, in *Enseigner les sciences en l'an 2000*, Presses Universitaires de Namur, 1989, pp. 139-142.
- 49) Méthode graphique pour trouver le maximum du revenu total dans un régime monopolistique, *Mathématique et Pédagogie*, 75, 1990, pp. 35-40.
- 50) Modélisation des préférences et théorème d'Arrow, *Mathématique et Pédagogie*, 79, 1990, pp. 69-80.
- 51) Gestion et programmation multicritère, *Ingénieur et Industrie*, 17, 1990, pp. 69-72.
- 52) Economie et optimisation, *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, t. XLIII, 1991, pp. 245-251.
- 53) Convexes paraboliques et décomposition d'un espace vectoriel, en collaboration avec J.C. Dupin et J.L. Valein, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 60 (2-3), 1991, pp. 91-101.
- 54) Exploitation en géométrie d'une formule algébrique relative à la décomposition de fonctions, en collaboration avec G. Lasters, *Mathématique et Pédagogie*, 84, 1991, pp. 27-33.
- 55) Résolution approchée des équations et applications économiques, *Mathématique et Pédagogie*, 85, 1992, pp. 33-41.
- 56) Applications des nombres de Fibonacci, *Math -Jeunes*, 54, 1992, pp. 22-26.
- 57) Géométrie convexe, *Mathématique et Pédagogie*, 87, 1992, pp. 37-46.
- 58) A propos des problèmes verbaux, en collaboration avec M. Delhaxhe, *Mathématique et Pédagogie*, 92, 1993, pp. 27-39.
- 59) Wiskundige problemen in bedrijfskunde, *Wiskunde en Onderwijs*, 20, 1994, pp. 51-59.
- 60) Wiskunde en sport, *Wiskunde en Onderwijs*, 20, 1994, pp. 273-280.
- 61) Calcul de la durée d'un placement en capitalisation mixte, *Mathématique et Pédagogie*, 94, 1993, pp. 55-59.
- 62) Some properties of the Cobb-Douglas function, with their geometric and economic interpretation, en collaboration avec F. Sart, *Mathématique et Pédagogie*, 104, 1995, pp. 47-58.
- 63) La théorie des graphes : un outil de gestion, *Mathématique et Pédagogie*, 95, 1994, pp. 95-104.
- 64) La méthode du pivotage, en collaboration avec S. Marchand, *Mathématique et Pédagogie*, 97, 1994, pp. 55-67.
- 65) Du taux de chargement annuel réel au taux annuel effectif global, en collaboration avec D. Justens, *Mathématique et Pédagogie*, 101, 1995, pp. 53-63.
- 66) Forme polynomiale de l'inverse d'une matrice carrée, en collaboration avec H. Dujacquier, *Mathématique et Pédagogie*, 102, 1995, pp. 61-71.
- 67) Gaine d'un polyèdre convexe et applications à la séparation, en collaboration avec J.C. Dupin, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 64, 1995, pp. 285-295.

- 68) Variantes autour de la définition des fonctions convexes, en collaboration avec G. Haesbroeck, *Mathématique et Pédagogie*, 105, 1996 pp. 57-70, 106, 1996, pp. 27-41.
- 69) Propriétés différentielles des fonctions convexes, en collaboration avec G. Hansen, *Mathématique et Pédagogie*, 107, 1996, pp. 47-60.
- 70) La dérivée schwarzienne, en collaboration avec G. Haesbroeck, *Mathématique et Pédagogie*, n° 108, 1996, pp. 29-38.
- 71) The infinite shadow of a convex set, en collaboration avec G. Hansen, *Bull. Soc. Roy. Se. Liège*, Vol. 65 (6), 1996, pp. 407-416.
- 72) Monotonous stability for neutral fixed points, en collaboration avec G. Haesbroeck, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, Vol. 4 (5), 1997, pp. 639-646.
- 73) Gaine, cône de récession et séparation forte pour des convexes fermés non bornés, en collaboration avec J.C. Dupin, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, Tome LXVI, 1997, pp. 353-364.
- 74) Modélisation : passage d'un problème réel à un problème mathématique, en collaboration avec G. Haesbroeck, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 418, 1998, pp. 583-590.
- 75) Etude statistique sur la perception des problèmes mathématiques dans l'enseignement, en collaboration avec G. Haesbroeck, Actes du 15e Colloque international de l'AIPU, n° 9714, juillet 1997.
- 76) Interpolation par des fonctions splines, en collaboration avec P. Paquay, *Mathématique et Pédagogie*, 118, 1998, pp. 77-91.
- 77) Etude d'une obligation au moyen de sa duration et de sa convexité, *Mathématique et Pédagogie*, n° 120, 1998, pp. 61-69.
- 78) Equations fonctionnelles et mathématique financière, *Mathématique et Pédagogie*, n° 117, 1998, pp. 49-58.
- 79) Etude d'une obligation au moyen de sa duration et de sa convexité, *Mathématique et Pédagogie*, n° 120, 1998, pp. 61-69.
- 80) Arithmétique sur des ensembles de nombres réels et sur des quantités floues, *Mathématique et Pédagogie*, n° 121, 1998, pp. 46-58.
- 81) L'histoire du mouvement brownien : un exemple de recherches interdisciplinaires, *Mathématique et Pédagogie*, n° 129, 2000, pp. 19-27.
- 82) Exploitation en mathématiques générales de publicités financières, en collaboration avec D. Justens, *Mathématique et Pédagogie*, n° 136, 2002, pp. 25-36.
- 83) Présentation de Madame Gentiane Haesbroeck, Lauréate du Prix Lucien Godeaux, *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, 70 (2), 2002, pp. 78-79.
- 84) De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard, en collaboration avec V. Henry, Les cahiers de la mathématique appliquée, éditions Ferrer – Céfal, Bruxelles – Liège, n° 1, 2003, pp. 51-74.
- 85) De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard : axiomatique et développements récents, en collaboration avec V. Henry, Les cahiers de la mathématique appliquée, éditions Ferrer – Céfal, Bruxelles – Liège, n° 2, 2003, pp. 75-96.
- 86) Situation de la statistique dans l'enseignement secondaire de la Communauté française de Belgique, en collaboration avec A. Albert et G. Haesbroeck, *Cahier de l'IREM de Bruxelles*, n° 1, 2004, pp. 23-35.
- 87) Limites de courbes : théorie et applications en analyse, en collaboration avec A. Antibi et V. Henry, *Mathématique et Pédagogie*, n° 147, 2004, pp. 65-87.

- 88) Didactique des mathématiques et formation tennistique, *Mathématique et Pédagogie*, n° 150, 2005, pp. 5-19.
- 89) Etude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrema, en collaboration avec V. Henry, *Mathématique et Pédagogie*, n° 156, 2006, pp. 49 – 61.
- 90) Les narrations de recherche : des écrits intermédiaires et réflexifs, en collaboration avec V. Henry, *Mathématique et Pédagogie*, n° 158, 2006, pp. 59 – 68.
- 91) Angles corniculaires et nombres superréels, en collaboration avec V. Henry, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, Volume 15, n° 1, 2008, pp. 77 – 86.
- 92) L'exponentielle : une fonction à plusieurs facettes, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, n° 3, 2009, pp. 31 – 37.
- 93) Le concept de fonction au fil du temps, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, n° 5, 2009, pp. 11 – 20.
- 94) Différents registres pour aborder des problèmes économiques, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, n° 6, 2009, pp. 37 – 44.
- 95) Médiation de fractions et paradoxe du barycentre, *Losanges*, n° 8, 2010, pp. 38 – 46.
- 96) Sluse : ses perles et son algorithme, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, 14, 2011, pp. 14 – 18.
- 97) Sur le théorème de Mamikon, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, 12, 2011, pp. 10 – 15.
- 98) Surprenante beauté des mathématiques, *Losanges*, 15, 2011, pp. 7 – 10.
- 99) Cournot, le père de l'économie mathématique, en collaboration avec V. Henry, *Losanges*, 18, 2012, pp. 24 – 32.
- 100) Groupe de Klein, *Losanges*, 18, 2012, pp. 50 – 53.
- 101) Introduction aux équations récurrentes, *Losanges*, 17, 2012, pp. 13 – 22.
- 102) Redécouverte des raisonnements par récurrence, en collaboration avec D. Justens, *Losanges*, 19, 2012, pp. 10 – 17.
- 103) Variations autour du théorème d'al-Kashi, en collaboration avec Jacques Goldsteinas, *Losanges*, 19, 2012, pp. 25 – 33.
- 104) Prix Nobel d'économie et mathématiques, en collaboration avec Gentiane Haesbroeck, *Losanges*, 20, 2013, pp. 43 – 50.
- 105) Pensées (mathématiques) de Tao, *Losanges*, 23, 2013, pp. 33 – 41.
- 106) Le schème de la courbe de niveau tangente, *Losanges*, 24, 2014, pp. 43 – 51.
- 107) Odd-ratios, en collaboration avec Adelin Albert, *Losanges*, 25, 2014, pp. 31 - 34.
- 108) Les mathématiciens ont-ils un sixième sens ? *Losanges*, 26, 2014, pp. 12 – 18.
- 109) A la mémoire du géomètre François Jongmans (1921-2014), *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 11, 2014, 17 pages, <http://www.academieroyale-sciences.be/>.
- 110) Un principe probabiliste de Catalan comme sujet d'enseignement, *Losanges*, 17, 2014, pp. 39 – 47.
- 111) Le théorème 290, *Losanges*, 28, 2015, p. 70.
- 112) La série de Grandi, *Losanges*, 31, 2015, 33 – 37.
- 113) Preuves pour démontrer l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, *Losanges*, 29, 2015, pp. 22 – 29.
- 114) A propos de l'indice de masse corporelle, *Losanges*, 31, 2015, pp. 3 – 7.

