La transition secondaire-supérieur par le prisme de l'évaluation

Safia Bennabi
Recherches menées
sous la direction de Kevin Balhan

Journées jeunes chercheurs DEMIPS
Strasbourg, 27–28 mars 2023

LIÈGE université

LIÈGE université
DIDACTIfen
Didactique & Formation des Enseignants

Échos des recherches en didactique des mathématiques et du LADIMath

Motivations :

Motivations :
Le thème de la transition secondaire-supérieur est largement abordé dans la recherche en didactique des mathématiques : Gueudet (2008) le justifie comme suit :

> « *La nécessité de travaux à ce sujet apparaît encore plus pressante ces dernières années à cause de deux raisons* [...] *: la massification de l'enseignement supérieur qui amène à l'université un public auquel les mathématiciens n'étaient pas prêts à enseigner ;* [...]. »

Motivations :
Le thème de la transition secondaire-supérieur est largement abordé dans la recherche en didactique des mathématiques : Gueudet (2008) le justifie comme suit :

> « *La nécessité de travaux à ce sujet apparaît encore plus pressante ces dernières années à cause de deux raisons* [...] *: la massification de l'enseignement supérieur qui amène à l'université un public auquel les mathématiciens n'étaient pas prêts à enseigner ;* [...]. »

Observations antérieures :

- Le constat de Chevallard (1991) sur la posture monumentaliste de l'enseignement secondaire en France peut être étendu sans effort à celui en Belgique francophone.

Motivations :
Le thème de la transition secondaire-supérieur est largement abordé dans la recherche en didactique des mathématiques : Gueudet (2008) le justifie comme suit :

> « *La nécessité de travaux à ce sujet apparaît encore plus pressante ces dernières années à cause de deux raisons* [...] *: la massification de l'enseignement supérieur qui amène à l'université un public auquel les mathématiciens n'étaient pas prêts à enseigner ;* [...]. »

Observations antérieures :

- Le constat de Chevallard (1991) sur la posture monumentaliste de l'enseignement secondaire en France peut être étendu sans effort à celui en Belgique francophone.
- À cette posture monumentaliste, Rouy (2008) ajoute un repli de plus en plus marqué par les enseignants sur les procédures de calculs.

Motivations :
Le thème de la transition secondaire-supérieur est largement abordé dans la recherche en didactique des mathématiques : Gueudet (2008) le justifie comme suit :

> « *La nécessité de travaux à ce sujet apparaît encore plus pressante ces dernières années à cause de deux raisons* [. . .] *: la massification de l'enseignement supérieur qui amène à l'université un public auquel les mathématiciens n'étaient pas prêts à enseigner ;* [. . .]*.* »

Observations antérieures :

- Le constat de Chevallard (1991) sur la posture monumentaliste de l'enseignement secondaire en France peut être étendu sans effort à celui en Belgique francophone.
- À cette posture monumentaliste, Rouy (2008) ajoute un repli de plus en plus marqué par les enseignants sur les procédures de calculs. Elle explique ce repli sur les procédures par l'incapacité des professeurs à identifier un niveau de rationalité à la portée de leurs élèves.

Schneider (2011) met en évidence deux types de praxéologies : les praxéologies *modélisation* et *déduction*.

Schneider (2011) met en évidence deux types de praxéologies : les praxéologies *modélisation* et *déduction*.

Définition

Les *praxéologies modélisation* sont celles concernant la modélisation mathématique des systèmes intra ou extra-mathématiques. La *praxis* consiste alors à réaliser les tâches que l'on se donne au moyen d'une technique particulière. Ces tâches portent à ce stade sur des objets préconstruits, au sens de Chevallard (1991). Le *logos* est alors une technologie et non une théorie à ce stade.

Schneider (2011) met en évidence deux types de praxéologies : les praxéologies *modélisation* et *déduction*.

