

# Cours de Géométrie

## 15. QUALITE DES MESURES GNSS : JUSTESSE ET PRECISION

[Prof. C. Debouche](#)

Les références bibliographiques citées dans ce texte sont consultables en suivant le lien  
<https://hdl.handle.net/2268/293535>

## Table des matières

15. QUALITE DES MESURES GNSS : JUSTESSE ET PRECISION .....	1
15.1. Les sources d'erreur .....	2
15.2. Les précisions annoncées .....	5
15.3. L'estimation de la justesse et de la précision .....	6
15.3.1 Justesse et précision .....	6
15.3.2. Évaluation de la précision par l'analyse de la variance .....	7
15.3.3. Comparaison des précisions.....	16
15.3.4. Justesse du récepteur.....	17
15.4. Les écarts horizontaux.....	21
15.5. La précision d'un lever RTK selon la norme ISO 17123-8 .....	24

### 15.1. Les sources d'erreur

Il existe diverses sources d'erreur possible, affectant la précision du positionnement obtenu par l'usage d'un système mondial de positionnement par satellite (GNSS). Elles peuvent être dues aux satellites, au milieu traversé, à l'environnement du récepteur et au récepteur lui-même (**BONIN 2006**).

1° Au niveau des satellites, les horloges embarquées sont évidemment de très haute précision. Cependant elles ne sont pas exemptes de dérives. Celles-ci sont renseignées dans le message de navigation. Ces corrections ne sont pas parfaites et des erreurs subsistent. Il faut également tenir compte de la différence de vitesse de rotation de la Terre et des satellites.

Les coordonnées des satellites (**éphémérides**) sont perpétuellement mises à jour par le segment de contrôle (§ 13.2.1<sup>1</sup>). Il subsiste cependant des différences entre les orbites décrites par ces coordonnées et les positions réelles des satellites. Ces différences génèrent évidemment des erreurs sur le positionnement.

Des dégradations volontaires peuvent également être appliquées au message de navigation, soit sur les coordonnées des satellites, soit sur leurs erreurs d'horloge. Il s'agit de la SA (**selective availability**). Ce dispositif est destiné à détériorer la précision du positionnement qui peut être réalisé par un opérateur civil. Il n'est plus mis en œuvre depuis le 2 mai 2000 à 4 heures (UTC). La figure 15.1.1 illustre l'effet de la suspension de la SA sur la précision d'un positionnement absolu par le code.

2° Des erreurs sont également dues à l'atmosphère traversée par les signaux satellitaires.

---

<sup>1</sup> <https://hdl.handle.net/2268/301113>

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

C'est principalement la traversée de l'ionosphère et de la troposphère qui perturbe la vitesse de propagation des ondes.

**L'ionosphère** est la couche de l'atmosphère qui s'étend de 50 à 1.000 km d'altitude. Son ionisation par l'action de la radiation solaire en fait un milieu dispersif, c'est-à-dire dont l'indice de réfraction varie en fonction de la fréquence. L'agitation ionosphérique dépend de la latitude (plus agitée à l'équateur et aux pôles), de l'activité solaire dont le pseudo-cycle est d'environ 11 ans, de la période de l'année, du jour ou de la nuit. L'effet sur la mesure de la distance entre les satellites et le récepteur varie de 0 à 15 mètres pour un satellite situé au zénith du récepteur et peut atteindre 45 mètres pour un satellite proche de l'horizon du récepteur (**DUQUENNE 2005**). La perturbation due à l'ionosphère peut être éliminée en combinant les mesures effectuées simultanément sur les deux fréquences  $L_1$  et  $L_2$ . Elle peut également être réduite en utilisant des modèles mathématiques adéquats. La correction ionosphérique contenue dans le message de navigation (§ 13.3.3<sup>1</sup>) est estimée au moyen du modèle de KLOBUCHAR (**LEICK 2004**). Cette erreur est également partiellement éliminable dans un positionnement relatif, pour autant que la longueur de la ligne de base soit réduite (20 km dans les zones tempérées et 10 km dans les zones polaires ou équatoriales).

La **troposphère** est la couche basse de l'atmosphère au contact avec le sol. Son épaisseur est d'environ 15 km. Son indice de réfraction est indépendant de la fréquence. L'erreur due à la traversée de la troposphère sur la distance mesurée entre le satellite et le récepteur peut varier de 2 mètres pour un satellite au zénith à plus de 30 mètres pour un satellite situé à l'horizon. Cette erreur dépend de la température, de la pression, de l'humidité et de l'élévation du satellite (**DUQUENNE 2005**). Il existe de nombreux modèles mathématiques visant à calculer, et donc à éliminer l'erreur troposphérique. Leur performance dépend évidemment de la qualité des informations météorologiques disponibles. L'erreur troposphérique affecte principalement l'estimation de la hauteur du récepteur.

En positionnement relatif et pour autant que les conditions météorologiques soient identiques pour les deux récepteurs et qu'ils soient situés à des altitudes semblables, cette erreur peut être éliminée par la double différence (§ 13.6.2<sup>1</sup>).

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

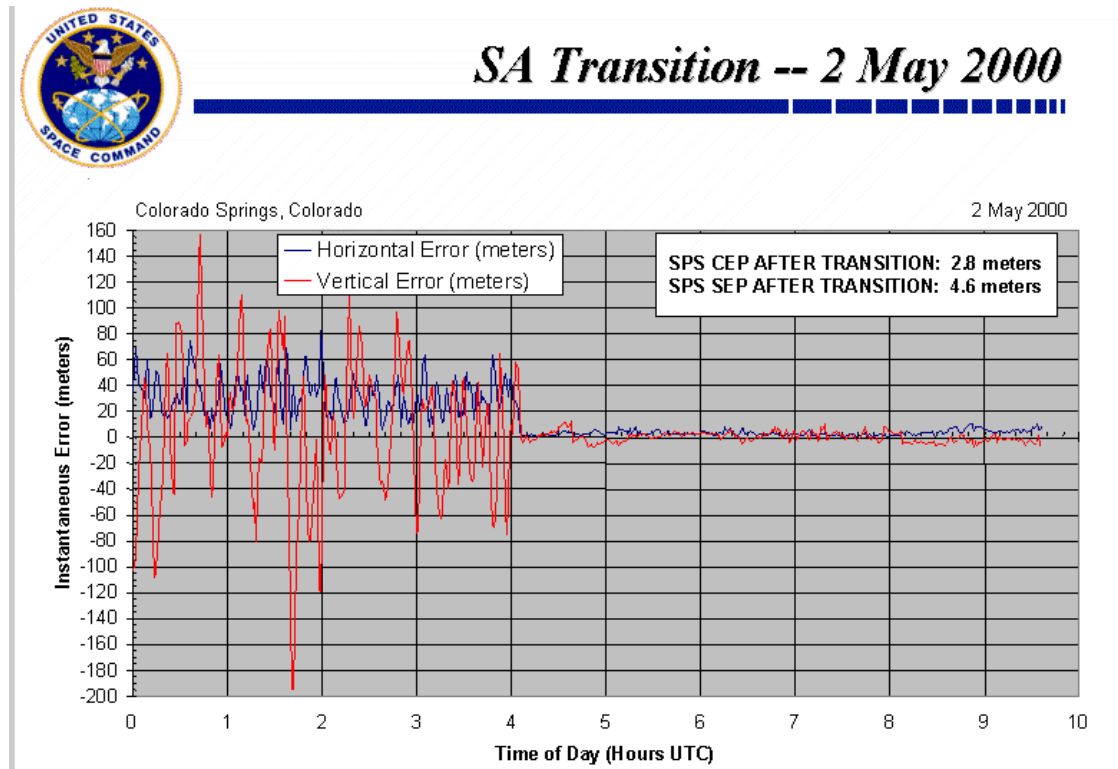


Figure 15.1.1. Effet sur la précision d'un positionnement absolu sur le code par GPS, de la suspension de la SA.

Des erreurs peuvent aussi survenir du fait que les signaux issus des satellites ne parviennent pas au récepteur en ligne directe mais après avoir été réfléchis par une surface quelconque proche. C'est le **trajet multiple**. Certains types d'antenne réduisent ou éliminent cette possibilité (antennes munies d'un plan absorbant ou du type « choke ring »).