- 115) Regard sur des curiosités mathématiques, *Losanges*, 31, 2015, p. 72.
- 116) Tennis et mathématiques : des liens méconnus, *Conjuncte*, Spécial Jubile 1966 – 2016, pp. 66 - 69.
- 117) Les mathématiques : une science comme les autres ? *Conjuncte*, Spécial Jubile 1966 – 2016, pp. 84 – 87 ; version électronique : <http://hdl.handle.net/2268/208723>.
- 118) Tao, le plus grand génie des mathématiques, *Conjuncte*, Spécial Jubile 1966 – 2016, pp. 36 – 37.
- 119) Catalan, un éclectique savant quasi-belge, *Conjuncte*, Spécial Jubile 1966 – 2016, pp. 30 – 31.
- 120) Heuristique et résolution de problèmes, *Conjuncte*, Spécial Jubile 1966 – 2016, pp. 88 – 91.
- 121) En souvenir de la conjecture de la discrédance, *Losanges*, 32, 2016, 19 – 26.
- 122) Sur l'emploi de la lettre x en mathématiques, *Losanges*, 33, 2016, pp. 24 – 33.
- 123) Le mathématicien Jean-Nicolas Noël (1783 – 1867) : un didacticien infinicole du 19^e siècle, en collaboration avec Jean Mawhin. *Revue des Questions Scientifiques, Tome 190, N° 1-2, 2019, pp. 27-59.*
- 124) Souvenirs d'un prof de maths. *Spirit of Management*, 37, 2019, pp. 24-25.
- 125) Regards sur des inductions erronées, *Losanges*, 58, 2022, p. 71.

5. Articles publiés dans des revues étrangères

- 1) Separation of two convex sets in convexity spaces and in straight line spaces, *J. Math. Anal. And Appl.*, 49, 1975, pp. 696-704.
- 2) Une démonstration géométrique du théorème de Choquet-Kendall, *Comment. Math. Un. Carolinae*, 16, 1975, pp. 683-691.
- 3) A propos d'un problème de Klee sur la séparation de plusieurs ensembles, *Mathematica Scandinavica*, 38, 1976, pp. 341-349.
- 4) The loose strong separation of two convex sets, *Comptes rendus du Colloque "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen"*, Oberwolfach, 1976, p. 3.
- 5) Optimization theory in a linear space, *Comptes Rendus 21. Intern. Wissensch. Koll. Ilmenau*, 1976, pp. 49-51.
- 6) Enveloppe j -simplicialement convexe et j -cœur simplicial dans un espace à convexité, en collaboration avec A. Dessard, *Bull. Soc. Sc. Math. Roumanie*, 20, 1975, pp. 15-25.
- 7) Geometric conditions for optimization in a linear space, *Applied Mathematics and Optimization – An International Journal*, 2, 1975, pp. 373-378.
- 8) Divers types de séparation pour plusieurs ensembles convexes, *Arkiv för Mat.*, 15, 1977, pp. 211-214.
- 9) Critères de séparation pour polyèdres convexes, *Journal of Geometry*, 10, 1977, pp. 17-31.
- 10) Séparation forte k -branlante de deux convexes, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 18, 1977, pp. 195-203.
- 11) A characterization of unbounded Choquet simplices, *Geom. Dedicata*, 6, 1977, pp. 95-98.
- 12) Some geometric conditions for optimization of a strictly quasi-convex function on an intersection of sets, *Oper. Res. Verf. Math. Oper. Res.*, XXV, pp. 15-27.
- 13) Sur la séparation vraie de cônes convexes, en collaboration avec J. Gwinner, *Arkiv för*

- Mat.*, 16, 1978, pp. 207-212.
- 14) Some geometric conditions for optimization of a strictly quasi-convex function on an intersection of sets, *Oper. Res. Verfahren Methods of Oper. Research*, XXV, pp. 15-27.
 - 15) Sur la structure extrême de la somme de deux convexes, *Canad. Math. Bull.*, 22, 1979, pp. 1-7.
 - 16) Equivalences concernant la séparation de plusieurs cônes convexes, en collaboration avec J. Vangeldère, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 21, 1980, pp. 535-549.
 - 17) Some characterizations of the asymptotic cone and the lineality space of a convex set, *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, 12, 1981, pp. 173-176.
 - 18) Quelques questions soulevées par le cône-barrière d'un convexe, *Comment. Math., Univ. Carolinae*, Tome 24, 1983, pp. 731-740.
 - 19) Further results on the asymptotic cone, en collaboration avec F. Jongmans, *Resultate der Mathematik, Vol. 16, 1983, pp. 135-139.*
 - 20) A geometric description of the inner aperture of a convex set, *Acta math. Sc. Hung.*, 38, 1981, pp. 237-240.
 - 21) Séparation et polarité, *A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, Volume 16, 1985, Issue 2, pp. 179-185.
 - 22) Sur la décomposition d'un espace vectoriel en la somme d'un convexe et d'un sous-espace, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 28, 1987, pp. 345-352.
 - 23) Multiplication by diagonal matrices, *Mathematical Gazette*, 72, 1988, pp. 228-229.
 - 24) A mathematical model in agriculture, *A Journal of Mathematics : Theta*, 4 (2), 1990, pp. 25-26.
 - 25) A classification for non-linearly bounded convex sets, en collaboration avec J.L. Valein, *Archiv der Mathematik*, 61, 1993, pp. 576-583.
 - 26) Cover and bounded parallel faces, en collaboration avec J.C. Dupin, *Geometriae Dedicata*, 72, 1998, pp. 299-307.
 - 27) Some properties of the conical hull of a closed convex set, en collaboration avec G. Hansen, *Bulletin de l'Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, XXXI, 1997, pp. 419-426.
 - 28) The barrier cone of a convex set and the infinitude cone of the cover, en collaboration avec J.C. Dupin, *Journal of Convex Analysis*, 6, 1999, pp. 339-398.
 - 29) Fonctions utilisées en économie, *revue de L'APMEP*, n° 428, 1999, pp. 310-311.
 - 30) Sur l'enseignement de la statistique en Communauté française de Belgique, en collaboration avec G. Haesbroeck, *revue Repères-IREM*, 48, 2002, pp. 41-58.
 - 31) Une modélisation d'un zoom au moyen de microscopes virtuels, en collaboration avec A. Antibi et V. Henry, *Teaching Mathematics and Computer Science*, Vol. II, Issue II, 2004, pp. 319 – 335.
 - 32) Décalage interdisciplinaire dans l'enseignement universitaire en économie, en collaboration avec V. Henry, *Idées : la revue des sciences économiques et sociales*, n° 141, 2005, pp. 48 – 53.
 - 33) Normes et distances en statistique, en collaboration avec V. Henry, *Tangente-Sup*, n° 26, 2005, pp. 12 – 15.
 - 34) Sigmoïdes en chimie, *Tangente*, 2005.

