

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL  
Faculteit Toegepaste Wetenschappen



# Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques



*Application aux structures soumises en partie  
ou en totalité au flambement*

Tome 1/4 : mémoire

Pierre Lateur

*Verhandeling ingediend ter  
verkrijging van de graad van Doctor  
in de Toegepaste Wetenschappen*

*Promotor : Prof. Dr W. P. De Wilde*

*Februari 2000*

## Samenvatting

---

Algemeen gesproken kan het eigengewicht van een structuur die geheel of gedeeltelijk onderworpen is aan knik bestudeerd worden aan de hand van een dimensieloze grootheid genoemd *volume-indicator*  $W$ . Deze coëfficiënt is op zijn beurt functie van drie dimensieloze grootheden : de *geometrische slankheid*  $L/H$  van de structuur, de *knik-indicator*  $\Psi$  die de algemene neiging tot uitknikken weergeeft van de elementen en tot slot de *indicator voor het eigengewicht*  $\Phi$  :

$$W = f(L/H, \Psi, \Phi)$$

Deze vergelijking met een minimum aan variabelen laat toe om het volume (of het eigengewicht) van verschillende structuren met een gelijkaardige of een verschillende morfologie te vergelijken, en dit onafhankelijk van het materiaal, van de overspanning, van het type van de doorsnede of van de belasting. Zij laat eveneens toe om dit volume te optimaliseren, om een aantal algemene regels vast te leggen in verband met het gedrag van structuren of om de limiet van hun overspanningen te bepalen.

Anderzijds kan een gelijkaardige vergelijking gebruikt worden voor de studie van de stijfheid, gebaseerd op het concept van de *verplaatsingsindicator*  $\Delta$  :

$$\Delta = f'(L/H, \Psi, \Phi)$$

Een gemeenschappelijke studie van de twee indicatoren laat toe om het theoretisch veld uit te breiden en te gebruiken in het kader van een predimensionering of het beoordelen van de gegrondheid van een voorgestelde structurele oplossing. Het in dit kader uitgevoerde werk betreft voornamelijk de klassieke vakwerken en boogstructuren, maar kabels en rechte balken worden ook bestudeerd.

Tenslotte wordt nog een onderzoek naar parasitaire spanningen in vakwerken met stijve knopen en hyperstatische bogen voorgesteld.

## Résumé

---

De façon générale, le poids propre d'une structure soumise en partie ou en totalité au flambement peut s'étudier par l'intermédiaire d'un nombre adimensionnel baptisé *indicateur de volume*  $W$ . Ce facteur est lui-même fonction de trois autres nombres sans dimension : *l'élancement géométrique*  $L/H$  de la structure, *l'indicateur de flambement*  $\Psi$  qui est l'image de la tendance générale des éléments à flamber et enfin *l'indicateur de poids propre*  $\Phi$  :

$$W = f(L/H, \Psi, \Phi)$$

Cette relation qui relie un minimum de variables permet de comparer le volume (ou le poids propre) de différentes structures semblables ou de morphologies différentes, indépendamment du matériau, de la portée, du type de sections ou de la valeur des charges. Elle permet aussi d'optimiser ce volume, d'établir certaines règles générales de comportement des structures ou de définir leurs portées limites.

Par ailleurs, une même relation peut être utilisée pour l'étude de la rigidité, basée sur le concept d'*indicateur de déplacement* :

$$\Delta = f'(L/H, \Psi, \Phi)$$

L'étude conjointe des deux indicateurs permet d'étendre le champ de la théorie et de l'utiliser dans le cadre d'un prédimensionnement ou de l'évaluation de la pertinence d'une solution structurale proposée.

Le travail effectué dans ce cadre concerne essentiellement les treillis classiques et les structures à base d'arcs, mais les câbles et les poutres droites sont aussi étudiés.

Enfin, une recherche concernant les contraintes parasites dans les treillis à nœuds rigides et dans les arcs hyperstatiques est aussi présentée.

---

## Remerciements et historique

---

Je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur, le professeur W. Patrick DE WILDE, qui a montré de l'intérêt pour mes recherches et accepté de me guider dans mon travail. Ses encouragements me furent précieux et le subtil mélange de compétence scientifique et de gentillesse qui le caractérisent m'ont beaucoup aidé à mener cette étude à son terme. Merci aussi à Philippe SAMYN qui fut le catalyseur de mes recherches. Merci à lui pour son enthousiasme constant et pour ses conseils judicieux. Je suis aussi très reconnaissant au professeur François FREY de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne de m'avoir reçu plusieurs mois au sein de son laboratoire afin de finaliser ce travail. Enfin, merci aux professeurs René MACQUOI et Jacques RONDAL de l'Université de Liège pour nos sympathiques entrevues.

Lorsqu'au cours de l'année 1996 je développai l'ébauche d'un programme interactif de calcul des treillis à usage didactique, ultérieurement complété et baptisé ISSD, j'étais loin d'imaginer qu'il allait être l'outil indispensable à mon futur travail de thèse. En novembre 1997, après avoir rencontré Philippe SAMYN et décidé de rejoindre son groupe à mi-temps, je reçus comme première tâche de collaborer à la rédaction d'une publication destinée au congrès de l'IASS (*International Association for Shells and Spatial Structures*) de Sydney prévue pour septembre 1998. Je fus d'emblée intrigué par cette étude consacrée au prédimensionnement des structures et je découvris par la même occasion la notion d'*indicateur de volume*. Celle-ci attira mon attention car elle semblait apporter une ébauche de réponse à une question que je me posais depuis mes premiers cours de résistance des matériaux : comment choisir la structure la plus efficace et la plus appropriée à une situation donnée ?

Ce concept mettait en évidence que le volume de matière (et donc le poids propre) d'une structure soumise à un cas de charge donné ne dépendait que de son élancement géométrique, autrement dit du rapport entre ses deux dimensions principales. Je fus impressionné par les potentialités de cette approche qui permettait de comparer le volume de différents types de structures. J'entrepris alors mes propres études sur le sujet, qui mirent en évidence que l'expression des indicateurs de volume et de déplacement restent inchangées lorsque les phénomènes de flambement sont pris en compte, à condition d'introduire un nouveau facteur, baptisé *indicateur de flambement*. Ce nombre ouvrait à mes yeux de nouvelles perspectives pour la comparaison, le prédimensionnement et l'optimisation des structures soumises en partie ou en totalité au flambement. Enfin, l'utilisation d'un nouvel indicateur, baptisé *indicateur de poids propre*, permit une extension non négligeable des potentialités de la méthode.

Un autre indicateur vit le jour au cours de vacances passées sur le *Shannon* en Irlande en avril 1998. D'un intérêt pratique limité, il répondait toutefois à une autre question que je me posais depuis longtemps. Il permettait en effet de mettre en évidence les divers facteurs qui influencent l'ordre de grandeur des contraintes parasitaires qui naissent dans un treillis dont les nœuds ne sont pas des articulations parfaites.

C'est en février 1999 que fut présenté pour la première fois le programme ISSD (*Interactive Software for Structural Design*) à l'Université de Plymouth lors du congrès de l'EAAE (European Association for Architectural Education). A cette date, il comportait déjà une sous-routine primitive permettant l'optimisation des treillis, mais ne considérait alors ni le flambement ni le poids propre. Le programme fut par la suite complété et transformé dans le but de produire les résultats actuels.

Je pris alors la décision de quitter la Belgique durant les mois de juillet à décembre 1999, afin de me consacrer exclusivement à ces recherches. C'est ainsi que je fus reçu dans le laboratoire du professeur FREY de l'EPFL, que je remercie encore chaleureusement pour l'accueil très sympathique qu'il m'a réservé. Une bourse du FNRS me permit d'assumer une partie des charges financières dues à ce séjour ainsi que l'achat de matériel informatique performant nécessaire aux longs calculs numériques qui sous-tendent cette étude.

A mon arrivée à l'EPFL, un doute sur l'originalité de ces concepts d'indicateurs morphologiques et la crainte du plagiat scientifique involontaire m'animaient encore. De longs séjours à la bibliothèque très fournie me confortèrent sur ce point, de même que les commentaires suscités par la présentation de nos travaux au Congrès IASS de septembre 1999 à Madrid et ceux du comité de lecture de *La Revue Française de Génie Civil*.

Enfin, je remercie tout particulièrement Dominique qui doit subir ma passion pour les structures et qui a dû rester seule en Belgique durant mon séjour à Lausanne.

Merci aussi à mes parents pour leur aide et leurs encouragements depuis toujours.

Merci à Christianne et Olivier NOVERRAZ pour avoir mis à ma disposition un logement "5 étoiles" à quelques pas du lac Léman, lors de mon séjour à Lausanne.

Merci à Marc-André STUDER et Blaise REBORA, tous deux chargés de cours à l'EPFL, pour la sympathie et l'amitié dont ils ont fait preuve à mon égard.

---

Louvain-la-Neuve, le 15 février 2000.

# Table des matières

---

## Notations

## Préambule : le logiciel ISSD

## Introduction

### CHAPITRE 1 : Indicateur de volume : fondements

<b>1. INTRODUCTION</b> .....	3
<b>2. LE CRITERE DE POIDS MINIMUM ET L'EXPRESSION GENERALE DE L'INDICATEUR DE VOLUME</b> .....	4
2.1. Flambement négligé.....	5
2.2. Prise en compte du flambement des barres en compression selon la loi hyperbolique d'Euler $\sigma_{Crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$ .....	6
2.3. Prise en compte du flambement des barres en compression selon la loi d'Euler modifiée (courbe "en cloche").....	14
2.3.1. Les courbes de flambement des différents matériaux .....	14
2.3.2. Expression de l'indicateur de volume .....	14
2.3.3. Recherche de l'indicateur de volume minimum .....	16
2.3.4. Discussion sur les valeurs de l'indicateur de flambement $\Psi$ .....	16
<b>3. OPTIMISATION DU POIDS DES TREILLIS COMPOSES DE CATEGORIES DE BARRES IDENTIQUES</b> .....	19
<b>4. PRISE EN COMPTE DU POIDS PROPRE : L'INDICATEUR DE POIDS PROPRE</b> .....	20
4.1. Considérations générales.....	20
4.2. Expression générale de l'indicateur de volume d'un treillis optimisé en fonction des charges extérieures combinées au poids propre.....	22
4.2.1. Volume d'une barre isolée .....	22
4.2.2. Expression de l'indicateur de volume si le flambement est négligé .....	22
4.2.3. Expression de l'indicateur de volume si le flambement est pris en compte selon la loi hyperbolique d'Euler $\sigma_{Crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$ .....	24
4.2.4. Expression de l'indicateur de volume si le flambement est pris en compte selon la courbe de flambement en cloche $\sigma_{Crit.} / \sigma = 1 / (1 + \Lambda^2)$ .....	25
4.2.5. Discussion sur les valeurs de l'indicateur de poids propre $\Phi = L / (\sigma / \rho)$ à considérer. .....	26
4.2.6. Détermination du pourcentage de poids propre $\rho V / F$ .....	28
4.2.7. Une propriété intéressante : relation "quasi-linéaire" entre W et $\Phi$ .....	28

<b>5. STRUCTURES SOUMISES A DES CHARGES REPARTIES DE FAÇON ALEATOIRE</b> .....	30
5.1. Détermination des combinaisons de charges critiques.....	30
5.2. Recherche des cas de charge les plus défavorables par une approche calquée sur la théorie des lignes d'influence .....	36
5.3. Calcul pratique de l'indicateur de volume d'une structure soumise à une charge aléatoirement distribuée .....	36
<b>6. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES COMPRIMEES DES TREILLIS OPTIMAUX</b> .....	37
<b>7. OPTIMISATION DES TREILLIS HYPERSTATIQUES</b> .....	39
<b>8. LE THEOREME DE BUCKINGHAM</b> .....	41
<b>9. EXEMPLE PRATIQUE D'APPLICATION</b> .....	43
<b>10. QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LES ELEMENTS REPORTANT LES CHARGES SUR LES NŒUDS</b> .....	48

<i><b>CHAPITRE 2 : Etude et comparaison du volume des treillis classiques</b></i>
---

<b>Préambule</b> .....	3
------------------------	---

<i><b>Partie I : Les treillis Warren</b></i> .....	5
--	---

<b>I.1. AVANT-PROPOS</b> .....	7
<b>I.2. CONSIDERATIONS GENERALES ET PREMIERES DEDUCTIONS</b> .....	9
<b>I.3. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS ETUDIES</b> .....	12
I.3.1. Comparaison des treillis "Norm" et "Sous".....	12
I.3.2. Influence de la charge aléatoire.....	13
I.3.3. Optimisation individuelle ou par catégories de barres .....	14
I.3.4. Indicateur de volume par groupes de barres.....	16
<b>I.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	17
<b>I.5. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	19
<b>I.6. REPARTITION DU POIDS PROPRE</b> .....	21
<b>COURBES D'EFFICIENCE ET ENVELOPPE DES COURBES D'EFFICIENCE DANS LES 8 CAS DE FIGURES DU TREILLIS WARREN</b> .....	22

*Partie II : Les treillis Pratt* .....39

<b>II.1. AVANT-PROPOS</b> .....	41
<b>II.2. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS ETUDIES</b> .....	41
II.2.1.Comparaison des treillis "Norm" et "Sous" .....	44
II.2.2.Influence de la charge aléatoire .....	46
II.2.3.Optimisation individuelle ou par catégories de barres .....	46
II.2.4.Indicateur de volume par groupes de barres .....	47
<b>II.3. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	48
<b>II.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	50
<b>II.5. REPARTITION DU POIDS PROPRE</b> .....	52
<b>COURBES D'EFFICIENCE ET ENVELOPPE DES COURBES D'EFFICIENCE DANS LES 8 CAS DE FIGURES DU TREILLIS PRATT</b> .....	54

*Partie III : Les treillis Howe* .....71

<b>III.1. AVANT-PROPOS</b> .....	73
<b>III.2. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS</b> .....	75
III.2.1. Comparaison des treillis "Norm" et "Sous" .....	76
III.2.2. Influence de la charge aléatoire.....	78
III.2.3. Optimisation individuelle ou par catégories de barres .....	78
III.2.4. Indicateur de volume par groupes de barres.....	79
<b>III.3. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	80
<b>III.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMUMS</b> .....	82
<b>III.5. REPARTITION DU POIDS PROPRE</b> .....	84
<b>III.6. COMPARAISON ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME DES TREILLIS PRATT ET HOWE</b> .....	84
<b>COURBES D'EFFICIENCE ET ENVELOPPE DES COURBES D'EFFICIENCE DANS LES 8 CAS DE FIGURES DU TREILLIS HOWE</b> .....	86



***Partie IV : Synthèse*** .....103

**IV.1. COMPARAISON DE L'INDICATEUR DE VOLUME DES 3 TYPES DE TREILLIS CLASSIQUES WARREN, PRATT ET HOWE**.....105

**IV.2. AUTRES CONSIDERATIONS** .....105

**IV.3. CONCLUSION** .....106

***CHAPITRE 3 : Indicateur de déplacement et raideur des treillis classiques***

**1. INTRODUCTION** .....3

**2. EXPRESSION DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT** .....3

2.1. Flambement et poids propre négligés .....3

2.2. Prise en compte du flambement .....6

**3. INDICATEUR DE DEPLACEMENT D'UN TREILLIS COMPOSE DE CATEGORIES DE BARRES IDENTIQUES**.....7

**4. INDICATEUR DE DEPLACEMENT D'UN TREILLIS SOUMIS A UNE CHARGE ALEATOIRE**.....8

**5. PRISE EN COMPTE DU POIDS PROPRE DANS L'EXPRESSION DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT** .....9

5.1. Si le flambement est négligé .....9

5.2. Si le flambement est pris en compte .....9

**6. FLECHES RELATIVES** .....10

**7. ANALYSE ET COMPARAISON DES TREILLIS WARREN, PRATT ET HOWE**.....11

7.1. Courbes d'efficience de déplacement .....13

7.2. Indicateur de déplacement des treillis de poids minimum .....22

7.3. Influence du poids propre sur la rigidité des treillis .....24

**8. OPTIMISATION DU POIDS SOUS CONTRAINTE DE DEPLACEMENT**.....24

**9. CONCLUSION** .....25

## **CHAPITRE 4 : Volume et raideur des arcs**

<b>1. SYNTHESE SUR LE FLAMBEMENT DES ARCS</b> .....	3
<b>2. INDICATEUR DE VOLUME D'UN ARC</b> .....	8
2.1. Flambement négligé.....	8
2.2. Flambement pris en compte, sans correction de la courbe de flambement.....	10
2.2.1. Arc de section constante.....	10
2.2.2. Arc de section variable selon la loi $\Omega = \Omega_0/\cos\varepsilon$ .....	13
2.2.3. Elancements optimaux et courbes d'efficience.....	14
2.2.4. Imperfection des courbes d'efficience .....	15
2.2.5. Réduction de volume obtenue grâce à l'introduction d'appuis intermédiaires.....	16
2.3. Flambement pris en compte, avec correction de la courbe de flambement .....	19
2.3.1. Correction de la loi de flambement .....	19
2.3.2. Calcul de l'indicateur de volume corrigé de l'arc de section constante .....	21
2.3.3. Calcul de l'indicateur de volume corrigé de l'arc de section variable.....	22
2.3.4. Courbes d'efficience corrigées.....	23
2.3.5. Intérêt de la section variable.....	27
2.3.6. Influence du nombre d'articulations sur le volume d'un arc .....	28
<b>3. COMPARAISON DES ARCS ET DES TREILLIS CLASSIQUES</b> .....	29
<b>4. INFLUENCE DU POIDS PROPRE DE L'ARC ET DES CHARGES VARIABLES</b> .....	31
4.1. Répartition du poids propre dans un arc.....	31
4.2. Prise en compte du poids propre dans l'expression de l'indicateur de volume d'un arc .....	32
4.3. Argumentation sur les charges variables : l'arc est-il légitime ? .....	33
<b>5. INDICATEUR DE VOLUME DES SUSPENTES ET COLONNETTES</b> .....	38
5.1. Suspentes.....	38
5.2. Colonnnettes.....	40
<b>6. INDICATEUR DE DEPLACEMENT DES ARCS</b> .....	45
6.1. Flambement négligé.....	46
6.2. Prise en compte du flambement selon la loi de flambement non corrigée.....	47
6.2.1. Arc de section constante.....	47
6.2.2. Arc de section variable .....	48
6.3. Prise en compte du flambement selon la loi de flambement corrigée.....	49
6.3.1. Arc de section constante.....	49
6.3.2. Arc de section variable .....	50
<b>7. CONCLUSION</b> .....	51

## **CHAPITRE 5 : Contraintes parasites dans les treillis et dans les arcs**

### ***Partie I : Contraintes parasites dans les treillis***.....3

<b>I.1. INTRODUCTION</b> .....	5
<b>I.2. L'INDICATEUR DE ROTATION</b> .....	6
<b>I.3. L'INDICATEUR DE CONTRAINTES PARASITAIRES</b> .....	10
I.3.1. Expression générale de l'indicateur.....	10
I.3.2. Contraintes parasites dans les treillis classiques.....	14
<b>I.4. L'INDICATEUR DE DELTA-VOLUME</b> .....	18
I.4.1. Expression de l'indicateur .....	18
I.4.2. Comparaison des treillis classiques .....	19
I.4.3. Récapitulation des facteurs influençant l'ordre de grandeur du delta-volume .....	26

### ***Partie II : Contraintes parasites dans les arcs*** .....29

<b>II.1. INTRODUCTION</b> .....	31
<b>II.2. L'INDICATEUR DE CONTRAINTES PARASITAIRES</b> .....	32
<b>II.3. L'INDICATEUR DE DELTA-VOLUME</b> .....	32
II.3.1. Arc de section constante.....	34
II.3.2. Arc de section variable .....	36
II.3.3. Discussion sur l'ordre de grandeur du surplus de volume .....	36

## **CHAPITRE 6 : Portée limite des structures**

<b>1. INTRODUCTION</b> .....	3
<b>2. PORTEE LIMITE DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES</b> .....	3
2.1. Portée limite sur base de la résistance.....	3
2.2. Portée limite sur base des déformations.....	8
2.2.1. Indicateur de déplacement à mi-travée d'une poutre isostatique sur 2 appuis, avec prise en compte du poids propre .....	8
2.2.2. Calcul des portées limites.....	10

2.3. Conclusion .....	11
<b>3. PORTEE LIMITE DES ARCS .....</b>	<b>16</b>
3.1. Portée limite sur base de la résistance .....	16
3.2. Portée limite sur base des déformations .....	20
3.3. Conclusion .....	22
<b>4. PORTEE LIMITE DES CABLES .....</b>	<b>23</b>
4.1. Calcul selon l'hypothèse "câble parabolique" .....	23
4.2. Calcul selon l'hypothèse "câble en chaînette" .....	26
<b>5. PORTEE LIMITE DES TREILLIS .....</b>	<b>27</b>
5.1. Préambule.....	27
5.2. Discussion sur la portée limite des treillis.....	28
<b>6. CONCLUSION.....</b>	<b>30</b>

***EPILOGUE : Capacités portantes et indicateurs comparés des poutres, arcs, câbles et treillis***

<b>1. INTRODUCTION.....</b>	<b>3</b>
<b>2. COMPARAISON DES CAPACITES PORTANTES ET DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES POUTRES .....</b>	<b>3</b>
2.1. Capacités portantes .....	3
2.2. Comparaison des indicateurs de volume.....	7
<b>3. COMPARAISON DES CAPACITES PORTANTES ET DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES CABLES .....</b>	<b>10</b>
<b>4. COMPARAISON DES CAPACITES PORTANTES ET DES INDICATEURS DE VOLUME DES POUTRES ET DES TREILLIS .....</b>	<b>10</b>
<b>5. COMPARAISON DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES TREILLIS.....</b>	<b>13</b>
<b>6. CONCLUSION.....</b>	<b>15</b>

***CONCLUSION ET PERSPECTIVES***

---

**Bibliographie**



# Notations

---

- a : indice désignant un arc;
- b : dimension transversale d'une section;
- c : indice désignant un câble;
- dx,dy : infiniment petits relatifs aux coordonnées d'un repère cartésien;
- ds,dl : infiniment petit relatif à la fibre moyenne d'une barre ou d'un arc;
- dV<sub>i</sub> : surplus de volume inhérent aux contraintes parasites et relatif à la barre d'indice "i";
- dΩ<sub>i</sub> : surplus de section inhérent aux contraintes parasites et relatif à la barre d'indice "i";
- e : épaisseur de paroi d'un profil creux [mm];
- E : module d'élasticité [MPa];
- f<sub>i</sub>,f<sub>i</sub><sup>(L/H,Ψ)</sup> : fonction dépendant des 2 nombres L/H et Ψ.
- F : charge totale extérieure [N];
- F<sub>crit.</sub> : charge totale extérieure critique [N];
- F<sub>tot.</sub> : charge totale maximale, y compris poids propre [N];
- g,g<sup>(L/H)</sup> : rapport entre la longueur d'un arc et sa portée : l<sub>arc</sub>/L;
- h,h<sub>k</sub> : hauteur d'une section d'indice "k";
- H : hauteur maximale d'une structure [mm];
- I<sub>0</sub> : inertie [mm<sup>4</sup>] d'un arc à la clef;
- i : nombre entier;
- I, I<sub>i</sub> : inertie [mm<sup>4</sup>] d'une barre d'indice "i";  
inertie [mm<sup>4</sup>] d'un arc en un point de la fibre moyenne;
- j : nombre entier;  
nombre de catégories de barres identiques;
- J : nombre réel, ne dépendant que du rapport L/H;
- k : nombre réel;
- k<sub>i</sub> : détermine l'effort normal k<sub>i</sub>F dans une barre d'indice "i";
- k'<sub>i</sub> : détermine l'effort normal k'<sub>i</sub>/L dans une barre d'indice "i";
- l<sub>arc</sub> : longueur de la fibre moyenne d'un arc;
- L : portée d'une structure [mm];
- L<sub>lim</sub> : portée limite d'une structure [m ou mm];
- L<sub>0</sub> : longueur totale d'un câble [m ou mm];
- l,l<sub>i</sub>,l<sub>k</sub> : longueur d'une barre d'indice "i" ou "k";
- ln : logarithme népérien;
- m : rapport entre l'épaisseur d'un profil creux et sa dimension principale : m=e/h;
- m,m<sub>1</sub> : moment fléchissant en toute section d'une structure soumise uniquement à un effort unitaire;
- M,M<sub>sec</sub> : moment fléchissant en toute section d'une structure soumise à un cas de charge quelconque;
- n : nombre de mailles d'un treillis;  
nombre de subdivisions de la travée d'un arc;  
nombre de colonnettes d'un arc;
- n<sub>1</sub> : effort normal en toute section d'une structure soumise uniquement à un effort unitaire;
- n<sub>i</sub> : effort normal dans une barre d'indice "i" d'une structure soumise uniquement à un effort unitaire;
- n<sub>j</sub> : nombre de barres assimilées à la catégorie "j".
- N<sub>i</sub> : effort normal dans la barre d'indice "i";
- N<sub>crit</sub> : effort normal maximal dans une barre en compression d'indice "i";
- p : charge répartie sur toute la portée d'une structure [N/mm];  
indice désignant une poutre;
- q, q<sub>i</sub> : facteur de forme d'une barre d'indice "i", égal à I/Ω<sup>2</sup>;
- q,q<sub>0</sub> : facteur de forme d'un arc en un point de la fibre moyenne, égal à I/Ω<sup>2</sup>;  
facteur de forme d'un arc à la clef, égal à I<sub>0</sub>/Ω<sub>0</sub><sup>2</sup>;
- q<sub>p</sub> : facteur de forme de la section d'une poutre, égal à I/Ω<sup>2</sup>;
- Q<sub>crit</sub> : poussée critique d'un arc;

$s, s_k$  : facteur de forme d'une section, égal à  $\Omega/h^2$ ;  
 $t$  : rapport entre les 2 dimensions principales d'un profil, égal à  $h/b$ ;  
 $T$  : indice désignant un treillis;  
 $V$  : volume total de matière d'une structure [ $\text{mm}^3$ ];  
 $V_i$  : volume de matière relatif à une barre d'indice "i" [ $\text{mm}^3$ ];  
 $V_i$  : volume d'un sous-arc d'indice "i" [ $\text{mm}^3$ ];  
 $W$  : indicateur de volume d'une structure, égal à  $\sigma V/FL$  ;  
 $W^{(C)}$  : nombre réel dépendant uniquement du rapport  $L/H$ ;  
 $W^{(T)}$  : nombre réel dépendant uniquement du rapport  $L/H$ ;  
 $W_i$  : indicateur de volume d'une barre ou d'un sous-arc d'indice "i", égal à  $\sigma V_i/FL$  ;  
 $W_S$  : indicateur de volume de l'ensemble des suspentes d'un arc;  
 $W_C$  : indicateur de volume de l'ensemble des colonnettes d'un arc;  
 $x, y$  : coordonnées d'un repère cartésien;  
 $x$  : nombre entier;  
 $y_i$  : longueur d'une colonnette ou d'une suspenste;  
 $Z, Z_p$  : facteur de forme d'une section, égal à  $\Omega h^2/(16I)$ .

