



Cours de Géométrique

16. Les mesures de superficie et de volume

[Prof. C. Debouche](#)

Les références bibliographiques citées dans ce texte sont consultables en suivant le lien
<https://hdl.handle.net/2268/293535>

Sommaire

16.1. Introduction	3
16.2. La mesure d'une superficie	3
16.2.1. Superficie d'un polygone défini par des coordonnées polaires	4
16.2.2. Superficie d'un polygone défini par des coordonnées rectangulaires	9
16.3. La mesure d'un volume.....	13

16. Les mesures de superficie et de volume

16.1. Introduction

Il est fréquent de devoir estimer la superficie d'une parcelle de terrain. Cette caractéristique de la parcelle peut être nécessaire pour établir sa valeur, sa productivité ou sa capacité à recevoir telle ou telle installation, etc. Il est habituel d'établir la superficie plane de la parcelle, c'est-à-dire la superficie de la projection de ladite parcelle sur une surface de référence caractérisée par une hauteur nulle ($z = 0$). Cette surface de référence est généralement celle qui est utilisée dans le système de coordonnées cartographiques utilisé dans le pays concerné. Par exemple pour ce qui concerne la Belgique, il s'agira du cône de projection, qui est sécant à l'ellipsoïde de référence (paragraphe 3.4.3¹ à 3.4.5¹). A noter que l'incidence de la hauteur de la parcelle sur sa superficie est pratiquement négligeable.

Nous ne traiterons dans ce chapitre que de l'estimation de la superficie d'une parcelle dont la forme est approchée par un polygone.

Les coordonnées cartographiques des sommets de ce polygone sont considérées comme disponibles, soit sous forme de coordonnées polaires levées par rayonnement (§ 16.2.1) soit sous forme de coordonnées rectangulaires levées par un récepteur GNSS par exemple (§ 16.2.2).

Dans chacun de ces deux cas, la procédure de calcul de la superficie est présentée de même que celle permettant de calculer la précision de la superficie ainsi estimée.

On peut également devoir estimer un volume. Il s'agit du volume délimité par une surface "mesurable", un plan d'altitude constante et les plans verticaux projetant les limites de cette surface sur ce plan. Il est également supposé que la surface en question peut être approchée par un ensemble de triangles plans. La procédure de calcul du volume ainsi défini est exposée au paragraphe 16.3, en supposant que soient connues les coordonnées cartographiques (x , y et z) des sommets de ces triangles. Cette situation peut se présenter, par exemple, pour l'estimation du volume d'une décharge, d'un réservoir naturel (étang), d'un gisement, d'une carrière, etc.

16.2. La mesure d'une superficie

Il s'agit de mesurer la superficie d'une parcelle de terrain ou, plus précisément, la superficie de la projection de la parcelle sur la surface de référence du système de coordonnées choisi. Cette superficie est donc indépendante du relief de cette parcelle.

On suppose que la parcelle peut être assimilée à un polygone dont les coordonnées planes des sommets sont disponibles.

Nous envisagerons le cas où les sommets de la parcelle sont localisés par leurs coordonnées polaires, issues d'un rayonnement (§ 12.3²) par exemple, et celui où les coordonnées rectangulaires planes des sommets sont connues, issues par exemple d'un cheminement polygonal (§11.3³) ou d'un levé par récepteur GNSS (chapitre 13⁴).

¹ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

² <https://hdl.handle.net/2268/301112>

³ <https://hdl.handle.net/2268/294008>

16.2.1. Superficie d'un polygone défini par des coordonnées polaires

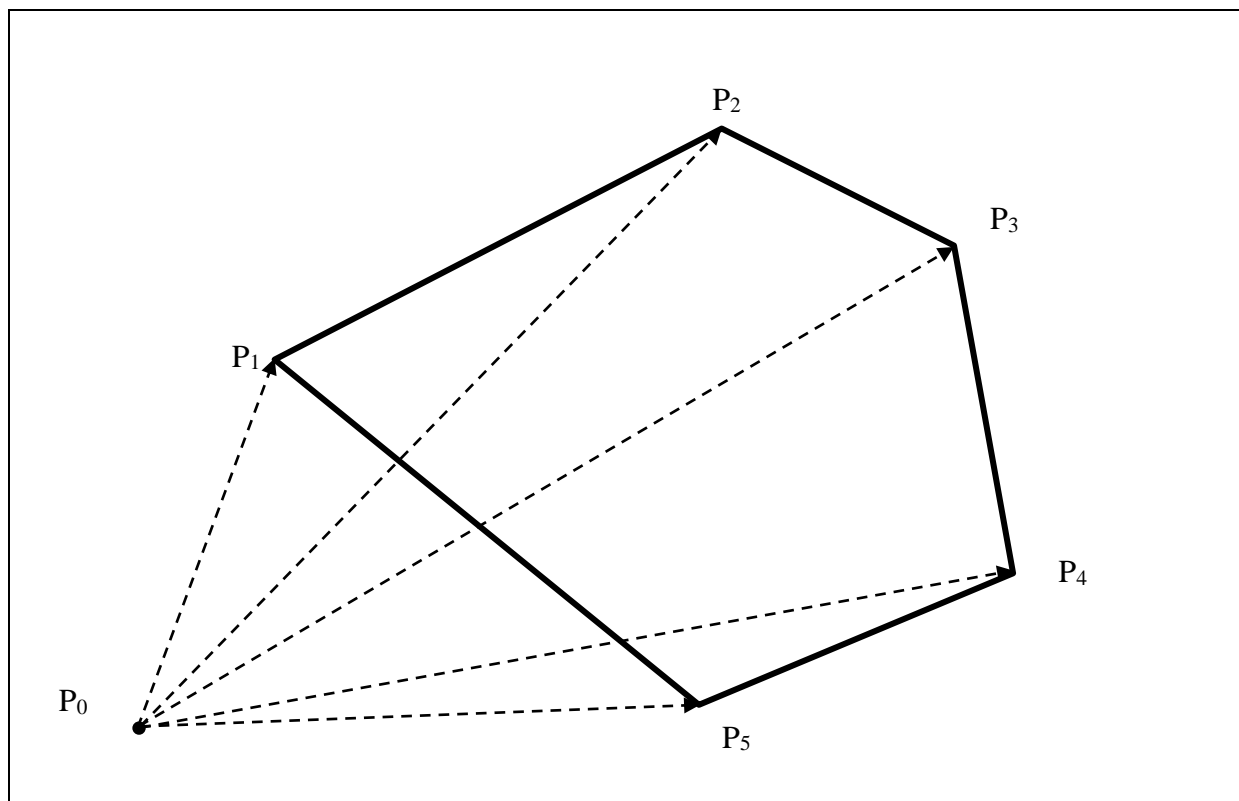


Figure 16.2.1. Polygone défini en coordonnées polaires

1° Soit un polygone, levé par rayonnement depuis un point P_0 (Figure 16.2.1), dont les sommets, parcourus dans le sens dextrogyre (sens de rotation des aiguilles d'une montre) sont numérotés P_1 à P_n , n étant égal à 5 dans cet exemple.