- 35) Les angles corniculaires et l'infiniment petit, en collaboration avec V. Henry, *Tangente – Sup*, n° 31, 2006, pp. 4 – 7.
- 36) From Newton's fluxions to Virtual Microscopes, en collaboration avec V. Henry, *Teaching Mathematics and Computer Science*, Vol. V, Issue II, 2007, pp. 377 – 384.
- 37) Comment évaluer une option sur le prix du pétrole ? *Tangente – Sup*, n° 42, 2008, pp. 8 – 9.
- 38) Epistémologie et modèles mathématiques, en collaboration avec V. Henry et D. Justens, *Tangente – Sup*, n° 43, 2008, pp. 12 – 16.
- 39) From Mixed Angles to Infinitesimals, en collaboration avec V. Henry, *College Mathematics Journal*, The Mathematical Association of America, Vol. 39, n° 3, 2008, pp. 230 – 233.
- 40) Comment Google classe les pages, *Tangente – Sup*, n° 44 – 45, 2008, pp. 10 – 13.
- 41) Les narrations de recherche en tant qu'activités métacognitives dans l'enseignement des mathématiques, en collaboration avec J.C. Delagardelle et V. Henry, *Transfert*, revue de la FOPED, Université du Luxembourg, n° 5, 2007.
- 42) Utilisation d'un microscope virtuel, en collaboration avec V. Henry, *Tangente – Sup*, n° 46, 2008, pp. 10 – 12.
- 43) L'effet papillon, *Tangente – Sup*, n° 47, 2009, pp. 10 – 12.
- 44) Algorithme hongrois, *Tangente*, n° 126, 2009, pp. 24 – 25.
- 45) Décision multicritère, *Tangente*, n° 126, 2009, pp. 40 – 41 ; Bibliothèque *Tangente* n° 75 « *La recherche opérationnelle* », 2021, pp. 136-139.
- 46) La programmation dynamique, *Tangente*, n° 126, 2009, pp. 42 – 43 ; Bibliothèque *Tangente* n° 75 « *La recherche opérationnelle* », 2021, pp. 54, 55, 119.
- 47) Implicit differentiation, en collaboration avec V. HENRY, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32, n° 1, 2010, pp. 53 – 55.
- 48) Gagner au jeu grâce au noyau d'un graphe, *Tangente*, Hors série thématique sur *les algorithmes*, n° 37, 2009, pp. 48 – 49.
- 49) Détermination intrinsèque d'un plan tangent à une surface, *Tangente Sup*, n° 53, 2010, pp. 12 – 13.
- 50) Bruges : une pépinière de mathématiciens, *Tangente*, n° 130, 2009, p. 14.
- 51) Grégoire de Saint-Vincent, *Tangente*, n° 130, 2009, p. 15.
- 52) Eugène Catalan, mathématicien franco-belge prolifique, *Tangente*, n° 130, 2009, pp. 16 – 18.
- 53) Simon Stévin, personnage emblématique de Bruges, *Tangente*, n° 130, 2009, p. 19.
- 54) Grands mathématiciens belges, *Tangente*, n° 130, 2009, p. 30.
- 55) Désignation des élus au sein d'un parti : le cas d'une élection communale en Belgique, *Tangente Sup*, n° 50, 2009, pp. 8 – 9.
- 56) Quand les tangentes étaient touchantes, en collaboration avec V. Henry, *Tangente Sup*, n° 54, pp. 8 – 9.
- 57) Le dilemme de Cournot, en collaboration avec V. Henry, *Tangente*, n° 135, 2010, pp. 34 – 36.
- 58) La modélisation mathématique est un art, en collaboration avec V. Rosso, *Tangente Sup*, n° 56, 2010, pp. 6 – 8.
- 59) Newton : un précurseur en analyse non standard, en collaboration avec V. Henry,

- Tangente*, n° 137, 2010, pp. 36 – 38.
- 60) Le groupe de Klein, *Tangente Sup*, n° 57 – 58, 2010, pp. 24 – 26.
- 61) Relations de récurrence en économie, *Tangente*, HS 41, 2011, pp. 10 – 12 ; *Suites & séries – les nombres, avec ou sans limite*, Bibliothèque *Tangente*, Editions Pole, HS 41, 2011, pp. 10 – 13.
- 62) Le banquier généreux et le nombre e , *Tangente*, HS 41, 2011, p. 27 ; *Suites & séries – les nombres, avec ou sans limite*, Bibliothèque *Tangente*, Editions Pole, HS 41, 2011, p. 61.
- 63) Les séries géométriques en économie et en finance, *Suites & séries – les nombres, avec ou sans limite*, Bibliothèque *Tangente*, Editions Pole, HS 41, 2011, pp. 82 – 85.
- 64) La matrice de Leslie et la dynamique des populations, *Tangente HS*, n° 42 « Mathématiques et biologie », Editions Pole, 2011, pp. 32 – 33 ; Bibliothèque *Tangente Mathématiques & biologie, l'organisation du vivant*, Editions Pole, Paris 2011, pp. 90 – 94.
- 65) Modèles de type proie-prédateur, en collaboration avec J. Mawhin, *Tangente HS*, n° 42 « Mathématiques et biologie », Editions Pole, 2011, pp. 26 – 28 ; Bibliothèque *Tangente Mathématiques & biologie, l'organisation du vivant*, Editions Pole, Paris 2011, pp. 56 – 61.
- 66) Chaînes de Markov et prévisions, *Tangente Sup*, à paraître.
- 67) Le problème de Tammes, *Tangente HS*, n° 42 « Mathématiques et biologie », Editions Pole, 2011, p. 5 ; Bibliothèque *Tangente Mathématiques & biologie, l'organisation du vivant*, Editions Pole, Paris 2011, p. 95.
- 68) Le mouvement brownien, en collaboration avec D. Justens, *Tangente HS*, n° 42 « Mathématiques et biologie », Editions Pole, 2011, p. 41 ; Bibliothèque *Tangente Mathématiques & biologie, l'organisation du vivant*, Editions Pole, Paris 2011, pp. 122 – 123.
- 69) Le nombre d'or et l'ADN, *Tangente HS*, n° 42 « Mathématiques et biologie », Editions Pole, 2011, p. 51.
- 70) Les modèles chaotiques en économie, en collaboration avec G. Haesbroeck, *Tangente Sup*, n° 63 – 64, 2011, pp. 44 – 48 ; Bibliothèque *Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 90-94.
- 71) La courbe de Plouffe. Quand Barack Obama parie sur les statistiques, *Tangente*, n° 140, 2011, pp. 30 – 31.
- 72) Evolution et transformations géométriques, Bibliothèque *Tangente Mathématiques & biologie, l'organisation du vivant*, Editions Pole, Paris 2011, pp. 84 – 86.
- 73) Formation des professeurs en Belgique, en collaboration avec J. Lamon, *Tangente Education*, n° 18, 2011, pp. 14 – 15.
- 74) Problèmes d'optimisation en région montagneuse, *Tangente* 174, 2017, pp. 44 – 45 ; Bibliothèque *Tangente*, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L'art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 24-26.
- 75) Tableaux entrées – sorties en économie, en collaboration avec Annette Coolen, *Tangente HS thématique, Matrices : des tableaux et des nombres pour représenter le monde*, n° 44, janvier 2012, pp. 38 – 40 ; Bibliothèque *Tangente* Hors-série n° 44, *Les matrices – une représentation du monde*, 2012, pp. 108 – 111.

- 76) Décomposition du vecteur des productions en analyse input – output, en collaboration avec Annette Coolen, *Tangente Sup*, 65, 2012, pp. 12 – 13 ; *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 120-122.
- 77) Matrices élémentaires en économie, *Bibliothèque Tangente Hors-série n° 44, Les matrices – une représentation du monde*, 2012, pp. 112 – 114.
- 78) Quelques mathématiciens-joueurs, en collaboration avec Joëlle Lamon, *Tangente HS thématique, La théorie des jeux*, n° 46, mars 2012, pp. 2, 5, 13.
- 79) Typologie des jeux, en collaboration avec Joëlle Lamon, *Tangente HS thématique, La théorie des jeux*, n° 46, mars 2012, pp. 14 – 16. ; *Bibliothèque Tangente, HS n° 46, Théorie des jeux, stratégies et tactiques*, 2013, pp. 14 – 18.
- 80) Les jeux en contexte scolaire, en collaboration avec Joëlle Lamon, *Tangente HS thématique, La théorie des jeux*, n° 46, 2013, p. 123 ; *Bibliothèque Tangente, HS n° 46, Théorie des jeux, stratégies et tactiques*, 2013, p. 123.
- 81) Equilibre de Cournot, *Tangente HS 46, La théorie des jeux*, 2013, pp. 62 – 65 ; *Bibliothèque Tangente, HS n° 46, Théorie des jeux, stratégies et tactiques*, 2013, pp. 62 – 65.
- 82) Matrice de Leslie pour modéliser la dynamique d'une population structurée en classes d'âges, *Bulletin de l'APMEP*, n° 501, 2012, pp. 527 – 533.
- 83) Poincaré est-il le grand-père des mathématiques financières ?, en collaboration avec Jean Mawhin, *Tangente Sup*.67-68 consacré à « Henri Poincaré, le dernier savant universel », 2013, pp. 74 –77.
- 84) Théorèmes d'impossibilité relatifs à des élections, *Tangente Hors-série n° 49, Les maths de l'impossible*, 2013, pp. 54 – 57.
- 85) Système linéaire impossible et inverse généralisé, *Tangente Hors-série n° 49, Les maths de l'impossible*, 2013, pp. 38 – 42.
- 86) Les infinitésimaux nilpotents en analyse, en collaboration avec V. Henry, *Tangente Hors-série n° 49, Les maths de l'impossible*, 2013, pp. 88 – 91.
- 87) Osculating circle with microscope within microscope, en collaboration avec V. Henry, *Foundations of Science*, 18(2), 2013, pp. 319-325.
- 88) Is mathematical history written by the victors ? en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Karin U. Katz, Mikhail G. Katz, Sem S. Kutateladze, Thomas McGaffay et David Sherry, *Notices of the American Mathematical Society* 60 (2013), 7, pp. 886–904. See <http://www.ams.org/notices/201307/rnoti-p886.pdf> and <http://arxiv.org/abs/1306.5973>.
- 89) Inéquations pour un consommateur, *Tangente*, 150, 2013, pp. 26 – 27 ; *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 78-80.
- 90) Analyse classique ou analyse non standard ? *Tangente HS 51*, sur le thème *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*, Editions Pole, Paris, 2014, pp. 150 – 155.
- 91) Interpreting the Infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Karin U. Karz, Mikhail G. Katz, Sem S. Kutateladze, Thomas McGaffay et David Sherry, *Journal for General Philosophy of Science (JGPS)*, publication “on line” 19/7/2016, DOI 10.1007/s10838-016-9334-z.