$\alpha$  : angle d'ouverture des mailles d'un treillis;  
 $\beta$  : nombre réel;  
 $\beta_1, \beta_2$  : nombres réels, nombres réels ne dépendant que du rapport  $L/H$ ;  
 $\delta/L$  : flèche relative à mi-travée;  
 $\delta$  : symbole de dérivation;  
 $\delta$  : déplacement rectiligne d'un nœud [ $\text{mm}$ ];  
 $\Delta$  : indicateur de déplacement d'une structure, égal à  $E\delta/\sigma L$  ;  
 $\Delta^{(C)}$  : nombre réel uniquement dépendant du rapport  $L/H$ ;  
 $\Delta^{(T)}$  : nombre réel uniquement dépendant du rapport  $L/H$ ;  
 $\Phi$  : indicateur de poids propre d'une structure, égal à  $\rho L/\sigma$  ;  
 $\varepsilon$  : angle entre la fibre moyenne d'un arc et l'horizontale;  
 $\varepsilon$  : nombre réel;  
 $\varepsilon$  : infiniment petit;  
 $\gamma, \gamma_{\text{cor}}$  : fonction du rapport  $L/H$  (nombre réel);  
 $\gamma$  : rapport entre une contrainte parasitaire et la contrainte admissible  $\sigma$  ;  
 $\Gamma$  : indicateur de contrainte parasitaire relative, égal à  $\gamma L\sqrt{\sigma}/F$  ;  
 $\kappa$  : surplus de volume total inhérent aux contraintes parasites, égal à  $\sum dV_i/V$  ;  
 $K$  : indicateur de delta-volume, égal à  $\kappa L\sqrt{\sigma}/F$  ;  
 $\lambda, \lambda_i$  : élancement d'une barre en compression d'indice "i", égal à  $\mu L\sqrt{\Omega}/I$  ;  
 $\Lambda, \Lambda_i$  : élancement réduit d'une barre en compression d'indice "i", égal à  $\lambda/(\pi\sqrt{E/\sigma})$  ;  
 $\Lambda_i$  : élancement réduit d'un arc, égal à  $L\sqrt{\Omega_s}/I/\sqrt{E/\sigma}$  ;  
 $\mu$  : détermine la longueur de flambement  $\mu l$  des barres en compression;  
 $\theta$  : rotation angulaire d'un nœud, en radians;  
 $\Theta$  : indicateur de rotation angulaire, égal à  $E\theta/\sigma$  ;  
 $\rho$  : poids volumique [ $\text{N}/\text{mm}^3$ ];  
 $\sigma$  : contrainte de dimensionnement des barres en traction [MPa];  
 $\sigma$  : contrainte maximale admissible dans les barres en compression;  
 $\sigma_{\text{crit}}$  : contrainte maximale dans une barre en compression d'indice "i";  
 $\sigma_{\text{crit}}$  : contrainte maximale aux naissances d'un arc;  
 $\Omega_0$  : section efficace transversale [ $\text{mm}^2$ ] d'un arc à la clef;

- $\Omega, \Omega_i$  : section efficace [mm<sup>2</sup>] d'une barre d'indice "i";  
 section transversale efficace [mm<sup>2</sup>] d'un arc en un point de la fibre moyenne;  
 section efficace [mm<sup>2</sup>] d'une colonnette ou d'une suspente d'indice "i";  
 $\Omega_s$  : section efficace transversale [mm<sup>2</sup>] d'un arc au niveau des appuis;  
 $\Psi$  : indicateur de flambement d'une structure, égal à  $\mu\sigma L/\sqrt{qEF}$  pour un treillis et  $\sigma L/\sqrt{qEF}$  pour un arc.  
 $Z$  : facteur de forme d'une section, égal à  $\Omega h^2/I$ ;
- 

- (C) : désigne les éléments comprimés ou pouvant l'être;  
 (T) : désigne les éléments tendus ou pouvant l'être;  
 Aleat : désigne une charge aléatoire;  
 Cat : désigne un treillis composé de catégories de barres identiques;  
 Const : désigne un arc de section constante;  
 Dist : désigne une charge totale F répartie de façon homogène sur tous les nœuds de la membrure;  
 HLE : haute limite élastique;  
 THLE : très haute limite élastique;  
 Optimax : désigne un treillis dont toutes les barres sont optimisées individuellement;  
 Opti : désigne un élément ou une structure de volume minimum;  
 Var : désigne un arc de section variable.

*Avertissement* : le symbole HLE est utilisé pour désigner, de façon générale, les aciers à "haute" limite élastique. Celle-ci sera souvent fixée arbitrairement à 300 Mpa, ce qui est loin d'être une valeur maximale, et qui ne peut en tout cas pas être représentative de tous les aciers relatifs aux profilés commerciaux actuels pouvant présenter des limites élastiques comprises dans une gamme très large.

Les photographies insérées dans ce texte sont essentiellement issues de l'ouvrage *Ponts*, publié aux presses polytechniques romandes (références en bibliographie).





## Préambule : le logiciel ISSD

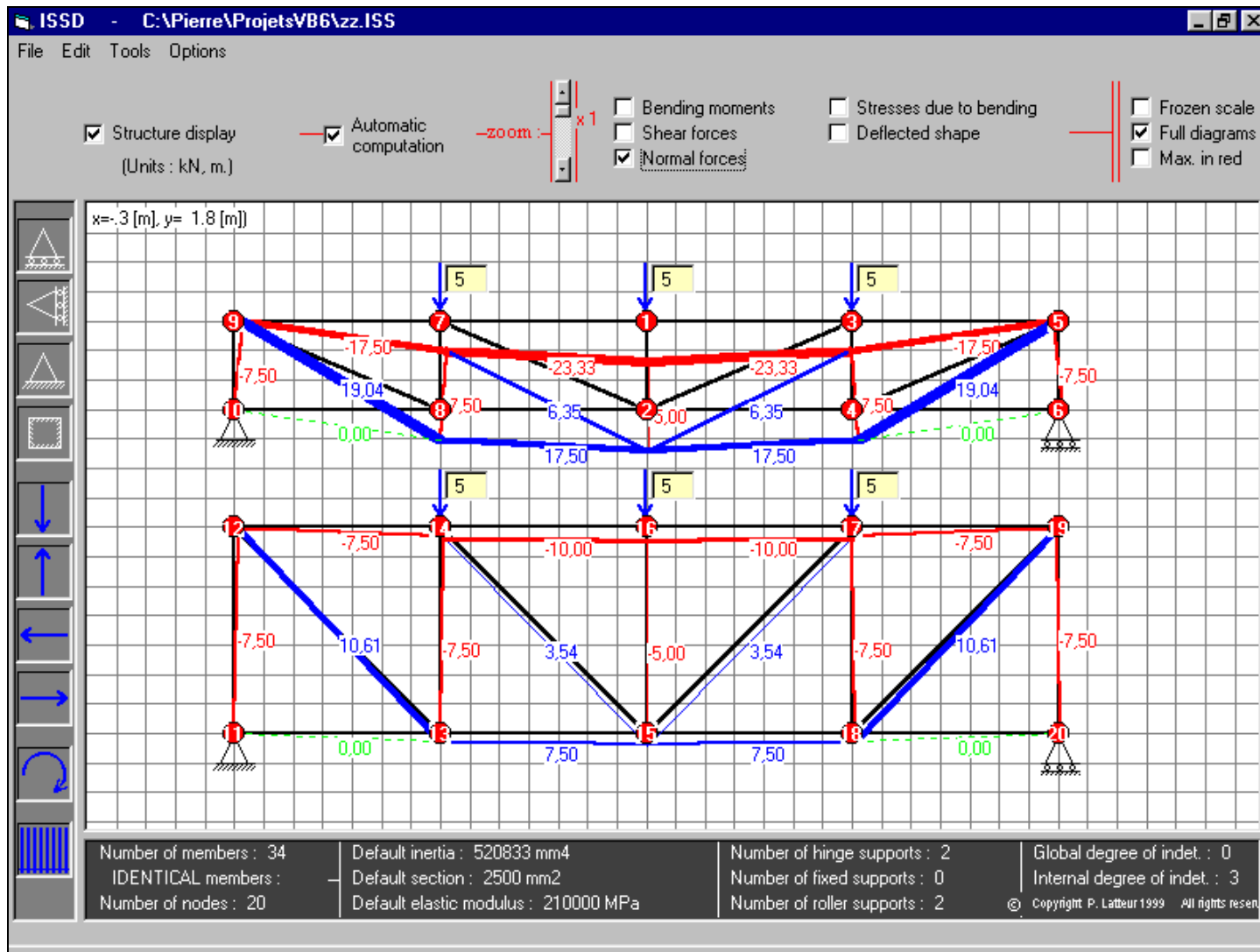
Depuis quelques années, les méthodes de programmation et les ordinateurs permettent de construire des outils conviviaux et pratiques. Dans cette perspective, un programme interactif de calcul des structures a été mis au point, dont la subroutine principale est basée sur la méthode des éléments finis. Celui-ci ne peut en aucun cas rivaliser avec les programmes commerciaux actuels nettement plus élaborés qui permettent la résolution de structures très complexes et qui comportent des applications particulières adaptées à tel ou tel type de matériau. L'objectif de ce programme, désormais utilisé par plusieurs universités et écoles supérieures belges et européennes, est différent : il a été écrit dans le but initial de fournir aux étudiants, même débutants, un outil simple et fiable, immédiatement opérationnel et capable de résoudre n'importe quelle structure bi-dimensionnelle, même complexe. Ses atouts principaux sont la facilité avec laquelle l'utilisateur peut changer une quelconque caractéristique de la structure : ajouter, déplacer ou supprimer un nœud, une barre, une charge ou un appui par simple utilisation de la souris, mais aussi la possibilité de dessiner sur le même écran plusieurs structures afin de les comparer. Le programme est construit de telle manière que les diagrammes des moments, des efforts tranchants, des efforts normaux et des déformées peuvent être affichés, même en combinaison.

Par la suite, le programme a été adapté afin de permettre l'optimisation des treillis et des arcs sur base de la méthode des indicateurs morphologiques décrite au chapitre 1. Il comporte également une procédure particulière permettant le calcul au second ordre et la détermination des modes de flambement des structures.

Toutes les figures reprises dans cette étude et en annexe ont été calculées à partir du programme ISSD. Les courbes d'efficacité sont dans chaque cas composées de 100 points découlant d'une optimisation d'indicateur de volume assurant une précision de 0,001. L'ensemble des courbes présentées a nécessité au total plus de 500 heures de calcul sur PII200 et PIII450.

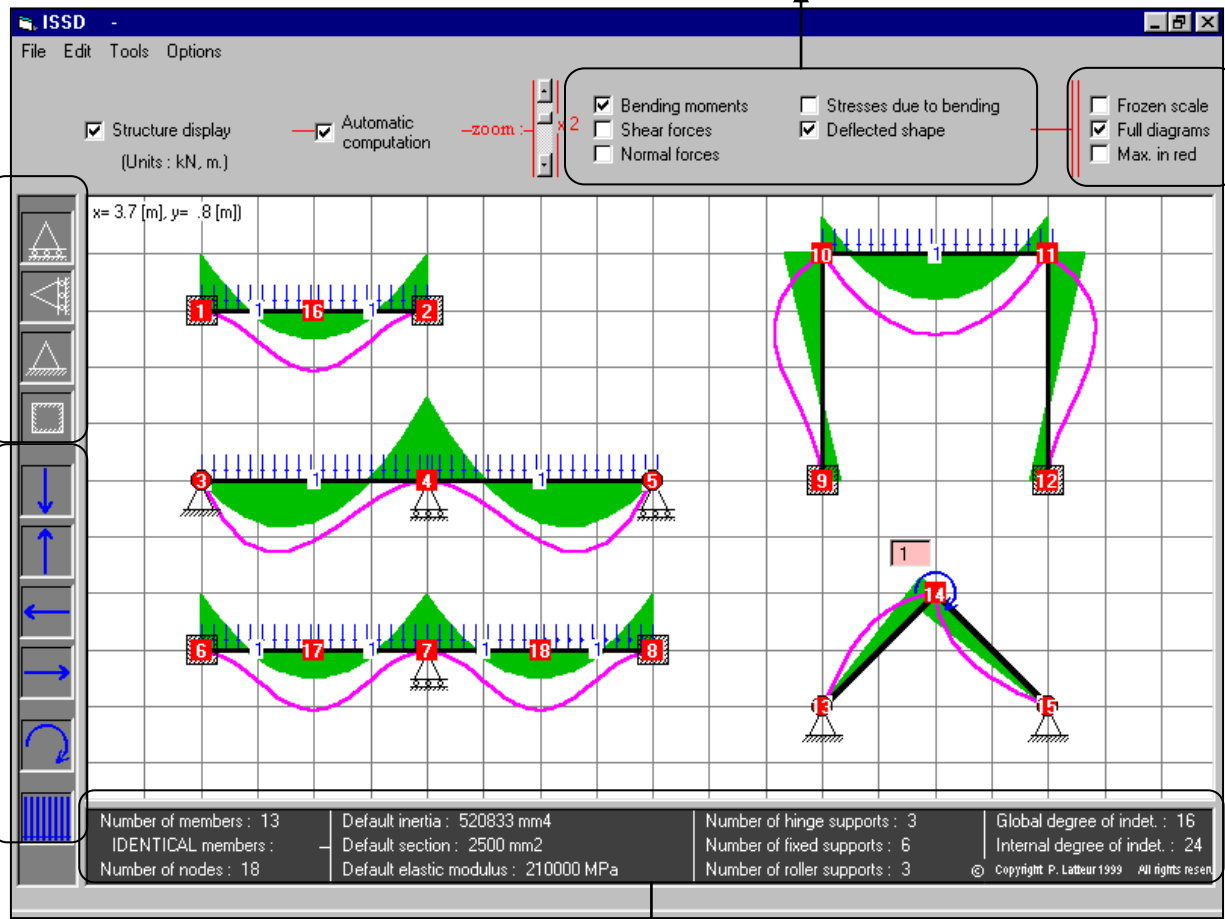
Le mode d'emploi complet du logiciel ISSD est repris en annexe, et les pages suivantes montrent une vue générale de la feuille principale.





*Feuille principale du logiciel ISSD : comparaison de treillis Pratt.*

Options d'affichage pour les diagrammes d'efforts et de déformation : affichage individuel ou en combinaison.



Appuis à prendre et déplacer avec la souris.

Charges ponctuelles ou distribuées à prendre et déplacer avec la souris.

Autres options d'affichage

Caractéristiques globales des structures

Feuille principale du logiciel ISSD : comparaison d'éléments fléchis.



# *Introduction*





Il est clair que le choix d'une solution structurale ne peut se baser uniquement sur la quantité de matière mise en œuvre. Beaucoup d'autres paramètres peuvent entrer en compte : des facteurs de main d'œuvre, de disponibilité ou de transport des matériaux, des facteurs socio-économiques, culturels ou politiques, et bien d'autres encore. Quoi qu'il en soit, la comparaison sur base du volume apporte une information utile dans le processus décisionnel qui mène au choix d'une structure et ce point de vue à lui seul justifie à mes yeux toute la présente étude.

Cette thèse porte sur l'optimisation du volume ou du poids propre des structures, en tenant compte de leur raideur : ceci conduit naturellement à des réflexions parallèles concernant par exemple la portée limite des structures, la comparaison des capacités portantes ou les contraintes parasitaires.

Elle s'articule autour de 7 chapitres :

- Chapitre 1 : Fondements;
- Chapitre 2 : Etude et comparaison du volume des treillis classiques;
- Chapitre 3 : Indicateur de déplacement et raideur des treillis classiques;
- Chapitre 4 : Volume et raideur des arcs;
- Chapitre 5 : Contraintes parasitaires dans les treillis et dans les arcs;
- Chapitre 6 : Portée limite des structures;
- Epilogue : Capacités portantes et indicateurs comparés des poutres, arcs, câbles et treillis.

**Le chapitre 1** est un prérequis indispensable à la lecture de tous les autres chapitres. Il définit les hypothèses de base, met à jour les équations fondamentales de l'étude, et démontre et explicite les concepts menant aux notions d'*indicateur de volume*, d'*indicateur de flambement*, d'*indicateur de poids propre* et de *courbes d'efficience*. Il comporte un exemple d'application pratique récapitulatif de toute la méthode d'optimisation en page 1.43.

**Le chapitre 2** est une application pratique directe des concepts établis au chapitre 1, et vise à comparer les treillis de type Warren, Pratt et Howe sur base de leur volume. Il comporte 3 parties relatives à chacun des 3 types de treillis. Cette étude montre principalement que le treillis Warren est globalement plus performant que les deux autres, et que le treillis Howe est toujours le moins efficace. Une synthèse des principaux résultats du chapitre 2 est reprise en page 2.103.

**Le chapitre 3** est une extension des chapitres 1 et 2 : il a pour but d'étudier dans quelle mesure les treillis optimaux au niveau du volume présentent des déformations excessives. La première partie est consacrée au développement du concept d'*indicateur de déplacement* d'une structure soumise au flambement et à son poids propre. La seconde est une étude de la raideur des treillis Warren, Pratt et Howe les plus légers ou les plus raides. Une conclusion est reprise en page 3.25.

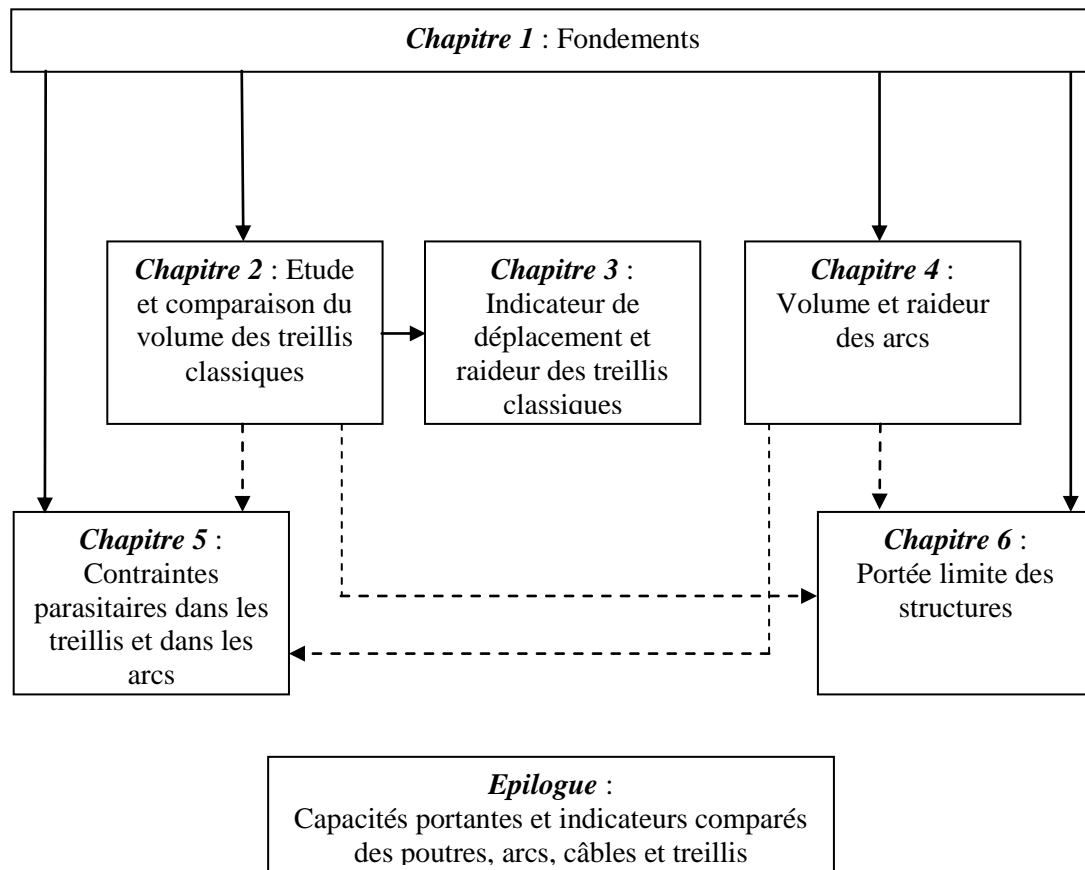
**Le chapitre 4** est consacré à l'étude du volume et de la raideur des arcs paraboliques funiculaires et s'applique à montrer que l'optimisation du volume des arcs peut se faire de manière similaire à celle des treillis, par l'emploi des mêmes indicateurs. Les géométries optimales sont établies ainsi que de nombreuses considérations portant, entre autres, sur les colonnettes, les suspentes, la distribution du poids propre ou des charges variables, l'influence de l'hyperstaticité sur le volume total ou sur la raideur. Une conclusion est reprise en page 4.51.

**Le chapitre 5** est un chapitre particulier : il traite des contraintes secondaires dans les treillis et, accessoirement, dans les arcs hyperstatiques. Globalement, il tente de répondre aux questions suivantes : les nœuds d'un treillis doivent-ils être articulés ? Dans quelles proportions modifient-ils les contraintes normales de compression et quelle est leur influence sur le volume total de la structure ?

**Le chapitre 6** est une extension des résultats issus en partie des chapitres 2 et 4 : il consiste à étudier et comparer les portées limites respectives des différentes structures (y compris poutres et câbles) et de mettre à jour les paramètres qui influencent ces portées limites. L'étude distingue et compare les

portées limites sur base de la résistance et les portées limites sur base de la raideur. Une conclusion est reprise en page 6.30.

Enfin, *l'épilogue* compare les différents types de structures sur base des capacités portantes ou des volumes. Elle comprend notamment une étude particulière sur les treillis multilièrnes.





# *Chapitre 1*

## *Fondements*

*Photo de première page : pont Warren sur le Tonegawa au Japon.*

*Source : Ponts, L'esthétique des ponts, Presses polytechniques romandes, Leonhardt F., 1994.*

## 1. INTRODUCTION

Depuis la publication du livre de Majid et des travaux de Michell (voir bibliographie), de nombreux auteurs ont consacré leurs recherches à l'optimisation des treillis. Ces études se distinguent par la façon dont le poids propre, le flambement ou diverses contraintes sont pris en compte. La méthode d'optimisation du poids des treillis la plus répandue, appelée *méthode multi-critères*, consiste à définir une *fonction coût* qui est l'image de la quantité de matière utilisée :

$$CF = \sum_{i=1}^m k_i l_i \Omega_i$$

Dans cette relation,  $m$  est le nombre de barres du treillis,  $k_i$  le facteur de coût,  $l_i$  et  $\Omega_i$  respectivement la longueur et l'aire efficace de la barre d'indice "i".