Définition

Les *praxéologies modélisation* sont celles concernant la modélisation mathématique des systèmes intra ou extra-mathématiques. La *praxis* consiste alors à réaliser les tâches que l'on se donne au moyen d'une technique particulière. Ces tâches portent à ce stade sur des objets préconstruits, au sens de Chevallard (1991). Le *logos* est alors une technologie et non une théorie à ce stade.

Exemple : Aire sous la courbe par encadrement.

Schneider (2011) met en évidence deux types de praxéologies : les praxéologies *modélisation* et *déduction*.

Définition

Les *praxéologies modélisation* sont celles concernant la modélisation mathématique des systèmes intra ou extra-mathématiques. La *praxis* consiste alors à réaliser les tâches que l'on se donne au moyen d'une technique particulière. Ces tâches portent à ce stade sur des objets préconstruits, au sens de Chevallard (1991). Le *logos* est alors une technologie et non une théorie à ce stade.

Exemple : Aire sous la courbe par encadrement.

Définition

Les *praxéologies déductions* sont celles qui, au terme des praxéologies modelisation, définissent l'objet préconstruit à partir de la technique modélisée dans la première praxéologie afin de donner prise au raisonnement déductif, en établissant ainsi une théorie au sens où pourrait l'entendre un mathématicien.

Schneider (2011) met en évidence deux types de praxéologies : les praxéologies *modélisation* et *déduction*.

Définition

Les *praxéologies modélisation* sont celles concernant la modélisation mathématique des systèmes intra ou extra-mathématiques. La *praxis* consiste alors à réaliser les tâches que l'on se donne au moyen d'une technique particulière. Ces tâches portent à ce stade sur des objets préconstruits, au sens de Chevallard (1991). Le *logos* est alors une technologie et non une théorie à ce stade.

Exemple : Aire sous la courbe par encadrement.

Définition

Les *praxéologies déductions* sont celles qui, au terme des praxéologies modelisation, définissent l'objet préconstruit à partir de la technique modélisée dans la première praxéologie afin de donner prise au raisonnement déductif, en établissant ainsi une théorie au sens où pourrait l'entendre un mathématicien.

Exemple : Définition de l'intégrale curviligne.

Pour Schneider (2011), ces deux praxéologies constituent chacune une facette de l'activité mathématique. Les praxéologies du type modélisation relèvent davantage de l'enseignement secondaire tandis que les praxéologies déductives sont légion à l'université.

Pour Schneider (2011), ces deux praxéologies constituent chacune une facette de l'activité mathématique. Les praxéologies du type modélisation relèvent davantage de l'enseignement secondaire tandis que les praxéologies déductives sont légion à l'université.

Rouy (2008) montre que dans les faits, l'enseignement secondaire tient plus des praxéologies *à trous* :

- Les contenus des leçons sont tirés des cours universitaires et, fautes de moyens, sont édulcorés.

Pour Schneider (2011), ces deux praxéologies constituent chacune une facette de l'activité mathématique. Les praxéologies du type modélisation relèvent davantage de l'enseignement secondaire tandis que les praxéologies déductives sont légion à l'université.

Rouy (2008) montre que dans les faits, l'enseignement secondaire tient plus des praxéologies *à trous* :

- Les contenus des leçons sont tirés des cours universitaires et, fautes de moyens, sont édulcorés. *Exemples :*
  - Admettre des théorèmes et ne démontrer que les corollaires triviaux.
  - Définir rigoureusement le concept de limite mais n'en démontrer aucune propriété algébrique.
  - ...
- Au niveau des justifications des procédures, il n'y en a pas. Bien souvent, au niveau des démonstrations, on a des arguments du type : « Il suffit de voir sur le dessin. »

Théorème des valeurs intermédiaires

1. Énonce du T.V.I.

Théorème 4. (T.V.I.)
Soit f une fonction **définie** et **continue** sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe ***au moins un*** réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

On dit que ***toutes les valeurs intermédiaires*** entre $f(a)$ et $f(b)$ ***sont atteintes au moins une fois*** par la fonction f.