3° Enfin des erreurs peuvent provenir du récepteur lui-même. Le point par rapport auquel se fait la mesure est le centre de phase de l'antenne. Or sa position peut varier pour une antenne immobile. De plus, il n'est pas toujours facile de positionner correctement ce centre de phase vis-à-vis du point sur lequel l'antenne est installée. En outre, les circuits analogiques de réception ainsi que les circuits numériques de traitement du signal introduisent des fluctuations de phase et de fréquence, des bruits de quantification et des erreurs de datation qui détériorent la mesure (Bonin 2001).

On peut conclure de cet énoncé non limitatif des sources d'erreur que certaines d'entre elles peuvent être réduites par modélisation (erreurs ionosphériques et troposphériques) et par différenciation (erreurs résiduelles provenant de la traversée de l'atmosphère, erreurs provenant des satellites). Les erreurs imputables au récepteur peuvent être réduites par la qualité du récepteur utilisé. Cela n'élimine pas toutes les erreurs, le positionnement par satellite étant donc sujet à incertitude, comme tous les mesurages. Il convient cependant de bien connaître la qualité des coordonnées fournies par un récepteur, c'est-à-dire leur justesse et leur précision.

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

Il est primordial de porter beaucoup d'attention à cette qualité des coordonnées fournies par les récepteurs GPS puisque c'est la principale différence entre un récepteur de 250 € et un autre récepteur (ou paire de récepteur) à 25.000 €.

### 15.2. Les précisions annoncées

Le tableau 15.2.1 présente les valeurs de précisions annoncées par différents auteurs et pour différents dispositifs de mesure.

Tableau 15.2.1. Précision annoncée de différents positionnements par GPS

Mode opératoire (§ 13.4.2 <sup>2</sup> )	Technique de mesure (§ 13.5 <sup>2</sup> )	Type de récepteur	Ligne de base	Durée d'observation	Précision (Ecart-type) <sup>3</sup>	Référence
Absolu	Code				5 m en xy et 10 m à z	Kasser 2001
Absolu	Code lissé par la phase				< 3 m	Bonin 2001
Absolu	Code	Mono- fréquence		15 s	7,5 m hors SA ou 50 m avec SA	Garmin – modèle eTrex
Relatif	Code				< 1 m	Kasser 2001
Relatif	Code	Mono- fréquence	WAAS / EGNOS		1,5 m	Thales – modèle MobileMapper
Relatif	Code lissé par la phase	Mono- fréquence	BEACON	5 min	30 cm + 5 D 10 <sup>-6</sup>	Trimble – modèle Pathfinder
Relatif en traitement différé	Phase	Mono- fréquence	< 20 km	2 à 5 min	1 mm + D 10 <sup>-6</sup>	Bonin 2001
Relatif en traitement différé	Phase	Bifréquence	< 300 km	10 min	1 mm + D 10 <sup>-6</sup>	Bonin 2001
Relatif en temps réel	Phase	Mono- fréquence	< 20 km		1 mm + D 10 <sup>-6</sup>	Bonin 2001
Relatif en temps réel	Phase	Mono- fréquence	< 10 km		5 mm + D 10 <sup>-6</sup>	Kasser 2001
Relatif en temps réel	Phase	Bifréquence	< 20 km		10 mm + D 10 <sup>-6</sup> en xy	Trimble – modèle 5700

<sup>2</sup> <https://hdl.handle.net/2268/301113>

<sup>3</sup> D est la ligne de base exprimée en mètre.

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

					20 mm + D 10 <sup>-6</sup> en z	
Relatif en temps réel	Phase	Bi - fréquence	< 30 km		5 mm + 0,5 D 10 <sup>-6</sup> en xy 10 mm + 0,5D 10 <sup>-6</sup> en z	Leica – modèle GPS1200

La précision planimétrique est généralement supérieure à ce qu'elle est pour la mesure de l'altitude (ou de la hauteur). Cela s'explique notamment par le fait que les satellites sont distribués autour de la verticale passant par le point mesuré ce qui provoque une certaine compensation des erreurs en plus et en moins sur la mesure de x (est) et la mesure de y (nord). Par contre, pour ce qui est de l'altitude, tous les satellites sont situés « au-dessus » du point à mesurer, ce qui ne permet pas la compensation des erreurs par des satellites situés « en dessous » et « au-dessus » du récepteur.

### 15.3. L'estimation de la justesse et de la précision

#### 15.3.1 Justesse et précision

Il n'est évidemment pas possible à l'utilisateur de calculer la précision des coordonnées qui lui sont livrées par son récepteur GPS pour un point levé une seule fois, et pas davantage d'en vérifier la justesse.

Ce n'est que par la répétition des mesures qu'il est possible d'estimer leur précision et, éventuellement, de se prononcer sur leur justesse.

Rappelons le modèle mathématique qui décrit tout résultat d'un mesurage, tel qu'exposé au chapitre 5 (§ 5.3.1<sup>4</sup>).

$$G = \gamma + F + s + A$$

où	G	est la valeur mesurée d'une grandeur quelconque et par exemple dans notre cas une coordonnée géodésique ou rectangulaire,
	$\gamma$	est la valeur réelle de cette grandeur, généralement inconnue,
	F	est une faute éventuelle commise lors du mesurage, également appelée erreur grossière,
	s	est une erreur systématique éventuelle et
	A	est une erreur accidentelle inévitable.

L'écart qui existe entre G et  $\gamma$  est appelé l'incertitude ou l'exactitude.

<sup>4</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293759>

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

La précision du mesurage est fonction de la dispersion de l'erreur accidentelle  $A$ , mesurée par l'écart-type de la distribution de probabilité de l'erreur accidentelle  $\sigma_A$ .

La justesse est fonction des valeurs de  $F$  et de  $s$ . Un mesurage est « juste » en l'absence de faute et d'erreur systématique, donc si  $F$  et  $s$  sont nulles.

Pour estimer la précision du mesurage par un récepteur GPS, il faudrait répéter ce mesurage en faisant varier les circonstances qui sont susceptibles d'en influencer la précision, telles qu'énoncées au paragraphe 15.1. En pratique, on peut raisonnablement procéder à l'estimation de la précision d'un récepteur en répétant son utilisation en plusieurs points et à plusieurs dates différentes puisque que l'erreur accidentelle doit être considérée comme étant la somme de plusieurs composantes dont certaines sont variables dans l'espace et dans le temps.

Pour apprécier la justesse d'un récepteur GPS, c'est-à-dire la justesse des coordonnées qu'il fournit, il faut le positionner sur des points de contrôle, dont les coordonnées sont connues. Théoriquement de tels points n'existent pas car il n'est pas possible de connaître les coordonnées d'un point de manière exacte. Il s'agit toujours de coordonnées estimées. En pratique, il faut disposer de points de contrôle dont les coordonnées sont connues avec la meilleure précision possible. Il s'agira le plus souvent de points géodésiques (§ 2.5<sup>5</sup>) « stationnables », installés et entretenus par l'IGN et dont les coordonnées sont disponibles à l'adresse : « <https://www.ngi.be/website/fr/offre/les-services/services-geodesiques/> ». L'écart-type quantifiant la précision des coordonnées de ces points géodésiques est compris entre 8 et 17 mm (LAMBOT 2005). Ces coordonnées seront considérées comme connues sans erreur si l'écart-type annoncé par le constructeur du récepteur GPS pour caractériser la précision des coordonnées qu'il fournit est largement supérieur à l'écart-type des coordonnées estimées des points géodésiques.

Si la précision des coordonnées estimées des points de contrôle est du même ordre de grandeur que la précision annoncée du récepteur GPS, il ne sera pas possible de se prononcer sur la justesse des coordonnées fournies par ce récepteur. Il sera cependant possible de se prononcer sur une éventuelle différence significative entre les coordonnées estimées des points de contrôle et les coordonnées fournies par le récepteur GPS testé sur ces mêmes points.