Cette fonction coût doit être minimisée, tout en satisfaisant un champ de contraintes. Ces contraintes peuvent concerner un certain nombre de déplacements aux nœuds à respecter ( $\delta_j \leq v_j$ ), les contraintes dans chaque barre ( $N_i/\Omega_i \leq \sigma_i$ ), ou d'autres spécifications comme l'élanement des barres ou des caractéristiques dynamiques. Finalement, cette approche fournit un système d'équations relativement complexe qui doit être résolu de façon numérique.

Cette méthode est très lourde, particulièrement lorsque le flambement et le poids propre doivent être pris en compte. Un autre inconvénient majeur est le manque de généralité propre à la solution trouvée pour un problème donné. Le calcul complet doit en effet être recommencé si l'une des caractéristiques du treillis (matériau, type de sections, charge, portée..) est modifiée.

La seule solution pour réduire la lourdeur de cette approche est donc de diminuer le nombre de paramètres qui interviennent dans la formulation, et c'est le principe de la méthode utilisée dans cette étude, basée sur la notion d'*indicateurs morphologiques*. L'approche montre que, sous l'influence d'une charge quelconque invariable ou aléatoire, l'expression du volume total de matière propre à un treillis peut être étudiée par l'intermédiaire d'un nombre sans dimensions, baptisé *indicateur de volume* par Philippe Samyn. Le treillis peut être composé de barres optimisées de façon individuelle ou de catégories de barres identiques. Lorsque le flambement des éléments en compression ainsi que le poids propre et sa répartition non-homogène au sein de la structure sont pris en compte, l'expression de l'indicateur de volume est la suivante :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} \quad \text{avec} \quad W = f(L/H, \Psi, \Phi)$$

Dans cette relation,

- $L/H$  est l'élanement géométrique du treillis, c'est-à-dire le rapport entre les côtés du rectangle dans lequel il s'inscrit;
- $\Psi = \mu \sigma L / \sqrt{qEF}$  est l'*indicateur de flambement*;
- $\Phi = \rho L / \sigma$  est l'*indicateur de poids propre*.

L'indicateur de flambement  $\Psi$  est l'image de la tendance générale des barres en compression à flamber, et l'indicateur de poids propre représente l'importance du poids propre par rapport aux charges extérieures. Dans ces expressions,  $\sigma$  est la contrainte de dimensionnement des éléments en traction,  $V$  est le volume total de matière,  $F$  est la charge totale extérieure,  $L$  et  $H$  sont les dimensions du rectangle dans lequel s'inscrit le treillis,  $E$  est le module d'élasticité et  $\rho$  est le poids volumique. Par ailleurs, le paramètre  $\mu$  détermine la longueur de flambement  $\mu l$  d'une barre en compression de

longueur  $l$  et " $q$ " est le *facteur de forme* des section soumises à compression. Il est égal au rapport entre l'inertie et le carré de l'aire efficace de la section.

## 2. LE CRITERE DE POIDS MINIMUM ET L'EXPRESSION GENERALE DE L'INDICATEUR DE VOLUME

Trois étapes successives sont développées. Tout d'abord, l'expression de l'indicateur de volume est démontrée sans prendre en compte le flambement des éléments en compression. Toutes les barres sont alors dimensionnées à la même contrainte  $\sigma$  et on démontre que l'expression de l'indicateur de volume est uniquement fonction du rapport  $L/H$  entre les côtés  $L$  et  $H$  du rectangle dans lequel s'inscrit la structure :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H} \right)$$

Ensuite, une nouvelle expression de l'indicateur de volume est développée en dimensionnant les barres en traction à la même contrainte  $\sigma$  et les barres en compression selon la loi hyperbolique d'Euler. On introduit alors la notion d'indicateur de flambement  $\Psi$  qui mène à la relation suivante :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H}, \Psi \right)$$

Enfin, l'expression de l'indicateur de volume est affinée en considérant la courbe d'Euler corrigée (courbe en cloche) et le poids propre.

Toute l'étude repose sur deux constatations essentielles qui peuvent s'énoncer comme suit :

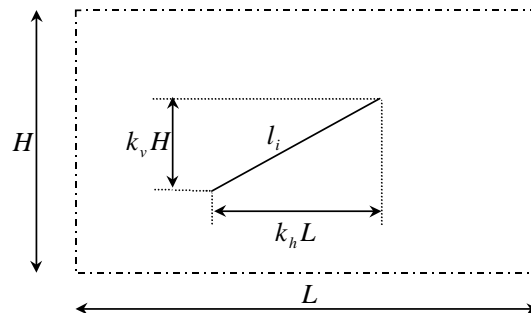
**Constatation 1 :** si  $L$  et  $H$  sont les dimensions principales du treillis et  $l_i$  est la longueur d'une barre quelconque d'indice " $i$ ", le quotient  $l_i/L$  ne dépend que du rapport  $L/H$  :

$$\frac{l_i}{L} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H} \right)$$

**Constatation 2 :** dans un treillis isostatique soumis à une charge totale  $F$ , l'effort normal  $N_i$  relatif à une barre d'indice " $i$ " peut s'exprimer comme une fraction  $k_i F$  de la charge totale (y compris poids propre). Ce coefficient  $k_i$  ne dépend que du rapport  $L/H$  :

$$k_i = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H} \right)$$

La première constatation se démontre très facilement :



En effet, si  $k_h$  et  $k_v$  sont tels que  $k_h L$  et  $k_v H$  représentent respectivement les projections horizontales et verticales de la barre, on obtient :

$$l_i = \sqrt{(k_v H)^2 + (k_h L)^2} = k_h L \sqrt{1 + \left(\frac{k_v}{k_h}\right)^2 \left(\frac{H}{L}\right)^2}$$

La démonstration de la seconde constatation est plus subtile à démontrer, mais consiste en un cas particulier de la démonstration relative aux treillis hyperstatiques, exposée au §7.

## 2.1. Flambement négligé

Si le flambement des barres en compression est négligé, chaque barre peut être dimensionnée à la même contrainte  $\sigma$ . Si tel est le cas, la section  $\Omega_i$  d'une barre d'indice "i" de longueur  $l_i$  soumise à un effort  $N_i$  vaut :

$$\Omega_i = \frac{N_i}{\sigma}$$

Le volume  $V_i$  de cette même barre vaut alors :  $V_i = \frac{N_i}{\sigma} l_i$  .

Et comme  $N_i$  est une fraction  $k_i F$  de la charge totale  $F$ , on a :  $V_i = \frac{FL}{\sigma} \left( k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \right)$  .

Comme  $k_i$  et  $l_i/L$  ne dépendent que de  $L/H$ , le terme  $W = \sum_i k_i \left( \frac{l_i}{L} \right)$  ne dépend lui aussi que de  $L/H$  et le volume total de matière du treillis vaut :

$$V = \sum V_i = \frac{FL}{\sigma} \sum_i k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) = \frac{FL}{\sigma} W$$

$W$  est alors l'*indicateur de volume* qui correspond au volume de matière du treillis dont toutes les barres ont été optimisées :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H} \right)$$

La figure 1, extraite du doctorat de Ph. Samyn (voir bibliographie), représente les valeurs de l'indicateur de volume pour une poutre Warren à  $n$  mailles ( $n = 2$  à  $18$ ) chargée sur sa membrure inférieure par une charge totale extérieure  $F$  distribuée sur chaque nœud sous forme d'un effort ponctuel valant  $F/n$  (et  $F/2n$  à chaque appui). On constate que, pour un nombre de mailles " $n$ " donné, l'expression analytique de  $W$  ne dépend effectivement que du rapport  $L/H$ .

Ce type d'abaque permet de comparer le volume ou le poids propre de différents treillis et de déterminer l'élanement géométrique  $L/H$  qui les minimise, et ceci indépendamment du type de matériau, de la valeur de la charge totale  $F$  ou de la portée de la structure.

Une extension de cette notion d'indicateur de volume est décrite au §3 afin de considérer les treillis constitués de groupes de barres identiques.

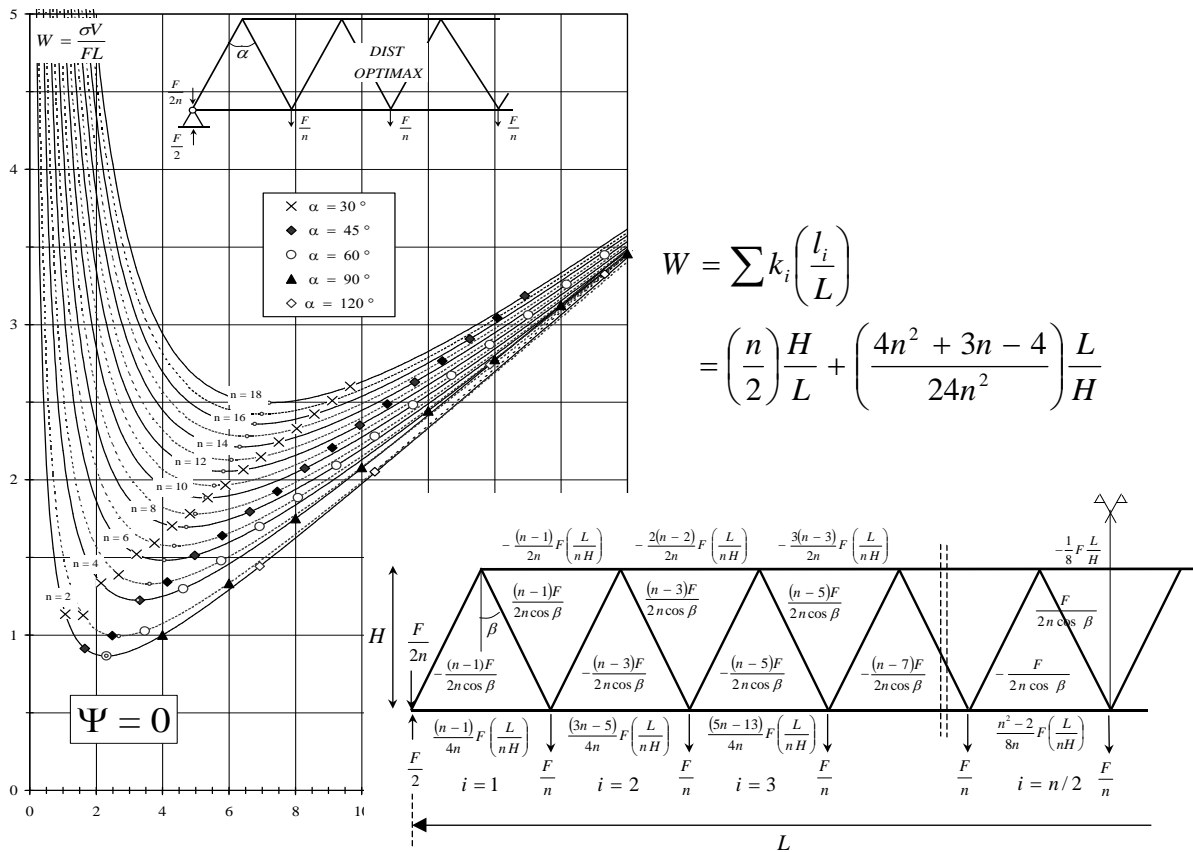


Figure 1 : indicateur de volume W en fonction de L/H (en abscisse) pour une poutre Warren chargée sur sa membrure inférieure (toutes barres optimisées). L'expression de W a été calculée à partir de la valeur analytique des efforts illustrée ci-dessus.

2.2. Prise en compte du flambement des barres en compression selon la loi hyperbolique d'Euler  $\sigma_{crit} = \pi^2 E / \lambda^2$

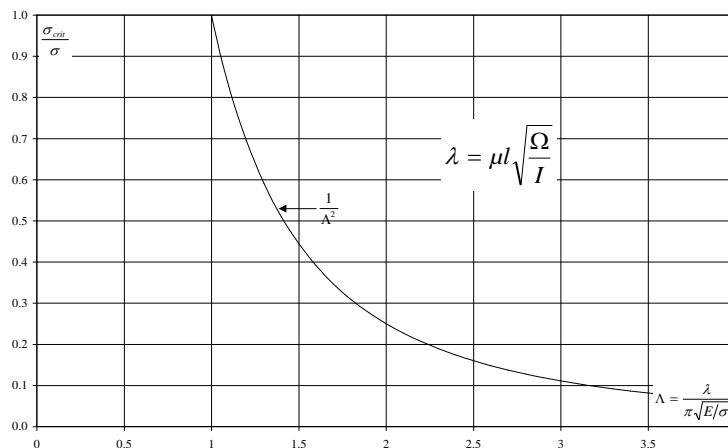


Figure 2 : loi d'Euler.

Si on pose  $\Lambda = \lambda / \pi \sqrt{E/\sigma}$ , la loi d'Euler peut s'écrire comme suit :  $\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{1}{\Lambda^2}$ .

Cette expression est illustrée à la figure 2.



La courbe hyperbolique d'Euler prenant des valeurs infinies pour  $\lambda, \Lambda \rightarrow 0$ , elle a évidemment l'énorme inconvénient de sous-dimensionner les éléments en compression dont l'élancement est faible. La prise en compte de cette imperfection sera décrite au §2.3..

Si on distingue les barres en traction (T) des barres en compression (C), le volume total d'un treillis, composé de barres de section  $\Omega_i$  et de longueur  $l_i$  peut s'écrire :

$$V = V^{(T)} + V^{(C)} = \sum_{(T)} \Omega_i l_i + \sum_{(C)} \Omega_i l_i$$

Que la barre soit en traction ou en compression, l'effort normal qu'elle subit est toujours une fraction  $k_i F$  de la charge totale  $F$  s'exerçant sur la structure. Pour une barre en traction dont la section est optimisée en fonction de la contrainte "admissible"  $\sigma$  du matériau, on peut donc écrire :

$$\Omega_i = \frac{N_i}{\sigma} = \frac{k_i F}{\sigma}$$

Afin d'étudier le volume d'une barre en compression, on définit un *facteur de forme* noté "q", égal au rapport entre le carré de la section des barres  $\Omega_i$  et leur inertie  $I_i$  :

$$q_i = \frac{I_i}{\Omega_i^2} \quad [ADIM]$$

La figure 3 illustre les valeurs du facteur de forme pour les sections circulaires et carrées et montre que ces valeurs sont d'autant plus grandes que les sections sont creuses.

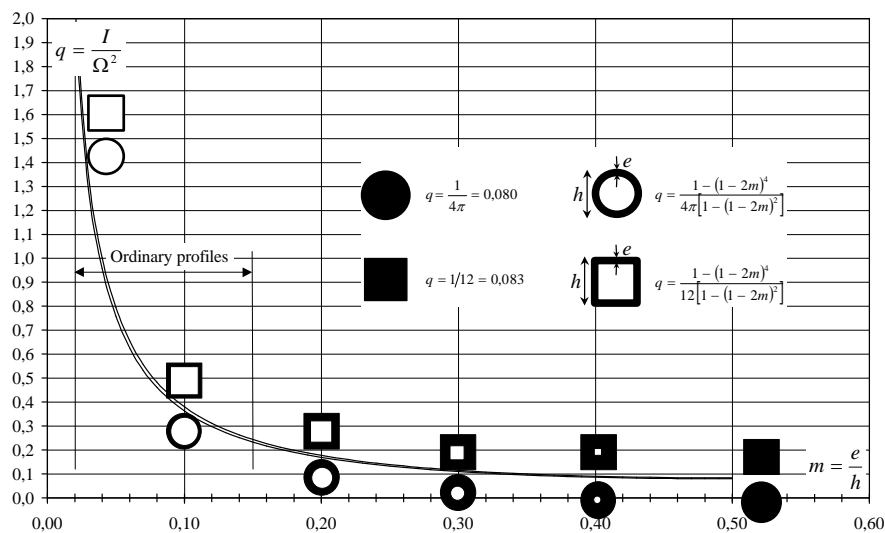


Figure 3 : valeurs du *facteur de forme* "q" pour les sections circulaires et carrées creuses et pleines.

Si on considère que toutes les barres en compression du treillis ont une même typologie (c'est à dire un même facteur de forme) et que leur facteur de flambement  $\mu$  est identique <sup>1</sup>, la relation d'Euler relative à une barre de longueur "i" peut se réécrire :

<sup>1</sup> Pour les treillis classiques, L'Eurocode 3 suggère de prendre  $\mu=0,8$  dans le plan du treillis et  $\mu=1$  hors du plan, que ce soit pour les éléments comprimés d'une membrure supérieure ou pour les diagonales (treillis Warren ou Howe) ou verticales (treillis Pratt) en compression.

$$N_{crit.}(= k_i F) = \frac{\pi^2 EI_i}{(\mu l_i)^2} = \frac{\pi^2 E(q\Omega_i^2)}{(\mu l_i)^2} \Rightarrow \Omega_i = \frac{\mu l_i}{\pi} \sqrt{\frac{k_i F}{qE}}$$

Le volume total de la structure vaut alors :

$$V = \sum_{(T)} \frac{k_i F}{\sigma} l_i + \sum_{(C)} \frac{\mu l_i}{\pi} \sqrt{\frac{k_i F}{qE}} l_i = \frac{FL}{\sigma} \sum_{(T)} k_i \left(\frac{l_i}{L}\right) + \frac{\mu L^2}{\pi} \sqrt{\frac{F}{qE}} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left(\frac{l_i}{L}\right)^2$$

On retrouve ainsi l'expression de l'indicateur de volume, qui comprend cette fois deux termes de somme, portant respectivement sur les barres en traction (T) et les barres en compression (C) :

$$\frac{\sigma V}{FL} = \sum_{(T)} k_i \left(\frac{l_i}{L}\right) + \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qEF}} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left(\frac{l_i}{L}\right)^2$$

Si on pose :

$$\begin{cases} W^{(T)} \equiv \sum_{(T)} k_i \left(\frac{l_i}{L}\right) \\ W^{(C)} \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left(\frac{l_i}{L}\right)^2 \\ \Psi \equiv \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qEF}} \end{cases},$$

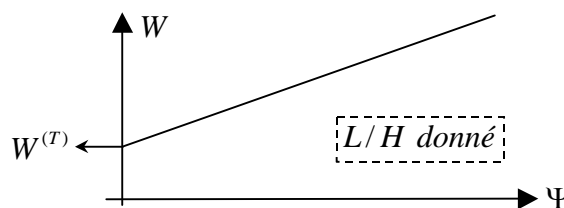
l'expression générale du volume d'un treillis dont toutes les barres ont été optimisées peut donc se réécrire en fonction de trois termes adimensionnels : d'une part les deux indicateurs partiels  $W^{(T)}$  et  $W^{(C)}$ , **qui ne dépendent que du rapport L/H** entre les côtés du rectangle dans lequel s'inscrit la structure, et, d'autre part, le terme  $\psi$ .

Ce dernier a **une signification physique bien précise : il indique la tendance générale des éléments en compression à flamber**, puisqu'il pondère la contribution des barres en compression à l'indicateur de volume. Plus sa valeur est grande, plus il donne de l'importance au terme  $W^{(C)}$  relatif aux barres en compression. C'est la raison pour laquelle il a été baptisé **indicateur de flambement** de la structure.

Finalement, l'expression de l'indicateur de volume de la structure peut s'écrire :

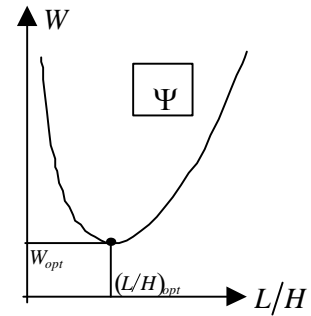
$$\boxed{\frac{\sigma V}{FL} = W^{(T)} + \Psi W^{(C)} = \text{fonction} \left( \frac{L}{H}, \Psi \right)}$$

Pour un rapport L/H donné, l'indicateur de volume W est donc linéairement proportionnel à  $\Psi$  :



**Recherche du volume minimum :**

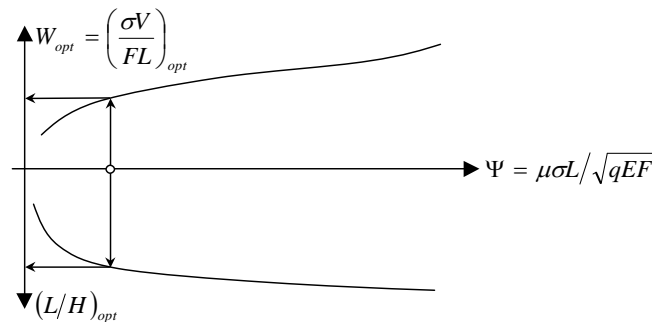
Pour une valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  donnée, il existe forcément une valeur du rapport  $L/H$  qui minimise l'indicateur de volume. Ceci est illustré à la figure 1 (et ci-contre) qui donne les valeurs de  $W$  pour plusieurs nombres de mailles lorsque le flambement est négligé, c'est à dire pour  $\Psi = 0$ . Chaque courbe possède un minimum qu'il convient d'évaluer.



Si l'on dérive l'expression de l'indicateur de volume par rapport à  $L/H$  et que l'on annule cette dérivée, on obtient :

$$\frac{\delta\left(\frac{\sigma V}{FL}\right)}{\delta(L/H)} = \frac{\delta W^{(T)}}{\delta(L/H)} + \Psi \frac{\delta W^{(C)}}{\delta(L/H)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi^{(W_{opt})} = - \frac{\left(\frac{\delta W^{(T)}}{\delta(L/H)}\right)}{\left(\frac{\delta W^{(C)}}{\delta(L/H)}\right)}$$

Cette dernière relation donne la valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  correspondant au volume minimum de la structure pour un rapport  $L/H$  donné. Il permet, comme l'illustre la figure 4 ci-dessous, de construire des abaques, baptisées *courbes d'efficacité*, exprimant l'indicateur de volume optimal en fonction de l'indicateur de flambement  $\Psi$  de la structure qui lui correspond.



$$\frac{\sigma V}{FL} = W^{(T)} + \Psi W^{(C)} \quad \Psi^{(W_{opt})} = - \frac{\left(\frac{\delta W^{(T)}}{\delta(L/H)}\right)}{\left(\frac{\delta W^{(C)}}{\delta(L/H)}\right)}$$

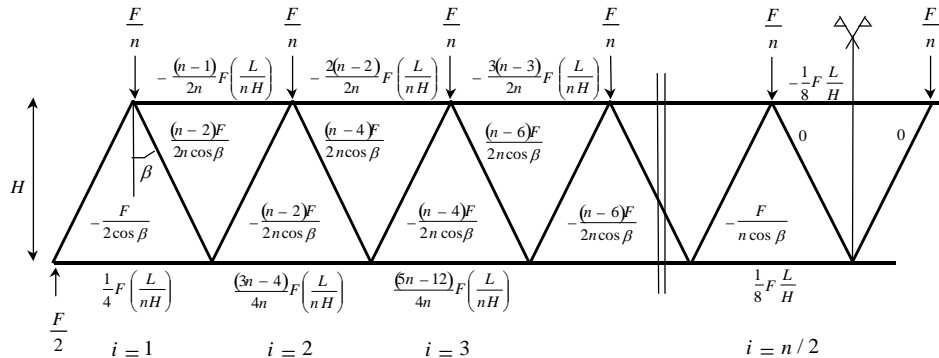
avec  $W^{(T)} \cong \sum_{(T)} k_i \left(\frac{l_i}{L}\right)$  ,  $W^{(C)} \cong \frac{1}{\pi} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left(\frac{l_i}{L}\right)^2$  et  $\Psi \cong \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{q E F}}$

**Figure 4 :** principe des courbes d'efficacité

**PRATIQUEMENT**, une structure construite en un matériau donné ( $E, \sigma$ ), de portée donnée ( $L$ ) soumise à une charge totale ( $F$ ) et constituée de barres en compression d'un certain type (de facteur de forme "q") articulées ou non ( $\mu$ ) correspond à une certaine valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi = \mu \sigma L / \sqrt{q E F}$ . Cette valeur, reportée en abscisse des courbes d'efficacité, permet de déterminer immédiatement le volume minimal (donc le poids propre) total de la structure (courbe supérieure), mais également l'élanement  $L/H$  à lui donner (courbe inférieure, à lire de haut en bas) pour qu'elle soit optimale. Un exemple pratique est donné ci-après.

**Exemple : optimisation d'un treillis Warren chargé sur sa membrure supérieure**

La figure 5 représente les efforts dans chaque élément en fonction du nombre "n" de mailles et de l'élanement du treillis L/H, ou encore, ce qui revient au même, les valeurs des coefficients  $k_i$  relatifs à chacun des éléments (pour rappel, effort dans la barre =  $k_i$  .charge totale F). A partir de ces valeurs et de l'expression  $l_i$  de la longueur des barres en fonction du ratio L/H, il est possible de calculer les indicateurs partiels  $W^{(T)}$  et  $W^{(C)}$ .



**Figure 5 :** répartition des efforts dans les éléments d'un treillis Warren chargé sur sa membrure supérieure par une charge totale F répartie sur chaque nœud.