La superficie du polygone délimité par les sommets P_1 à P_5 peut se calculer à partir des surfaces des différents triangles définis sur cette figure à partir de la relation :

$$S = P_0P_1P_2 + P_0P_2P_3 + P_0P_3P_4 + P_0P_4P_5 - P_0P_1P_5,$$

où $P_0P_iP_j$ est le triangle délimité par les sommets P_0 , P_i et P_j ,

S est la superficie du polygone délimité par les sommets P_1 à P_5 .

En vertu de la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S},$$

la superficie du polygone peut se calculer par la relation :

$$S = \frac{1}{2} [d_1d_2 \sin(g_2 - g_1) + d_2d_3 \sin(g_3 - g_2) + d_3d_4 \sin(g_4 - g_3) + d_4d_5 \sin(g_5 - g_4) - d_1d_5 \sin(g_5 - g_1)],$$

où d_i est la distance séparant les points S_0 et S_i , projetée sur la surface de référence (§ 9.4),

g_i est le gisement de la direction définie par les sommets S_0 et S_i .

⁴ <https://hdl.handle.net/2268/301113>

Comme :

$$\sin(g_5 - g_1) = -\sin(g_1 - g_5),$$

L'expression précédente peut se réécrire sous la forme générale :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} \sin(g_{i+1} - g_i),$$

en convenant que le sommet identifié par l'indice n+1 correspond à P₁.

La position du point P₀ est absolument quelconque et peut être située à l'intérieur du polygone. Par ailleurs comme les arguments des sinus sont des différences de gisement, ces derniers peuvent être remplacés par les directions lues sur le cercle horizontal de la station totale lors du rayonnement ce qui donne l'expression :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} \sin(l_{i+1} - l_i)$$

où l_i est la direction lue sur le cercle horizontal de la station totale installée sur le point P₀ lors de la visée vers le point P_i.

2° Les distances et directions sont mesurées. Elles sont donc affectées inévitablement d'erreurs accidentelles qui déterminent la précision de la superficie calculée. Pour pouvoir calculer cette précision il faut déterminer la variance de l'estimation de la superficie à partir de la formule de calcul de superficie ci-dessus, en fonction des écart-types σ_d et σ_l , qui caractérisent la dispersion des erreurs accidentelles commises sur les coordonnées (polaires) distance d_i et direction l_i.

Le développement en série de Taylor de la superficie S autour des valeurs des distances et directions et limité aux termes contenant les dérivées partielles de 1^{er} ordre est :

$$\widehat{S}(\widehat{D}, \widehat{L}) \approx S(D, L) + \sum_{i=1}^n (\widehat{d}_i - d_i) \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial d_i} \right)_{d_i} + \sum_{i=1}^n (\widehat{l}_i - l_i) \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial l_i} \right)_{l_i},$$

où \widehat{S} est la superficie estimée à partir des valeurs mesurées des coordonnées des points,

D et L sont les vecteurs des distances et directions des n points,

\widehat{D} et \widehat{L} sont les vecteurs des valeurs mesurées des distances et directions des n points,

\widehat{d}_i et \widehat{l}_i sont les valeurs mesurées des distances et directions du i^{ème} point.

Si les erreurs accidentelles commises sur la mesure de la distance d_i peuvent être considérées comme indépendantes des erreurs accidentelles commises sur la mesure de la direction l_i , la variance de la superficie ainsi explicitée se calcule par l'expression :

$$\sigma_S^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial d_i} \right)_{d_i}^2 \cdot \sigma_{d_i}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial l_i} \right)_{l_i}^2 \cdot \sigma_{l_i}^2,$$

où σ_S^2 est la variance de la valeur estimée de la superficie,
 $\sigma_{d_i}^2$ est la variance de la valeur mesurée de la distance d_i ,
 $\sigma_{l_i}^2$ est la variance de la valeur mesurée de la direction l_i .

Les dérivées partielles de la superficie par rapport aux distances et aux directions se calculent par les expressions :

$$\frac{\partial S}{\partial d_i} = \frac{1}{2} \left[d_{i-1} \cdot \sin(l_i - l_{i-1}) + d_{i+1} \cdot \sin(l_{i+1} - l_i) \right],$$

$$\frac{\partial S}{\partial l_i} = \frac{1}{2} \left[d_i \cdot (d_{i-1} \cdot \cos(l_i - l_{i-1}) - d_{i+1} \cdot \cos(l_{i+1} - l_i)) \right].$$

La variance devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &\approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[d_{i-1} \cdot \sin(l_i - l_{i-1}) + d_{i+1} \cdot \sin(l_{i+1} - l_i) \right]^2 \cdot \sigma_{d_i}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ d_i \cdot \left[d_{i-1} \cdot \cos(l_i - l_{i-1}) - d_{i+1} \cdot \cos(l_{i+1} - l_i) \right] \right\}^2 \cdot \sigma_{l_i}^2 \end{aligned}$$

Les valeurs des distances d_i et des directions l_i ne sont pas connues. Elles peuvent évidemment être remplacées par les valeurs mesurées de ces coordonnées \widehat{d}_i et \widehat{l}_i et la valeur estimée de la variance de la valeur estimée de la superficie s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_S^2 &\approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[\widehat{d}_{i-1} \cdot \sin(\widehat{l}_i - \widehat{l}_{i-1}) + \widehat{d}_{i+1} \cdot \sin(\widehat{l}_{i+1} - \widehat{l}_i) \right]^2 \cdot \sigma_{d_i}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{d}_i \cdot \left[\widehat{d}_{i-1} \cdot \cos(\widehat{l}_i - \widehat{l}_{i-1}) - \widehat{d}_{i+1} \cdot \cos(\widehat{l}_{i+1} - \widehat{l}_i) \right] \right\}^2 \cdot \sigma_{l_i}^2 \end{aligned}$$

Exemple 16.2.1. Calcul de la superficie d'un polygone levé par rayonnement.