### 15.3.2. Évaluation de la précision par l'analyse de la variance

1° Les coordonnées en  $x$  (ou  $e$ ),  $y$  (ou  $n$ ) et  $z$  seront donc mesurées sur plusieurs stations et à plusieurs dates avec le récepteur GPS dont on souhaite évaluer les performances. Les

---

<sup>5</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293594>

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

différences entre les résultats de ces mesurages et les coordonnées connues des stations seront traitées par une analyse de la variance à deux critères de classification selon le modèle croisé aléatoire (**DAGNELIE 2006:§ 10.3**). Nous considérons que les stations sont choisies au hasard et sont représentatives de toutes les stations sur lesquelles le récepteur évalué est susceptible d'être utilisé. Il en est de même pour les dates de mesure. L'utilisation de l'analyse de la variance suppose que les erreurs accidentelles ont des distributions de probabilité normales, et que leur dispersion est identique d'un jour à l'autre et d'une station à l'autre. L'hypothèse de la normalité des erreurs accidentelles est habituellement admise, même si elle n'a pas fait l'objet de beaucoup de vérification. L'analyse de la variance est cependant relativement robuste vis-à-vis d'une éventuelle non normalité des erreurs accidentelles, pour autant que les distributions réelles soient des distributions en cloche. L'égale dispersion des erreurs accidentelles d'un jour à l'autre et d'une station à l'autre est une hypothèse assez raisonnable. Elle pourra faire l'objet d'une vérification par un test d'égalité de plusieurs variances (test de Hartley par exemple - (**DAGNELIE 2006 § 7.5.2**)). Les valeurs critiques à utiliser pour ce test sont présentées en annexe n°4.

Reprenons le modèle mathématique du résultat d'un mesurage en le particularisant à la mesure d'une coordonnée en  $x$  à la  $i^{\text{ème}}$  date, sur la  $j^{\text{ème}}$  station :

$$X_{ijk} = m_{x_j} + F_{ijk} + s + A_{ijk},$$

où  $X_{ijk}$  est la variable aléatoire représentant toutes les coordonnées en  $x$  qui pourraient être mesurées par le récepteur GPS,  
 $i$  est l'indice de la date. Il varie de 1 à  $p$  et  $p = 3$  dans l'exemple 15.3.1 ci-dessous,  
 $j$  est l'indice de la station. Il varie de 1 à  $q$  et  $q = 5$  dans l'exemple 15.3.1 ci-dessous,  
 $k$  est l'indice de la répétition. Il varie de 1 à  $n_{ij}$  et  $n_{ij} = 3$  dans l'exemple 15.3.1 ci-dessous, pour toutes valeurs de  $i$  et de  $j$ ,  
 $m_{x_j}$  est la moyenne théorique de la coordonnée en  $x$ , c'est-à-dire la vraie valeur de cette coordonnée en  $x$ ,  
 $F_{ijk}$  est la variable aléatoire représentant toutes les fautes qui pourraient éventuellement être commises,  
 $s$  est une erreur systématique éventuelle, identique pour toutes les mesures de coordonnées en  $x$ ,  
 $A_{ijk}$  est la variable aléatoire représentant l'erreur accidentelle globale résultant de toutes les erreurs accidentelles possibles.

On suppose à ce stade que l'on peut remplacer la moyenne théorique de la coordonnée en  $x$  par la coordonnée fournie par l'IGN.

On suppose également qu'il n'y a pas de faute ou erreur grossière commise lors du mesurage. Cela peut se vérifier aisément en examinant les valeurs obtenues, du fait de la répétition des mesurages.



## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

Ces hypothèses permettent de réécrire le modèle mathématique de la manière suivante, en présentant l'écart entre la coordonnée en x fournie par le récepteur et la coordonnée en x supposée connue exactement de la station :

$$\Delta X_{ijk} = X_{ijk} - (x_j)_{ign} = s + A_{ijk}.$$

Comme énoncé ci-dessus, l'erreur accidentelle  $A_{ijk}$  résulte de plusieurs composantes qui peuvent varier dans le temps et dans l'espace. On peut donc décomposer ces erreurs accidentelles de la manière suivante :

$$A_{ijk} = D_i + S_j + DS_{ij} + R_{ijk},$$

- où
- $D_i$  est la composante de l'erreur accidentelle liée à la date,
  - $S_j$  est la composante de l'erreur accidentelle liée à la station,
  - $DS_{ij}$  est la composante de l'erreur accidentelle liée à l'interaction existant entre l'effet de la date et celui de la station,
  - $R_{ijk}$  comprend toutes les composantes de l'erreur accidentelle qui ne sont liées ni à la date ni à la station.

Les valeurs observées de ces écarts sont soumises à l'analyse de la variance à deux critères de classification à savoir le critère date et le critère station.

Cette analyse de la variance permet, tout d'abord, de tester les trois hypothèses suivantes :

$$H_0 : \sigma_D^2 = 0, H'_0 : \sigma_S^2 = 0 \text{ et } H''_0 : \sigma_{DS}^2 = 0,$$

où	$\sigma_D^2$	est la variance de la composante de l'erreur accidentelle liée à la date,
	$\sigma_S^2$	est la variance de la composante de l'erreur accidentelle liée à la station,
	$\sigma_{DS}^2$	est la variance de la composante de l'erreur accidentelle liée à l'interaction existant entre l'effet de la date et celui de la station.

Si ces hypothèses sont acceptées, cela signifie que les composantes correspondantes de l'erreur accidentelle peuvent être considérées comme nulles.

Dans le cas contraire, l'évaluation de la précision du récepteur devra évidemment tenir compte des composantes qui sont considérées comme différentes de zéro.

Si la première hypothèse ( $H_0$ ) est rejetée, cela signifie que la précision du récepteur est moins bonne si on la définit pour une date quelconque que si on la quantifie pour une date unique. Il en est de même pour la deuxième hypothèse, en ce qui concerne les stations.

Le rejet de la troisième hypothèse signifie que la composante de l'erreur accidentelle liée à la date ne sera pas la même d'une station à l'autre ou que celle qui est liée à la station, ne sera

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

pas identique d'une date à l'autre. Il faudra évidemment en tenir compte dans l'estimation de la précision du récepteur.

A partir de la variance résiduelle et des variances énoncées ci-dessus qui ne pourraient être considérées comme nulles, on pourra procéder à l'estimation de la précision du récepteur.

Disposant ainsi d'une estimation de l'écart-type caractérisant la variabilité de l'erreur accidentelle, il sera alors possible de se prononcer sur la justesse du récepteur par un test de conformité (§ 15.3.4).

**Exemple 15.3.1.** Mesurages par un récepteur GPS Mobile Mapper (Thales) des coordonnées de cinq points géodésiques, effectués à trois dates différentes et répétés trois fois : analyse de la variance.

A titre d'exemple et pour faciliter la compréhension du traitement numérique des résultats, le tableau 15.3.1 présente les écarts entre les résultats de mesurage effectués sur cinq points géodésiques à trois dates différentes par un récepteur de la marque Thales et du type Mobile Mapper et les coordonnées fournies par l'IGN pour ces points géodésiques. Pour chaque station (point géodésique « stationnable ») et à chaque date, le mesurage est répété trois fois, de manière indépendante, c'est-à-dire en éteignant le récepteur entre chaque session de mesure. La durée des sessions de mesure était de 5 secondes. Il s'agit d'un mesurage en DGPS (§ 13.4.2<sup>6</sup>) avec les corrections fournies par EGNOS (§ 13.4.3<sup>6</sup>).

Les cinq stations sont des points géodésiques situés dans les environs de la ville de Gembloux (Belgique). Les coordonnées sont des coordonnées cartographiques issues du système de projection de Lambert sur cône sécant, tel qu'utilisé en Belgique (§ 3.4.3<sup>7</sup>). Ces coordonnées sont fournies par l'Institut Géographique National de Belgique, avec une précision caractérisée par un écart-type de 0.017 m. La distance maximale entre deux de ces cinq stations est de 7.552 m.

---

<sup>6</sup> <https://hdl.handle.net/2268/301113>

<sup>7</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293634>

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

Tableau 15.3.1 Résultats de mesurages par un récepteur de type Mobile Mapper (Thales), effectués sur cinq points géodésiques et à trois dates différentes.