L'expression analytique des indicateurs partiels peut être fortement simplifiée en notant que  $\sum_{k=1}^{k=i} k = i(i+1)/2$  et  $\sum_{k=1}^{k=i} k^2 = i(2i^2 + 3i + 1)/6$ . Celles-ci sont données à la page suivante (dans l'encadré en pointillés) à titre indicatif pour un nombre pair de mailles et dans ce cas précis de chargement. La détermination analytique de ce genre de courbes est fastidieuse, et pousse donc à une approche numérique dont l'intérêt se manifestera encore davantage lors de la prise en compte du poids propre dans la procédure d'optimisation (voir §4.2.).

La figure 6 représente les courbes d'efficacité tracées à partir de l'équation calculée (voir encadrement en pointillés à la page suivante) pour un nombre "n" de mailles de 2 à 18. Ces courbes sont à lire en vis-à-vis : Elles ont le même axe des abscisses, et les ordonnées de la première se lisent de bas en haut tandis que celles de la seconde se lisent de haut en bas.

**Application pratique :**

Soit un treillis dont les barres en compression sont constituées de tubes creux dont l'épaisseur vaut un dixième du diamètre ( $m=0,1$ ), devant franchir une portée  $L=20$  m et supporter une charge totale  $F=955$  kN. Le matériau choisi est l'acier ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  Mpa).

Le facteur de forme vaut :  $q = \frac{1 - (1 - 2m)^4}{64\pi m^2 (1 - m)^2} = 0,363$

L'indicateur de flambement vaut :  $\Psi = \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}} = \frac{0,9.300.20000}{\sqrt{0,363.210000.955000}} = 20$

Pour cette valeur de 20, la figure 6 montre que c'est le treillis à 10 mailles d'élanement  $L/H=9,7$  qui donne la valeur minimale de l'indicateur de volume :  $W=2.1$ . Cette valeur permet le calcul immédiat du volume total d'acier nécessaire:  $V = FLW/\sigma = 0,134$  m<sup>3</sup>, soit donc un poids propre de 10,3 kN, ce qui correspond à un treillis d'une tonne.

• Calcul de  $W^{(T)}$  :

① Membrure inférieure :  $W_{\text{inf}} = \frac{n^2 + 2}{12n^2} \frac{L}{H}$

② Diagonales droites :  $W_{\text{diag,D}} = \frac{n-2}{4} \left( \frac{H}{L} + \frac{1}{4n^2} \frac{L}{H} \right)$

On obtient :

$$W^{(T)} = \frac{n-2}{4} \frac{H}{L} + \frac{4n^2 + 3n + 2}{48n^2} \frac{L}{H} \Rightarrow \left( \frac{\delta W^{(T)}}{\delta(L/H)} \right) = \frac{4n^2 + 3n + 2}{48n^2} - \frac{n-2}{4} \left( \frac{H}{L} \right)^2$$

Note de calcul relative au treillis de la figure 5.

• Calcul de  $W^{(C)}$  :

① Membrure supérieure :

$$\begin{cases} \sqrt{k_i} = \sqrt{\frac{i(n-i)}{2n^2}} \frac{L}{H} \\ \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow W_{\text{sup}} = \frac{1}{\pi} \sum \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 = \frac{1}{\pi n^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2-1} \sqrt{2i(n-i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{L}{H}}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W_{\text{sup}}}{\delta(L/H)} = \frac{1}{2\pi n^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2-1} \sqrt{2i(n-i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{H}{L}}$$

Dans cette expression, le terme en  $1/(2\sqrt{2})$  correspond à l'élément supérieur central.

② Diagonales gauches :

$$\begin{cases} \sqrt{k_i} = \sqrt{\frac{n-2i+2}{2n \cos \beta}} \\ \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 = \left( \frac{H}{L \cos \beta} \right)^2 \end{cases} \text{ avec } \frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2$$

$$\Rightarrow W_{\text{diag,G}} = \frac{1}{\pi} \sum \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{n-2i+2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right)^{5/4} \left( \frac{H}{L} \right)^2$$

On obtient :

$$W^{(C)} = \frac{1}{\pi n^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2-1} \sqrt{2i(n-i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{L}{H}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{n-2i+2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right)^{5/4} \left( \frac{H}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W_{\text{diag,G}}}{\delta(L/H)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{n-2i+2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right)^{1/4} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \frac{5}{16n^2} - \frac{2H}{L} \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right) \right)$$

Finalement, l'expression de l'indicateur d'efficacité  $\Psi = \mu \sigma L / \sqrt{qEF}$  correspondant à l'optimum de volume est donné par la relation suivante :

$$\Psi^{(opt)} = - \frac{4n^2 + 3n + 2}{48n^2} - \frac{(n-2)}{4} \left( \frac{H}{L} \right)^2$$

$$\left[ \frac{1}{2\pi n^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2-1} \sqrt{2i(n-i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{H}{L}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{n-2i+2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right)^{1/4} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \frac{5}{16n^2} - \frac{2H}{L} \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right) \right) \right]$$

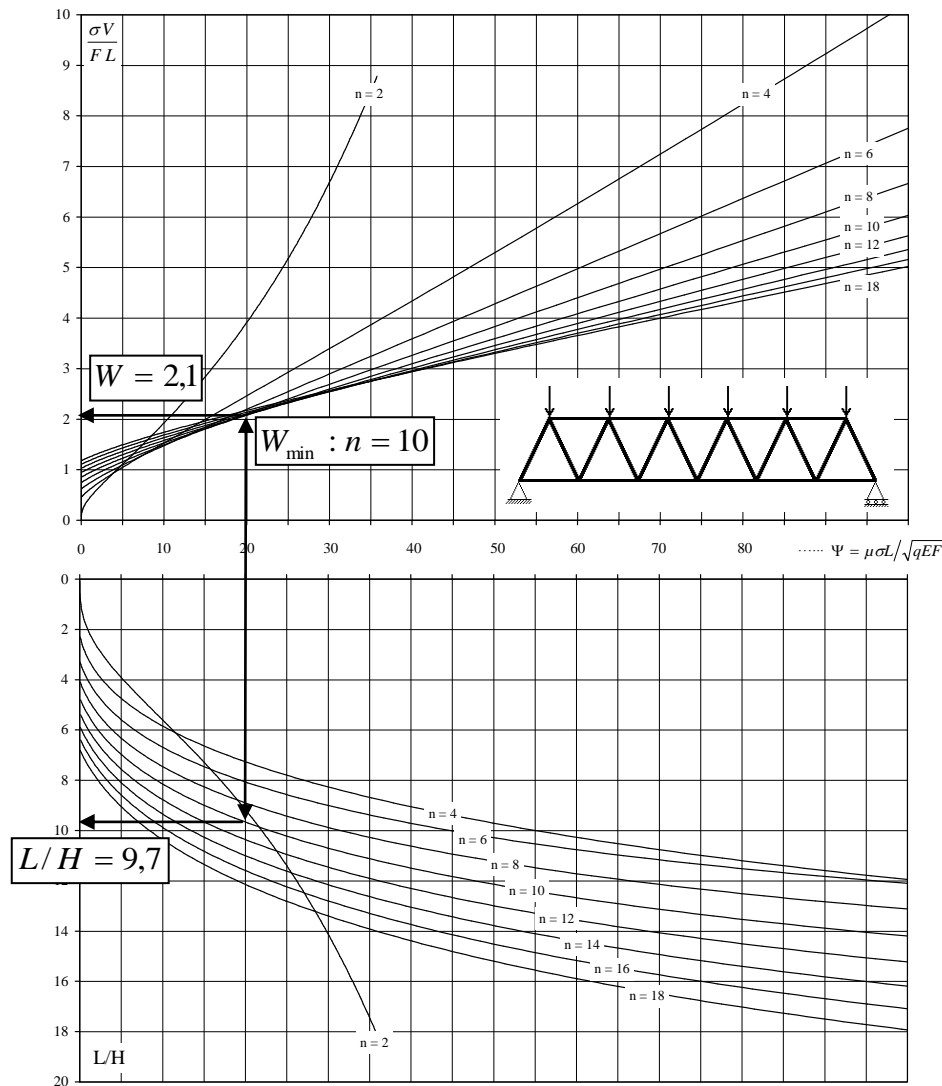


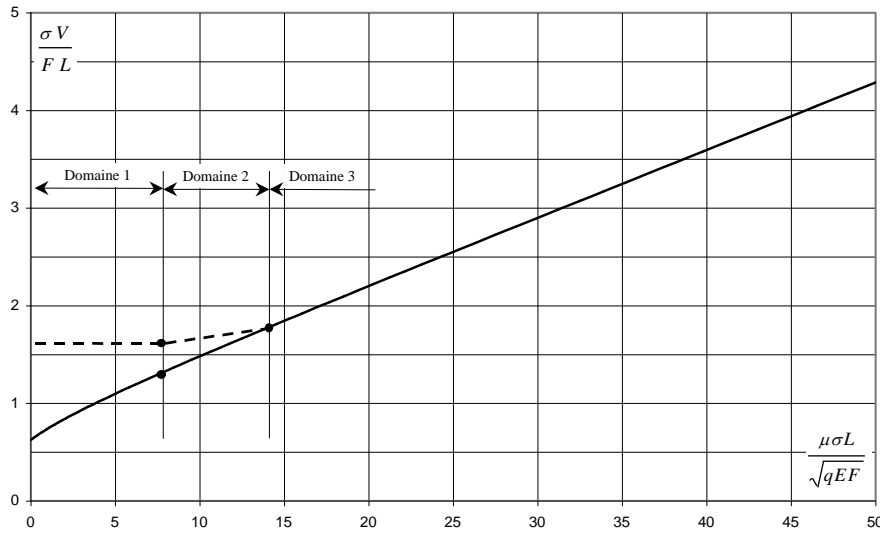
Figure 6 : courbes d'efficace pour  $n = 2, 4, \dots, 18$ .

Il est à noter que les courbes d'efficace de la figure 6 doivent être corrigées pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . En effet, cette zone correspond à des éléments qui ont peu tendance à flamber, c'est-à-dire de faible élancement  $\lambda$  (figure 2). Or, la loi d'Euler est incorrecte dans ces zones car elle attribue des valeurs infinies à la contrainte critique. Il en résulte donc un volume des barres en compression sous-estimé. Les courbes d'efficace doivent donc être corrigées et considérées dans trois domaines :

*Domaine 1* : toutes les barres en compression présentent un élancement très faible et travaillent donc, de ce fait, à une contrainte supérieure à la contrainte "admissible". Le volume de la structure calculé à partir de la loi d'Euler est alors sous-estimé. Dans ce domaine, l'hypothèse qui consiste à considérer que toutes les barres travaillent à une contrainte proche de la contrainte "admissible"  $\sigma$  est valable et la courbe d'efficace doit avoir une allure horizontale (trait horizontal en pointillés sur la figure 7).

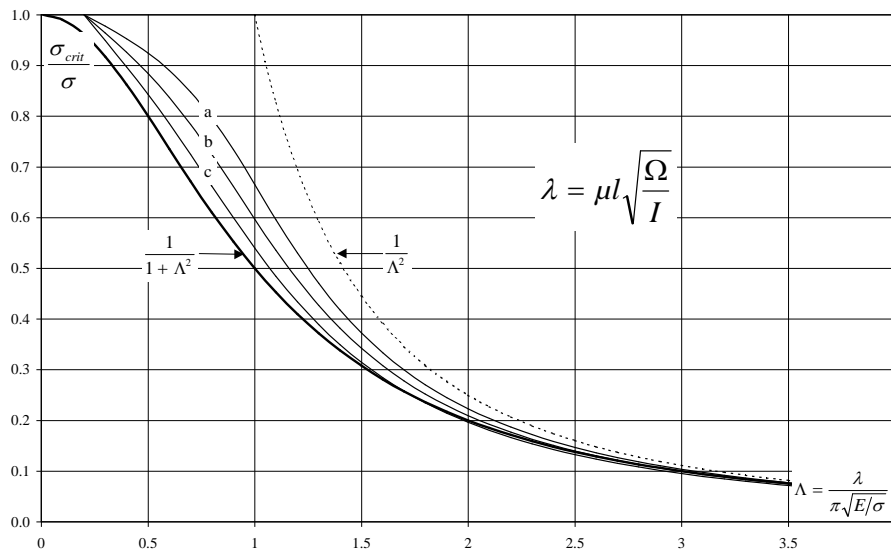
*Domaine 2* : certaines barres en compression ont un élancement faible tandis que d'autres ont un élancement plus grand. Le volume est encore surestimé. Ce domaine est représenté par une droite oblique en pointillés sur la figure 7.

*Domaine 3* : toutes les barres en compression sont suffisamment élancées pour que la loi hyperbolique d'Euler leur soit applicable. C'est le domaine de validité des courbes d'efficacité telles qu'elles ont été établies ci-dessus.



**Figure 7** : correction des courbes d'efficacité pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi = \mu\sigma L / \sqrt{qEF}$ .

La correction des courbes peut s'effectuer à l'aide d'un *indicateur d'élancement* qui permet de déterminer la frontière entre chacune des 3 zones. Cette approche a été développée en détails dans une publication reprise en annexe <sup>2</sup>. Néanmoins, cette méthode est largement déclassée par la méthode décrite au point suivant et ne sera donc plus développée davantage.



**Figure 8** : courbes de flambement pour l'acier (types a, b, c), courbe théorique d'Euler (en pointillés), et courbe en cloche approchée (en gras).

<sup>2</sup> Une méthode globale d'optimisation des treillis, Deuxième congrès universitaire de génie civil, Mai 1999, E.S.I.P. Poitiers, Pierre Latteur et Philippe Samyn.

### 2.3. Prise en compte du flambement des barres en compression selon la loi d'Euler modifiée (courbe "en cloche")

#### 2.3.1. Les courbes de flambement des différents matériaux.

De manière générale, les courbes de flambement expérimentales des différents matériaux ont une allure "en cloche" qui peut être approchée par une courbe dont l'équation est la suivante :

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Lambda^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Lambda = \lambda / (\pi \sqrt{E/\sigma}) \\ \lambda = \mu l \sqrt{\Omega/I} \end{cases}$$

C'est cette dernière qui sera utilisée pour le calcul de l'expression de l'indicateur de volume.

La figure 8 représente les courbes de flambement relatives aux différents types d'acier telles qu'elles sont reprises dans l'eurocode 3, en comparaison avec la courbe théorique d'Euler et la courbe en cloche analytique donnée par l'équation ci-dessus. Cette dernière approche relativement bien les différentes courbes expérimentales, bien qu'elle introduise un léger surdimensionnement pour l'acier (spécialement pour l'acier de type a). Cette courbe est aussi valable pour l'aluminium. En fonction des types de bois, sa validité doit être nuancée.

#### 2.3.2. Expression de l'indicateur de volume

Dans une barre en compression d'indice "i", la contrainte critique est donnée par :

$$\sigma_{crit.} = \frac{\sigma}{1 + \left( \frac{\sigma}{\pi^2 E} \right) \lambda_i^2}$$

Où  $\lambda_i = (\mu l_i) \sqrt{\frac{\Omega_i}{I_i}}$  est l'élancement de la barre.

Si on y introduit l'expression  $q = I_i / \Omega_i^2$  du facteur de forme, on obtient :

$$\sigma_{crit.} = \frac{\sigma}{1 + \frac{\sigma (\mu l_i)^2}{q \pi^2 E \Omega_i}}$$

L'effort de compression critique dans la barre "i" vaut donc :  $N_{crit.} = \Omega_i \sigma_{crit.} = \frac{\Omega_i \sigma}{1 + \frac{\sigma (\mu l_i)^2}{\pi^2 E q \Omega_i}}$ .

Or, l'effort  $N_i$  au sein d'une barre est aussi égal à une fraction  $k_i F$  de la charge totale  $F$ , où  $k_i$  ne dépend que du rapport  $L/H$  entre les dimensions principales du treillis. On obtient :

$$k_i F = \frac{\Omega_i \sigma}{1 + \frac{\sigma (\mu l_i)^2}{\pi^2 E q \Omega_i}}$$



Si L est la portée du treillis, cette expression peut se réécrire :

$$\sigma\Omega_i^2 - k_i F\Omega_i - \frac{k_i F\sigma(\mu l_i)^2}{\pi^2 q E} = 0$$

Cette équation du second degré en  $\Omega_i$  possède une seule solution positive :

$$\Omega_i = \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu\sigma l_i)^2}{\pi^2 k_i q E F}} \right)$$

Il y apparaît l'expression  $\Psi = \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{q E F}}$  de l'indicateur de flambement. On obtient ainsi une formulation de la section  $\Omega_i$  dans laquelle le terme entre parenthèse ne dépend que des paramètres L/H et  $\Psi$  :

$$\Omega_i = \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

Le volume total des barres en compression du treillis vaut alors :

$$V^{(C)} = \sum_{(C)} \Omega_i l_i = \frac{FL}{2\sigma} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

Et l'indicateur de volume de l'ensemble des éléments comprimés s'écrit :

$$W^{(C)} = \frac{\sigma V^{(C)}}{FL} = \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) = \text{Fonction}(L/H, \Psi)$$

Finalement, l'expression complète de l'indicateur de volume est la suivante :

$$W = W^{(T)} + W^{(C)} = \sum_{(T)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) = \text{Fonction}(L/H, \Psi)$$

**Pour  $\Psi \rightarrow 0$**  , c'est à dire lorsque les barres en compression n'ont pas tendance à flamber, on retrouve l'expression de l'indicateur de volume obtenue lorsque toutes les barres sont dimensionnées à la contrainte "admissible" :

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} (W) = \sum_{(T) + (C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) = \text{Fonction}(L/H)$$

**Pour**  $\Psi \rightarrow \infty$ , c'est à dire lorsque les barres en compression ont fortement tendance à flamber, on retrouve l'expression de l'indicateur de volume obtenu lorsque celles-ci sont dimensionnées selon la loi d'Euler théorique  $\sigma_{crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$  :

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} (W) = \sum_{(T)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) + \frac{\Psi}{\pi} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \stackrel{\Psi \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\Psi}{\pi} \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2$$

### 2.3.3. Recherche de l'indicateur de volume minimum :

Cette fois, l'indicateur de volume ne dépend plus explicitement de l'indicateur de flambement  $\psi$  qui se situe non seulement dans des racines, mais en plus dans chaque élément du terme de sommation. Une approche analytique devient donc exclue et la recherche des optimaux ne peut plus se faire que par une approche numérique schématisée à la figure 9.

L'indicateur de flambement  $\Psi = \mu \sigma L / \sqrt{qEF}$  contient à lui seul toutes les informations relatives au type de matériau, au type des sections, à la portée, au mode d'assemblage des barres et à la charge totale F. Cette approche a donc l'énorme avantage de fournir des courbes générales, c'est-à-dire indépendantes de tous ces paramètres précités, alors que, pour le calcul pratique, ces paramètres sont choisis arbitrairement : toutes les figures présentées dans cette étude ont en effet été calculées sur base d'une portée L de 10 mètres, d'un matériau de type acier ( $E=210000$  Mpa et  $\sigma=240$  Mpa), de barres rigides à leurs extrémités ( $\mu=0,5$ ) et de sections carrées pleines, soit  $q=1/12$ .

### 2.3.4. Discussion sur les valeurs de l'indicateur de flambement $\Psi$

L'expression  $\Psi = \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qEF}}$  de l'indicateur de flambement peut se réécrire  $\Psi = \frac{\mu \sqrt{L} (\sigma / \sqrt{E})}{\sqrt{q(F/L)}}$ .

Les valeurs moyennes de  $\sigma / \sqrt{E}$  pour les différents matériaux sont les suivantes :

- pour l'acier HLE :  $\sigma / \sqrt{E} = 0.655$ , ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);
- pour l'acier doux :  $\sigma / \sqrt{E} = 0.306$ , ( $\sigma = 140$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);
- pour l'aluminium :  $\sigma / \sqrt{E} = 0.208$ , ( $\sigma = 55$  Mpa,  $E = 70000$  MPa);
- pour le bois :  $\sigma / \sqrt{E} = 0.100$ , ( $\sigma = 10$  Mpa,  $E = 10000$  MPa).
- pour le béton :  $\sigma / \sqrt{E} = 0.087$ , ( $\sigma = 15$  Mpa,  $E = 30000$  MPa);

Par ailleurs, on peut raisonnablement limiter l'étude des treillis aux portées extrêmes suivantes :

- pour l'acier HLE :  $L_{max} = 400$  m;
- pour l'acier doux, l'aluminium et le bois :  $L_{max} = 200$  m;
- pour le béton armé ou précontraint :  $L_{max} = 60$  m;

Le *facteur de forme* "q" dépend du type de section des barres en compression. Comme le montre la figure 3, ce sont les sections pleines qui présentent le plus petit facteur de forme. Pour les métaux, ces sections pleines sont déclassées par les sections circulaires creuses ou les sections de type profil en I ou cornières qui ont des facteurs de forme nettement plus grands. Pour le béton et le bois, les sections

rectangulaires ou carrées pleines sont les plus répandues. Dans l'ensemble, le facteur de forme prendra rarement des valeurs inférieures à 0,04.

Par ailleurs, si on prend la valeur  $\mu=1$  qui correspond à des barres totalement articulées à leurs extrémités ou considérées comme telles, l'indicateur de flambement maximal peut se réécrire en fonction de la charge répartie  $F/L$  :

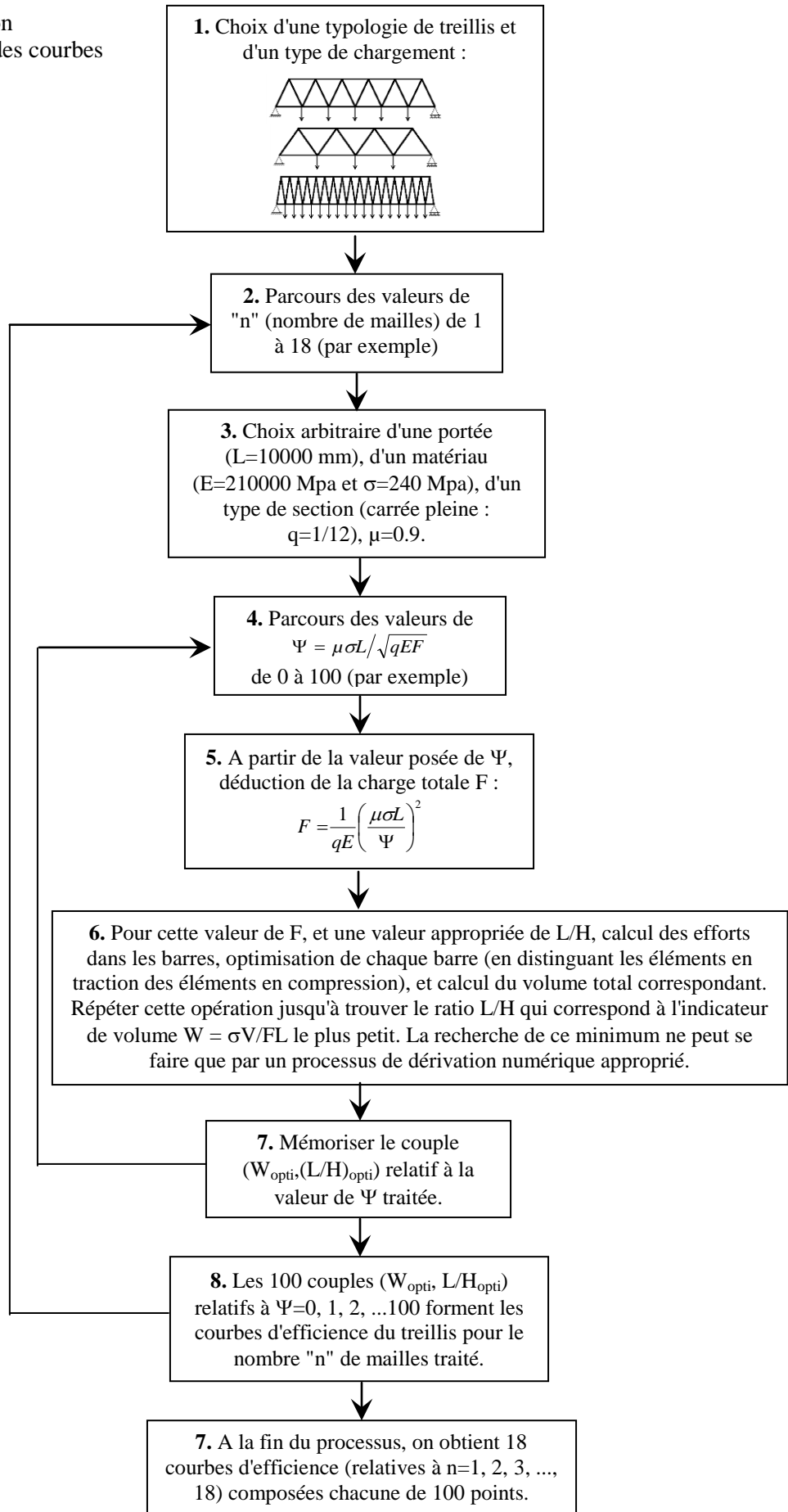
- pour l'acier HLE :  $\Psi_{\max} = 2070/\sqrt{F/L}$
- pour l'acier doux :  $\Psi_{\max} = 683/\sqrt{F/L}$
- pour l'aluminium :  $\Psi_{\max} = 465/\sqrt{F/L}$
- pour le bois :  $\Psi_{\max} = 224/\sqrt{F/L}$
- pour le béton :  $\Psi_{\max} = 106/\sqrt{F/L}$

Si on limite la charge répartie à 50 tonnes par mètres, on obtient toujours un indicateur de flambement  $\Psi$  inférieur à 100. C'est sur cette base que seront déterminées toutes les courbes d'efficacité traitées dans cette étude.