La figure 16.2.2 présente une parcelle en forme de polygone à six sommets notés P₁ à P₆ levée par rayonnement à partir du point P₀. Le tableau 16.2.1 donne les mesures de distance et de direction effectuées pour chacune des six visées.

La superficie se calcule par la formule présentée ci-dessus et vaut :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} \sin(g_{i+1} - g_i) = 12.005,489 \text{ m}^2.$$

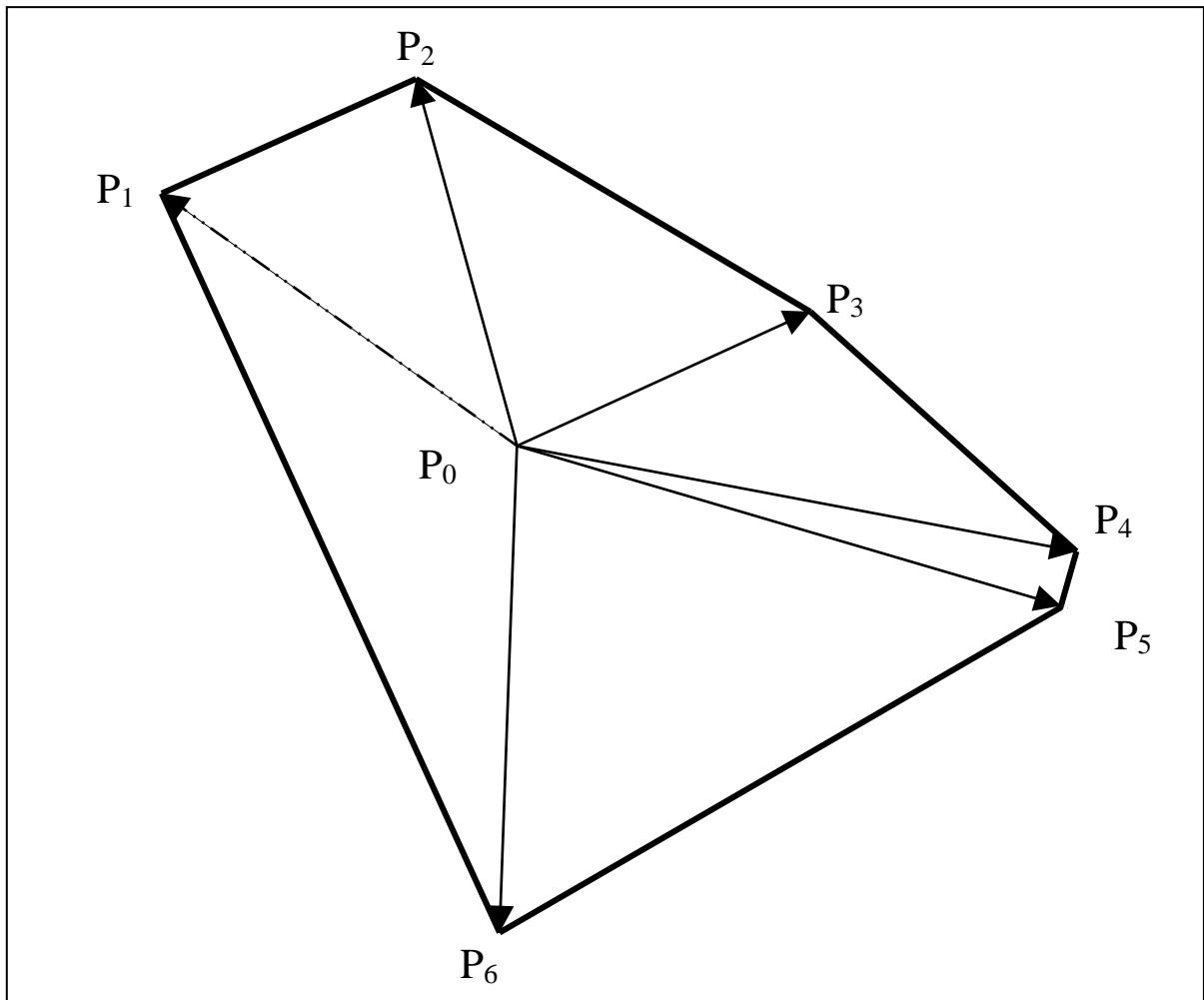


Figure 16.2.2. Parcelle en polygone à six côtés levée par rayonnement.

Tableau 16.2.1. Distances horizontales et directions mesurées par rayonnement sur une parcelle à six sommets.

Points	Distances mesurées \hat{d}_i (m)	Directions mesurées \hat{l}_i (grade)
P ₁	75,447	53,1217
P ₂	65,606	96,5292
P ₃	54,819	186,2970
P ₄	97,765	225,8965
P ₅	97,378	232,4776
P ₆	83,935	316,5626

L'écart-type des directions mesurées est de 0.0050 grade.

L'écart-type des distances mesurées est de 0.02 m.

La variance se calcule de même, à partir de ces valeurs, en fonction de la formule :

$$\hat{\sigma}_S^2 \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[\hat{d}_{i-1} \cdot \sin(\hat{l}_i - \hat{l}_{i-1}) + \hat{d}_{i+1} \cdot \sin(\hat{l}_{i+1} - \hat{l}_i) \right]^2 \cdot \sigma_{\hat{d}_i}^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{d}_i \cdot \left[\hat{d}_{i-1} \cdot \cos(\hat{l}_i - \hat{l}_{i-1}) - \hat{d}_{i+1} \cdot \cos(\hat{l}_{i+1} - \hat{l}_i) \right] \right\}^2 \cdot \sigma_{\hat{l}_i}^2 = 7,5565 \text{ m}^4,$$

valeur dont on peut tirer l'écart-type de la superficie mesurée :

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{7,5565} = 2,75 \text{ m}^2.$$

16.2.2. Superficie d'un polygone défini par des coordonnées rectangulaires

Rappelons la formule de calcul de la superficie présentée au début du paragraphe précédent, qui peut être développée comme suit (l'indice $n+1$ correspondant à l'indice 1):

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} \sin(g_{i+1} - g_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d_i \cdot d_{i+1} \cdot \sin l_{i+1} \cdot \cos l_i - d_i \cdot d_{i+1} \cdot \sin l_i \cdot \cos l_{i+1}).$$

Le point P_0 peut occuper une situation quelconque. Posons-le sur l'origine du système de coordonnées orthonormé (figure 16.2.3).