$\Delta x$ (ou $\Delta e$ , en m)					
Stations	40F04C1	40F12C1	47B10C1	47B08R1	47B00C1
Dates					
060622	0,96	2,47	1,10	0,19	1,13
060622	0,92	1,26	1,18	1,78	0,59
060622	2,40	1,51	1,72	0,65	0,66
061116	1,89	0,25	0,47	1,49	0,83
061116	2,89	-1,07	0,12	-0,21	-0,67
061116	1,12	0,43	-1,01	0,31	0,06
061128	0,37	0,07	1,87	0,15	-0,25
061128	0,02	1,60	1,16	0,19	1,20
061128	-0,04	-0,19	-0,06	-1,36	0,93
$\Delta y$ (ou $\Delta n$ , en m)					
	40F04C1	40F12C1	47B10C1	47B08R1	47B00C1
060622	1,40	2,09	1,06	-0,32	0,54
060622	2,58	0,32	0,97	-3,96	0,75
060622	0,83	0,90	-0,10	2,16	0,58
061116	2,00	0,31	1,94	-0,11	1,99
061116	2,48	-0,51	0,47	2,36	2,85
061116	3,31	-0,59	1,31	3,13	-0,65
061128	-2,30	0,83	-0,67	-0,91	-0,40
061128	-0,95	-0,47	-0,39	-1,60	1,36
061128	-1,01	0,48	0,76	-1,28	1,60
$\Delta z$ (en m)					
	40F04C1	40F12C1	47B10C1	47B08R1	47B00C1
060622	1,24	-5,75	-5,37	4,77	6,56
060622	-0,45	-3,64	-7,06	-2,46	2,03
060622	-2,44	-6,13	-6,35	5,04	7,39
061116	1,33	-2,79	-5,37	0,63	-3,15
061116	3,32	-2,09	-7,06	-1,38	-7,63
061116	-3,19	-4,08	-6,35	0,51	1,09
061128	-5,53	0,37	3,08	-0,23	-1,59
061128	0,46	0,17	-1,24	-3,21	-2,72
061128	0,81	-2,30	-0,46	1,21	-2,21

Le tableau 15.3.2 présente les coordonnées estimées par l'IGN de ces points géodésiques.

Tableau 15.3.2. Coordonnées estimées par l'IGN des points géodésiques stationnés.

Identifiant du point	40F04C1	40F12C1	47B10C1	47B08R1	47B00C1
x (ou e)	173 623,73	174 646,65	175 909,43	173 346,49	170 368,52
y (ou n)	142 123,78	139 210,69	137 357,56	137 718,17	135 306,07
z	168,59	162,97	174,89	175,75	170,01

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

S'agissant d'une analyse de la variance à deux critères de classification (ou à deux facteurs), ci-après dénommée AV2 elle peut être calculée par un outil d'analyse disponible dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft (choisir la mention « utilitaire d'analyse, dans le menu déroulant « Outils »). Nous renvoyons aux ouvrages de statistique pour la description de l'analyse de la variance (**DAGNELIE 2006 § 10**). Il convient toutefois d'être attentif au calcul de la valeur  $F_{obs}$  qui varie suivant que le modèle d'analyse est fixe ou aléatoire. Dans notre cas, soit pour un modèle croisé aléatoire, la valeur de  $F_{obs}$  relative aux effets « dates » et « stations » est obtenue en divisant le carré moyen correspondant par le carré moyen de l'interaction et non par le carré moyen résiduel. La valeur de  $F_{obs}$  relative à l'interaction se calcule en divisant le carré moyen de l'interaction par le carré moyen résiduel.

2° Dans un premier temps et pour procéder à une estimation de la précision du récepteur, une AV2 est calculée pour chacune des trois coordonnées x, y et z. Le tableau 15.3.3. présente les résultats de ces trois AV2.

Tableau 15.3.3. Analyses de la variance des coordonnées mesurées en x, y et z.

Analyse de la variance sur les écarts en x						
Source des variations	Somme des carrés	Degré de liberté	Carrés moyens	$F_{obs}$	Probabilité	Valeur critique pour $F_{obs}$
Dates	6,7153	2	3,3577	2,45	0,15	4,46
Stations	3,4372	4	0,8593	0,63	0,66	3,84
Interaction	10,9827	8	<b>1,3728</b>	2,38	0,04	2,27
Variation résiduelle	17,3272	30	<b>0,5776</b>			
Total	38,4625	44				
Analyse de la variance sur les écarts en y						
Source des variations	Somme des carrés	Degré de liberté	Carrés moyens	$F_{obs}$	Probabilité	Valeur critique pour $F_{obs}$
Dates	21,4625	2	10,7313	3,15	0,10	4,46
Stations	6,3764	4	1,5941	0,47	0,76	3,84
Interaction	27,2473	8	<b>3,4059</b>	2,34	0,04	2,27
Variation résiduelle	43,6973	30	<b>1,4566</b>			
Total	98,7836	44				
Analyse de la variance sur les écarts en z						
Source des variations	Somme des carrés	Degré de liberté	Carrés moyens	$F_{obs}$	Probabilité	Valeur critique pour $F_{obs}$
Dates	23,9568	2	11,9784	0,38	0,69	4,46
Stations	140,6891	4	35,1723	1,12	0,41	3,84
Interaction	250,9546	8	<b>31,3693</b>	5,16	< 0,01	2,27
Variation résiduelle	182,2574	30	<b>6,0752</b>			
Total	597,8578	44				

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

En vue d'estimer la précision de ce récepteur, on peut estimer l'écart-type caractérisant la dispersion des erreurs accidentelles à partir de la variance résiduelle (carré moyen résiduel de l'analyse de la variance) et des composantes de variance dont l'hypothèse de nullité a été rejetée.

Il faut donc procéder au test de signification des effets dates, stations et de leur interaction. Rappelons que l'hypothèse est rejetée si la valeur de  $F_{\text{obs}}$  est supérieure à sa valeur critique (voir annexe 3<sup>8</sup>) ou si la probabilité qui lui est associée est inférieure au niveau de signification choisi (généralement de 0.05).

Si l'effet date est significatif, alors la variance qui lui est associée s'estime par l'expression :

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{CM_d - CM_{ds}}{qn}.$$

Dans le cas contraire, elle est considérée comme nulle.

Si l'effet station est significatif, alors la variance qui lui est associée s'estime par l'expression :

$$\hat{\sigma}_S^2 = \frac{CM_s - CM_{ds}}{pn}.$$

Dans le cas contraire, elle est considérée comme nulle.

Si l'effet de l'interaction entre la date et la station est significatif, alors la variance qui lui est associée s'estime par l'expression :

$$\hat{\sigma}_{DS}^2 = \frac{CM_{ds} - CM_r}{n}.$$

Dans le cas contraire, elle est considérée comme nulle.

La variance résiduelle s'estime simplement par la relation :

$$\sigma_R^2 = CM_r.$$

Dans ces expressions, les  $CM_d$ ,  $CM_s$ ,  $CM_{ds}$  et  $CM_r$  sont respectivement les carrés moyens de l'effet date, de l'effet station, de l'effet interaction date\*station et résiduel.

L'écart type caractérisant la précision du récepteur s'estime par la relation suivante :

---

<sup>8</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293542>

### 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_D^2 + \hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_{DS}^2 + CM_r},$$

expression dans laquelle les variances qui peuvent être considérées comme nulles par les tests de l'analyse de la variance sont évidemment remplacées par zéro.

A noter cependant que si la précision caractérisant les coordonnées annoncées des stations de référence est du même ordre de grandeur que la précision du récepteur testé, l'estimation de cette dernière doit en tenir compte. La formule suivante sera utilisée dans ce cas :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_D^2 + \max\left[0; \left(\hat{\sigma}_S^2 - \hat{\sigma}_{ref}^2\right)\right] + \hat{\sigma}_{DS}^2 + CM_r},$$

où  $\hat{\sigma}_{ref}^2$  est la variance des coordonnées de référence.