*Photo 1* : pont de Tenmon au Japon. La structure à base de treillis Pratt semble extrêmement légère.

**Figure 9 :** détermination numérique des courbes d'efficacité.



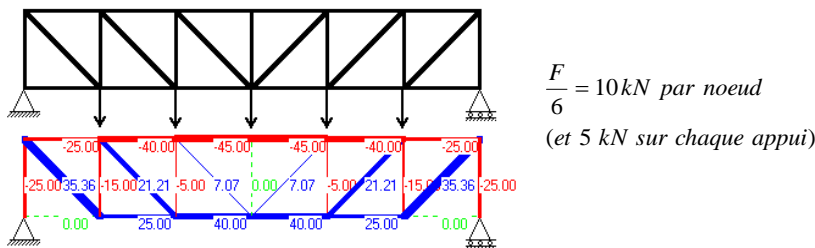
### 3. OPTIMISATION DU POIDS DES TREILLIS COMPOSES DE CATEGORIES DE BARRES IDENTIQUES

Les approches décrites au §2 sont basées sur l'hypothèse que toutes les barres ont été optimisées individuellement, c'est-à-dire à la même contrainte  $\sigma$  pour les barres en traction et selon la loi d'Euler pour les barres en compression. Les termes de somme présents dans l'expression de l'indicateur de volume  $W$  portent donc sur l'indice "i" de chaque élément pris individuellement :

$$W = \sum_{(T)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

En pratique, il peut être difficile de prévoir la construction d'une structure dont toutes les barres sont différentes, et il peut être intéressant de considérer des catégories de barres identiques. Pour un treillis Pratt ou un treillis Howe par exemple, on peut traiter 4 types différents, soit les diagonales, les verticales, les éléments de la membrure supérieure et enfin ceux de la membrure inférieure.

L'approche établie au point précédent est encore applicable dans ce cas.



En effet, si l'on prend comme exemple la poutre Pratt soumise à une charge répartie sur chaque nœud de la membrure inférieure, les diagonales et les éléments inférieurs sont en traction tandis que les éléments supérieurs et verticaux sont en compression. Soit :

- $W_{diag} = k_{diag} \left( \frac{l_{diag}}{L} \right)$  l'indicateur de volume relatif à la diagonale soumise au plus grand effort de traction, et dimensionnée à la contrainte  $\sigma$ . Cette barre subit un effort de traction valant  $k_{diag}F$  et a une longueur  $l_{diag}$ .
- $W_{inf} = k_{inf} \left( \frac{l_{inf}}{L} \right)$  l'indicateur de volume relatif à l'élément inférieur soumis au plus grand effort de traction, et dimensionné à la contrainte  $\sigma$ .
- $W_{vert} = \frac{1}{2} k_{vert} \left( \frac{l_{vert}}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_{vert}} \Psi^2} \right)$  l'indicateur de volume relatif à la verticale soumise au plus grand effort de compression, et dont la section travaille juste à la contrainte critique d'Euler (courbe expérimentale en cloche).
- $W_{sup} = \frac{1}{2} k_{sup} \left( \frac{l_{sup}}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_{sup}/L)^2}{k_{sup}} \Psi^2} \right)$  l'indicateur de volume relatif à l'élément supérieur soumis au plus grand effort de compression, et dont la section travaille à la contrainte critique d'Euler (courbe expérimentale en cloche).

Si  $n_{diag}$ ,  $n_{inf}$ ,  $n_{vert}$  et  $n_{sup}$  sont, respectivement, le nombre d'éléments diagonaux, inférieurs, verticaux et supérieurs, l'indicateur de volume total de la structure vaut :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{\sigma}{FL} (n_{diag} V_{diag} + n_{inf} V_{inf} + n_{vert} V_{vert} + n_{sup} V_{sup})$$

$$= (n_{diag} W_{diag} + n_{inf} W_{inf} + n_{vert} W_{vert} + n_{sup} W_{sup})$$

Et il en résulte donc à nouveau une expression de l'indicateur de volume qui ne dépend que des deux paramètres adimensionnels  $L/H$  et  $\Psi$ .

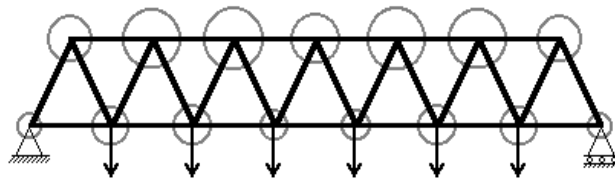
## 4. PRISE EN COMPTE DU POIDS PROPRE : L'INDICATEUR DE POIDS PROPRE

### 4.1. Considérations générales

Il a été montré au §2.3. que l'indicateur de volume d'un treillis soumis à une charge totale extérieure  $F$  dépend uniquement de l'indicateur de flambement  $\psi$  d'une part et de l'élançement géométrique  $L/H$  du treillis d'autre part :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{fonction} \left( \frac{L}{H}, \psi \right) \quad \text{avec} \quad \Psi = \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qEF}} .$$

Soit  $\rho$  le poids volumique du matériau. Pour ce cas de charge  $F$  extérieur, les sections des barres ont été optimisées à la contrainte  $\sigma$  ou selon la loi d'Euler et la répartition du poids propre résultant de cette optimisation ajoute au cas de charge extérieur un nouveau cas de charge de valeur connue  $\rho V$  mais dont la répartition sur chaque nœud doit être évaluée. La figure ci-dessous montre la répartition du poids propre par nœud dans un treillis Warren dont toutes les barres ont été optimisées individuellement :



Le treillis ainsi optimisé n'est donc plus optimum puisqu'il est alors soumis à deux cas de charge différents conduisant à une charge totale égale à :

$$F_{Tot} = F + \rho V$$

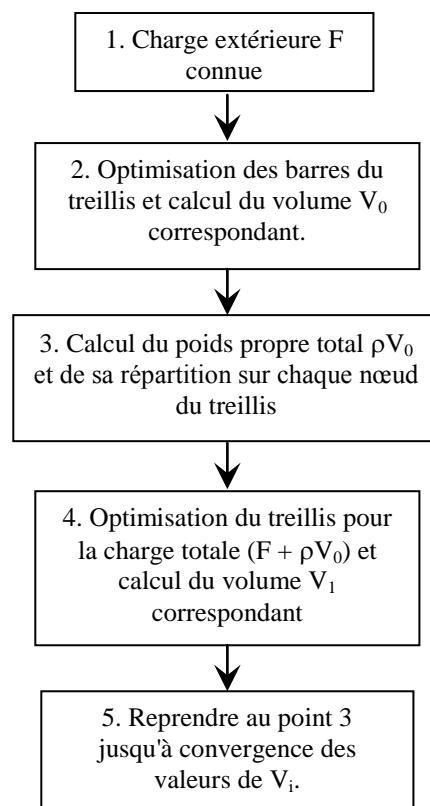
Pour une charge extérieure  $F$  et un matériau donnés, la géométrie optimale réelle — c'est à dire celle qui prend en compte la valeur du poids propre mais aussi sa répartition — et l'indicateur de volume qui lui est relatif ne peuvent donc se déterminer que par un processus itératif. C'est l'objet de la figure 10.

Afin de permettre une optimisation basée sur un minimum de paramètres, la prise en compte du poids propre ne va pouvoir s'effectuer sans la définition d'un nouvel indicateur adimensionnel baptisé *indicateur de poids propre*. Cet indicateur, noté  $\Phi$ , va permettre réécrire l'expression formelle de l'indicateur de volume :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{fonction} \left( \frac{L}{H}, \psi, \Phi \right) \quad \text{avec} \quad \Psi = \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qEF}} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{\rho L}{\sigma} .$$

Cette ultime approche permet de minimiser le volume d'un treillis, en tenant compte non seulement des courbes de flambement réelles des matériaux, mais aussi des efforts supplémentaires créés dans chaque barre par le poids propre distribué de façon exacte sur chaque nœud.

La démonstration de cette propriété est effectuée ci-dessous.



**Figure 10 :** processus itératif d'optimisation d'un treillis en tenant compte de son poids propre et sa répartition différente sur chaque nœud.

## 4.2. Expression générale de l'indicateur de volume d'un treillis optimisé en fonction des charges extérieures combinées au poids propre

### 4.2.1. Volume d'une barre isolée

- Le volume d'une barre d'indice "i" en traction ou en compression travaillant à la contrainte  $\sigma$  vaut (voir §2.1) :

$$V_i = \Omega_i l_i = \frac{F_{tot} L}{\sigma} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) = \frac{(F + \rho V) L}{\sigma} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right)$$

- Le volume d'une barre en compression dont la section est adaptée à la contrainte critique d'Euler (courbe hyperbolique théorique  $\sigma_{crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$ ) vaut (voir §2.2) :

$$V_i = \Omega_i l_i = \frac{F_{tot} L}{\sigma} \Psi \left( \frac{1}{\pi} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \right) = \frac{(F + \rho V) L}{\sigma} \left( \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qE(F + \rho V)}} \right) \left( \frac{1}{\pi} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \right)$$

- Le volume d'une barre en compression dont la section est adaptée à la contrainte critique d'Euler selon la loi expérimentale modélisée par une courbe en cloche (voir §2.3.1.) vaut :

$$\begin{aligned} V_i = \Omega_i l_i &= \frac{F_{tot} L}{2\sigma} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) \\ &= \frac{(F + \rho V) L}{2\sigma} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu \sigma L)^2}{qE(F + \rho V)}} \right) \end{aligned}$$

Il est à noter que  $k_i$  et  $l_i/L$  dépendent uniquement du rapport  $L/H$  (voir §2.1.)

### 4.2.2. Expression de l'indicateur de volume si le flambement est négligé

Le volume total du treillis vaut : 
$$V = \sum_{(T)} V_i + \sum_{(C)} V_i = \frac{(F + \rho V) L}{\sigma} \sum_{(T+C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) \quad [1]$$

En posant  $W^{(T+C)} = \sum_{(T+C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right)$ , la relation précédente peut se ré-écrire en mettant en évidence l'expression "classique" de l'indicateur de volume :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{W^{(T+C)}}{1 - \frac{\rho L}{\sigma} W^{(T+C)}} = \text{Fonction} \left( L/H, \frac{\rho L}{\sigma} \right)$$

Cette relation montre que la pénalité due au poids propre est d'autant plus grande que le terme  $\rho L/\sigma$  est grand. Celui-ci sera donc baptisé *indicateur de poids propre*, et noté  $\Phi$ . Finalement, on obtient :



$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{W^{(T+C)}}{1 - \Phi W^{(T+C)}} = \text{Fonction}(L/H, \Phi)$$

A portée égale, les indicateurs de poids propres relatifs aux différents matériaux peuvent se classer comme suit :

$$\Phi_{\text{Acier écroui}} < \Phi_{\text{Aluminium}} < \Phi_{\text{Acier doux}} < \Phi_{\text{Bois}} < \Phi_{\text{Béton armé}} < \Phi_{\text{Pierre-brique}}$$

La relation ci-dessus montre bien que l'acier HLE est, toutes autres choses étant égales, le matériau qui permet théoriquement de franchir les plus grandes portées.

Sous ces hypothèses, la **portée limite** d'un treillis soumis à une charge totale extérieure F s'obtient lorsque le dénominateur de la relation ci-dessus tend vers zéro, soit pour :

$$\Phi W^{(T+C)} = 1 .$$

**Pour  $\Phi \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque l'on néglige le poids propre de la structure, on retrouve l'expression de l'indicateur de volume démontrée au §2.1. :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \sum_{(T+C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right)$$

**Pour  $\Phi \rightarrow \infty$** , c'est à dire lorsque la structure est essentiellement soumise à son poids propre, la relation (1) ci-dessus donne :

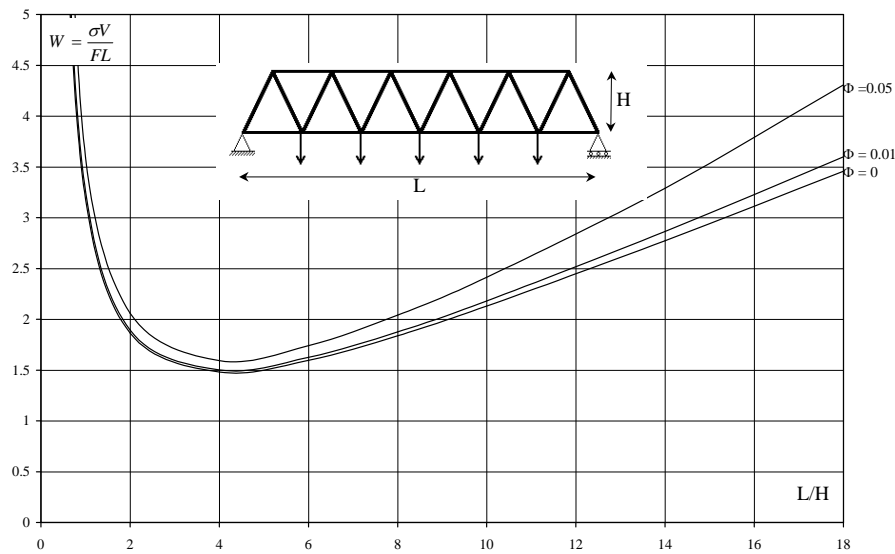
$$V = \frac{(0 + \rho V)L}{\sigma} \sum_{(T+C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right)$$

Et comme le volume V se simplifie, on obtient une relation qui, d'une part, est identique à la condition de portée limite mise en évidence ci-dessus et qui, d'autre part, ne permet plus de définir l'indicateur de volume :

$$\Phi = \frac{\rho L}{\sigma} = \frac{1}{W^{(T+C)}}$$

Lorsqu'un treillis est uniquement soumis à son poids propre, **la notion d'indicateur de volume perd tout son sens**. Physiquement, ceci peut s'expliquer très simplement : si les barres ne sont soumises qu'à un effort normal est si l'on peut négliger le flambement des barres élancées, le treillis optimum est celui dont la section de toutes les barres tend vers une valeur nulle.

La figure 11 illustre les variations de W en fonction du ratio L/H (en abscisse) dans le cas où on néglige le poids propre d'une part (courbe inférieure notée  $\Phi = 0$ ) et pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  d'autre part. Ces courbes sont données pour le treillis Warren à 6 mailles soumis à une charge distribuée sur la membrure inférieure.



**Figure 11** : valeurs de l'indicateur de volume relatives au treillis Warren à 6 mailles chargé sur sa membrure inférieure (flambement négligé), pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre ( $\Phi=0, \Phi=0.01, \Phi=0.05$ )

**4.2.3.** Expression de l'indicateur de volume si le flambement est pris en compte selon la loi hyperbolique d'Euler  $\sigma_{crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$ .

Le volume total du treillis vaut (voir §4.2.1) :

$$V = \sum_{(T)} V_i + \sum_{(C)} V_i = \frac{(F + \rho V)L}{\sigma} \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \frac{(F + \rho V)L}{\sigma} \left( \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{q E (F + \rho V)}} \right) \sum_{(C)} \left( \frac{1}{\pi} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \right) \quad [2]$$

L'expression de l'indicateur de volume vaut donc :

$$W = \frac{\sigma V}{F L} = \left( 1 + \frac{\rho V}{F} \right) \left( \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \left( \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{q E F \left( 1 + \frac{\rho V}{F} \right)}} \right) \sum_{(C)} \left( \frac{1}{\pi} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \right) \right)$$

En remarquant que  $\frac{\rho V}{F} = \frac{\sigma V}{F L} \frac{L}{(\sigma/\rho)} = W\Phi$ , on obtient une expression qui fait apparaître l'indicateur

de flambement  $\Psi = \mu \sigma L / \sqrt{q E F}$  :

$$W = (1 + W\Phi) \left( \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \left( \frac{\Psi}{\sqrt{1 + W\Phi}} \right) \sum_{(C)} \left( \frac{1}{\pi} \sqrt{k_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)^2 \right) \right)$$

Sachant que les deux termes  $W^{(T)} = \sum_{(T)} k_i \frac{l_i}{L}$  et  $W^{(C)} = \sum_{(C)} \sqrt{k_i} \left(\frac{l_i}{L}\right)^2$  ne dépendent que du rapport  $L/H$ , on trouve finalement une expression implicite de l'indicateur de volume  $W = \sigma V / FL$  mettant en relation les trois paramètres adimensionnels  $L/H, \Psi$  et  $\Phi$  :

$$W = (1 + W\Phi)W^{(T)} + \Psi W^{(C)} \sqrt{1 + W\Phi} \quad \Rightarrow \quad W = \text{fonction}(L/H, \Psi, \Phi) \quad [3]$$

**Pour  $\Phi \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque l'on néglige le poids propre de la structure, on retrouve l'expression "classique" de l'indicateur de volume ne tenant pas compte du poids propre :

$$W = W^{(T)} + \Psi W^{(C)}$$

**Pour  $\Phi \rightarrow \infty$** , c'est à dire lorsque la structure est essentiellement soumise à son poids propre ( $\rho V \gg F$ ), la relation [2] donne :

$$\Phi \left[ W^{(T)} + \left( \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{qE\rho V}} \right) W^{(C)} \right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \left[ W^{(T)} + \Psi_{pp} W^{(C)} \right] = 1$$

$\Psi_{pp}$  sera noté *indicateur de flambement sous poids propre*. Son expression ne se distingue de celle de l'indicateur de flambement que par le terme  $\rho V$  en lieu et place de la charge extérieure totale extérieure  $F$ .

La relation ci-dessus est aussi la condition de **portée limite** de la structure.

**4.2.4.** Expression de l'indicateur de volume si le flambement est pris en compte selon la courbe de flambement en cloche  $\sigma_{Crit.}/\sigma = 1/(1 + \Lambda^2)$

Le volume total de matière vaut (§4.2.1) :

$$V = \sum_{(T)} V_i + \sum_{(C)} V_i = \frac{(F + \rho V)L}{\sigma} \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \frac{(F + \rho V)L}{2\sigma} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu \sigma L)^2}{qE(F + \rho V)}} \right) \quad [4]$$

L'expression de l'indicateur de volume peut donc s'écrire :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \left( 1 + \frac{\rho V}{F} \right) \left( \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu \sigma L)^2}{qEF \left( 1 + \frac{\rho V}{F} \right)}} \right) \right)$$

En remarquant de nouveau que  $\frac{\rho V}{F} = \frac{\sigma V}{FL} \frac{L}{(\sigma/\rho)} = W\Phi$ , on obtient une expression qui fait apparaître l'indicateur de flambement  $\psi$  :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = (1 + W\Phi) \left( W^{(T)} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{\Psi^2}{(1 + W\Phi)}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow W = \text{fonction}(L/H, \Psi, \Phi)$$
[5]

A nouveau, cette expression lie de manière implicite l'indicateur de volume  $W$  aux trois paramètres  $L/H$ ,  $\Psi$  et  $\Phi$  :

$$W = \text{fonction implicite}(L/H, \Psi, \Phi)$$

**Pour  $\Phi \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque l'on néglige le poids propre de la structure, on retrouve l'expression de l'indicateur de volume obtenue au point §2.3.2. :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = W^{(T)} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

**Pour  $\Phi \rightarrow \infty$** , c'est à dire lorsque la structure est essentiellement soumise à son poids propre, la relation [4] donne :

$$\Phi \left[ W^{(T)} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi_{pp}^2} \right) \right] = 1$$
[5]

avec  $\Psi_{pp} = \mu \sigma L / \sqrt{q E \rho V}$

Pour rappel,  $\Psi_{pp}$  est l'**indicateur de flambement sous poids propre** dont l'expression ne se distingue de celle de l'indicateur de flambement que par le terme de poids propre  $\rho V$  en lieu et place de la charge extérieure totale  $F$ .

La relation [5] est aussi la condition de **portée limite** de la structure.

#### 4.2.5. Discussion sur les valeurs de l'indicateur de poids propre $\Phi = \frac{L}{(\sigma/\rho)}$ à considérer.

Les rapports  $\sigma/\rho$  respectifs moyens des matériaux usuels sont les suivants :

- pour l'acier HLE :  $\sigma/\rho = 3900.10^3$  [mm], ( $\sigma = 300$  Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour l'acier doux :  $\sigma/\rho = 1820.10^3$  [mm], ( $\sigma = 140$  Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour l'aluminium :  $\sigma/\rho = 2040.10^3$  [mm], ( $\sigma = 55$  Mpa,  $\rho = 27$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour le bois :  $\sigma/\rho = 1670.10^3$  [mm], ( $\sigma = 10$  Mpa,  $\rho = 6$  kN/m<sup>3</sup>).
- pour le béton armé :  $\sigma/\rho = 600.10^3$  [mm], ( $\sigma = 15$  Mpa,  $\rho = 25$  kN/m<sup>3</sup>);

Pour des portées respectives caractéristiques de 10, 20, 50, 100 et 400 mètres , les valeurs de l'indicateur de poids propre valent, pour chaque matériau :

L = 10 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 26.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 55.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 49.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 60.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 167.10^{-4}$$

L = 20 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 51.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 110.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 98.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 120.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 333.10^{-4}$$

L = 50 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 128.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 275.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 245.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 299.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 833.10^{-4}$$

L = 100 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 256.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 549.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 490.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 599.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 1667.10^{-4}$$

L = 200 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 513.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 1099.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 980.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 1197.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 3333.10^{-4}$$

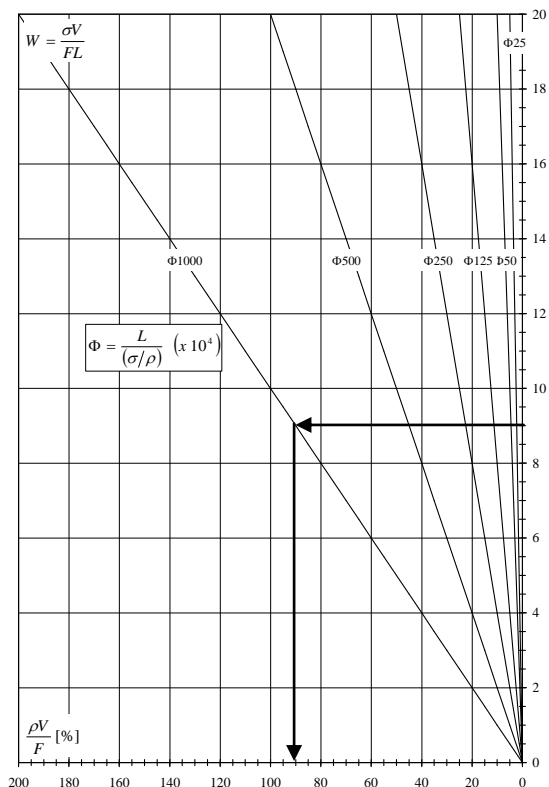
L = 400 mètres :

$$\Phi_{Acier\ HLE} = 1026.10^{-4}, \Phi_{Acier\ doux} = 2198.10^{-4}, \Phi_{Alu} = 1961.10^{-4}, \Phi_{Bois} = 2395.10^{-4}, \Phi_{Béton} = 6667.10^{-4}$$

Afin de limiter les calculs numériques, leur lourdeur mais aussi le temps de calcul, les courbes d'efficiéce présentées dans cette étude ont été calculées pour les valeurs caractéristiques de  $\Phi$  correspondant à l'acier HLE (pour les portées standard considérées ci-dessus), soit pour  $\Phi=25, 50, 125, 250, 500$  et  $1000 (10^{-4})$ . Les points relatifs à d'autres valeurs de l'indicateur de flambement s'obtiendront par interpolation sur les courbes d'efficiéce.

**Remarque :** par la suite et sur toutes les figures, l'indicateur de poids propre sera noté  $\Phi_0, \Phi_{25}, \Phi_{50}, \Phi_{125},$  etc... ce qui correspond à des valeurs de  $\Phi$  égales à  $0, 25.10^{-4}, 50.10^{-4}, 125.10^{-4},$  etc...