- 92) La recherche d'esthétique génératrice d'erreur chez Fermat, *Tangente HS 51*, sur le thème *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*, Editions Pole, Paris, 2014, pp. 44 - 46.
- 93) Les « bonnes mathématiques » selon Terence Tao, *Tangente HS 51*, sur le thème *Mathématique, de l'esthétique à l'éthique*, Editions Pole, Paris, 2014, pp. 48 - 50.
- 94) Infiniment grand en analyse, *Tangente*, 155, 2013, pp. 38 – 40.
- 95) La fonction exponentielle : premières propriétés, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente-Sup*, 69, 2013, pp. 6 – 10.
- 96) Flot maximal dans un réseau de transport, *Tangente-Sup*, n° 70 – 71, thème : transfert et échange, Editions Pole, 2013, pp. 68 – 71.
- 97) Principe de transfert en analyse infinitésimale, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente-Sup*, n° 70 – 71, thème : transfert et échange, Editions Pole, 2013, pp. 22 – 25.
- 98) Surplus du consommateur, *Tangente Hors- série n° 50, L'intégrale*, 2013, pp. 48 – 50.
- 99) Théorème de Bayes, un outil pour le médecin, en collaboration avec Adelin Albert, *Tangente-Sup*, 73 – 74, 2014, pp. 44 – 46.
- 100) Les infiniment petits en économie, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente*, 156, 2014, pp. 16 - 18.
- 101) La situation en Belgique francophone - maths au féminin, en collaboration avec Benoît Jadin, *Tangente*, 157, 2014, pp. 36 – 37.
- 102) Angles corniculaires et de demi-cercle chez Euclide, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente HS 53* sur le thème *Les angles*, 2014, pp. 6 – 8 ; version *Bibliothèque*, 2014, pp. 6 – 11.
- 103) Du théorème de Pythagore à une formule de trigonométrie, *Tangente HS 53* sur le thème *Les angles*, 2014, pp. 32 – 34.
- 104) Catalan et ses successeurs liégeois, en collaboration avec Norbert Verdier, dans Eugène Catalan, le bicentenaire et « le fonds d'archives Catalan – Jongmans », *Bulletin des amis de l'Ecole Polytechnique (SABIX)*, n° 57, octobre 2015, pp. 22 – 25.
- 105) Eugène Catalan, « la vie est un combat », en collaboration avec Gentiane Haesbroeck, *Tangente*, 158, 2014, pp. 6 – 8.
- 106) Formes quadratiques et optimisation, *Tangente-Sup*, 75, 2014, p. 23.
- 107) Formule de Taylor et formes quadratiques, *Tangente-Sup*, 75, 2014, p. 24 – 26.
- 108) La genèse de l'invention mathématique, *Tangente*, 159, 2014, pp. 8 – 9.
- 109) Des heuristiques modernes, *Tangente*, 159, 2014, pp. 20 – 21.
- 110) Le rôle du mental en résolution de problèmes mathématiques, *Tangente*, 159, 2014, pp. 24 – 26.
- 111) Dissection de raisonnements par récurrence, en collaboration avec D. Justens, *Tangente, Hors Série 55* sur « Démontrer l'art de convaincre », 2015, p. 50.
- 112) La démonstration par récurrence, en collaboration avec Daniel Justens, *Tangente, Hors Série 55* sur « Démontrer l'art de convaincre », 2015, p. 46 – 49.
- 113) Analyse et synthèse dans les démonstrations, *Tangente, Hors Série 55* sur « Démontrer l'art de convaincre », 2015, pp. 38 - 40.
- 114) Diagnostic, Les raisonnements médicaux, en collaboration avec Adelin Albert, *HS Tangente* sur « les Mathématiques et la Médecine », pp. 8 – 10 ; *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente*, Collection Bibliothèque, HS 58, 2016, pp. 50-53.

- 115) En mathématiques, ratiocine-t-on ? *Tangente, Hors Série 55* sur « Démontrer l'art de convaincre », 2015, p. 10.
- 116) Petit voyage à travers les âges : de l'expression à la fonction, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente, HS 56* sur *Les fonctions, des nombres en correspondance*, Editions Pole, 2015, pp. 12 – 15, version Bibliothèque HS 56 sur le thème : *Les fonctions*, 2016, pp. 6 – 11.
- 117) Extensions modernes du concept de fonction, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente, HS 56* sur *Les fonctions, des nombres en correspondance*, Editions Pole, 2015, p. 41.
- 118) Les bookmakers n'aiment pas les probabilités, *Tangente, 175*, 2017, pp. 20-21.
- 119) Quand la relation n'est pas bien définie : les fonctions implicites, *Tangente, HS 56* sur *Les fonctions, des nombres en correspondance*, Editions Pole, 2015, pp. 50 – 51 ; *Tangente Bibliothèque HS 56* sur le thème : *Les fonctions*, 2016, pp. 104 - 106.
- 120) Les fonctions de plusieurs variables, *Tangente, HS 56* sur *Les fonctions, des nombres en correspondance*, Editions Pole, 2015, 48 – 49 ; version Bibliothèque HS 56 sur le thème : *Les fonctions*, 2016, pp. 100 - 102.
- 121) Les variables aléatoires : prendre en compte un phénomène fortuit, *Tangente Bibliothèque HS 56* sur le thème : *Les fonctions*, 2016, pp. 132 – 134.
- 122) Catégories et foncteurs, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente Bibliothèque HS 56* sur le thème : *Les fonctions*, 2016, p. 141.
- 123) Question de x ou pourquoi Johnny déteste les mathématiques, *Tangente, 166*, 2015, pp. 50 – 52.
- 124) Pourquoi travailler systématiquement avec des exponentielles de base e , en collaboration avec Valérie Henry et Daniel Justens, *Tangente, 166*, 2015, pp. 38 – 41.
- 125) Des conjectures plausibles mais fausses, *Tangente, 168*, 2016, pp. 14 – 15.
- 126) Quel type de service un joueur de tennis doit-il choisir ? *Tangente, 168*, 2016, p. 33.
- 127) L'indice de masse corporelle, *HS Tangente 58* sur « les Mathématiques et la Médecine », pp. 14 – 16 ; *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58*, 2016, pp. 60-63.
- 128) La saga des indices, en collaboration avec Adelin Albert et Daniel Justens, *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58*, 2016, pp. 64, 65, 96, 144, 145.
- 129) Markov : les chaînes de l'espoir, *HS Tangente 58* sur « les Mathématiques et la Médecine », pp. 38 – 39 ; *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58*, 2016, pp. 76-79.
- 130) Le théorème de Bayes : un outil pour le médecin, *HS Tangente 58* sur « les Mathématiques et la Médecine », en collaboration avec Adelin Albert, pp.18 – 19 ; *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58*, 2016, pp. 72-74.
- 131) Odds Ratio : les risques relatifs, *HS Tangente 58* sur « les Mathématiques et la Médecine », en collaboration avec Adelin Albert, pp. 24 – 26 ; *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, *Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58*, 2016, pp. 84-87.