Sur base des tableaux d'analyse de la variance (tableau 15.3.3) et des formules présentées ci-dessus, on peut estimer les variances des différentes composantes de l'erreur accidentelle par les valeurs présentées dans le tableau 15.3.4.

**Tableau 15.3.4.** Variances des différentes composantes de l'erreur accidentelle et nombres de degrés de liberté associés.

	x	y	z	Nombre de degrés de liberté
$\sigma_D^2$	0,00	0,00	0,00	p-1
$\sigma_S^2$	0,00	0,00	0,00	q-1
$\sigma_{SD}^2$	0,2651	0,6498	8,4314	(p-1)(q-1)
$\sigma_R^2$	0,5776	1,4566	6,0752	pq(n-1)

En fonction de ces valeurs, les écarts-types caractérisant la précision du récepteur se calculent de la manière suivante.

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{0,2651 + 0,5776} = 0,92 \text{ m}$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{0,6498 + 1,4566} = 1,45 \text{ m}$$

$$\hat{\sigma}_z = \sqrt{8,4314 + 6,0752} = 3,81 \text{ m}$$

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

Ces estimations peuvent être complétées par le calcul d'un intervalle de confiance des variances selon la formule :

$$s_1^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 (dl)}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \quad \text{et} \quad s_2^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 (dl)}{\chi_{\alpha/2}^2},$$

où	$s_1^2$	est la limite inférieure de l'intervalle de confiance de la variance,
	$s_2^2$	est la limite supérieure de l'intervalle de confiance de la variance,
	$\hat{\sigma}^2$	est la variance caractérisant la précision du récepteur (carré de l'écart-type),
	$dl$	Nombre de degrés de liberté de cette variance,
	$\chi_{1-\alpha/2}^2$ et $\chi_{\alpha/2}^2$	sont les valeurs de la variable $\chi^2$ de PEARSON à ( $dl$ ) degrés de liberté dont la fonction de répartition vaut respectivement $1-\alpha/2$ et $\alpha/2$ ,
	$\alpha$	est la probabilité que l'intervalle de confiance ainsi calculé ne contienne pas la vraie valeur de la variance ; $1 - \alpha$ est le niveau de confiance choisi pour cet intervalle (généralement 95 %).

Le nombre de degrés de liberté de la variance caractérisant la précision du récepteur est égal à la somme des degrés de liberté associés aux variances prises en considération (Tableau 15.3.4).

Les valeurs de la variable  $\chi^2$  de PEARSON se lisent dans une table fournie en annexe n°1<sup>9</sup>. Elles peuvent également être calculées dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction KHI2EUX.INVERSE dans Excel).

En considérant un niveau de confiance de 95 % ( $\chi_{0,975}^2$  et  $\chi_{0,025}^2$  à 38 degrés de liberté valant respectivement 56,9 et 22,9) et en estimant les limites de confiance de l'écart-type des erreurs accidentelles à partir de la racine carrée des limites de confiance de la variance calculées par les formules présentées ci-dessus on obtient les résultats figurant au tableau 15.3.5.

**Tableau 15.3.5.** Valeurs estimées de l'écart-type des erreurs accidentelles commises sur la détermination des coordonnées en x, y et z et intervalles de confiance correspondants (en m).

	Écart-type estimé	Limite inférieure de l'intervalle de confiance de l'écart-type	Limite supérieure de l'intervalle de confiance de l'écart-type

<sup>9</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293542>

### 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

x	0,92	0,75	1,19
y	1,45	1,18	1,87
z	3,81	3,11	4,91

A noter que l'intervalle de confiance n'est pas symétrique par rapport à l'écart-type estimé. La limite inférieure est effectivement plus proche de l'écart-type estimé que la limite supérieure. Cela est évidemment dû au fait que la distribution d'échantillonnage de la variance est la distribution  $\chi^2$  de PEARSON qui est dissymétrique.

#### 15.3.3. Comparaison des précisions

A noter également que l'écart-type estimé des erreurs accidentelles commises sur la coordonnée en x n'est pas dans l'intervalle de confiance de l'écart-type estimé des erreurs accidentelles commises sur la coordonnée en y. Cela suggère une différence significative entre les précisions en x et en y. Si on peut admettre qu'il y a indépendance entre les erreurs en x et les erreurs en y, l'existence d'une différence significative entre ces deux précisions peut être confirmée par un test d'égalité de deux variances qui se réalise en calculant la valeur (**DAGNELIE 2006:§ 7.4.2**) :

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{\hat{\sigma}_{min}^2},$$

où	$\hat{\sigma}_{max}^2$ et $\hat{\sigma}_{min}^2$	sont respectivement la plus grande et la plus petite des deux variances estimées dont l'égalité est testée.
----	--	---

On rejette l'hypothèse d'égalité de ces deux variances si la valeur de  $F_{obs}$  est supérieure à la valeur  $F_{1-\alpha/2}$  de la variable F de SNEDECOR dont la fonction de répartition vaut  $1-\alpha/2$ , à  $k_1$  et  $k_2$  degrés de liberté,  $k_1$  et  $k_2$  étant respectivement le nombre de degrés de liberté de la plus grande et de la plus petite des deux variances estimées. Les valeurs de la variable F de SNEDECOR se lisent dans une table fournie en annexe n°3<sup>9</sup>

. La probabilité associée à une valeur de la variable F peut également être calculée dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOIF dans Excel). L'hypothèse à vérifier se rejette également si la probabilité que la variable F prenne une valeur supérieure ou égale à  $F_{obs}$  est inférieure ou égale à  $\alpha/2$ .

A noter que ce test d'égalité de deux variances peut aussi être utilisé pour comparer la précision de deux récepteurs différents.



## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

**Exemple 15.3.2.** Mesurages par un récepteur GPS Mobile Mapper (Thales) des coordonnées de cinq points géodésiques : test d'égalité de deux variances.

Dans le cas de l'exemple 15.3.1,  $k_1$  et  $k_2$  sont égaux à 38. L'application du test d'égalité de deux variances, aux variances estimées en x et en y donne la valeur :

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}_y^2}{\hat{\sigma}_x^2} = \frac{1,45^2}{0,92^2} = 2,48.$$

Si nous choisissons un niveau de signification de ce test  $\alpha$  de 5 %, cette valeur doit être comparée à la valeur  $F_{0,975}$  à 38 et 38 degrés de liberté qui vaut 1,71. L'hypothèse d'égalité de la variance en x et de la variance en y est donc rejetée. La différence entre la précision sur les coordonnées en x et la précision sur les coordonnées en y est donc significative. Une autre manière de conclure ce test est de calculer la probabilité qu'une variable F de SNEDECOR à 38 et 38 degrés de liberté soit supérieure à la valeur de 2,49. Ce calcul se fait facilement par l'usage de la fonction LOI.F du logiciel Excel, ce qui donne une probabilité de 0,0029. Cette probabilité, étant inférieure à 0,05/2, on en conclut que la différence est significative.

### 15.3.4. Justesse du récepteur

1° Il reste à évaluer la justesse du récepteur, c'est-à-dire sa capacité à fournir des coordonnées dépourvues d'erreur systématique. Cela revient à tester la nullité de la moyenne des écarts constatés entre les coordonnées mesurées par le récepteur et les coordonnées de référence, considérées comme connues et justes, des stations utilisées dans les mesurages. Les coordonnées de référence sont considérées comme exactes si elles sont mesurées avec une précision largement supérieure à la précision du récepteur en question. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si la précision annoncée des coordonnées de référence est du même ordre de grandeur que la précision du récepteur à évaluer, le test de conformité est remplacé par un autre test décrit au point 2° ci-dessous.

Le test de conformité peut être réalisé globalement pour l'ensemble des stations et des dates de mesure si l'analyse de variance n'a pas mis en évidence un effet station et un effet date. Il doit être réalisé séparément pour chacune des stations et/ou pour chacune des dates en présence d'effets significatifs des stations et/ou des dates sur l'erreur systématique.