**Figure 12 :** relation linéaire entre le pourcentage de poids propre  $\rho V/F$  et l'indicateur de volume  $W$



4.2.6. Détermination du pourcentage de poids propre  $\rho V/F$

Sachant que  $\Phi = \frac{L}{(\sigma/\rho)}$  et  $W = \frac{\sigma V}{FL}$ , on peut écrire :

$$\frac{\rho V}{F} = \left( \frac{\rho V}{F} \frac{\sigma}{L} \right) \frac{L}{\sigma} = \frac{\sigma V}{FL} \frac{L}{(\sigma/\rho)} = W\Phi$$

Le pourcentage de poids propre par rapport aux charges extérieures F est donc linéairement proportionnel à l'indicateur de volume. Cette constatation permet de tracer les droites de la figure 12 qui expriment directement le pourcentage de poids propre  $\rho V/F$  (à lire en abscisse de droite à gauche) en fonction de l'indicateur de volume (à lire en ordonnée de bas en haut). Les axes ont été tracés de cette manière afin de permettre une lecture en vis-à-vis avec les courbes d'efficacité présentées au chapitre 2 et en annexe.

4.2.7. Une propriété intéressante : relation "quasi-linéaire" entre W et  $\Phi$ .

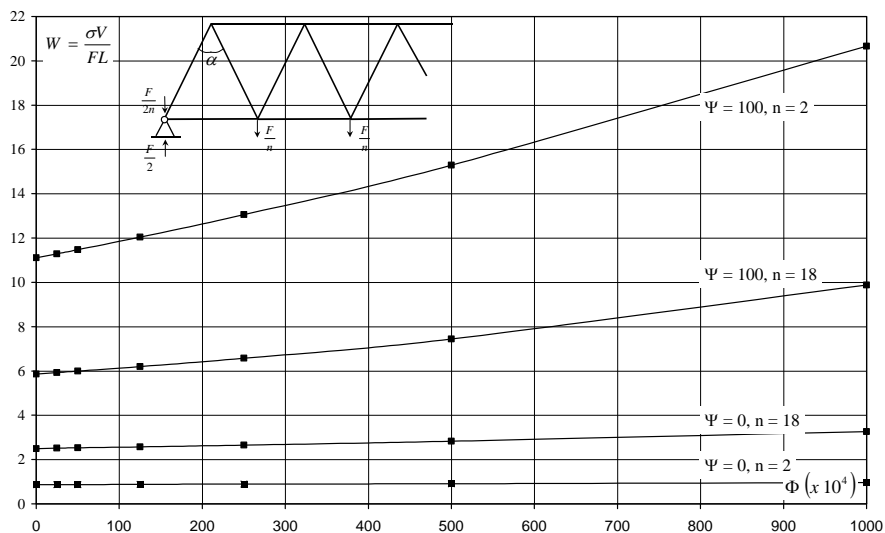


Figure 13 : variations de W en fonction de  $\Phi$  pour des treillis optimaux à 2 et 18 mailles pris respectivement pour  $\Psi = 0$  et  $\Psi = 100$ .

La figure 13 résulte d'une optimisation numérique de treillis Warren à 2 et 18 mailles chargés sur la membrure inférieure et dont les barres sont optimisées individuellement. Chacun de ces treillis est optimisé pour les deux valeurs extrêmes de l'indicateur de flambement  $\Psi=0$  et 100, et, dans chaque cas, pour les valeurs  $\Phi 0, \Phi 25, \Phi 50, \Phi 125, \Phi 250, \Phi 500$  et  $\Phi 1000$  de l'indicateur de poids propre.

On constate que, pour ces cas extrêmes, et par conséquent pour tous les autres cas de nombres de mailles et de valeurs de  $\Psi$ , la relation entre l'indicateur de volume W et l'indicateur de poids propre  $\Phi$  est quasiment linéaire.

Cette propriété s'avère très utile. En effet :

- Supposons connu l'indicateur de volume  $W_{\Phi_0}$  d'un treillis dimensionné sans tenir compte du poids propre;
- Supposons connu l'indicateur de volume  $W_{\Phi_{500}}$  de ce même treillis dimensionné en tenant compte d'un indicateur de poids propre  $\Phi = 500.10^{-4}$ .

Alors l'indicateur de volume de ce treillis lorsque son indicateur de poids propre  $\Phi$  est quelconque (compris entre 0 et  $500.10^{-4}$ ) vaut :

$$W_{\Phi_0} + dW = W_{\Phi_0} + \frac{\Phi}{\Phi_{\Phi_{500}}} (W_{\Phi_{500}} - W_{\Phi_0})$$

Cette propriété est illustrée dans l'exemple d'application pratique développé au §9. Dans cet exemple, la valeur initiale de l'indicateur de volume obtenue en négligeant le poids propre est corrigée à l'aide de la figure 21.C qui reprend les valeurs de  $(W_{\Phi_{500}} - W_{\Phi_0})$ .

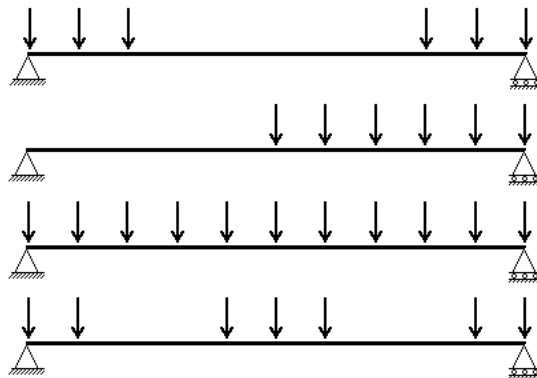


**Photo 2** : pont Warren sur la rivière Hida au Japon.

## 5. STRUCTURES SOUMISES A DES CAS DE CHARGES REPARTIES DE FAÇON ALEATOIRE

### 5.1. Détermination des combinaisons de charges critiques

Le §2 est consacré à l'optimisation des treillis soumis à une charge extérieure "F" immobile et distribuée sur les nœuds de façon uniforme. Dans de nombreux cas, il va de soi que cette charge peut se répartir de façon aléatoire, comme l'illustre l'exemple schématique ci-dessous.



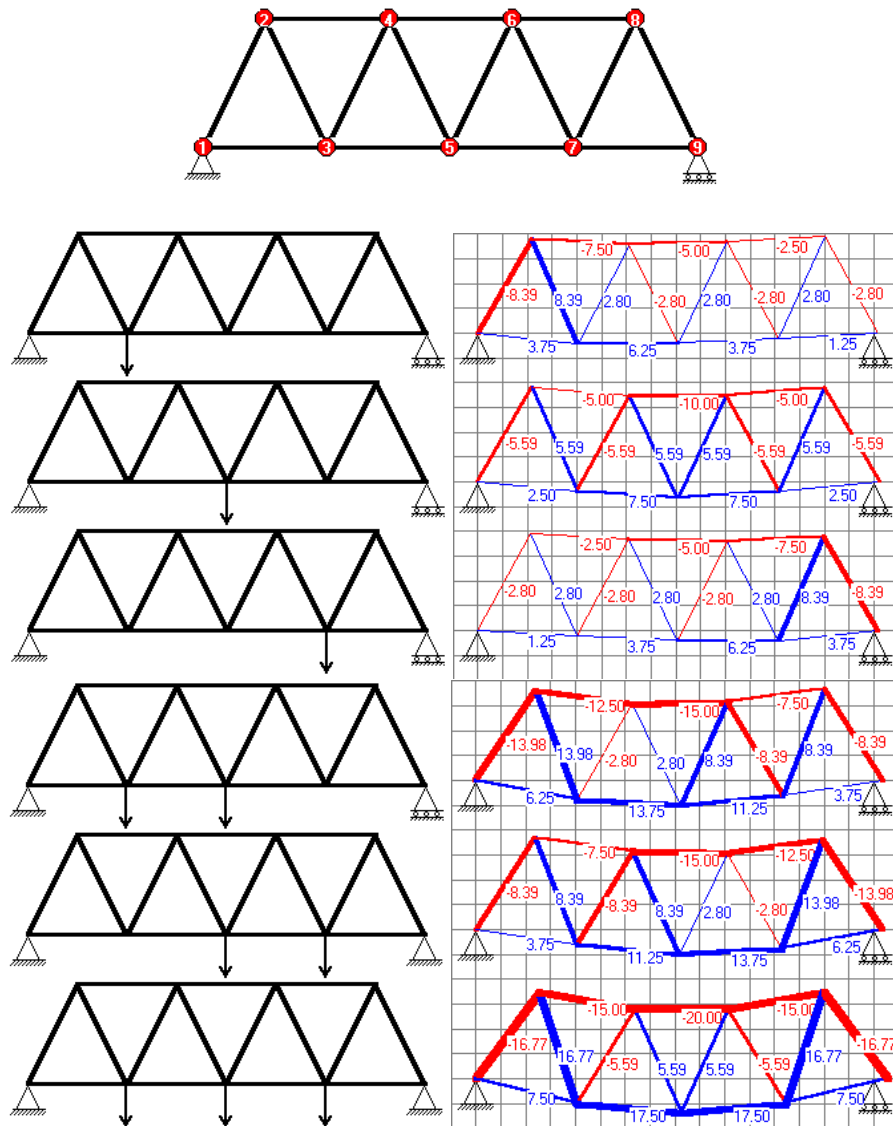
Il s'agit donc de déterminer, pour chaque barre d'un treillis, la répartition de chargement la plus défavorable, c'est à dire celle qui va lui donner sa plus grosse section, et permettre de déterminer avec exactitude l'indicateur de volume relatif à cette structure et à ce chargement aléatoire. Au point de vue numérique, cela ne pose théoriquement pas de problème puisqu'il suffit de passer tous les cas de chargement en revue...mais cela nécessite un temps de calcul démesuré. Afin de limiter ce temps de calcul, il faut donc déterminer les quelques cas de chargement les plus défavorables avec certitude, parmi tous les cas de chargement possibles.

Enfin, une approche plus efficace prenant notamment en compte les effets pervers du poids propre et calqué sur le principe des lignes d'influence sera décrite au §5.2.

Considérons tout d'abord un treillis Warren à 4 mailles, ce qui représente un cas très élémentaire puisqu'il ne peut y avoir que 6 combinaisons de charges différentes, comme le montre la figure 14. Celle-ci suggère les commentaires suivants :

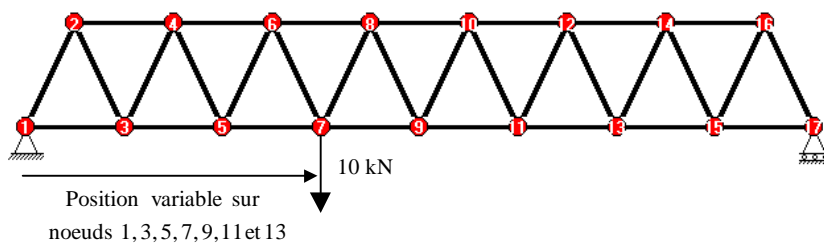
- le principe de superposition des efforts s'applique : les efforts relatifs à un cas de charge quelconque sont égaux à la somme des efforts (pris avec leur signe) relatifs aux cas de charge ponctuelle unique. Par exemple, les efforts relatifs au dernier cas (1 charge sur chacun des trois noeuds) sont égaux à la somme des efforts correspondant aux trois premiers cas de charge ponctuelle isolée. Cette remarque prendra tout son intérêt par la suite.
- les barres de la membrure inférieure et supérieure, ainsi que les 2 diagonales des mailles extrêmes sont toujours le siège d'un effort de même signe, quelque soit le chargement. Pour ces barres, le cas de charge le plus défavorable correspond donc à la membrure chargée à chaque nœud.
- selon la répartition des charges, une même diagonale est soit le siège d'un effort de traction, soit le siège d'un effort de compression. Ce sont donc les diagonales qui vont déterminer les autres combinaisons de charges à considérer.





**Figure 14 :** combinaisons possibles d'efforts dans un treillis Warren à 4 mailles. Le rouge représente la compression, le bleu la traction. (Toutes les charges valent 10 kN)

Le tableau ci-dessous concerne une poutre à 8 mailles. Il représente l'effort dans chaque diagonale en fonction de la position d'une charge unique de 10 kN isolée située respectivement aux nœuds 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15 de la membrure inférieure. Les chiffres en rouges représentent un effort de compression (C), tandis que ceux en bleu représentent un effort de traction (T).



Poutre a 8 mailles :								
Position sur nœud	Maille 1		Maille 2		Maille 3		Maille 4	
	diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite
3	9,78 (C)	9,88 (T)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)
5	8,39 (C)	8,39 (T)	8,39 (C)	8,39 (T)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)
7	6,99 (C)	6,99 (T)	6,99 (C)	6,99 (T)	6,99 (C)	6,99 (T)	4,19 (T)	4,19 (C)
9	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)
11	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)
13	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)
15	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)
					(*)			

Maille 5		Maille 6		Maille 7		Maille 8	
diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite	diag. gauche	diag. droite
1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)
2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)
4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)	4,19 (T)	4,19 (C)
5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)	5,59 (T)	5,59 (C)
4,19 (C)	4,19 (T)	6,99 (T)	6,99 (C)	6,99 (T)	6,99 (C)	6,99 (T)	6,99 (C)
2,80 (C)	2,80 (T)	2,80 (C)	2,80 (T)	8,39 (T)	8,39 (C)	8,39 (T)	8,39 (C)
1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	1,40 (C)	1,40 (T)	9,78 (T)	9,88 (C)

Pour bien comprendre la signification de ce tableau, prenons comme exemple la diagonale gauche de la 3<sup>ème</sup> maille, annotée d'un astérisque dans le tableau. Cette colonne montre que l'effort maximal de compression dans cette diagonale est obtenu lorsque les charges se situent sur les nœuds 7,9,11,13 et 15. A l'inverse, l'effort maximal de traction est obtenu lorsque les charges se situent sur les noeuds 3 et 5. Les autres combinaisons créent des efforts résultant d'une combinaison d'efforts de traction et de compression dont la résultante est forcément moins défavorable que ces deux extrêmes.

L'observation des autres colonnes limite les cas de charges à considérer aux cas suivants :

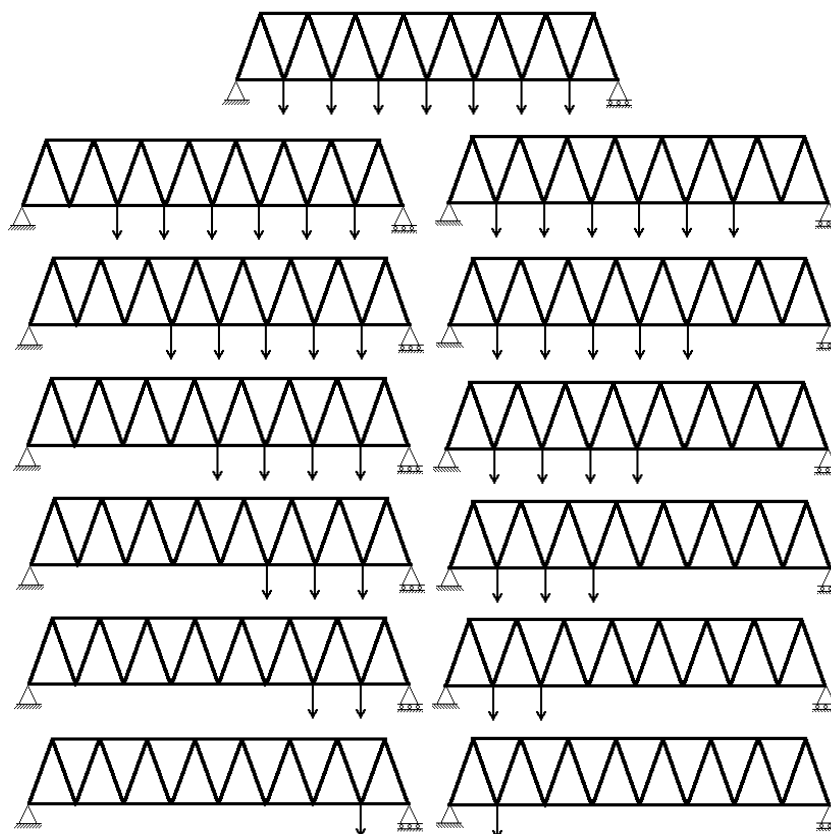
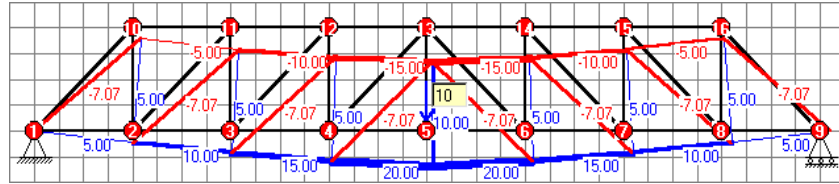


Figure 15 : les 13 combinaisons de charges les plus défavorables de la poutre Warren à 8 mailles.

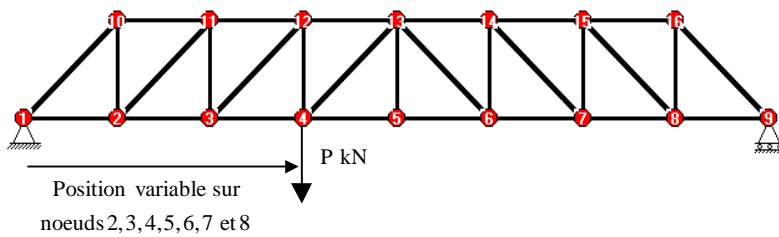
De façon générale, un treillis Warren à "n" mailles nécessitera la considération de (2n-3) cas de charges différents. Les conclusions sont identiques pour un treillis à nombre impair de mailles.

**Treillis Howe**



**Figure 16 :** Répartition des efforts dans les éléments d'une poutre Howe avec charge ponctuelle centrale de 10 kN (sur le noeud 5).

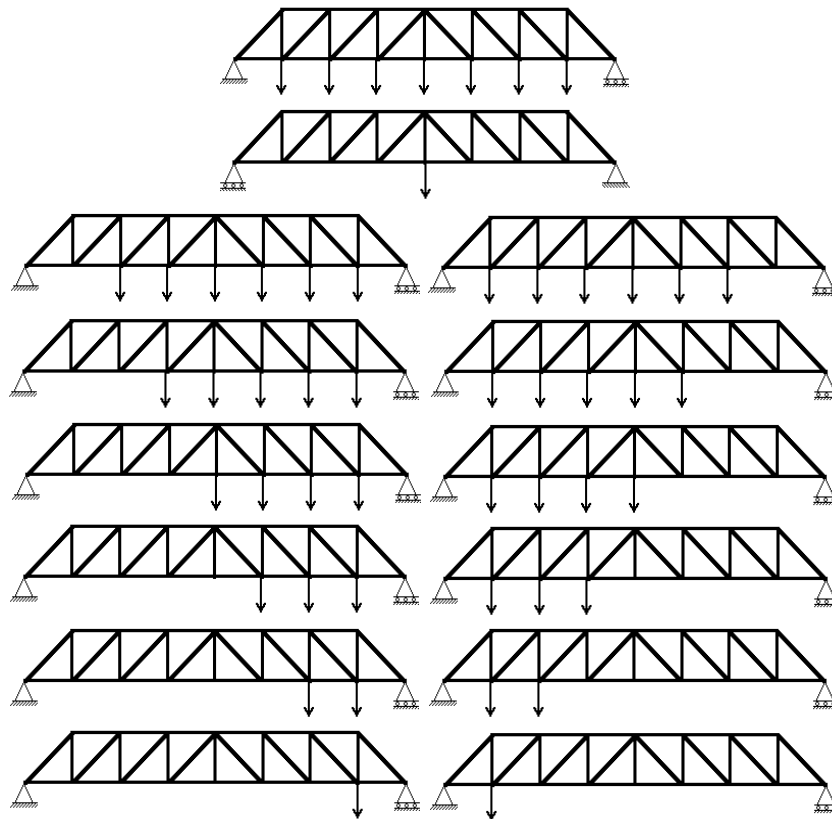
La figure 16 représente la répartition des efforts dans les éléments d'un treillis Howe à 8 mailles lorsque la charge ponctuelle est centrée. Quelle que soit la position de cette charge sur la membrure inférieure, les éléments des membrures supérieures et inférieures sont le siège d'un effort de même signe. Pour ces deux membrures, le cas de charge le plus défavorable correspond donc à la situation où tous les nœuds (de la membrure inférieure) sont chargés. Quant aux diagonales et aux verticales, elles peuvent être soit le siège d'un effort de traction soit le siège d'un effort de compression comme le montre le tableau ci-dessous. Celui-ci donne la répartition des efforts de traction et de compression dans chaque élément en fonction de la position d'une charge ponctuelle unique mobile sur la membrure inférieure.



Poutre a 8 mailles :									
Position sur nœud	Maille 1		Maille 2		Maille 3		Mailles centrales		
	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	verticale	diag. droite
2	(C)	(T)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	NUL	(C)
3	(C)	(T)	(C)	(T)	(T)	(C)	(T)	NUL	(C)
4	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(T)	NUL	(C)
5	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)
6	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	NUL	(T)
7	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	NUL	(T)
8	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	NUL	(T)

Maille 6		Maille 7		Maille 8	
vert. Gauche	diag. Droite	vert. Gauche	diag. Droite	vert. Gauche	diag. Droite
(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)
(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)
(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)
(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)
(C)	(T)	(T)	(C)	(T)	(C)
(C)	(T)	(C)	(T)	(T)	(C)

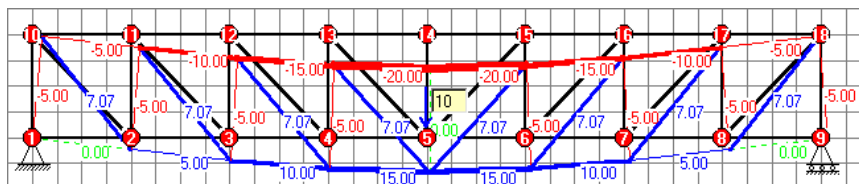
Ce tableau permet d'établir les combinaisons de charges les plus critiques, représentées à la figure 17 ci-dessous.



**Figure 17** : les 14 combinaisons de charges à prendre en compte pour la poutre Howe à 8 mailles.

De façon générale, un treillis Howe à  $n$  mailles nécessitera la considération de  $(2n-2)$  cas de charges différents.

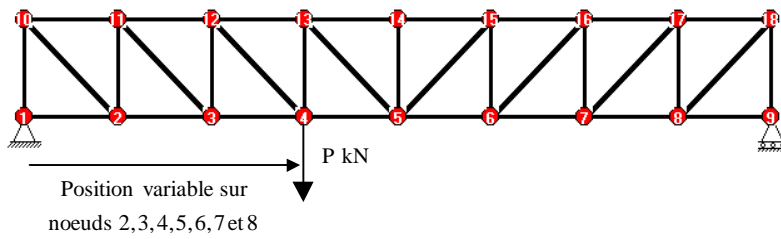
**Treillis Pratt**



**Figure 18** : Répartition des efforts dans les éléments d'une poutre Pratt avec charge ponctuelle centrale de 10 kN (sur noeud 5).

La figure 18 représente la répartition des efforts dans les éléments d'un treillis Pratt à 8 mailles lorsque la charge ponctuelle est centrée.

A nouveau, quelle que soit la position de cette charge sur la membrure inférieure, les éléments des membrures supérieures et inférieures sont le siège d'un effort de même signe. Pour ces deux membrures, le cas de charge le plus défavorable correspond donc à la situation où tous les nœuds de la membrure inférieure sont chargés. Il en va de même pour les verticales extrêmes, toujours en compression. Quant aux diagonales et aux autres verticales, elles peuvent être soit le siège d'un effort de traction soit le siège d'un effort de compression comme le montre le tableau ci-dessous. Celui-ci donne la répartition des efforts de traction et de compression dans chaque élément en fonction de la position d'une charge ponctuelle unique mobile sur la membrure inférieure.



**Poutre a 8 mailles :**

Position sur nœud	Maille 1		Maille 2		Maille 3		Mailles centrales		
	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	vert. droite	diag. gauche	verticale	diag. droite
2	(T)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	NUL	(T)
3	(T)	(C)	(T)	(T)	(C)	(T)	(C)	NUL	(T)
4	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(T)	(C)	NUL	(T)
5	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	NUL	(T)
6	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	NUL	(C)
7	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	NUL	(C)
8	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)	NUL	(C)

Maille 6		Maille 7		Maille 8	
vert. Gauche	diag. Droite	vert. Gauche	diag. Droite	vert. Gauche	diag. Droite
(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)
(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)
(C)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)
(T)	(T)	(C)	(T)	(C)	(T)
(T)	(C)	(T)	(T)	(C)	(T)
(T)	(C)	(T)	(C)	(C)	(T)

A nouveau, le tableau permet de déterminer les combinaisons de charges les plus défavorables, comme l'illustre la figure 19.