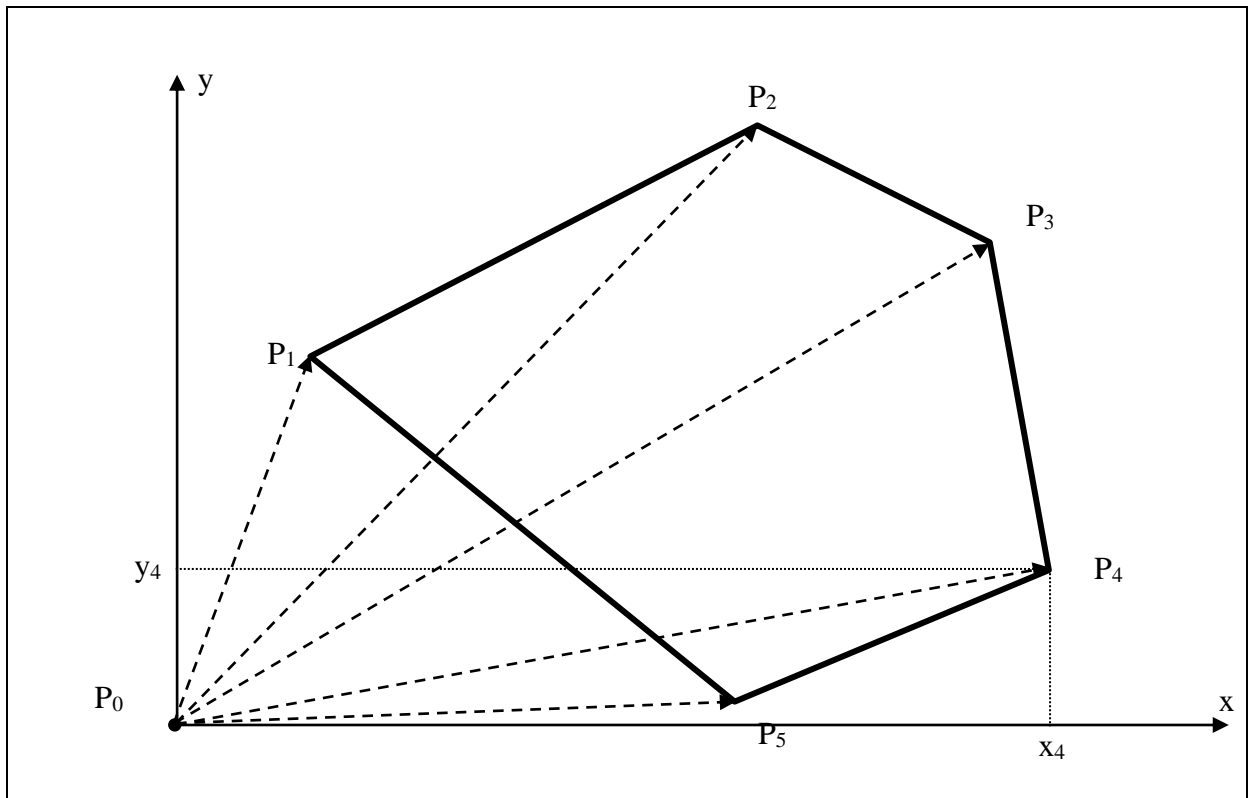


Figure 16.2.3. Polygone défini en coordonnées rectangulaires

Dans ces conditions et en fonction de la définition du gisement on a les relations suivantes :

$$x_i = d_i \cdot \sin g_i \quad \text{et} \quad y_i = d_i \cdot \cos g_i,$$

x_i et y_i étant les coordonnées en x et en y du $i^{\text{ème}}$ point, ce qui permet de réécrire la formule de la superficie de la manière suivante :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i+1}).$$

Si cette formule se prête bien au calcul, elle peut évoluer vers une forme analytique plus simple par le raisonnement suivant, fondé sur la relation (l'indice 0 est remplacé par l'indice n)^o:

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_{i-1} - x_{i+1} \cdot y_i) = 0,$$

ce qui permet d'écrire :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i+1} + x_i \cdot y_{i-1} - x_{i+1} \cdot y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1}).$$

Avec l'expression :

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i-1} \cdot y_i) = 0,$$

on démontre de même :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}).$$

On obtient ainsi deux formules de calcul de la superficie du polygone à partir des coordonnées planes de ses sommets :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1})$$

A noter que si les sommets sont numérotés dans le sens lévogyre de parcours du polygone (sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre), la superficie obtenue en appliquant ces calculs est négative. Il suffit d'ignorer son signe.

2° Les erreurs aléatoires intervenues dans la mesure des coordonnées en X et Y induisent des erreurs aléatoires sur la détermination de la superficie. Soit donc à déterminer l'écart-type de l'estimation de la superficie, en fonction des écarts-types σ_X et σ_Y qui caractérisent la dispersion des erreurs aléatoires commises sur les coordonnées en X et en Y.

Le développement en série de Taylor de la superficie S autour des valeurs des coordonnées en x et en y des n points et limité aux termes contenant les dérivées partielles de 1^{er} ordre est :

$$\hat{S}(\hat{X}, \hat{Y}) \approx S(X, Y) + \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i) \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i) \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)_{y_i}.$$

où \hat{S} est la superficie estimée à partir des valeurs mesurées des coordonnées des points,

X et Y sont les vecteurs des coordonnées en x et en y des n points,

\hat{X} et \hat{Y} sont les vecteurs des valeurs mesurées des coordonnées en x et en y des n points,

\hat{x}_i et \hat{y}_i sont les valeurs estimées des coordonnées en x et en y du i^{ème} point,

Si les erreurs accidentelles commises sur la mesure de la coordonnée en x peuvent être considérées comme indépendantes des erreurs accidentelles commises sur la mesure de la coordonnée en y, la variance de la superficie ainsi exprimée se calcule par la relation :

$$\sigma_S^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)_{x_i}^2 \cdot \sigma_{\hat{x}_i}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)_{y_i}^2 \cdot \sigma_{\hat{y}_i}^2,$$

où $\sigma_{\hat{x}_i}^2$ est la variance de la valeur mesurée de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée en x,
 $\sigma_{\hat{y}_i}^2$ est la variance de la valeur mesurée de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée en y,
 σ_S^2 est la variance de la valeur estimée de la superficie.