L'hypothèse à vérifier peut s'écrire :

$$m_{\Delta X} = 0,$$

où	$m_{\Delta X}$	est la moyenne de tous les écarts calculés entre les coordonnées en x mesurées par le récepteur GPS et la valeur considérée comme vraie de
----	----------------	--

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

		cette coordonnée.
--	--	-------------------

Il s'agit d'un test de conformité (**DAGNELIE 2006:§ 8.3**). Celui-ci peut se réaliser en calculant la valeur :

$$t_{obs} = \frac{|\bar{\Delta x}|}{\frac{\hat{\sigma}_{\Delta x}}{\sqrt{n}}},$$

où	$\bar{\Delta x}$	est la moyenne des écarts entre les coordonnées en x mesurées et les coordonnées en x considérées comme exactes,
	$\hat{\sigma}_{\Delta x}$	est l'écart-type estimé des écarts entre les coordonnées en x mesurées et les coordonnées en x considérées comme exactes. Il s'agit de l'écart-type caractérisant la précision du récepteur, calculé au § 15.3.2,
	n	est l'effectif sur lequel est calculée la moyenne des écarts.

L'hypothèse à vérifier est rejetée lorsque :

$$P(|t| \geq t_{obs}) \leq \alpha \quad \text{ou} \quad t_{obs} \geq t_{1-\alpha/2},$$

la distribution de la variable t considérée étant la distribution de STUDENT à n-1 degrés de liberté. Les valeurs de cette distribution peuvent se lire dans la table présentée en annexe n°2<sup>10</sup>. Les probabilités associées à cette distribution peuvent se calculer dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOI.STUDENT dans Excel).

**Exemple 15.3.3.** Mesurages par un récepteur GPS Mobile Mapper (Thales) des coordonnées de cinq points géodésiques : test de conformité de la moyenne générale.

Reprenant les données de l'exemple 15.3.1 et vu l'absence constatée d'un effet « stations » et d'un effet « dates », la moyenne des écarts entre les coordonnées en x mesurées et les coordonnées en x considérées comme exactes se calcule évidemment par la formule :

$$\bar{\Delta x} = \frac{1}{n_{..}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{n_{ij}} [x_{ijk} - (x_j)_{ign}],$$

où	n..	est l'effectif total, égal à 45, p est égal à 3 (trois dates), q est égal à 5
----	-----	---

<sup>10</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293542>

### 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

		(cinq stations) et tous les $n_{ij}$ sont égaux à 3 (trois répétitions à chaque station et pour chaque date).
--	--	---

Le tableau 15.3.6 présente pour les coordonnées en x, y et z, les moyennes des écarts ainsi calculés, ainsi que les tests de conformité correspondants.

**Tableau 15.3.6.** Moyennes des écarts entre les coordonnées mesurées et les coordonnées considérées comme exactes en x, y et z (en m) et tests de conformité de ces moyennes.

	Moyennes des écarts	$t_{obs}$	$P( t  \geq t_{obs})$
x	0,69	5,05	< 0,0001
y	0,56	2,59	0,013
z	-1,38	2,44	0,019

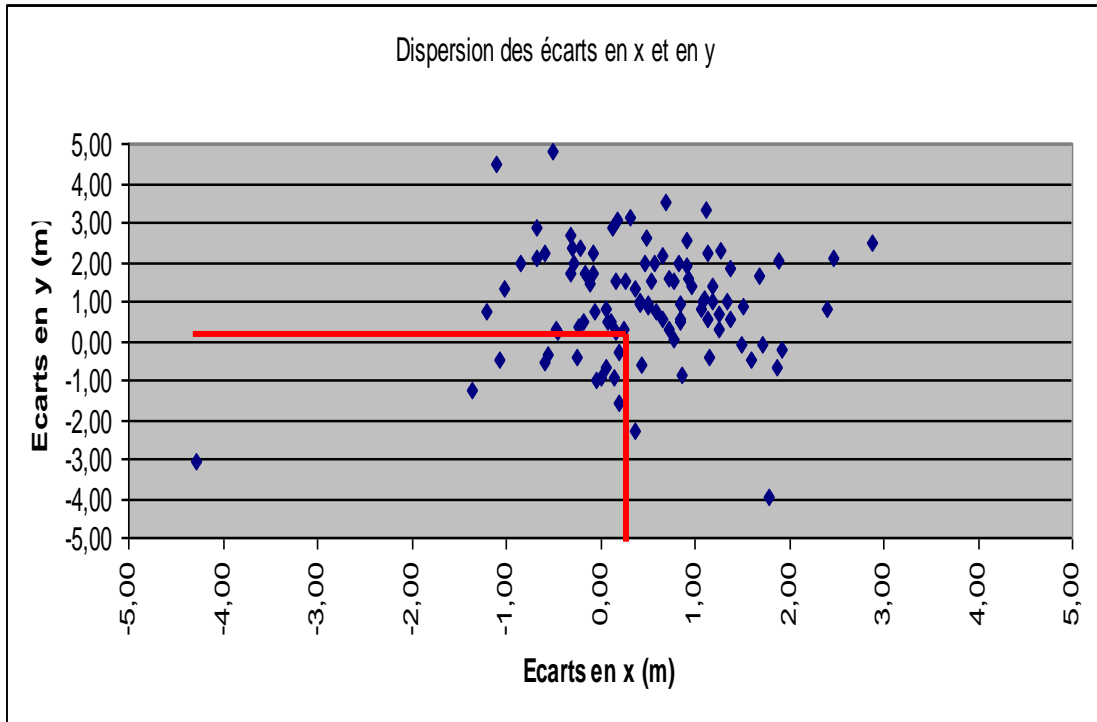
La valeur de  $t_{0,975}$  à 44 degrés de liberté évaluée par interpolation dans la table présentée en annexe n°2<sup>10</sup> est de 2,17.

La moyenne des écarts est très hautement significativement différente de zéro pour les coordonnées en x et hautement significativement différente de zéro pour les coordonnées en y et en z. Il faut donc en conclure que ce récepteur ne peut être qualifié de juste. Il fournit des coordonnées qui sont entachées d'une erreur systématique.

L'effectif relativement élevé de l'échantillon utilisé ( $n = 45$ ) permet de mettre en évidence une erreur systématique relativement faible.

A titre de confirmation de ces conclusions, la figure 15.3.1 représente le diagramme de dispersion des écarts entre les coordonnées en x et en y, mesurées avec ce récepteur GPS et les coordonnées fournies par l'IGN, et ce pour 100 mesurages effectués sur ces mêmes stations. Ces 100 mesurages comprennent les 45 mesurages décrits dans l'exemple 15.3.2 et d'autres mesurages effectués aux mêmes dates. L'examen de cette figure indique clairement que le centre de gravité du nuage de points n'est pas confondu avec l'origine ( $\Delta x = \Delta y = 0$ ).

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision



**Figure 15.3.1.** Dispersion des écarts entre les coordonnées en x et en y, mesurées avec un récepteur GPS Mobile Mapper (Thales) et les coordonnées fournies par l'IGN, et ce pour 100 mesurages effectués sur cinq points géodésiques à trois dates différentes.

2° Si les coordonnées de référence sont estimées avec une précision semblable à la précision du récepteur GPS à évaluer, elles ne peuvent évidemment pas être considérées comme exactes, c'est-à-dire connues sans erreur d'aucune sorte. La justesse des coordonnées mesurées ne peut être testée dans ce cas. On peut cependant examiner si ces coordonnées mesurées diffèrent significativement des coordonnées de référence. Pour ce faire, on procède à un test d'égalité entre les coordonnées mesurées et les coordonnées de référence en calculant la valeur :

$$t_{\text{obs}} = \frac{|\bar{\Delta x}|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X_{\text{GPS}}}^2}{n} + \hat{\sigma}_{X_{\text{réf}}}^2}},$$

où	$\hat{\sigma}_{X_{\text{GPS}}}^2$	est la variance estimée des erreurs accidentelles commises sur le mesurage de la coordonnée en x par le récepteur GPS à évaluer, cette variance estimée étant égale au carré moyen résiduel de l'analyse de la variance,
	$\hat{\sigma}_{X_{\text{réf}}}^2$	est la variance estimée des erreurs accidentelles commises sur le mesurage de la coordonnée de référence en x,

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

	n	est l'effectif de l'échantillon sur lequel est calculée la moyenne des écarts entre coordonnées mesurées au GPS et coordonnées de référence.
--	---	--

Les stations utilisées pour procéder à ces expériences seront le plus souvent des points géodésiques « stationnables » et, en conséquence, les coordonnées de référence seront des coordonnées fournies par l'IGN pour ces points géodésiques. Rappelons que la précision annoncée pour ces points géodésiques, dits de densification, est comprise entre 8 et 17 mm, en terme d'écart-type, soit une variance maximale égale à 0,000289 m<sup>2</sup>.