- 132) Saga de courbes médicales, *HS Tangente* 58 sur « les Mathématiques et la Médecine », en collaboration avec Adelin Albert et Daniel Justens, 2016, pp. 17, 26, 45, *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, Tangente, Collection Bibliothèque, HS 58, 2016, pp. 25, 83, 91, 107, 143, 146.
- 133) Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler, en collaboration avec Błaszczyk, P.; Ely, R.; Henry, V.; Kanovei, V.; Katz, K.; Katz, M.; Kutateladze, S.; McGaffey, T.; Reeder, P.; Schaps, D.; Sherry, D.; Shnider, S. ; *The Journal of General Philosophy of Science* (JGPS), 2017, 48, pp. 195-238; <http://dx.doi.org/10.1007/s10838-016-9334-z> et <http://arxiv.org/abs/1605.00455>.
- 134) Analyzing Bernadete's comment on decimal notation, en collaboration avec Piotr Blazczyk, Mikhail G. Katz, Taras Kudrik, David Sherry, *Philosophy of Mathematics Education Journal* ; <http://arxiv.org/pdf/1706.00191>.
- 135) History of mathematics without philosophy of mathematics is blind : Fraser's surreal numbers, en collaboration avec Piotr Blazczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovei, Karin U. Katz; Mikhail G. Katz, Taras Kurdik, Semen Kutateladze, Thomas McGaffey, Thomas Mormann, David Schaps, David Sherry, soumis à *JGPS*,
- 136) Géométrie ou nombres ? La droite numérique, en collaboration avec Valérie Henry, *Tangente* HS 59, 2016, pp. 16 – 18 ; *Bibliothèque Tangente*, HS 59, 2017, pp. 12-16.
- 137) Euclide : une introduction de la droite, *Tangente* HS 59, pp. 26 – 29 ; *Bibliothèque Tangente*, HS 59, 2017, pp. 34-37.
- 138) Applications de la division euclidienne en analyse, à la recherche d'asymptotes, *Tangente*, 171, 2016, p. 41.
- 139) La gare de Liège-Guillemins de Santiago Calatrava, *Tangente*, HS 60 « Mathématiques et architecture », 2016, pp. 46 – 47, 51 ; version Bibliothèque, 2017, pp. 45, 144-146.
- 140) Pourcentages en économie, *Tangente*, 172, 2016, pp. 30-31.
- 141) Saga des indices en médecine, en collaboration avec Adelin Albert et Daniel Justens, *Bibliothèque Tangente* 55, 2016, Hors-Série « Mathématiques et médecine », pp. 64, 65, 96, 144, 145.
- 142) Fermat's dilemma : why did he keep mum on infinitesimal ? and the european theological context, en collaboration avec Mikhaïl Katz et David Sherry, *Foundations of Science*, September 2018, Volume 23, Issue 3, pp 559–595; DOI 10.1007/s10699-017-9542-y; <http://arxiv.org/pdf/1801.00427>.
- 143) Equation et hyperplan d'Euler, *Tangente* 174, 2017, p. 28.
- 144) Passage du local au global sans souci, *Tangente*, 183, 2018, p. 20.
- 145) Expériences psychologiques en arithmétique, *Tangente* 173, 2016, pp. 24 – 26.
- 146) Lakatos et la formule d'Euler, *Tangente* 174, 2017, p. 29.
- 147) Le virus conquérant, *Tangente* Hors-Série n° 70 sur le thème « *Les surfaces. Les étudier, les construire, les imaginer* », 2019, pp. 28-29. Bibliothèque Tangente n° 70 sur le thème « *Les surfaces* », 2020, 146-148.
- 148) Pour une coordination entre économistes et mathématiciens, *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 10-13

- 149) Quand l'économie illustre l'algèbre matricielle, *Tangente Hors Série*, n° 62, février 2017, pp. 24-26.
- 150) De la dérivée à l'élasticité, *Tangente Hors Série*, n° 62, février 2017, pp. 24-26.28-30 ; *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 108-112.
- 151) La saga des Prix Nobel en économie, en collaboration avec Daniel Justens, *Tangente Hors Série*, n° 62, février 2017, pp. 9, 35, 49, 54 ; *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 51,77, 81, 123, 127, 139.
- 152) Klein vs Mehrtens : restoring the reputation of a great modern, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Peter Heinig, Mikhail Katz, Jan Peter Schaefermeyer, et David Sherry, *Matematychni Studii*, vol.48, N° 2, 2017, pp. 189-219; <http://arxiv.org/pdf/1803.02193>, <http://dx.doi.org/10.15330/ms.48.2.189-219>.
- 153) Un exemple de groupe en sciences humaines. *Tangente HS 80*, 2021, pp. 52-53 ; 53 ; *Bibliothèque Tangente*, HS 80, 2023, pp. 122-124.
- 154) Modélisation des préférences, *Tangente*, 175, 2017, pp. 46-47.
- 155) Cauchy, infinitesimals, and ghosts of departed quantifiers, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovai, Karin U. Katz, Mikhail G. Katz, Taras Kudryk, Semen S. Kutateladze, Thomas McGaffey, Thomas Mormann, David M. Schaps, David Sherry, *Matematychni Studii*, Vol. 47 (2017), Number 2, pp. 115-144 ; <http://dx.doi.org/10.15330/ms.47.2.115-144>.
- 156) Les techniques du prodigieux Terence Tao, *Tangente*, 183, 2018, pp. 36-37.
- 157) Quand l'économie illustre l'algèbre matricielle, *Bibliothèque Tangente*, Hors Série n° 62 sur le thème « *Mathématiques et économie, Une vision scientifique de l'économie* », 2018, pp. 102-106.
- 158) Les animaux aussi font des maths, *Tangente*, 183, 2018, pp. 38-39.
- 159) Les 4 étapes de la dérivée, *Tangente*, 183, 2018, p. 20.
- 160) Dérivée en analyse non standard, *Tangente*, 183, 2018, p. 20.
- 161) L'ingénieux algorithme de René-François de Sluse, *Tangente*, 183, 2018, pp. 18-19.
- 162) Les astuces de Tim Gowers, *Tangente*, 183, 2018, p. 43.
- 163) Cauchy's work on integral geometry, centers of curvature, and other applications of infinitesimals, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Peter Heinig, Robert Ely, Mikhail G. Katz, Semen S. Kutateladze, Thomas McGaffey, *Real Analysis Exchange*, 45, 2020, pp. 127-150; voir <http://u.math.biu.ac.il/~katzmik/cauchyshortareprint20.pdf>, <https://doi.org/10.14321/realanalexch.45.1.0127> et <https://arxiv.org/abs/2003.00438>
- 164) Leibniz's well-founded fictions and their interpretations, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Peter Heinig, Robert Ely, Mikhail G. Katz, *Matematychni Studii*, V. 49, N. 2; <http://dx.doi.org/10.15330/ms.49.2.186-224>.
- 165) Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus : an account in three modern frameworks, en collaboration avec Piotr Blaszczyk, Robert Ely, Peter Heinig, Mikhail G. Katz et Karl Kuhlemann, 2018, *British Journal of History of Mathematics* ; DOI : 10.1080/26375451.2020.1851120, arXiv:2011.12628 ou arXiv:2011.12628v1.
- 166) Continuity between Cauchy and Bolzano: issues of antecedents and priority, en

- collaboration avec P. Blaszczyk – E. Fuentes-Guillén – P. Heinig – V. Kanovei – M. Katz, 2020. *British Journal of History of Mathematics*, vol. 35, 2020, pp. 207-224; <https://doi.org/10.1080/26375451.2020/0015>.
- 167) 19th century real analysis, forward and backward, en collaboration avec P. Blaszczyk – P. Heinig – V. Kanovei – M. Katz, *Antiquitates Mathematicae*, 13(1), 2019, pp. 35-65; doi : 10.14708/am.v13i1-6440.
- 168) La programmation linéaire. *Tangente* HS 72, 2019, pp. 42-44 ; Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L'art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 80-84.
- 169) La dualité en programmation linéaire. En collaboration avec D. Justens. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L'art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 86-88.
- 170) La lente reconnaissance des infiniment petits. En collaboration avec V. Henry. Dans *Tangente*, HS n° 69 sur le thème « Mathématiques et Physique », Editions Pole, Paris, 2019, pp. 48-51 ; Bibliothèque Tangente, HS 69, 2019, pp. 32-35.
- 171) Des théorèmes prouvés ... par la physique ! En collaboration avec D. Justens. Dans *Tangente*, HS n° 69 sur le thème « Mathématiques et Physique », Editions Pole, Paris, 2019, pp. 140-143 ; Bibliothèque Tangente, HS 69, 2019, pp. 130-133.
- 172) Les distributions : une théorie des « fonctions généralisées ». En collaboration avec A. Pétry. *Tangente* 192, 2020, pp. 24-26. Une version adaptée est parue, sous le titre « Une théorie des "fonctions généralisées" » dans le livre *Les équations de la physique moderne - Relativité générale, Mécanique quantique* , Bibliothèque Tangente, n° 71, juillet 2020, pp. 64-67.
- 173) Un projet Polymath sur le coronavirus. En collaboration avec D. Justens. *Tangente*, 194, 2020, p. 5.
- 174) Covid-19 : les maths à la rescousse ! En collaboration avec D. Justens. *Tangente*, 194, 2020, pp. 24-26.
- 175) Vertigineux nombres surréels ! En collaboration avec D. Justens, *Tangente*, 194, 2020, pp. 36-38.
- 176) Eclairage non standard pour l'enseignement de l'analyse. En collaboration avec J. Mawhin et A. Pétry, *Sciences, Circulations, Révolutions. Festschrift pour Philippe Nabonnand*, livre édité par P.E. Bour, M. Rebuschi et L. Rollet, Tributes Series, volume 50, College Publications, 2023, pp. 39-52.
- 177) La méthode de Fermat pour la recherche d'extrema. En collaboration avec V. Henry. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L'art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 12-15.
- 178) Les débuts de la recherche collaborative. *Tangente* 197, 2020, 14-16.
- 179) Vers une « science ouverte ». *Tangente* 197, 2020, pp. 18-20.
- 180) Les remue-méninges, les programmations : des initiatives adaptées aux matheux. *Tangente*, n° 197, 2020, p. 25.
- 181) Une terminologie de base riche et subtile. En collaboration avec D. Justens, Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L'art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 10.
- 182) Optimisation et recherche opérationnelle : quelle différence ? En collaboration