Remarque.
On n'a pas parlé de l'intervalle $[f(a);f(b)]$, ni de $[f(b);f(a)]$ car, pour l'instant, on ne sait pas *a priori*, laquelle des deux valeurs est plus grande que l'autre.

Illustration graphique

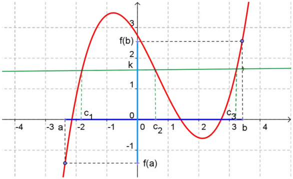


Fig. 1.

Dans notre cas de figure, selon la position de k dans l'intervalle $[f(a);f(b)]$, il existe une, deux ou trois valeurs de $c \in [a;b]$ telles que $f(c) = k$.

Par conséquent, dans ce cas général, il existe *au moins un* réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

https://www.logamaths.fr/theoreme-des-valeurs-intermediaires-tvi/

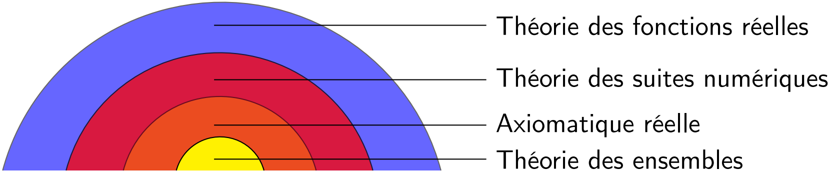
En résumé, en Belgique francophone :

En résumé, en Belgique francophone :

- L'enseignement secondaire est focalisé sur l'application de procédures.
- À l'université, en mathématiques, c'est le jeu déductif est qui est central.

En résumé, en Belgique francophone :

- L'enseignement secondaire est focalisé sur l'application de procédures.
- À l'université, en mathématiques, c'est le jeu déductif est qui est central.



Le projet de recherche

La modélisation que fait Schneider (2011) en praxéologies « modélisation » et « déduction » de l'activité mathématique dans l'institution scolaire et l'institution universitaire, respectivement, explique *a posteriori* (du moins en partie) le taux d'échec en première année à l'université :

- l'activité mathématique au secondaire est réduite à des procédures de calculs et l'évaluation des élèves porte uniquement sur les techniques (*a fortiori*).
- Tandis qu'à l'université l'évaluation des étudiants porte à la fois la technique (dont le niveau de difficulté est accru) mais surtout sur le raisonnement déductif qui s'amenuise de plus en plus en secondaire.

De plus,

- en secondaire :
  - Les élèves sont interrogés de façon sommative régulièrement sur la matière vue durant les leçons.
  - Au delà des interrogations formelles, le professeur dispose de moyens pour porter un regard sur l'activité mathématiques de ses élèves (évaluation formative, passage dans les bancs, ...)
- Tandis qu'à l'université :
  - les étudiants sont soumis, s'ils le désirent, dans le courant du mois de novembre, à une interrogation purement formative dont le sujet est déterminé en concertation entre les étudiants et le professeur.
  - À exceptions près, le seul moment où le professeur porte un regard sur l'activité mathématique de l'étudiant est l'examen.

Si le changement d'institution peut être perçu comme le moment de la transition, Gueudet (2008) élargit l'échelle de temps consacrée à la transition aux deux années précédant ce changement (et deux ans après).

Si le changement d'institution peut être perçu comme le moment de la transition, Gueudet (2008) élargit l'échelle de temps consacrée à la transition aux deux années précédant ce changement (et deux ans après).

Les mathématiques de l'université étant celles du professionnel, il s'agit donc de tendre vers ces mathématiques. Ainsi, l'apport de ma recherche se situe au niveau des praxéologies déduction :

« *Est-il possible de jouer le jeu déductif dès le secondaire ?* ».