Les dérivées partielles par rapport à x_i et y_i sont :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \cdot (y_{i-1} - y_{i+1})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right) = \frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})$$

Donc, la variance de la superficie devient :

$$\sigma_S^2 \approx \frac{1}{4} \cdot \sigma_{\hat{x}_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i-1} - y_{i+1})^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_{\hat{y}_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1})^2.$$

Les valeurs des coordonnées x_i et y_i ne sont pas connues. Elles peuvent évidemment être remplacées par les valeurs mesurées de ces coordonnées \hat{x}_i et \hat{y}_i et la valeur estimée de la variance de la valeur estimée de la superficie s'écrit :

$$\hat{\sigma}_S^2 \approx \frac{1}{4} \cdot \sigma_{\hat{x}_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_{i-1} - \hat{y}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_{\hat{y}_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1})^2.$$

Rappelons que la valeur 0 de l'indice correspond à la valeur n et la valeur n+1 de l'indice correspond à la valeur 1. Si on peut admettre que la précision des mesures des coordonnées en x et en y sont identiques, on peut écrire :

$$\sigma_{\hat{x}_i}^2 = \sigma_{\hat{y}_i}^2 = \sigma^2,$$

alors la variance de la superficie s'écrit plus simplement :

$$\hat{\sigma}_S^2 \approx \frac{1}{4} \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left[(\hat{y}_{i-1} - \hat{y}_{i+1})^2 + (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1})^2 \right] = \frac{1}{4} \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^n \hat{d}_{i-1,i+1}^2,$$

où $\hat{d}_{i-1,i+1}$ est valeur estimée de la distance qui sépare les points P_{i-1} et P_{i+1} .

Exemple 16.2.2. Calcul de la superficie d'un polygone levé par un récepteur GNSS.

La figure 16.2.4 présente une parcelle en forme de polygone à six sommets notés P₁ à P₆, identique à celle de l'exemple 16.2.1, levée au moyen d'un récepteur GNSS posé sur chacun des sommets. Le tableau 16.2.2 donne les coordonnées mesurées des six sommets. Elles sont exprimées dans le système de référence Lambert 72, appliqué en Belgique (§ 3.4.4⁵).

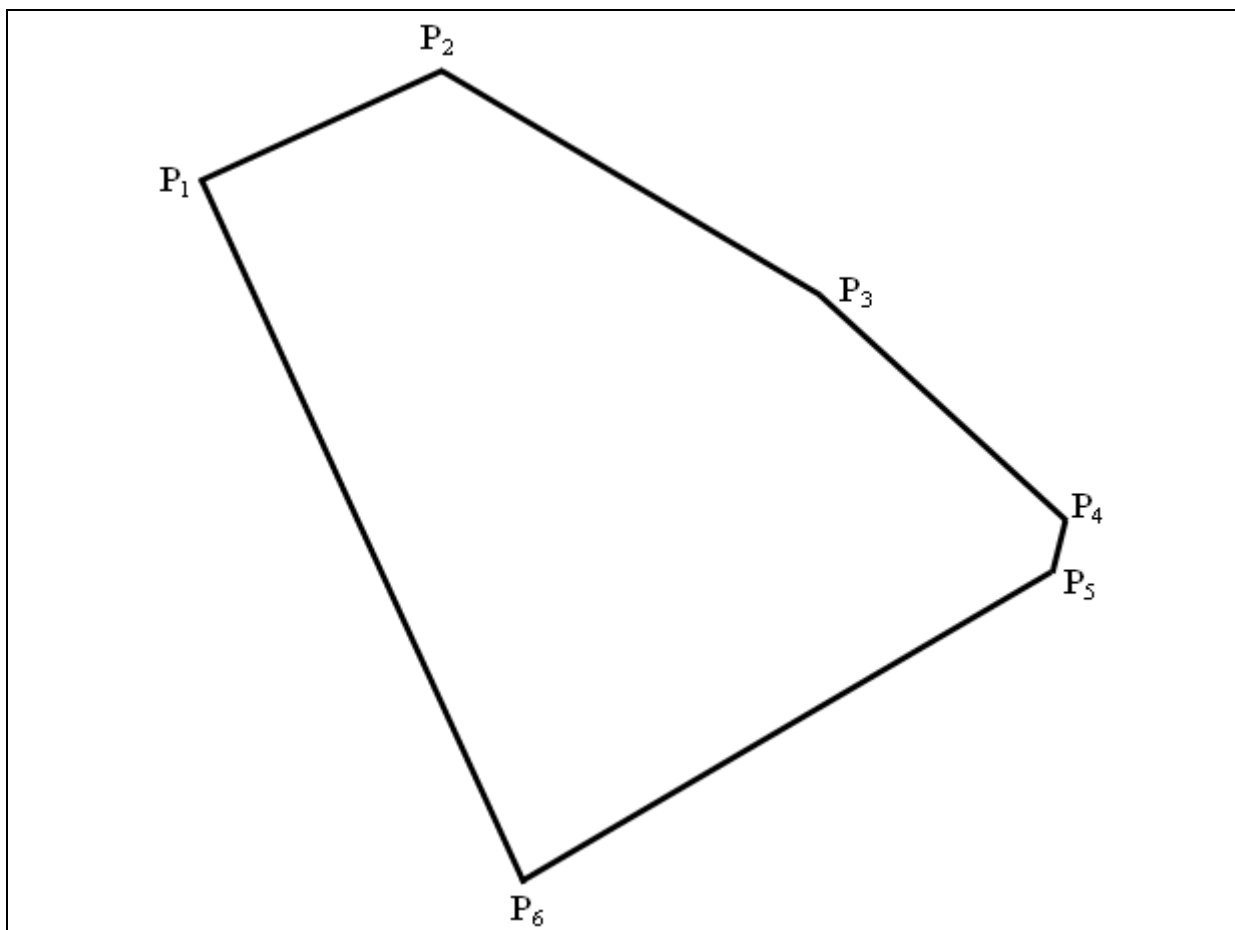


Figure 16.2.4. Parcelle en polygone à six côtés levée au moyen d'un récepteur GNSS.

Tableau 16.2.2. Coordonnées des sommets d'une parcelle en polygone à six sommets, levées avec un récepteur GNSS et exprimées dans le référentiel belge Lambert 72.