- avec D. Justens. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 76-79.
- 183) De la gestion optimale de son potager au principe de Fermat. En collaboration avec D. Justens, Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 10.
- 184) Inégalités et minima. En collaboration avec D. Justens, Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 10.
- 185) Multiplicateurs de Lagrange : le (contre-)exemple de Courant. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 27.
- 186) La règle de Lagrange. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 27.
- 187) Le passage sans souci du local au global. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 34-37.
- 188) Une méthode graphique pour maximiser le revenu global. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 42.
- 189) Optimisation et singularités. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, p. 93.
- 190) Un problème de moindre coût en variables booléennes. En collaboration avec Y. Crama. Bibliothèque Tangente, n° 72, *Maximum Minimum Optimum – L’art de faire mieux*, Editions Pole, Paris, 2020, pp. 126-129.
- 191) Le « grand-père spirituel » des mathématiques financières ? Dans *A la croisée des sciences : Henri Poincaré*, Tangente Hors-Série 79, septembre 2021, p. 23.
- 192) Statistiques et probabilités revisitées, en collaboration avec Adelin Albert et Daniel Justens, *Tangente*, HS 81 : « Les distances – un outil pour tout mesurer », 2022, pp. 52-54 ; *Bibliothèque Tangente* 81 sur « Les distances », 2023, pp. 130-134.
- 193) Interpréter les résultats d’une prise de sang, en collaboration avec Adelin Albert et Daniel Justens, *Tangente*, HS 81 : « Les distances – un outil pour tout mesurer », 2022, pp. 56-58 ; *Bibliothèque Tangente* 81 sur « Les distances », 2023, pp. 136-140.
- 194) Une théorie moderne aux origines anciennes, *Tangente*, 204, Dossier « La convexité », 2022, pp. 12-13.
- 195) La géométrie convexe, *Tangente*, 204, Dossier « La convexité », 2022, pp. 18-20.
- 196) Au-delà de la convexité, *Tangente*, 204, Dossier « La convexité », 2022, pp. 24-25.
- 197) Exploitation de la tangence en microéconomie, en collaboration avec Daniel Justens, *Tangente*, à paraître.
- 198) Une distance entre mathématiciens, *Tangente*, HS 81 : « Les distances – un outil pour mesurer », 81, 2022, p. 51 ; *Bibliothèque Tangente* 81 sur « Les distances », 2023, p. 135.
- 199) La distance de collaboration, *Bibliothèque Tangente*, HS 81, « Les distances », 2023, p. 141.
- 200) Les propriétés des nombres d’Erdős, *Bibliothèque Tangente* 81 sur « Les distances », 2023, p. 135.

- 201) Observer des courbes avec des loupes, *Tangente*, Hors Série 84 sur le thème « Tangence », 2022, pp. 24-26.
- 202) André Antibi (1944-2022), en collaboration avec Daniel Justens, *Tangente*, 206, 2022, p. 5.
- 203) Axiomatiser versus désaxiomatiser, *Tangente*. 207, 2022, pp 12-13.
- 204) Historical infinitesimalists and modern historiography of infinitesimals, en collaboration avec Alexandre Borovik, Vladimir Kanovei, Mikhail Katz, Sam Sanders, David Sherry, Monica Ugaglia, 2022, <https://arxiv.org/abs/2210.14504>; à paraître dans *Antiquitates Mathematicae*, vol. 16.
- 205) Is pluralism in the history of mathematics possible ? en collaboration avec Alexandre Borovik, Vladimir Kanovei, Mikhail Katz, Semen Kutateladze, Sam Sanders, David Sherry, Monica Ugaglia, Mark van Atten; *The Mathematical Intelligencer*, 2023, 45 (1), p. 8 ; <http://doi.org/10.1007/s00283-022-10248-0> ; <https://arxiv.org/abs/2212.12422>.
- 206) Hervé Lehning (1948-2022): un “honnête homme”, éclectique et généreux, en collaboration avec Daniel Justens, *Tangente*, n° 208, 2022, p. 5.
- 207) Des sommes étonnantes pour des séries ... divergentes, *Tangente*, 210, 2023, p. 17.
- 208) Petite histoire de la série de Grandi, *Tangente*, 210, 2023, p. 23.

6. Articles sur des sites électroniques

- 1) Méthode pour la recherche du minimum et du maximum, en collaboration avec Valérie Henry, analyse des œuvres de Fermat, 2008, *BibNum*, Bibliothèque Nationale de France, <http://www.bibnum.education.fr>.
- 2) Naissance du concept économique d'élasticité, en collaboration avec Valérie Henry, analyse de l'œuvre *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* par A. Cournot, 2009, *BibNum*, Bibliothèque Nationale de France, <http://www.bibnum.education.fr>.
- 3) Historique de l'IREM de Liège ; sur le site de l'IREM à l'adresse électronique : <http://www.irem.ulg.ac.be>.
- 4) A la mémoire du géomètre François Jongmans, *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, n° 11, 03/10/2014, <http://www.academieroyalesciences.be/> A la mémoire du géomètre François Jongmans (1921 – 2014),
- 5) Quelques idées générales à propos de la compréhension en mathématiques, E-print, *Orbi* (ULiege), janvier 2017, <http://hdl.handle.net/2268/205282>.
- 6) Le concept de duration : une présentation heuristique, E-print, *Orbi* (ULiege), janvier 2017, <http://hdl.handle.net/2268/205225>.

- 7) Petite apologie de l'analogie en mathématiques, E-print, *Orbi* (ULiege), janvier 2017, <http://hdl.handle.net/2268/207229>.
- 8) Sur l'évaluation de compétences en mathématiques, E-print, *Orbi* (ULiege), février 2017, <http://hdl.handle.net/2268/207355>.
- 9) Bien raisonner en TSUM (Transition Secondaire-Université en Mathématiques), E-print, *Orbi* (ULiege), février 2017, <http://hdl.handle.net/2268/207472>.
- 10) Liens entre mathématiques et jeux, E-print, *Orbi* (ULg), février 2017, <http://hdl.handle.net/2268/207709>.
- 11) Méditations expérimentées sur la TSUM (Transition Secondaire-Université en Mathématiques) ; 2017 ; <http://hdl.handle.net/2268/213509>.
- 12) Aphorismes mathématiques de J. Ellenbeerg, E-print, *Orbi* (ULiege), février 2018, <http://hdl.handle.net/2268/219851>.
- 13) Un mathématicien contemporain emblématique : Sir William Timothy Gowers ; E-print, *Orbi* (ULiege), <http://hdl.handle.net/2268/221380>.
- 14) Des infinicoles liégeois ; E-print, *Orbi* (ULiege), <http://hdl.handle.net/2268/247773>.
- 15) Analogies entre deux querelles relatives à l'enseignement des mathématiques en Belgique ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.handle.net/2268/249839>.
- 16) Un modèle relatif à la TSUS (Transition Secondaire-Université en Statistique) ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.handle.net/2268/253869>.
- 17) Témoignages d'universitaires liégeois en liaison avec la guerre de la mathématique moderne ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.handle.net/2268/255230>.
- 18) Distance de collaboration ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.net/2268/256768>.
- 19) Flash-back sur l'Agrégation de l'Enseignement Supérieur en mathématiques à l'Université de Liège, (2021-04-12) ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.net/2268/258816>.
- 20) Sur la convexité dans le sillage de V. Klee ; E-print, *Orbi* (Uliège), <http://hdl.handle.net/2268/288794>.
- 21) Souvenirs de rencontres avec le mathématicien et didacticien André Antibi ; E-print, *Orbi* (ULiege), <http://hdl.net/2268/296490>.