### 15.4. Les écarts horizontaux

Nous pouvons introduire une variante dans l'estimation de la précision. En effet, d'un point de vue pratique, il peut être utile de définir une précision planimétrique, composant les erreurs en x et les erreurs en y, et une précision altimétrique, qui est la précision en z, déjà estimée ci-dessus.

Pour ce faire, nous définissons l'écart horizontal  $\Delta_{xy}$  comme étant la distance horizontale entre un point situé par ses coordonnées en x et en y mesurées et le même point situé par ses coordonnées considérées comme exactes. La valeur observée de cet écart horizontal se calcule par la formule :

$$\Delta_{xy} = \sqrt{(x_{\text{gps}} - x_{\text{ign}})^2 + (y_{\text{gps}} - y_{\text{ign}})^2},$$

où	$x_{\text{gps}}$ et $y_{\text{gps}}$	ont les coordonnées en x et en y mesurées avec le récepteur GPS,
	$x_{\text{ign}}$ et $y_{\text{ign}}$	ont les coordonnées en x et en y fournies par l'IGN pour le même point et considérées comme exactes.

Par les propriétés des variables normales et des variables  $\chi^2$  de PEARSON, on peut considérer que la variable aléatoire correspondant à l'écart horizontal possède une distribution approximativement normale et soumettre en conséquence les valeurs observées de cette variable, à savoir les écarts  $\Delta_{xy}$  à une analyse de la variance, en vue d'en estimer la précision et la justesse. L'exemple 15.4.1 illustre cette procédure.

**Exemple 15.4.1.** Mesurages par un récepteur GPS Mobile Mapper (Thales) des coordonnées de cinq points géodésiques : précision et justesse des écarts horizontaux.

Reprenant les données de l'exemple 15.3.1, le tableau 15.4.1 présente les écarts horizontaux correspondant aux 45 mesurages (trois dates, cinq stations et trois répétitions). La moyenne de ces valeurs est de 1,71 m. Le tableau 15.4.2 présente l'analyse de la variance à

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

deux critères de classification appliquée à ces écarts.

**Tableau 15.4.1.** Écarts horizontaux (en m) entre les coordonnées mesurées et les coordonnées considérées comme exactes pour 45 mesurages au récepteur GPS Mobile Mapper (Thales).

Stations Dates	40F04C1	40F12C1	47B10C1	47B08R1	47B00C1
060622	1,70	3,24	1,53	0,37	1,25
060622	2,74	1,30	1,53	4,34	0,95
060622	2,54	1,75	1,73	2,26	0,88
061116	2,76	0,40	1,99	1,49	2,16
061116	3,80	1,19	0,49	2,37	2,93
061116	3,50	0,73	1,66	3,15	0,65
061128	2,33	0,84	1,99	0,92	0,47
061128	0,95	1,67	1,22	1,61	1,81
061128	1,01	0,52	0,76	1,87	1,85

**Tableau 15.4.2.** Analyse de la variance des écarts horizontaux entre les coordonnées mesurées et les coordonnées considérées comme exactes pour 45 mesurages au récepteur GPS Mobile Mapper (Thales), effectués sur cinq stations, à trois dates et avec trois répétitions.

Source des variations	Somme des carrés	Degré de liberté	Moyenne des carrés	$F_{obs}$	Probabilité	Valeur critique pour $F_{obs}$
Dates	3,5368	2	1,7684	1,81	0,22	4,46
Stations	7,8677	4	1,9669	2,02	0,18	3,84
Interaction	7,7992	8	0,9749	1,38	0,25	2,27
Variation résiduelle	21,2354	30	0,7078			
Total	40,4391	44				

Comme pour les précisions sur les coordonnées et vu l'absence d'effet significatif des facteurs dates, stations et de leur interaction, on peut estimer la précision des écarts horizontaux à partir du carré moyen résiduel :

$$\hat{\sigma}_{\Delta_{xy}} = \sqrt{CM_r} = \sqrt{0,7078} = 0,84 \text{ m.}$$

Les limites de confiance de cette estimation, calculées comme ci-dessus (tableau 15.3.4) sont de 0,55 et 0,92 m.

Cette précision est assez logiquement comprise entre l'écart-type estimé des erreurs accidentelles sur x et sur y.

Cet écart-type doit être comparé à la précision annoncée par le constructeur. Celle-ci est

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

libellée de la manière suivante :

Précision (5 satellites reçus, PDOP < 4) : < 3 mètres, 95 % 2D RMS.

On peut en déduire que l'erreur accidentelle annoncée est inférieure à 3 mètres dans 95 % des cas. Il s'agit donc de la demi-longueur d'un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %. Cette demi-longueur de l'intervalle de confiance a été obtenue en multipliant l'écart-type annoncé des erreurs accidentelles par la valeur de la distribution normale réduite correspondant à une probabilité cumulée de 97,5 %, soit la valeur de 1,96 (DAGNELIE 2006 § 8.2.1). Cette valeur peut se calculer avec la fonction « LOI.NORMALE.INVERSE » du logiciel Excel, avec une moyenne (espérance) nulle et un écart-type égal à 1, ou se lire dans l'annexe n°5<sup>11</sup>. Il en résulte donc que la valeur annoncée comme maximale de l'écart-type des erreurs accidentelles se déduit de la relation :

$$\sigma_{\Delta_{xy}} \leq \frac{3}{1,96} = 1,53 \text{ m.}$$

Notre résultat qui évalue l'écart-type des erreurs accidentelles à 0,84 m confirme donc bien la précision annoncée par le constructeur en fournissant une précision largement meilleure que celle qui est annoncée.

Nous pouvons enfin évaluer la justesse des écarts horizontaux fournis par ce récepteur comme indiqué dans le paragraphe 15.3.5, en calculant :

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{\Delta}_{XY}}{\frac{\sigma_{\Delta_{XY}}}{\sqrt{n}}} = \frac{1,71}{\frac{0,84}{\sqrt{45}}} = 13,67.$$

La probabilité associée à la variable t de STUDENT à 44 degrés de liberté correspondant à cette valeur de 13,67 étant très largement inférieure à 0.001, on peut considérer que l'écart horizontal moyen de 1,71 est très hautement significativement différent de zéro.

Comme pour les coordonnées en x, y et z, les écarts horizontaux fournis par ce récepteur sont donc entachés d'une erreur systématique importante.

En l'absence de faute, on peut donc considérer que l'incertitude (ou exactitude) du mesurage est comprise, avec une probabilité de 95 %, dans l'intervalle :

$$\bar{\Delta}_{xy} \pm t_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_x,$$

où  $t_{1-\alpha/2}$  est la valeur théorique de la variable t de STUDENT à laquelle correspond une

---

<sup>11</sup> <https://hdl.handle.net/2268/293542>

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

valeur de la fonction de répartition égale à  $1-\alpha/2$  et dont le nombre de degrés de liberté vaut l'effectif total de l'échantillon moins une unité.

Dans notre cas, cela se traduit par les valeurs suivantes :

$$1,71 \pm 2,02 \times 0,84 \text{ soit entre } 0,01 \text{ et } 3,40 \text{ m.}$$

Cette conclusion suppose que l'erreur systématique est estimée par la moyenne des écarts horizontaux mesurés et que les coordonnées fournies par l'IGN pour les points géodésiques stationnés sont justes.