Points	Coordonnées en x (m)	Coordonnées en y (m)
P ₁	215.919,03	123.985,420
P ₂	215.962,81	124.005,080
P ₃	216.030,32	123.965,050
P ₄	216.076,69	123.923,720
P ₅	216.073,93	123.914,030
P ₆	215.977,30	123.858,140

⁵ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

La superficie se calcule par la formule présentée ci-dessus et vaut :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}) = 11.994,31 \text{ m}^2.$$

La précision du récepteur est estimée aux valeurs suivantes :

$$\hat{\sigma}_x = 0,015 \text{ m},$$

$$\hat{\sigma}_y = 0,015 \text{ m}.$$

La variance se calcule de même, à partir de ces valeurs, en fonction de la formule :

$$\hat{\sigma}_S^2 \approx \frac{1}{4} \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left[(\hat{y}_{i-1} - \hat{y}_{i+1})^2 + (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1})^2 \right] = \frac{1}{4} \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^n \hat{d}_{i-1,i+1}^2 = 5,7355 \text{ m}^4,$$

ce qui permet le calcul de l'écart-type de la superficie :

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{5,7355} = 2,39 \text{ m}^2.$$

Cette précision est pratiquement équivalente à celle qui a été obtenue par rayonnement (exemple 16.2.1), dans les conditions de précision des deux techniques.

16.3. La mesure d'un volume

1° On peut rencontrer différents types de volume à mesurer suivant leur caractère plus ou moins régulier (volume d'une tranchée à creuser, volume des remblais et déblais d'une route à créer, etc.). Nous présentons ici une démarche générale permettant le calcul d'un volume délimité par une parcelle de forme polygonale quelconque, sa projection sur une surface horizontale d'altitude déterminée z_0 et les plans verticaux projetant les côtés de la parcelle sur cette surface horizontale.

Les coordonnées x , y et z des sommets du polygone formant la parcelle en question sont levées ainsi que celles d'un certain nombre de points situés dans la parcelle et choisis de manière à rendre compte des variations d'altitude de cette parcelle.

Sur une représentation planimétrique de ces points, des triangles sont dessinés de manière à ce qu'ils couvrent toute la surface de la parcelle et que tous les points mesurés soient utilisés comme sommet d'au moins un triangle. Les points levés à l'intérieur de la parcelle doivent être choisis de manière à ce que l'ensemble de la surface des ces triangles corresponde au mieux à la surface de la parcelle. Les côtés de ces triangles doivent donc correspondre à des modifications de la pente. La figure 16.3.1 donne un exemple de tracé de ces triangles.

Cette situation peut correspondre par exemple au volume de matériaux d'une carrière ou au volume immergeable d'une parcelle ou au volume d'une décharge à excaver, etc.

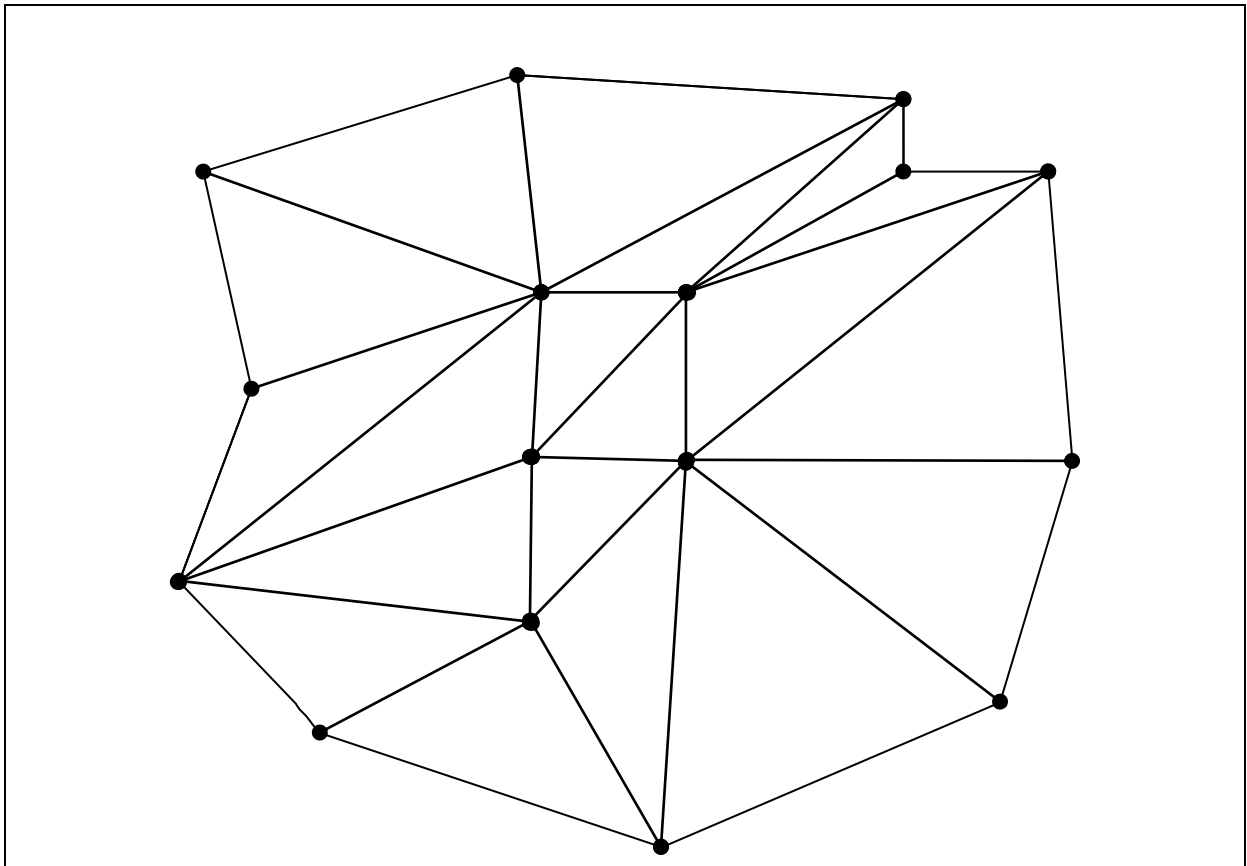


Figure 16.3.1. Implantation des sommets d’une parcelle polygonale et des points levés à l’intérieur de cette parcelle – tracés des triangles définissant le modèle numérique du terrain

Reprenant ce qui a été présenté au paragraphe 16.2.2, on peut calculer la superficie plane de chacun de ces triangles à partir de la formule :

$$S_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 y_i (x_{i+1} - x_{i-1}),$$

où S_j est la superficie plane du $j^{\text{ème}}$ triangle,
 x_i et y_i sont les coordonnées en x et en y des trois sommets du $j^{\text{ème}}$ triangle, numéroté en parcourant le triangle dans le sens dextrogyre et en convenant que l’indice 0 est remplacé par l’indice 3 et l’indice 4 remplacé par l’indice 1.