3.4. Notes de cours

- 1) *Exercices de mathématique*, en collaboration avec A. Dessard, Editions Gothier, Liège, 1974.
- 2) *Exercices de mathématique à l'usage des sciences humaines I et II*, en collaboration avec A. Dessard et R. Fourneau, Editions Gothier, Liège, 1975.
- 3) *Recueil d'exercices et de problèmes de mathématiques appliquées aux méthodes quantitatives de gestion*, Diplôme d'Economie et de Gestion, Université de Liège, 1980.
- 4) *Cours d'analyse mathématique*, Institut Supérieur Industriel de l'Etat, Huy, 1979.
- 5) *Recueil d'exercices et de problèmes mathématiques appliquées aux méthodes quantitatives de gestion*, Diplôme d'Economie et de Gestion, Université de Liège, 1980.
- 6) *Cours de statistique*, 4 fascicules, Institut Supérieur Industriel de l'Etat, Huy, 1980-1981.
- 7) *Programmation linéaire : théorie et exercices*, Institut Supérieur Industriel de l'Etat, Huy, 1980-1981.
- 8) *Cours pratique de mathématiques générales*, Diplôme d'Economie et de Gestion, Université de Liège, 1982.

- 9) *Eléments de géométrie analytique à trois dimensions*, en collaboration avec P. Grégoire, Institut Supérieur Industriel de l'Etat, Huy, 1983.
- 10) *Recueil d'exercices et de problèmes mathématiques appliquées à l'usage de futurs ingénieurs industriels*, Institut Supérieur Industriel de l'Etat, Huy, 1984.
- 11) *Introduction à la recherche opérationnelle*, deux fascicules, Diplôme d'Economie et de Gestion, Université de Liège, 1986.
- 12) *Applications et compléments théoriques d'analyse mathématique*, Presses Universitaires de Liège, 1986-1987.
- 13) *Compléments théoriques d'analyse mathématique* (à l'usage des étudiants des premières candidatures en Administration des Affaires, en Science Economique, en Sciences Sociales et en Sciences Politiques), Presses Universitaires de Liège, 1991, 71 pages.
- 14) *Méthodes mathématiques de la gestion* (à l'usage des étudiants de la seconde candidature en Administration des Affaires), Presses Universitaires de Liège, 1991, 60 pages.
- 15) *Analyse mathématique* (à l'usage des étudiants du Diplôme Complémentaire en Administration des Affaires, des secondes candidatures en Administration des Affaires et en Science Economique), Presses Universitaires de Liège, 1992-1993), 194 pages.
- 16) *Mathématiques générales pour les étudiants de la première candidature*, Université de Liège, ARESCE, 1993, 65 pages.
- 17) *Mathématiques générales à l'usage des étudiants de la première candidature*, recueil de questionnaires d'examens et réflexions sur les méthodes de travail, ARESCE, 1994.
- 18) *Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion*, recueil de questionnaires d'examens à l'usage des étudiants de la seconde candidature, ARESCE, 1994.
- 19) *Méthodes mathématiques de la gestion basées sur la théorie des graphes*, Presses Universitaires de Liège, 129 pages, 1995.
- 20) *Mathématiques appliquées à l'usage des étudiants en administration des affaires et en science économique*, Éditions Point de Vue, Liège, 1995, 98 pages.
- 21) *Compléments de mathématiques générales*, Editions Derouaux, Liège, 1995, 171 pages.
- 22) *Algèbre linéaire à l'usage des sciences humaines*, Editions Point de Vue, Liège, 1995, 188 pages.
- 23) *Mathématiques de base, prérequis théoriques et exercices de révision*, en collaboration avec G. Haesbroeck et F. Sart, Editions Derouaux, Liège, 1995, 51 pages.
- 24) *Analyse non standard*, notes provisoires, 2002.
- 25) *Compléments d'analyse non standard*, notes provisoires, 2004.

3.5. Rapports pour des colloques ou séminaires

- 1) *Introduction à l'étude géométrique des espaces vectoriels*, en collaboration avec R. Fourneau, séminaire, Université de Liège, 1974.
- 2) *Espaces à jonction et espaces à convexité*, en collaboration avec A. Dessard, séminaire, Université de Liège, 1975.
- 3) Diverses façons d'étendre au cas de n ensembles la séparation forte de deux convexes, *Comptes rendus J. Convexité*, Bruxelles, 1976, pp. 1-5.
- 4) *Applications du calcul matriciel à l'économie*, Cahiers de CEDES, FUNDP Namur, 1991.
- 5) *Résolution numérique d'équations et exemples économiques*, Cahiers du CEDES, FUNDP Namur, 1991.

- 6) *Introduction à la théorie mathématique de la décision*, Colloque du Csipwic "Sciences, de l'Expérimentation aux Concepts", 1992, pp. 10-22.
- 7) *A propos du caractère fermé de l'enveloppe conique : conditions d'optimalité et nouvelles caractérisations de la gaine*, Rapport des Journées de Convexité, Valenciennes-Liège, 1992.
- 8) *De l'incohérence à l'incertitude : un rapide parcours de la théorie de l'intérêt*, en collaboration avec D. JUSTENS, Formation continuée en mathématique financière, FOPEM, Université de Liège, 1994, 9 pages.
- 9) *Exploitation des mathématiques dans les sports*, Colloque du Csipwic "Structures : Espace, Matière, Temps", 1994, pp. 129-136.
- 10) *Mathématique en économie*, Colloque du Csipwic "Structures : Espace, Matière, Temps", 1994, pp. 120-128.
- 11) *Une étude mathématique des taux du crédit à la consommation proposés par le législateur belge*, en collaboration avec D. Justens, CREDEL, n° 9403, 1994, 19 pages.
- 12) *Applications économiques de l'analyse mathématique*, en collaboration avec G. Haesbroeck, D. Justens et F. Sart, FOPEM, Université de Liège, 1995, 130 pages.
- 13) *Exploitation en mathématique financière de propriétés de la moyenne arithmétique de puissances d'un nombre réel positif*, en collaboration avec D. Justens, CREDEL, n° 9502, 1995, 9 pages.
- 14) *Evaluation des titres à revenu fixe pour les compagnies d'assurances : une comparaison des méthodes légalement autorisées*, en collaboration avec A. Heuse, Gemme 9601, 1996.
- 15) *La notion de point fixe dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires*, en collaboration avec V. Wathieu, working paper, GEMME 9602, Université de Liège, 1996.
- 16) *Fonctions convexes : théorie et applications*, en collaboration avec G. Haesbroeck, G. Hansen, C. Matère et S. Philippart, FOPEM, Université de Liège, 1995, 64 pages.
- 17) *Applications de la théorie des graphes en économie et en gestion*, Colloque du CSIPWIC, 1996.
- 18) *Initiatives nouvelles et grands auditoires*, Journée d'information et d'échange sur les initiatives pédagogiques, CUPS, Colonster, 22 novembre 1996.
- 19) *Etude statistique sur la perception des problèmes mathématiques dans l'enseignement des mathématiques*, en collaboration avec G. Haesbroeck, 15e colloque international de l'AIPU, Université de Liège, 1997, pp. 615-624.
- 20) *Exploitation des fonctions en économie*, en collaboration avec G. Haesbroeck, Colloque Mathématique, Sciences économiques et sociales, Université de Dijon, 1999, pp. 71-74.
- 21) *Mathématiques dans la formation des économistes*, en collaboration avec G. Haesbroeck, 50ème Rencontre de la CIEAEM, Neuchâtel, 1998, pp. 69-73.
- 22) *Statistiques*, ouvrage collectif de la Commission Pédagogique de la Société Belge des professeurs de Mathématique d'expression française, 1999, 80 pages.
- 23) *A propos des « calculateurs aveugles »*, document de L'IREM de Liège, année académique 1999-2000, 9 pages.
- 24) *La prise de notes à un cours universitaire de mathématiques*, en collaboration avec A. Coolen G. & M. Haesbroeck, V. Henry, document de l'IREM de Liège, année académique 1999-2000, 24 pages.

- 25) *La formation quantitative des économistes à la lumière de l'évolution des rapports entre les mathématiques et l'économie*, en collaboration avec G. Haesbroeck, Proceedings de la 3ème université d'été européenne sur l'histoire et l'épistémologie dans l'éducation mathématique, Universités de Louvain (UCL) et de Leuven (KUL), volume 1, pp. 83-89.
- 26) *Mathématiques générales avec Mathematica*, en collaboration avec G. Haesbroeck, dossier de l'IREM de Liège, année académique 2000-2001, 58 pages.
- 27) *La médiane d'une série statistique univariée*, travail collectif du Groupe de Recherches « Statistique & Probabilités », dossier de L'IREM de Liège, année académique 2000-2001, 51 pages.
- 28) *Perception par des étudiants de l'enseignement de la mathématique financière*, dossier de L'IREM de Liège, année académique 2000-2001, 12 pages.
- 29) *Manuel de référence en mathématiques pour l'enseignement secondaire*, 2 tomes, direction J. Navez, Collection Recherche en Pédagogie, Ministère de la Communauté française, 2005
- 30) *Telescopic directions and asymptotic cone*, en collaboration avec V. Henry, Cahiers thématiques de l'IREM de Liège.
- 31) Eugène Catalan, Colloque en l'honneur du 200^{ème} anniversaire de la naissance de Catalan, Université de Liège, novembre 2014.