### 15.5. La précision d'un lever RTK selon la norme ISO 17123-8

1 ° En l'absence de points de référence (points de coordonnées connues) on peut procéder à une estimation de la précision d'un récepteur GNSS et la confronter à la précision annoncée par le constructeur ou à toute autre valeur cible de la précision (figurant dans un cahier des charges par exemple). Précisons cependant qu'une telle démarche est limitée à l'appréciation de la précision du récepteur et non à sa justesse comme traité dans le paragraphe 15.3.

Le projet de norme ISO 17123-8 (2006) propose pour ce faire une démarche visant à l'évaluation de la précision d'un mesurage cinématique en temps réel (RTK – paragraphe 13.4.2). Cette démarche comprend une procédure simplifiée et une procédure plus complète.

Ces deux procédures supposent la disponibilité d'une base (station de référence propre ou réseau émettant des corrections GNSS) ainsi que d'un mobile. Deux stations doivent être matérialisées sur le terrain. Elles doivent être représentatives des stations sur lesquelles le récepteur sera utilisé par la suite. Ces deux stations doivent être distantes de 10 à 20 mètres. Les coordonnées de ces stations ne doivent pas être connues. Par contre, la distance horizontale  $D_0$  et la dénivelée  $\Delta z_0$  entre ces deux stations doivent être mesurées par une méthode indépendante et/ou un équipement différent, avec une précision inférieure ou égale à 3 mm.

2° La procédure simplifiée est destinée à mettre en évidence d'éventuelles erreurs grossières dans le fonctionnement du récepteur GNSS. Par contre, en raison du faible nombre de mesure que comprend cette procédure simplifiée, elle ne permet pas de procéder à une estimation « significative » des écarts-types caractérisant le récepteur en question ni à des tests d'hypothèse le concernant.

Cette procédure simplifiée comprend une série de cinq jeux de mesures. Un jeu de mesure consiste à lever en mode RTK et au moyen du mobile, successivement les stations n° 1 et 2. Cinq minutes doivent séparer le début de chaque jeu de mesure. L'ensemble de la série dure donc environ 25 minutes. Les coordonnées obtenues au cours de ces dix mesurages (cinq sur chacune des deux stations) sont notées :



## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

$$x_{j,k}, y_{j,k} \text{ et } z_{j,k},$$

où  $j$  est l'indice du jeu, variant de 1 à 5,

$k$  est l'indice de la station, variant de 1 à 2.

Ces coordonnées permettent de calculer cinq distances horizontales mesurées ( $D_j$ ) et cinq dénivelées mesurées ( $\Delta z_j$ ). Sont ensuite calculés les écarts suivants :

$$\varepsilon_{Dj} = D_j - D_0$$

$$\varepsilon_{zj} = \Delta z_j - \Delta z_0 .$$

On vérifie que ces écarts sont tous inférieurs aux limites suivantes :

$$|\varepsilon_{Dj}| \leq 2,5 \sqrt{2} \sigma_{xy}$$

$$|\varepsilon_{zj}| \leq 2,5 \sqrt{2} \sigma_z$$

où  $\sigma_x$  est l'écart-type planimétrique annoncé par le constructeur,

$y$

$\sigma_z$  est l'écart-type altimétrique annoncé par le constructeur.

3° La procédure complète consiste à effectuer trois séries (identifiées par l'indice  $i$  variant de 1 à 3) de cinq jeux de mesurages sur les stations 1 et 2 (trois fois les mesures effectuées au cours de la procédure simplifiée). Ces séries sont débutées à 90 minutes d'intervalles de manière à intégrer dans la variabilité mesurée l'influence d'un changement de constellation des satellites utilisés et de conditions ionosphériques et troposphériques.

Chacune des séries de mesurages fait d'abord l'objet d'une détection d'erreur grossière comme décrite dans la procédure simplifiée.

Les moyennes des quinze coordonnées en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  sont ensuite calculées :

$$\bar{x}_k = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 x_{i,j,k}$$

$$\bar{y}_k = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 y_{i,j,k}$$

$$\bar{z}_k = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 z_{i,j,k}$$

Les résidus des quinze coordonnées mesurées sur les deux stations sont calculés comme suit :

$$r_{x\ i,j,k} = \bar{x}_k - x_{i,j,k},$$

$$r_{y\ i,j,k} = \bar{y}_k - y_{i,j,k},$$

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

$$r_{z\ i,j,k} = \bar{z}_k - z_{i,j,k}.$$

Les sommes des carrés des résidus en x, en y et en z sont ensuite calculées :

$$SCr_x = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^2 r_{x\ i,j,k}^2,$$

$$SCr_y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^2 r_{y\ i,j,k}^2,$$

$$SCr_z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^2 r_{z\ i,j,k}^2.$$

On procède alors à une estimation des écarts-types en x, en y et en z, en tenant compte de ce que deux moyennes ont été calculées pour chaque coordonnée (correspondant aux deux stations), ce qui réduit le nombre de degrés de liberté d'une unité par station. Ce nombre de degrés de liberté doit encore être réduit du nombre de données rejetées lors de la détection des erreurs grossières.

$$v_x = (m * n - 1) * q - \kappa_x,$$

$$v_y = (m * n - 1) * q - \kappa_y,$$

$$v_z = (m * n - 1) * q - \kappa_z,$$

où  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  sont les nombres de degrés de libertés relatifs aux coordonnées en x, en y et en z,

$m$  est le nombre de séries (3 dans notre cas),

$n$  est le nombre de jeux dans chaque série (5 dans notre cas),

$q$  est le nombre de stations (2 dans notre cas),

$\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_z$  sont les nombres de coordonnées rejetées pour x, pour y et pour z.

Les écarts-types caractérisant la précision des mesures sur chacune des trois coordonnées s'obtiennent donc par les expressions :

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{SCr_x}{v_x}},$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{SCr_y}{v_y}},$$

$$\hat{\sigma}_z = \sqrt{\frac{SCr_z}{v_z}}.$$

Finalement les écarts-types normalisés ISO, tant en planimétrie qu'en altimétrie, se calculent par les expressions :

## 15. Qualité des mesures GNSS : justesse et précision

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-xy}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-h}} = \hat{\sigma}_z.$$

4° En supposant que la distribution des erreurs accidentelles intervenues dans les mesurages décrits ci-dessus est une distribution normale et que ces erreurs accidentelles sont indépendantes entre elles, on peut vérifier si les écarts-types normalisés obtenus confirment bien les écarts-types annoncés par le constructeur du récepteur ou tout autre valeur de référence disponibles pour ces écarts-types.

Il s'agit, en fait, de vérifier l'hypothèse selon laquelle ces écarts-types estimés sont bien inférieurs ou égaux aux valeurs de référence ( $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_h$ ). Cette hypothèse est rejetée si les inégalités suivantes ne sont pas respectées :

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-xy}} \leq \sigma_{xy} \sqrt{\frac{\chi_{0,95}^2}{v_x + v_y}},$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-h}} \leq \sigma_h \sqrt{\frac{\chi_{0,95}^2}{v_z}},$$

où  $\chi_{0,95}^2$  est la valeur théorique de la variable  $\chi^2$  à  $v_x + v_y$  ou à  $v_z$  degrés de liberté dont la fonction de répartition vaut 0,95.

Dans notre cas et en l'absence de mesurage écarté pour faute, le nombre de degrés de liberté est de 56 ou de 28 et la valeur théorique de la variable  $\chi^2$  vaut respectivement 74,47 et 41,34, ce qui donne pour les inégalités précédentes la forme :

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-xy}} \leq 1,15 * \sigma_{xy},$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ISO-GNSS-h}} \leq 1,22 * \sigma_h.$$

5° Le dispositif de mesurage présenté ci-dessus (trois séries de cinq jeux sur deux stations) peut aussi s'appliquer dans le but de comparer la précision de deux récepteurs GNSS différents, utilisés en mode RTK. Dans ce cas, chacun des deux récepteurs est soumis à la procédure complète et les écarts-types ainsi obtenus sont soumis à un test d'égalité des variances, comme présenté au paragraphe 15.3 3°

A noter dans ce cas que la valeur  $F_{0,975}$  de la distribution F de SNEDECOR à 56 et 56 degrés de liberté vaut 1,70 et la même pour 28 et 28 degrés de liberté vaut 2,13.