Le volume situé entre chacun de ces triangles, la surface d'altitude z_0 et les plans verticaux projetant ses côtés sur cette surface est égal au produit de sa surface par la moyenne des distances verticales séparant chacun de ses sommets de ladite surface. Il peut donc se calculer par la relation :

$$V_j = S_j \bar{h}_j$$

où :

$$\bar{h}_j = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (z_i - z_0) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i - z_0,$$

où \bar{h}_j est la moyenne des distances verticales séparant chacun des sommets du $j^{\text{ème}}$ triangle de ladite surface, également appelée hauteur moyenne,
 z_i pour i variant de 1 à 3, représente les altitudes des trois sommets du $j^{\text{ème}}$ triangle.

Le volume total est évidemment obtenu par la somme des volumes associés à chacun des triangles et se calcule donc par la relation :

$$V = \sum_{j=1}^p S_j \bar{h}_j,$$

où p représente le nombre de triangles définis sur la parcelle et couvrant l'entièreté de celle-ci.

Si l'altitude z_0 est inférieure aux altitudes de tous les points levés sur le périmètre de la parcelle comme à l'intérieur de cette parcelle, le volume total sera positif. Il correspond au volume situé sous la parcelle et limité par la surface de ladite parcelle, sa projection sur le plan horizontal d'altitude z_0 et les plans verticaux projetant les côtés de cette parcelle sur ce plan horizontal. Dans la situation d'un travail de terrassement, il s'agit donc du volume des déblais à retirer de la parcelle pour la niveler à l'altitude z_0 .

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si z_0 est supérieure aux altitudes de tous les points, le volume sera négatif. Il s'agit du volume situé au-dessus de la parcelle et délimité par le plan horizontal d'altitude z_0 et les plans verticaux projetant les côtés de cette parcelle sur ce plan horizontal. Dans la situation d'un travail de terrassement, il s'agit donc du volume des remblais à apporter sur la parcelle pour la niveler à l'altitude z_0 .

Si l'altitude z_0 est comprise entre l'altitude minimale et l'altitude maximale des points levés, le volume total calculé pourra être positif si le volume situé sous la parcelle est plus important que le volume situé au-dessus de la parcelle ou négatif dans le cas contraire. Dans la situation d'un travail de terrassement, le volume est positif si les déblais sont supérieurs aux remblais et négatif dans le cas contraire.

A noter que ces formules permettent de rechercher l'altitude z_0 qui permettra de rendre le volume total en question nul (remblais = déblais) en écrivant :

$$V = \sum_{j=1}^p S_j \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (z_i - z_0) \right] = \sum_{j=1}^p S_j \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (z_i) \right] - \sum_{j=1}^p S_j z_0 = 0.$$

Il suffit d'expliciter l'inconnue z_0 , ce qui donne :

$$z_0 = \frac{\sum_{j=1}^p S_j \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (z_i) \right]}{\sum_{j=1}^p S_j}.$$

Le volume ainsi calculé n'est évidemment qu'une valeur estimée du volume réel. L'écart entre cette valeur estimée et le volume réel comprend une erreur systématique et une erreur accidentelle. L'erreur systématique provient de ce que la surface réelle du terrain a été remplacée par la juxtaposition d'un certain nombre de triangles, constituant autant de plan. L'erreur accidentelle résulte des erreurs accidentelles qui affectent inévitablement les coordonnées levées des points.

L'erreur systématique peut être réduite en augmentant le nombre de points levés dans la parcelle et donc le nombre de triangles considérés, ce qui augmente le coût de l'estimation du volume. La densité des points levés doit être d'autant plus élevée que la variation des pentes est importante sur la surface de la parcelle.

Exemple 16.3.1. Calcul d'un volume de terre à excaver sous une parcelle.

Reprenons la parcelle utilisée dans les exemples 16.2.1 et 16.2.2. Il s'agit de calculer le volume de terre à excaver de cette parcelle de manière à en faire un parking horizontal à l'altitude de $z_0 = 241$ m.

Pour ce faire, trois points supplémentaires ont été levés avec un récepteur GNSS, à savoir les points P_7 à P_9 . Ces points ont été localisés sur la parcelle en fonction d'une rupture de pente située le long de la ligne brisée définie par ces trois points. Le tableau 16.3.1 donne les coordonnées des neuf points levés et la figure 16.3.2 en situe l'implantation.

Tableau 16.3.1. Coordonnées des neuf points levés

Points	Coordonnées en x (m)	Coordonnées en y (m)	Coordonnées en z (m)
P ₁	215.919,03	123.985,420	246.38
P ₂	215.962,81	124.005,080	244.59
P ₃	216.030,32	123.965,050	244.34
P ₄	216.076,69	123.923,720	241.26
P ₅	216.073,93	123.914,030	241.22
P ₆	215.977,30	123.858,140	246.12
P ₇	215.956,33	123.983,34	245,95
P ₈	215.985,66	123.957,06	245,09
P ₉	216.000,48	123.930,17	244,96