Pour répondre à cette question, formulée en termes naïfs, nous nous attelons à la construction d'un dispositif d'évaluation en secondaire qui « lisserait » cette véritable fracture entre les deux institutions.

À cette fin, le TVI nous semble être l'occasion d'une porte d'entrée vers le raisonnement déductif et ce, pour plusieurs raisons :

- d'une part, d'un point de vue épistémologique.

Pour répondre à cette question, formulée en termes naïfs, nous nous attelons à la construction d'un dispositif d'évaluation en secondaire qui « lisserait » cette véritable fracture entre les deux institutions.

À cette fin, le TVI nous semble être l'occasion d'une porte d'entrée vers le raisonnement déductif et ce, pour plusieurs raisons :

- d'une part, d'un point de vue épistémologique.
- D'autre part, évaluer les connaissances et les compétences de l'élève nécessite une étude de l'apprentissage sur un champ conceptuel. En effet, pour Vergnaud (1986, p.28)

  « Étudier l'apprentissage d'un concept isolée ou une technique n'a pratiquement pas de sens. »

Comme déjà annoncé, en secondaire, le TVI fait partie des théorèmes qui subissent une ostention forte. Le professeur tente au moyen d'illustrations de convaincre ses élèves du bien fondé du théorème.

Cette façon de procéder (en se convaincant à partir de la représentation) passe sous silence les propriétés des fonctions continues et donc des propriétés topologiques de $\mathbb{R}$.

La méthode du secondaire n'est pas sans rappeler la formulation et la démonstration de ce théorème par Cauchy :

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante.

4.e Théorème. *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. Pour établir la proposition précédente, $\boxed{\text{il suffit de faire voir}}$ que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X : or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$, et qui passe 1.° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2.° par le point correspondant aux coordonnées X et $f(X)$, sera continue entre ces deux points : et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y = b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

Selon Bolzano, les théorèmes d'analyse ne peuvent être fondés sur des évidences géométriques ou graphiques :

> *« Dans la méthode de démonstration la plus courante [de ce théorème], on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces coordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir à la géométrie.* [...] *En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences », mais doivent être bien plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. »*

–Bolzano, 1817.

Bolzano poursuit :

> *« Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression. »*

Suite à cette prise de position philosophique sur les mathématiques, Bolzano entreprend de démontrer le TVI de façon purement analytique. Pour ce faire, il devra établir une propriété topologique fondamentale des réels : la propriété de la borne supérieure.

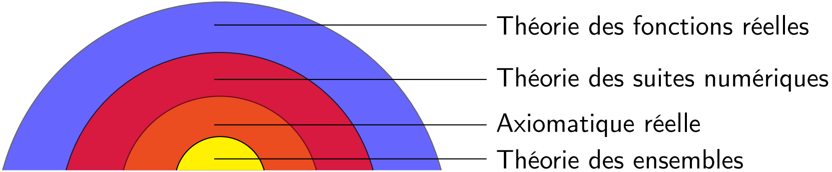
Bolzano poursuit :

> *« Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression. »*

Suite à cette prise de position philosophique sur les mathématiques, Bolzano entreprend de démontrer le TVI de façon purement analytique. Pour ce faire, il devra établir une propriété topologique fondamentale des réels : la propriété de la borne supérieure.

À la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, il devient clair que fonder l'analyse passe obligatoirement par la « construction » des nombres réels.

Par ce dispositif, les élèves seraient amenés à établir le TVI en traversant chacune des couches de l'organisation mathématique.



Bibliographie

- Y. Chevallard.
  La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné.
  La Pensée Sauvage, 1991.

- G. Gueudet.
  La transition secondaire-supérieur : Résultats de recherches didactiques et perspectives
  Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques, 2008.

- M. Schneider.
  Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ?
  La Pensée Sauvage, 2011.

- E. Rouy.
  Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire : le cas éclairant du thème des dérivées
  Thèse de doctorat, 2008.

- G. Vergnaud.
  Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives.
  Petit x, 1986.