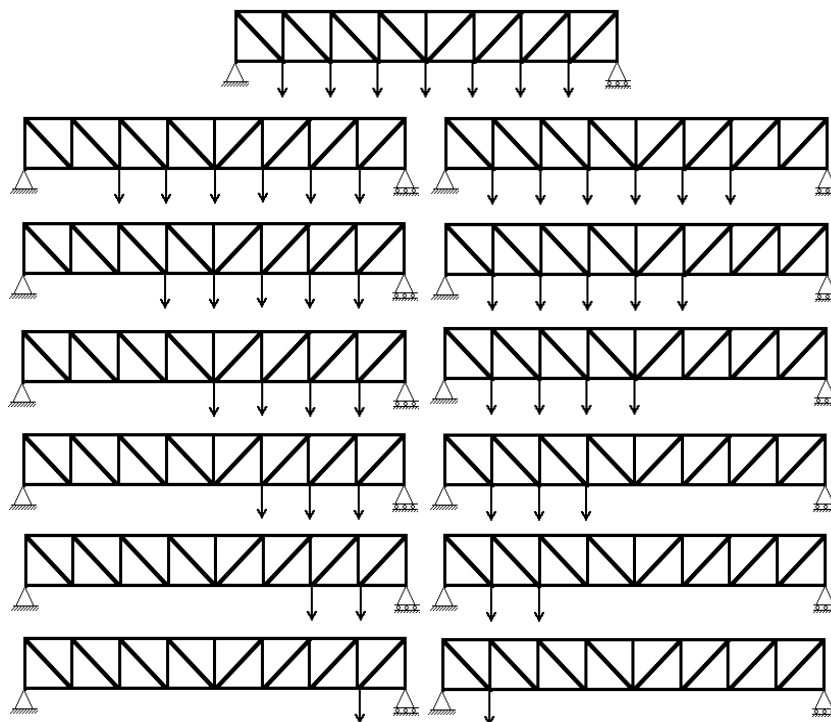


Figure 19 : les 13 combinaisons de charges à prendre en compte pour la poutre Pratt à 8 mailles.

De façon générale, un treillis Pratt à n mailles nécessitera la considération de (2n-3) cas de charges différents.

## 5.2. Recherche des cas de charge les plus défavorables par une approche calquée sur la théorie des lignes d'influence

Il a été montré au point précédent que le nombre de cas de charge à considérer pour un treillis à "n" mailles valait  $(2n-2)$  ou  $(2n-3)$  selon les types de treillis. En réalité, le poids propre crée dans les barres des efforts qui se superposent à ceux créés par les charges extérieures et qui peuvent engendrer des cas de charges plus défavorables que ceux qui sont illustrés aux figures 15, 17 et 19.

La solution à ce problème est de calculer l'effort dans chacune des barres pour chaque position d'un effort ponctuel unique  $F/n$  se "baladant" sur les nœuds de la membrure. En fonction de la position de cette charge mobile, une barre quelconque peut donc être le siège soit d'un effort de traction, soit d'un effort de compression.

Soit  $n_{j,(T)}^{(i)}$  et  $n_{j,(C)}^{(i)}$  respectivement les efforts de traction ou de compression (si l'un est non nul, l'autre est nul et inversement) créés dans une barre d'indice "i" lorsque l'effort ponctuel occupe la position "j" sur la membrure. Par le principe de superposition, les efforts de traction et de compression maximaux dans cette barre valent, respectivement :

$$\begin{cases} N_{(T),\max}^{(i)} = \sum_j n_{j,(T)}^{(i)} \\ N_{(C),\max}^{(i)} = \sum_j n_{j,(C)}^{(i)} \end{cases}$$

De ces deux efforts, il résulte donc deux valeurs de section  $\Omega_{(T),\max}^{(i)}$  et  $\Omega_{(C),\max}^{(i)}$  résultant respectivement soit d'un dimensionnement à la contrainte  $\sigma$  soit d'un dimensionnement au flambement.

La section à donner à la barre d'indice "i" pour résister à n'importe quel cas de charge vaut donc :

$$\Omega^{(i)} = \max\left(\Omega_{(T),\max}^{(i)}, \Omega_{(C),\max}^{(i)}\right)$$

C'est sur cette approche qu'ont été basées les procédures de calcul numérique de l'indicateur de volume de toutes les courbes présentées au chapitre 2 et en annexe.

## 5.3. Calcul pratique de l'indicateur de volume d'une structure soumise à une charge aléatoirement distribuée

Afin d'éviter toute ambiguïté, il faut définir la signification de la charge totale F dans l'expression de l'indicateur de volume  $W=\sigma V/FL$  d'un treillis soumis à une charge extérieure aléatoire d'intensité totale variable  $F/n \dots iF/n \dots F$ . En effet, selon les combinaisons de charges, la structure peut être soumise soit à 1 seule charge ponctuelle  $F/n$  sur l'un des nœuds, soit à une charge distribuée F sur toute la membrure, ce qui correspond à (n-1) charges ponctuelles  $F/n$  plus deux charges  $F/2n$  sur chaque appui.

Afin de permettre des comparaisons rigoureuses avec les valeurs de l'indicateur de volume calculées pour une charge répartie constante, il semble légitime de définir F comme étant, à nouveau, la charge totale maximale pouvant s'appliquer sur le treillis. Le volume maximal  $V_{i,\max}$  (ou la section maximale) d'une barre quelconque d'indice "i" correspond à une combinaison de charges particulière (la plus défavorable pour cette barre là) et à un nombre "n<sub>i</sub>" d'efforts ponctuels de valeur  $F/n$ .

Pour cette charge totale ( $n_i F/n$ ), le volume de la barre vaut :

$$V_{i,\max} = \frac{(n_i F/n)L}{\sigma} \cdot \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

Si la barre est en traction, l'indicateur de flambement  $\psi$  disparaît.

L'expression précédente peut se réécrire :

$$V_{i,\max} = \frac{FL}{\sigma} \cdot \left( \frac{n_i}{n} \text{fonction}(L/H, \Psi) \right)$$

Le volume total de la structure vaut alors :

$$V = \sum V_{i,\max} = \frac{FL}{\sigma} \sum_i \left( \frac{n_i}{n} \text{fonction}(L/H, \Psi) \right)$$

Ce qui permet d'établir une expression finale de l'indicateur de volume en totale concordance avec celle qui a été établie pour une charge répartie constante :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

où F est la charge totale maximale pouvant agir sur le treillis, appuis y compris.

## 6. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES COMPRIMEES DES TREILLIS OPTIMAUX

Le critère d'optimisation abordé dans ce premier chapitre est le poids des treillis. Dans le chapitre 3 sera traité un autre critère important : la raideur des structures et plus particulièrement leur flèche à mi-travée. Ceci permettra de déterminer si les structures optimales au niveau du poids le sont aussi au niveau des déplacements, ou, si ce n'est pas le cas, si elles n'engendrent pas des rapports flèche sur portées excessifs.

Une autre vérification essentielle concerne l'élanement des barres en compression. En effet, il faut éviter qu'un treillis dont toutes les barres sont optimisées individuellement ou par catégories ne possède des barres dont l'élanement (au sens flambement du terme) dépasse des valeurs acceptables.

La contrainte maximale  $\sigma_{\text{crit}}$  relative à une barre en compression quelconque d'indice "i" de longueur  $l_i$ ,

de section  $\Omega_i$  et d'inertie  $I_i$  vaut :  $\frac{\sigma_{\text{crit}}}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Lambda^2}$  avec 
$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{E/\sigma}} \\ \lambda = \mu l_i \sqrt{\frac{\Omega_i}{I_i}} \end{cases}$$

Si on introduit dans ces expressions le *facteur de forme* de la barre  $q = l_i/\Omega_i^2$  (voir fig.3, §2.2), on obtient :

$$\Lambda = \frac{\mu}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{qE}} \frac{l_i}{\sqrt{\Omega_i}} .$$

Par ailleurs, il a été montré au §2.3.2. que la section  $\Omega_i$  d'une barre en compression travaillant exactement à la contrainte critique vaut :

$$\Omega_i = \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

La combinaison des deux dernières relations permet de réécrire l'expression ci-dessus de  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \Psi \frac{(l_i/L)}{\sqrt{k_i}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)$$

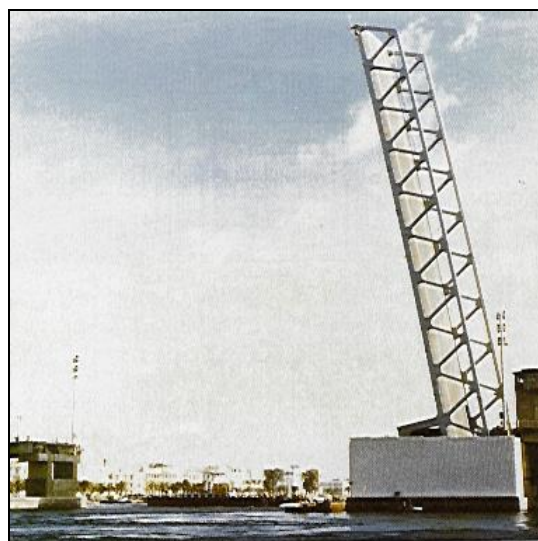
Or, comme les coefficients  $(l_i/L)$  et  $k_i$  ne dépendent que du ratio  $L/H$ , cette dernière relation met en évidence que le paramètre  $\Lambda$ , que l'on peut légitimement appeler *indicateur d'élancement*, ne dépend que des nombres adimensionnels  $L/H$  et  $\psi$ . Si en plus on y introduit l'effet du poids propre, on obtient :

$$\Lambda = \text{Fonction}(L/H, \Psi, \Phi)$$

En pratique, l'élancement maximal  $\lambda$  ne doit pas dépasser des valeurs de 200, ce qui correspond à un indicateur d'élancement  $\Lambda$  de l'ordre de 3.

Les courbes d'efficacités présentées dans cette étude seront toujours accompagnées de figures exprimant l'indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  relatif à la barre en compression d'élancement maximal. Bien que l'expression ci-dessus soit relativement complexe, la détermination numérique de l'indicateur d'élancement ne pose aucun problème.

Par ailleurs, un indicateur d'élancement atteignant des valeurs de 5 sera parfois toléré. En effet, si cette valeur de 5 correspond à la barre d'élancement maximal, les barres immédiatement voisines ont bien souvent un élancement bien inférieur. Ainsi, une augmentation de la section de cette barre d'élancement maximal seule n'engendre pas de variation conséquente de l'indicateur de volume global du treillis qui lui est relatif.



**Photo 3 :** Pont Warren levant à Bizerte (Tunisie)



## 7. OPTIMISATION DES TREILLIS HYPERSTATIQUES

La figure 1 montre que l'effort  $N_i$  dans une barre quelconque d'indice "i" d'un treillis isostatique peut toujours s'exprimer par une fraction  $k_i F$  de la charge totale  $F$ , et que, pour un nombre de mailles donné, ce terme  $k_i$  ne dépend que du rapport  $L/H$ . Cette constatation est à la base de toute l'approche développée dans cette étude puisqu'elle permet d'établir que l'indicateur de volume  $W$  ne dépend que des 2 paramètres  $L/H$  et  $\Psi$  :

$$W = \sum_{(T)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) = \text{Fonction}(L/H, \Psi)$$

Dans le cas d'un treillis hyperstatique, le coefficient  $k_i$  résulte d'une levée d'hyperstaticité et son expression analytique devient très vite complexe. Il n'est donc pas certain a priori qu'elle permette encore d'affirmer que  $W$  n'est fonction que de  $L/H$  et de  $\Psi$ .

Pour une charge totale  $F$  donnée, l'effort de compression  $N_i$  régnant dans une barre d'indice "i" et de section efficace  $\Omega_i$  d'un treillis hyperstatique quelconque chargé en ses nœuds peut s'exprimer par la relation générale ci-dessous, résultant d'une levée d'hyperstaticité. Le module de Young n'est absent de cette expression que s'il est identique pour toutes les barres, ce qui est supposé dans ce cas.

$$N_i = k_i F = \frac{\sum_k \frac{f_k(L/H)}{\Omega_k}}{\sum_j \frac{f_j(L/H)}{\Omega_j}} F$$

Dans cette expression, les termes de somme portent sur un certain nombre de barres du treillis. Si on multiplie numérateur et dénominateur par  $\Omega_i$ , on obtient :

$$k_i = \frac{N_i}{F} = \frac{\sum_k f_k(L/H) \frac{\Omega_i}{\Omega_k}}{\sum_j f_j(L/H) \frac{\Omega_i}{\Omega_j}}$$

Si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  concernent deux barres en compression, on a :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) \\ \Omega_j &= \frac{k_j F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_j/L)^2}{k_j} \Psi^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Omega_i}{\Omega_j} = \frac{k_i}{k_j} f(k_i, k_j, L/H, \Psi)$$

Si elles concernent deux barres en traction, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \frac{k_i F}{\sigma} \\ \Omega_j &= \frac{k_j F}{\sigma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Omega_i}{\Omega_j} = \frac{k_i}{k_j}$$

Et si elles concernent une barre en traction et une barre en compression :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) \\ \Omega_j &= \frac{k_j F}{\sigma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Omega_i}{\Omega_j} = \frac{k_i}{k_j} f(k_i, L/H, \Psi)$$

Globalement, l'expression de  $k_i$  peut donc se réécrire comme suit :

$$k_i = \frac{\sum_k f_k(k_i, k_k, L/H, \Psi) \frac{k_i}{k_k}}{\sum_j f_j(k_i, k_j, L/H, \Psi) \frac{k_i}{k_j}}$$

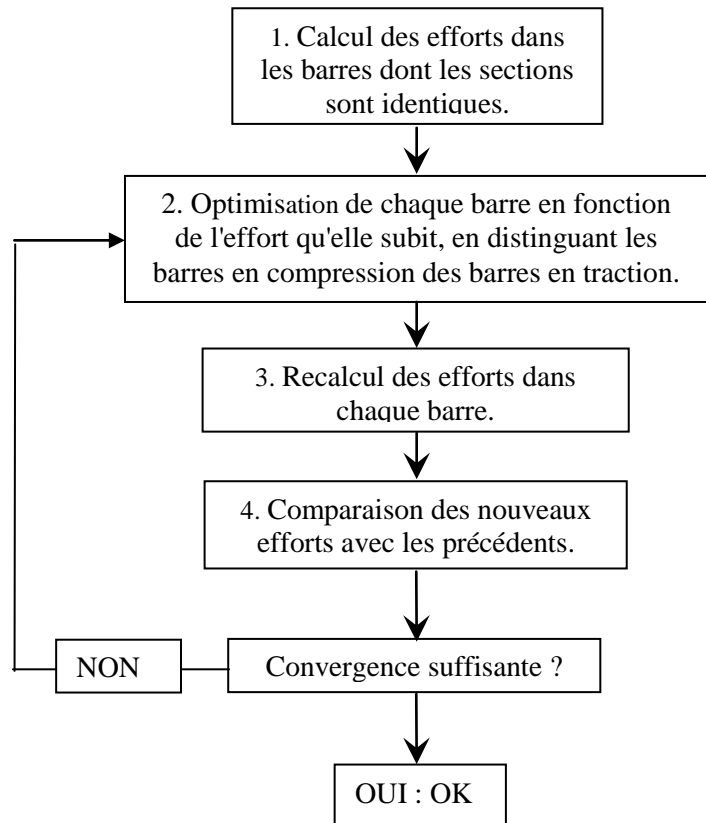
Cette équation, combinée à celle des "m" autres barres du treillis, constitue un système de "m" équations dont les "m" inconnues sont les coefficients  $k_i$ . Chacun de ceux-ci peut donc s'exprimer par la relation suivante, dans laquelle  $f_i$  est une fonction implicite complexe :

$$k_i = f_i(L/H, \Psi)$$

Cette conclusion permet donc de valider l'expression de l'indicateur de volume qui avait été établie pour les treillis isostatiques.

**Remarque importante :**

Lorsqu'un treillis est isostatique, le changement de la section efficace des barres n'a aucune influence sur la répartition des efforts internes et sur leur valeur. Il n'en va pas de même pour un treillis hyperstatique, pour lequel le changement d'une seule section génère une redistribution complète des efforts dans les barres. Dans ce cas, une optimisation des barres ne peut se faire que par un processus itératif (illustré ci-contre), qui n'est malheureusement pas toujours convergent.



## 8. LE THEOREME DE BUCKINGHAM

Le théorème de Buckingham (ou encore théorème de Vashby, ou encore théorème des  $\pi$ ) est à l'origine de la théorie de la similitude et régit donc le comportement des nombres adimensionnels.

Le théorème de Buckingham n'a pas été, le catalyseur de tous ces travaux. C'est lors du Congrès IASS (*International Association for Shells and Spacial Structures*) à Madrid en Septembre 1999 qu'au cours de la présentation d'une publication relative à cette étude, une remarque fut faite par l'un des participants. La remarque portait sur le Théorème de Buckingham qui, selon l'intervenant, apportait directement la solution au problème d'optimisation dont il est question.

Il s'énonce comme suit :

*" Si une relation complète existe entre m grandeurs physiques (le volume V, l'aire  $\Omega$ , le module d'élasticité E sont des grandeurs physiques) dont les unités ( $m^3$ ,  $m^2$ , Mpa, ...) s'expriment au moyen de n unités fondamentales (m, kg, s, radian), il existe une relation entre (m-n) nombres adimensionnels (et pas moins de (m-n)) qui sont des produits de puissances des grandeurs physiques considérées. "*

Le volume de matière relatif à un treillis composé de barres de longueur  $l_i$ , d'inertie  $I_i$ , d'aire efficace  $\Omega_i$  et soumises à un effort  $N_i$  est donné par la relation suivante, détaillée au §2.3.2. :

$$V = \sum_{(T)} \frac{N_i}{\sigma} l_i + \sum_{(C)} \frac{N_i}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu\sigma l_i)^2}{\pi^2 N_i (I_i / \Omega_i^2) E}} \right) l_i$$

Cette expression met en relation 6 grandeurs physiques :

V ( $m^3$ ),  $N_i$  ( $N=kgms^{-2}$ ),  $l_i$  (m),  $I_i$  ( $m^4$ ),  $\Omega_i$  ( $m^2$ ),  $\sigma$  et E (Mpa= $N/mm^2=kgm^{-1}s^{-2}$ ).

Ces 6 grandeurs physiques ( $\sigma$  et E sont caractérisés par une même grandeur physique) mettent en évidence 3 unités fondamentales (m, kg, s).

La relation ci-dessus doit donc pouvoir se transformer, d'après le théorème de Buckingham, en une relation reliant 3 nombres adimensionnels.

La solution n'est pas unique :

$$\frac{V}{L^3} = \sum_{(T)} \frac{N_i l_i}{\sigma L^3} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} \frac{N_i l_i}{\sigma L^3} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu\sigma l_i)^2}{\pi^2 N_i (I_i / \Omega_i^2) E}} \right)$$

→ 3 nombres adimensionnels

$$\frac{VF}{\sigma L^5} = \sum_{(T)} \frac{FN_i l_i}{\sigma^2 L^5} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} \frac{FN_i l_i}{\sigma^2 L^5} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu\sigma l_i)^2}{\pi^2 N_i (I_i / \Omega_i^2) E}} \right)$$

→ 3 nombres adimensionnels

$$\frac{\sigma V}{FL} = \underbrace{\sum_{(T)} \frac{N_i l_i}{FL} + \frac{1}{2} \sum_{(C)} \frac{N_i l_i}{FL}}_{\text{3 nombres adimensionnels}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu \sigma l_i)^2}{\pi^2 N_i (I_i / \Omega_i^2) E}} \right)$$

Le théorème de Buckingham permet donc de trouver une partie de la réponse au problème d'optimisation puisqu'il permet de réduire le nombre de paramètres qui entrent en jeu. Il présuppose toutefois le choix adéquat de la bonne solution, c'est à dire celle qui met en évidence l'*indicateur de volume* et l'*indicateur de flambement*.

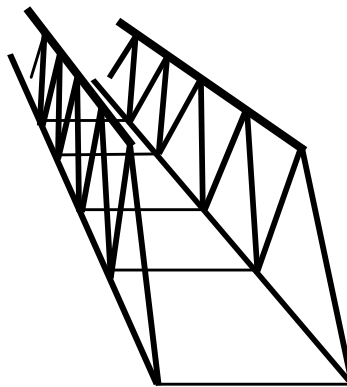
Mais, surtout, le théorème de Buckingham ne met pas en évidence la relation fondamentale qui existe entre le facteur  $N_i l_i / FL$  et l'élanement géométrique L/H de la structure. En aucun cas ce théorème ne permet donc de déduire la relation fondamentale  $W = f(L/H, \psi, \Phi)$  qui sous-tend cette étude.



**Photo 4 :** la superbe passerelle en treillis sur l'autoroute E23 à Nancy qui relie la forêt de Haye au *parcours santé* de la sapinière.

## 9. EXEMPLE PRATIQUE D'APPLICATION

Les figures utilisées dans cet exemple sont un avant-goût des résultats présentés au chapitre 2. La figure 21 comprend 4 sous-figures notées A, B, C et D. Les figures 21.B et 21.D sont les courbes d'efficiences du treillis Warren et ont donc un axe des abscisses en commun. La figure 21.B donne les valeurs de  $W$  à lire de bas en haut sur l'axe des ordonnées tandis que la figure 21.D donne les valeurs de  $L/H$  correspondantes, à lire de haut en bas sur l'axe des ordonnées. La figure 21.A, dont l'axe des ordonnées est en commun avec celui de la figure 21.B, exprime la relation linéaire entre l'indicateur de volume  $W$  et le pourcentage de poids propre  $\rho V/F$ . Enfin, la figure 21.C, à lire isolément, permet la correction des résultats en fonction du poids propre, comme décrit au §4.2.7. La figure 20 montre l'enveloppe des courbes d'efficacité reprises aux figures 21.B et 21.D.



Une passerelle de 4 mètres de largeur composée de deux treillis identiques parallèles doit franchir une portée de 50 mètres et pouvoir reprendre une charge extérieure distribuée aléatoirement sur le tablier de 4 tonnes par mètres, soit 20 kN/m pour chacun des deux treillis. Cette charge comprend le poids propre du tablier, supposé faible par rapport aux charges variables. Les profilés choisis pour les éléments en compression sont des profilés carrés creux dont l'épaisseur vaut un dixième du diamètre extérieur, soit  $m=e/D=0.1$  (fig. 3, §2.2). Leur facteur de forme vaut donc  $q = I/\Omega^2 = 0.380$ .

On considère que les treillis sont constitués de barres optimisées de façon individuelle.

Les barres sont soudées à leurs extrémités, ce qui permet d'opter pour des longueurs de flambement valant 90% des longueurs de barres ( $\mu = 0.9$ ). Si la structure est construite en acier ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>), l'indicateur de flambement vaut :

$$\Psi = \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}} = \frac{0.9 \times 300 \times 50000}{\sqrt{0.38 \times 210000 \times 10^6}} = 48$$

Les figures 20 et 21 montrent que cette valeur de  $\Psi=48$  correspond au treillis à 13 mailles qui compose la courbe enveloppe à cet endroit. Dans ce cas,  $W = 4.352$  et  $L/H=11.8$ , ce qui correspond à une hauteur de treillis de 4.2 mètres, et à des éléments de membrure inférieure d'une longueur de 3.85 m.