Annexe 2 : Liste des abréviations et acronymes

AES	: Agrégation de l'Enseignement Supérieur
AESS	: Agrégation de l'Enseignement Secondaire Supérieur
AMULG	: Association des Mathématiciens diplômés de l'Université de Liège
ANS	: Analyse Non Standard
APMEP	: Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public
BSRSL	: Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège
CA	: Conseil d'Administration
CDS	: Centre de Didactique Supérieure
CEP	: Certificat en Economie Politique
CIEAEM	: Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (<i>International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching</i>)
CREM	: Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques
CSIPWIC	: Colloques scientifiques internationaux Post-Universitaires - <i>Post-Universitaire Wetenschappelijke Internationale Colloquia</i>
DCAA	: Diplôme Complémentaire en Administration des Affaires
DEG	: Diplôme en Economie et Gestion
DIDACTIFEN	: unité de Recherche en Didactique et Formation des Enseignants
EAA	: Ecole d'Administration des Affaires
ELC	: Ecole Liégeoise de Convexité
EM	: Enseignement des Mathématiques
FEGSS	: Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales
FOPED	: Formation Pédagogique (Luxembourg)
FOPEM	: Formation Pédagogique en Mathématiques (Liège)
FOPEMA	: centre de Formation de Pédagogie Mathématique (Namur)
FS	: Faculté des Sciences
GEMME	: Groupe d'Etude des Mathématiques du Management et de l'Economie
GII	: Guerre entre Infinicoles et Infinifuges
GMM	: Guerre de la Mathématique Moderne
HEC	: Haute Ecole Commerciale – Ecole de Gestion
HS	: Hors-Série
IFRES	: Institut de Formation et de Recherche en Enseignement Supérieur
IG	: Ingénieur de Gestion
ISI	: Institut Supérieur Industriel
IREM	: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
LhdAA	: Licence à horaire décalé en Administration des Affaires
LQJ	: Le Quinzième Jour
Maths	: Mathématiques
MATHEO	: Master Thesis On line

n°	: numéro
NR	: Narration de Recherche
ORBi	: le répertoire institutionnel de l'Université de Liège
RO	: Recherche Opérationnelle
RQS	: Revue des Questions Scientifiques
SBPMef	: Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
SMB	: Société Belge de Mathématique
SRSL	: Société Royale des Sciences de Liège
T	: Tangente
TB	: Tangente Bibliothèque
TC	: Travail de Candidature
TE	: Tangente Education
TFE	: Travail de Fin d'Etudes
THS	: Tangente Hors-Série
TMI	: The Mathematical Intelligencer
TS	: Tangente Sup
TSU	: Transition Secondaire-Université
TSUM	: Transition Secondaire-Université en Mathématiques
TSUS	: Transition Secondaire-Université en Statistique
ULG, ULiège	: Université de Liège
UNamur	: Université de Namur
VVW	: Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars

Annexe 3 : Liste des auteurs cités

Nous mentionnons les noms des auteurs cités dans le corps du texte. Les nombres mentionnés entre parenthèses indiquent les numéros des sections où les noms en question se retrouvent.

Albert (7 ; 8)	Alexandre (6)	Allais (0)
Antibi (5 ; 6 ; 7 ; 8)	Archibald (5)	Archimède (5 ; 6)
Arthur (5)	Arrow (8)	Aznavour (0)
Bacon (1)	Badiou (1)	Bell(1)
Blaszczyk (5)	Bolzano (5)	Boole (2)
Borovik (5)	Bourgain (8)	Bragard (1 ; 2 ; 6 ; 7)
Breny (1 ; 2)	Brilleaud (8)	Broonen (6)
Brouwer (2)	Bruylant (2)	Bureau (1)
Cassini (2)	Catalan (7 ; 8)	Cauchy (1 ; 5)
Chevallard (2)	Cohen (8)	Coolen (6 ; 8)
Coquet (3)	Corhay (7)	Cournot (8)
Crama (4 ; 8)		
d'Alembert (5)	Daubechies (8)	De Boeck (2 ; 4)
Debreu (4)	De Bruyn (1 ; 4 ; 8)	Degreef (3)
Delagardelle (2 ; 6)	de la Vallée Poussin (5 ; 8)	Delfosse (8)
Delhaxhe (6)	Deligne (8)	De Meure (8)
De Saint-Vincent (8)	Dessard (2 : 3 ; 6)	Devolder (8)
Dister (2)	Doignon (3)	Dupin (3)
Elster (3)	Ely (5)	Erdős (8)
Esch (6 ; 8)	Euclide (1)	Euler (1 ; 5)
Fermat (5)	Ferraro (5)	Fonder §8)
Fourneau (2 ; 3 ; 6)	Fraipont (2)	Fuentes-Guillen (5)
Gadisseur (2)	Gale (3)	Galois (8)
Garnir (1 ; 2 ; 3 ; 7)	Gathon (2)	Geivaerts (3)
Gelard (2)	Gowers (6 ; 8)	Gray (5)
Gwinner (3)		
Haéri (1)	Haesbroeck (6 ; 7 ; 8)	Halleux (7)
Hamende (4)	Hansen (3)	Hauchecorne (8)
Hegel (7)	Henrard (2)	Henry (1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8)
Heuchenne (3)	Hinnion (4)	Honorez (8)
Jadin (8)	Jessef (5)	Jongmans (1;2;3;4;6;7;8)
Jurion (4)	Justens (1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8)	
Kanovei (5)	Kant (7)	Katz (5 ; 7)
Keisler (5 ; 8)	Klee (3 ; 8)	Klopp (2)
Kraitchik (8)	Kudrik (5)	Kuhlemann (5)
Kutateladze (5)		
Lagrange (4)	Lakatos (8)	Lamon (8)
Langenaken (8)	Lebrun (2)	Lecomte (2)
Lehning (8)	Leibniz (5 ; 7)	Lemaître (8)
Le Paige (7)	Lutz (5)	Lützen (5)
Makhlouf (5)	Markov (4)	Maron (6)
Mawhin (1 ; 5 ; 7 ; 8)	McGaffey (5)	Mercator (8)
Merenne (6)	Meyer (5)	Mihailescu (7)

Minguet (4)	Monfort (8)	Moors (1 ; 3)
Mormann (5)		
Navez (6 ; 8)	Nehse (3)	Newton (1 ; 5 ; 7)
Noël (6 ; 7)		
Olivier (5)		
Panza (5)	Papy (7)	Paquay (5)
Pascal (7 ; 8)	Pétry (5 ; 8)	Poincaré (6 ; 8)
Polya (1 ; 6 ; 8)	Pythagore (1)	
Quaden (2)		
Rabouin (5)	Reeb (5)	Rittaud (8)
Robinson (5 ; 7)	Rolle (5)	Rosoux (6)
Rosso (8)	Rozet (1)	Ruelle (8)
Sanders (5)	Sart (6)	Schäfenmeyer (5)
Schaps (5)	Schubring (5)	Schyns (6)
Seneta (7)	Sherry (5)	Shnider (5)
Skolem (5)	Sluse (7)	Stassart (2 ; 7)
Tao (5 ; 6)	Thiry (4)	Tits (8)
Thomas (8)	Thucydide (7)	
Ugaglia (5)		
Vaguener (8)	Valein (3)	Valette (3)
van Atten (5)	Vangeldère (2 ; 3 ; 6)	Varian (4)
Varlet (2 ; 4 ; 6)	Vergnaud (2)	Verdier (7)
Villani (8)	Vlach (3)	
Weierstrass (5)		
Zamfirescu (3)	Zénon (7)	

Contenu

- 0. Introduction (pp. 1 – 3)
- 1. Choix des études et de la profession (pp. 4 – 8)
- 2. Parcours d'enseignant (pp. 9 – 17)
- 3. Recherches en géométrie convexe (pp. 18 – 21)
- 4. Applications des mathématiques à l'économie et à la gestion (pp. 22 – 27)
- 5. Réflexions sur les fondements et l'enseignement de l'analyse (pp. 28 – 33)
- 6. Intérêt pour la didactique des mathématiques (pp. 34 – 40)
- 7. Travaux en histoire locale des mathématiques (pp. 41 – 48)
- 8. Publications de vulgarisation mathématique (pp. 49 – 58)
- Annexe 1. Liste des publications mathématiques (pp. 59 – 82)
- Annexe 2. Liste des abréviations et acronymes (pp. 83 – 84)
- Annexe 3. Liste des auteurs cités (pp. 85 – 86)
- Contenu (p. 87)