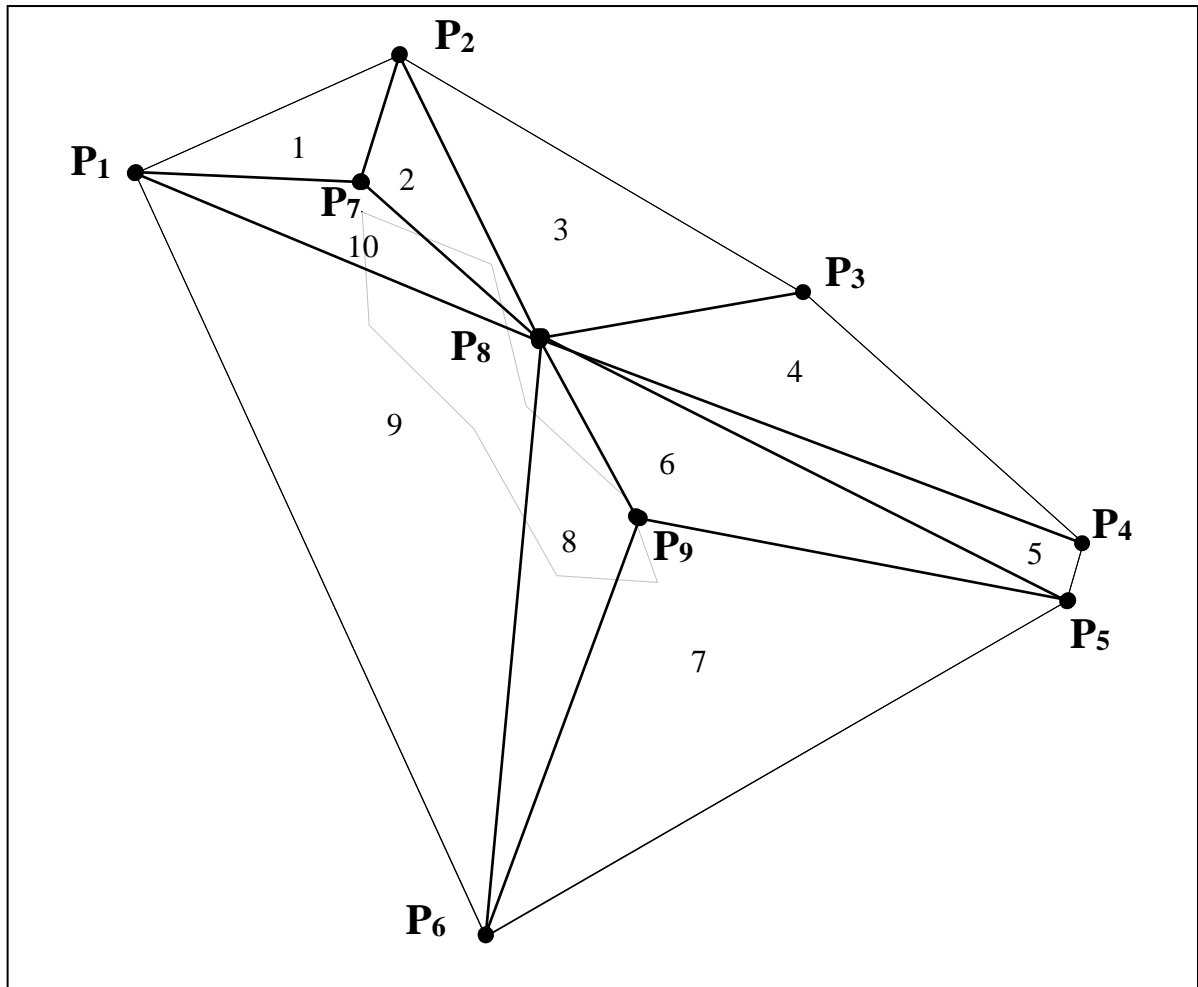


Figure 16.3.2. Parcelle polygonale délimitée par les sommets P_1 à P_6 et tracé des triangles (1 à 10) définis par ces points et les points P_7 à P_9 .

Tableau 16.3.2. Sommets, superficie, hauteur moyenne et volume associés aux triangles tracés sur la parcelle.

Triangles (j)	Sommets	Superficie (m ²)	Hauteur moyenne (m)	Volume (m ³)
1	P_1, P_2, P_7	412,19	4,64	1.912,56
2	P_7, P_2, P_8	403,96	4,21	1.700,69
3	P_2, P_3, P_8	1.163,57	3,67	4.274,19
4	P_3, P_4, P_8	1.108,15	2,56	2.840,55
5	P_4, P_5, P_8	487,05	1,52	741,94
6	P_5, P_9, P_8	867,94	2,76	2.392,62
7	P_5, P_6, P_9	2.832,36	3,10	8.780,33
8	P_6, P_8, P_9	845,40	4,39	3.711,29
9	P_6, P_1, P_8	3.414,06	4,86	16.603,73
10	P_1, P_7, P_8	459,62	4,81	2.209,23
			Total	45.167,14

Le tableau 16.3.2 donne, pour chaque triangle, les sommets qui le composent énoncés selon le sens dextrogyre de parcours du triangle, les valeurs de la surface plane, de la hauteur moyenne de ses sommets sur l'altitude $z_0 = 241,00$ m et du volume délimité par la surface du triangle, sa projection plane et les plans projetant ses côtés. Le volume total vaut donc 45.167, 14 m³ de déblais à enlever pour obtenir, sur cette parcelle, une surface horizontale à l'altitude de 241 mètres.

On peut également chercher l'altitude à laquelle fixer la surface horizontale destinée à recevoir le parking de manière à égaler les volumes des déblais et des remblais, c'est-à-dire d'avoir un volume nul. Le tableau 16.3.3 présente les éléments de ce calcul.

Tableau 16.3.3. Sommets, superficie, altitude moyenne et produit de la superficie et de l'altitude moyenne associés aux triangles tracés sur la parcelle.

Triangles (j)	Sommets	Superficie S_j (m ²)	Altitude moyenne $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i$ (m)	$S_j \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i \right)$ (m ³)
1	P ₁ , P ₂ , P ₇	412,19	245,64	101.250,40
2	P ₇ , P ₂ , P ₈	403,96	245,21	99.056,09
3	P ₂ , P ₃ , P ₈	1.163,57	244,67	284.695,13
4	P ₃ , P ₄ , P ₈	1.108,15	243,56	269.903,99
5	P ₄ , P ₅ , P ₈	487,05	242,52	118.120,88
6	P ₅ , P ₉ , P ₈	867,94	243,76	211.565,64
7	P ₅ , P ₆ , P ₉	2.832,36	244,10	691.380,14
8	P ₆ , P ₈ , P ₉	845,40	245,39	207.452,07
9	P ₆ , P ₁ , P ₈	3.414,06	245,86	839.393,30
10	P ₁ , P ₇ , P ₈	459,62	245,81	112.977,37
		11.994,31	Total	2.935.794,99

La valeur de z_0 qui annulera le volume calculé, c'est-à-dire qui rendra le volume des déblais égal au volume des remblais, se calcule en conséquence par la relation :

$$z_0 = \frac{\sum_{j=1}^p S_j \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (z_i) \right]}{\sum_{j=1}^p S_j} = \frac{2.935.794,99}{11.994,31} = 244,77 \text{ m.}$$

A noter que la superficie totale plane de la parcelle calculée dans ce tableau 16.3.3 est évidemment égale à la superficie de cette même parcelle calculée dans l'exemple 16.2.2.