Treillis optimum à 13 mailles, d'élanement  $L/H=11.8$ .

$$\text{L'indicateur de poids propre vaut : } \Phi = \frac{L}{(\sigma/\rho)} = \frac{50000}{3900 \cdot 10^3} = 130 \cdot 10^{-4}$$

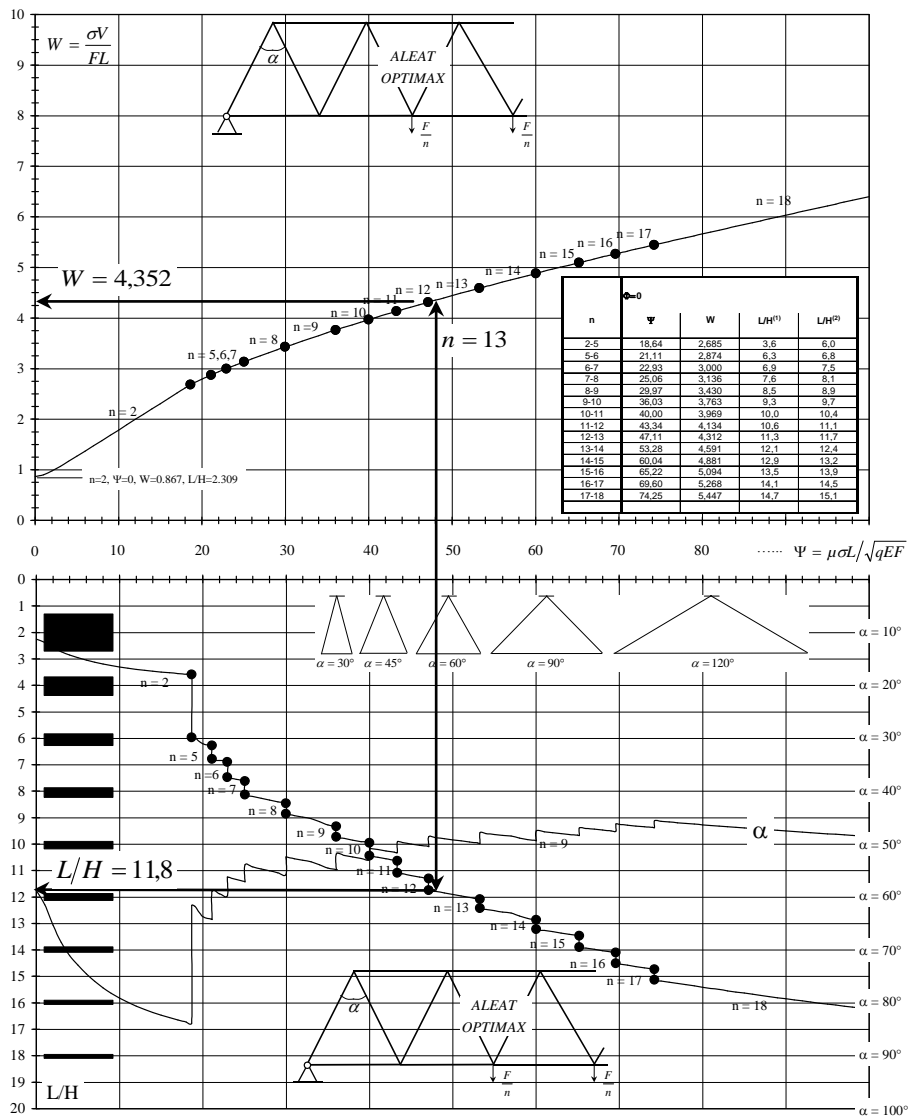


Figure 20 : enveloppes des courbes d'efficacité du treillis Warren soumis à une charge aléatoire et constitué de barres optimisées de façon individuelle (toutes les barres sont différentes).

La figure 21.C permet donc de trouver le surplus d'indicateur de volume nécessaire à la reprise du poids propre (voir §4.2.7) :

$$\Delta W = \left( \frac{130}{500} \right) \times 0.781 = 0.203$$

L'indicateur de volume total de la structure, corrigé en fonction du poids propre, vaut donc :

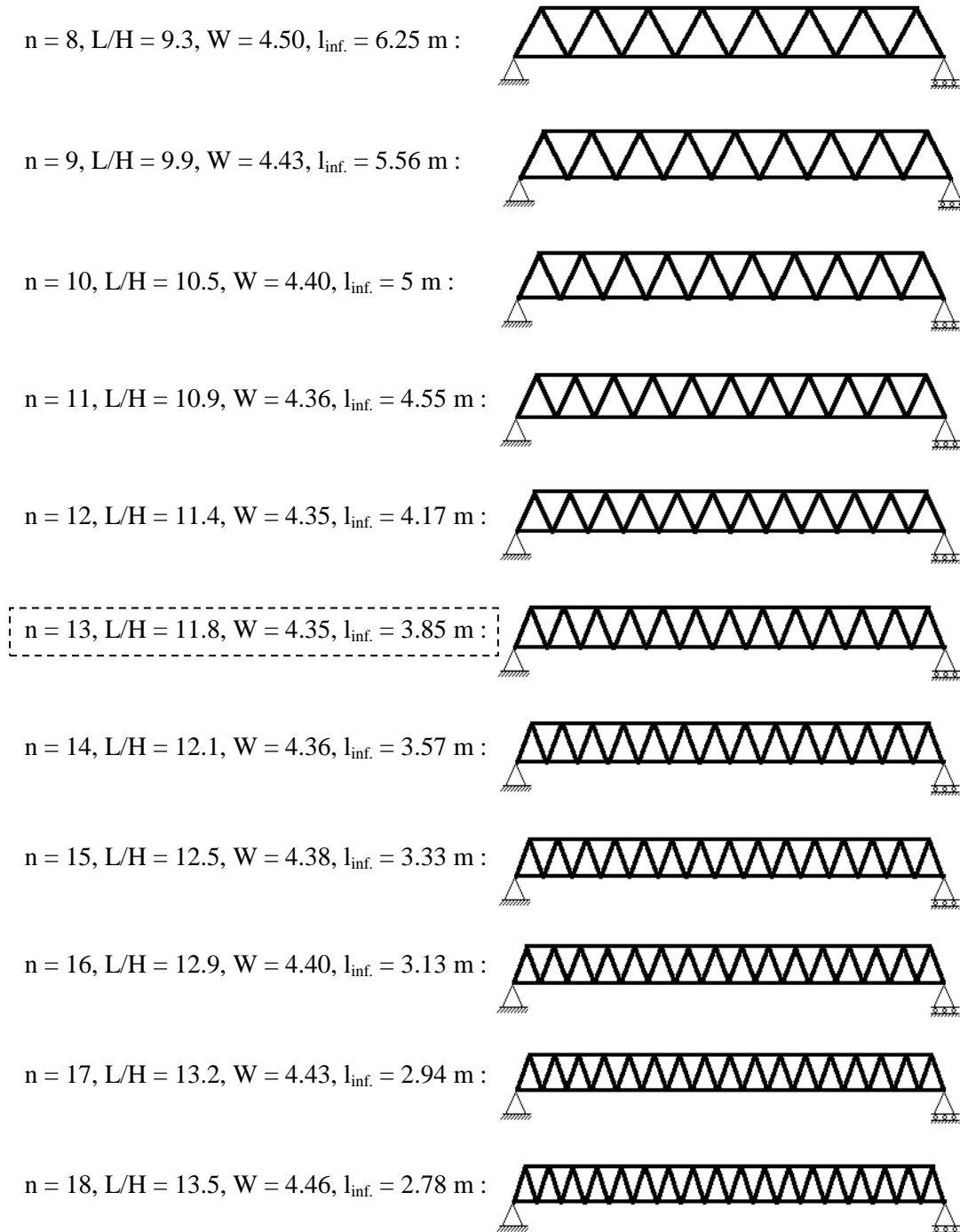
$$W_{réel} = 4.352 + 0.203 = 4.555$$

Cette valeur permet alors de calculer :

- Le pourcentage de poids propre  $\frac{\rho V}{F} = \Phi W = 130.10^{-4} \times 4.455 = 0.059$  soit 5.9% .

- Le poids propre total de chaque treillis vaut  $\rho V = \Phi W F = 0.059 \times (F = 10^6)$  soit  $59 \text{ kN}$ , soit une structure de **2 x 6 tonnes** (tablier non-compris), ce qui correspond à un volume total d'acier de  $2 \times 0,766 \text{ m}^3$ .

**Remarque importante :** la figure 21.B montre que, pour cette valeur de 48 de l'indicateur de flambement, les courbes d'efficacité sont telles que plusieurs treillis fournissent une valeur de l'indicateur de volume très semblable. Ceci est illustré ci-dessous ( $l_{inf}$  est la longueur des éléments inférieurs) :



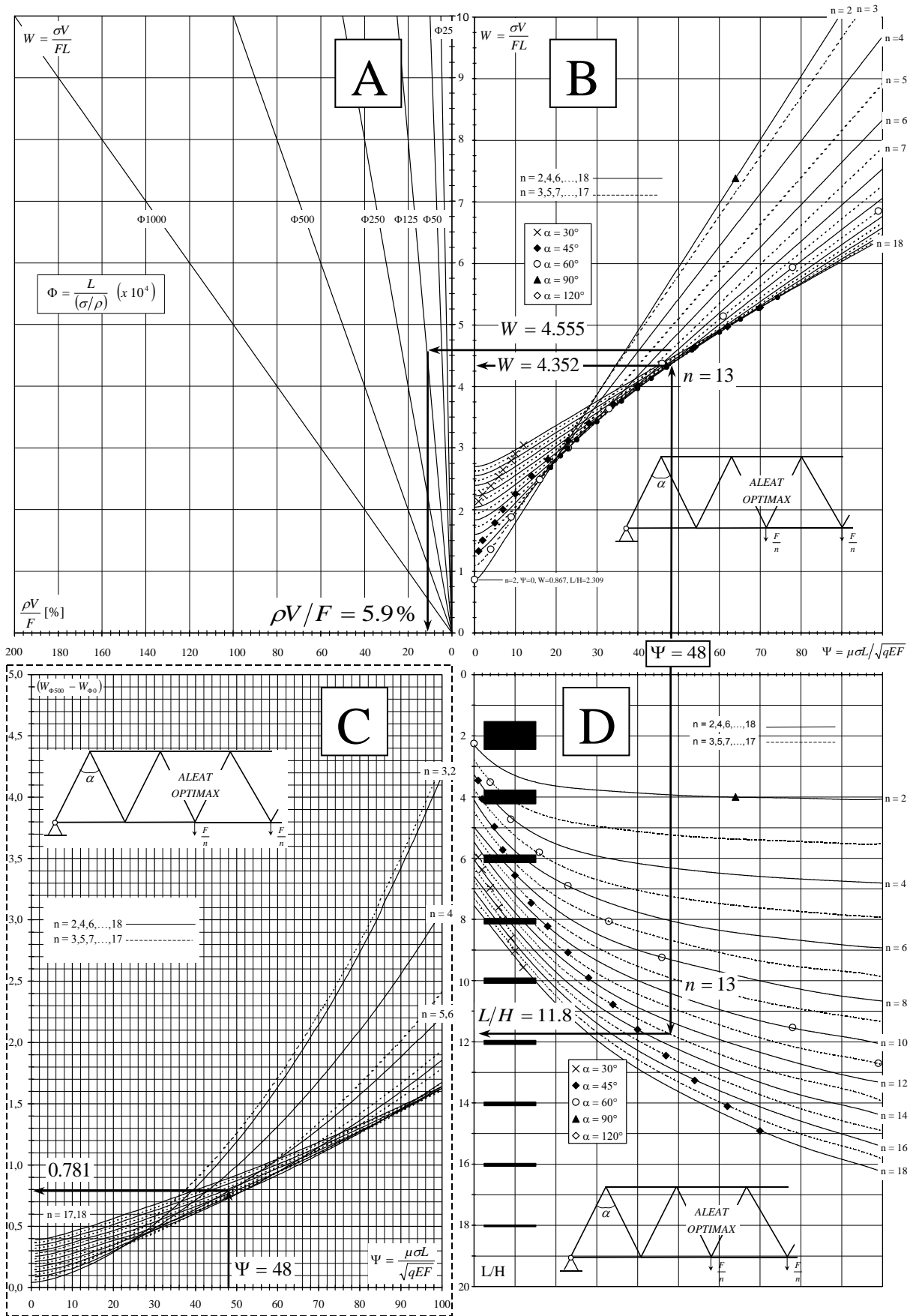


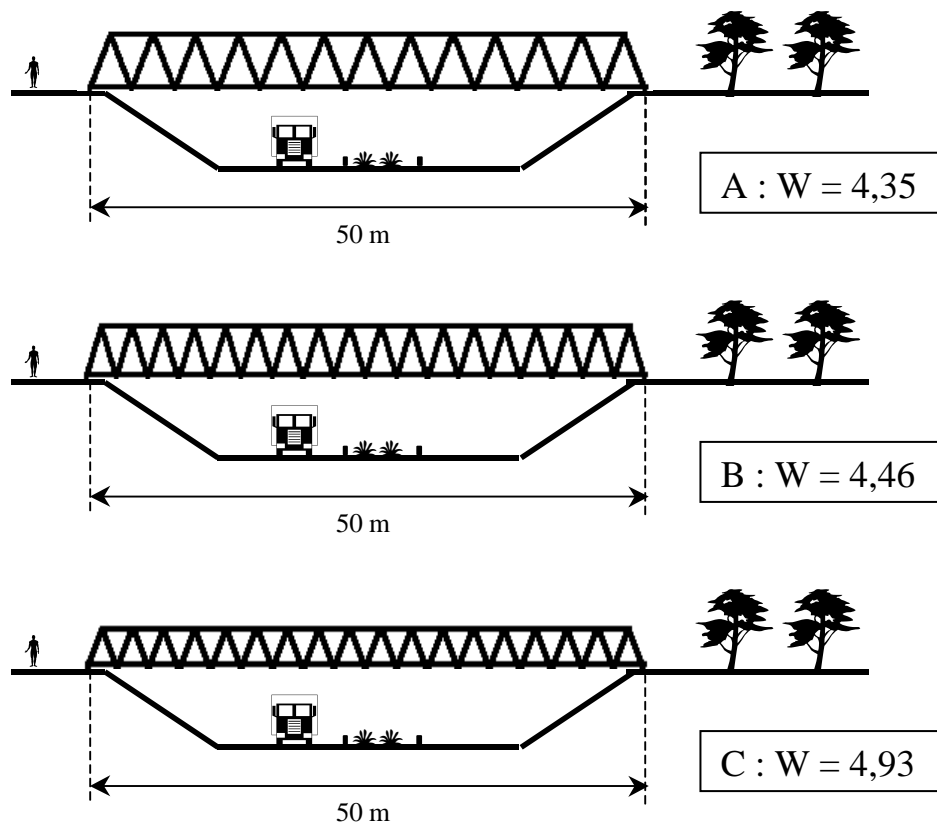
Figure 21 : courbes d'efficiences (B et D) et considération du poids propre (A et C).



Un treillis à faible nombre de mailles augmente la longueur des éléments inférieurs chargés de reporter les charges distribuées aux nœuds, et inversement pour les treillis à grand nombre de mailles. D'autre part, un grand nombre de mailles implique davantage d'assemblages, ce qui peut être un inconvénient. Par ailleurs, les treillis à grand nombre de mailles sont toujours plus élancés, ce qui peut avoir un intérêt dans certaines situations.

Comme on le voit, il n'y a pas de solution unique à ce problème et le choix se fera au cas par cas, en fonction de contraintes liées à la structure du tablier, au type de matériau choisi ou à la main-d'œuvre disponible et à son prix.

Une autre contrainte dans le choix de la structure pourrait consister à imposer l'élancement  $L/H$  du treillis, par exemple pour des raisons architecturales. La figure 22 illustre quelques situations.



**Figure 22 :** la solution optimale à 13 mailles (A) comparée à la solution optimale à 18 mailles (B) ainsi qu'à une solution non optimale à 18 mailles (C), où l'élancement  $L/H$  est imposé à 20 et qui induit une augmentation de poids propre de 13%.

## 10. QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LES ELEMENTS REPORTANT LES CHARGES SUR LES NŒUDS

Il fut plusieurs fois mentionné précédemment que les treillis ne peuvent être rigoureusement comparés que si l'on prend en compte la façon dont les charges distribuées sont reportées aux nœuds. Dans le cas de la passerelle étudiée dans l'exemple précédent, le tablier peut reposer directement sur les membrures inférieures de chacun des deux treillis, et les solliciter en flexion. Si le nombre de mailles est suffisamment élevé pour que leur longueur soit inférieure à la largeur de la passerelle, il peut être intéressant d'envisager un premier réseau de  $(n+1)$  éléments joignant les nœuds en vis-à-vis de chaque membrure inférieure, ces éléments étant alors chargés de reprendre le tablier, qui comporte alors  $(n+1)$  appuis et se décompose en  $n$  poutres de longueur  $L/n$ . Dans cette dernière situation les membrures des treillis ne sont pas sollicitées en flexion puisque les charges s'appliquent directement aux nœuds par l'intermédiaire de ces éléments transversaux sur lesquels reposent le tablier. Quel que soit le cas de figure, il convient d'évaluer le volume de matière de  $n$  poutres supposées isostatiques soumises à flexion<sup>3</sup>.

Soit donc une poutre isostatique de section  $\Omega$ , d'inertie  $I$ , de hauteur  $h$  dans le plan de flexion, de longueur  $L/n$  et soumise à une charge répartie valant  $F/n$ .

La contrainte maximale, atteinte à mi-travée, vaut :

$$\sigma = \frac{\left(\frac{(F/n)(L/n)}{8}\right) \frac{h}{2}}{I} = FL \frac{1}{n^2} \frac{h}{16I}$$

Si on multiplie numérateur et dénominateur par  $\Omega h L$ , on obtient :

$$\sigma = FL \frac{1}{n^2} \frac{\Omega h^2}{16I} \frac{L}{h} \frac{1}{\Omega L}$$

Or,  $\Omega L$  représente le volume total  $V_m$  de ces " $n$ " poutres soumises à flexion, et l'expression précédente peut se réécrire :

$$\frac{\sigma V_m}{FL} = \frac{1}{n} \left(\frac{\Omega h^2}{16I}\right) \frac{(L/n)}{h}$$

Le nombre sans dimensions  $Z = \Omega h^2 / 16I$  est une caractéristique de la section. Il vaut 0,75 pour une section carrée ou rectangulaire pleine, comme c'est le cas si le tablier est en béton armé ou en bois. La figure 23 reprend les valeurs de  $Z$  pour les sections carrées, rectangulaires, et circulaires pleines ou creuses. Par ailleurs, le facteur  $(L/n)/h$  représente l'élanement géométrique d'un élément de poutre soumise à flexion. Finalement, l'indicateur de volume  $W_m$  associé à l'ensemble de ces éléments peut s'exprimer comme suit :

$$W_m = \frac{Z}{n} \frac{(L/n)}{h}$$

<sup>3</sup> Selon le cas de figure, le tablier, s'il est continu, peut être considéré comme une poutre hyperstatique sur  $(n + 1)$  appuis.

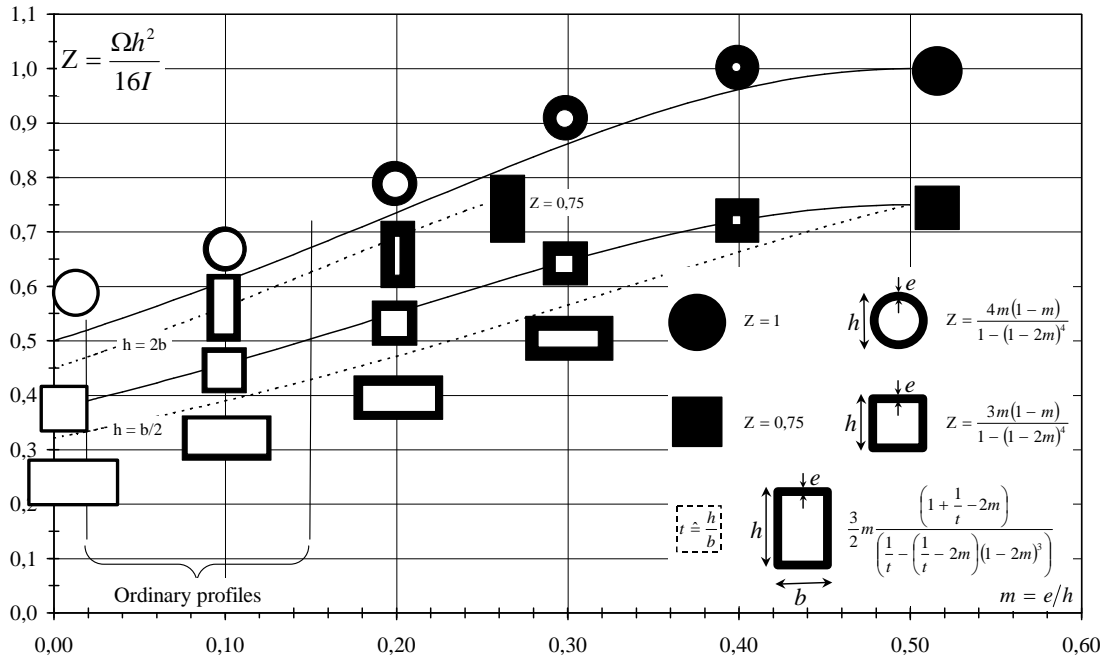


Figure 23 : valeurs du facteur de forme Z pour les sections classiques.

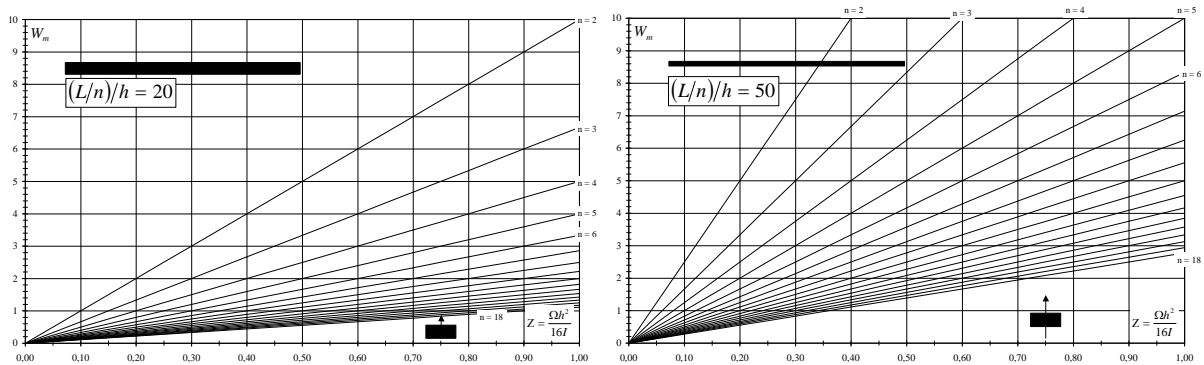
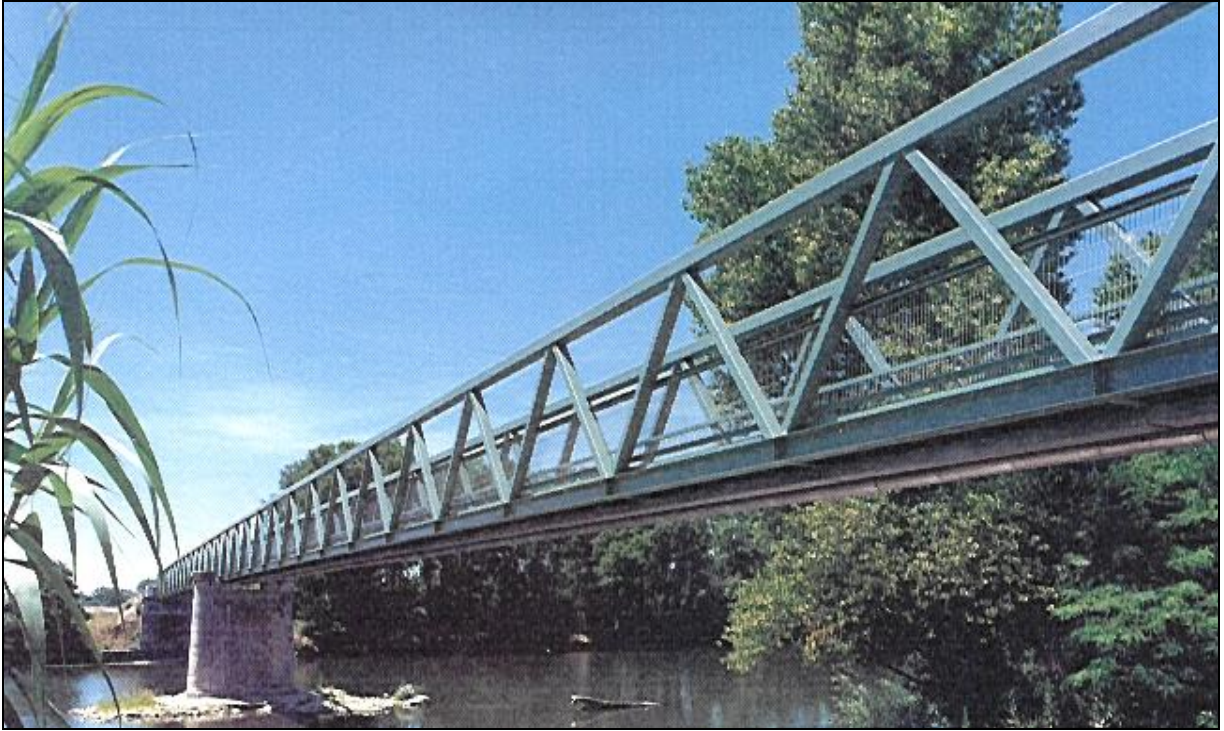


Figure 24 : indicateur de volume d'un élément de tablier de longueur  $L/n$  et d'épaisseur  $h$ .

Les valeurs de  $W_m$  sont données à la figure 24 pour  $n = 2..18$  et pour deux valeurs caractéristiques de l'élanement géométrique  $L/nh$ .

Lors d'un calcul pratique, il faudra donc choisir le type de treillis et son nombre de mailles non seulement en fonction des courbes d'efficacité, mais aussi en fonction des courbes de la figure 24 qui expriment l'impact de la solution choisie sur le gabarit du tablier ou des éléments nécessaires à son support. Il est évident que d'autres facteurs (disponibilité des profils, main d'œuvre,...) viendront compliquer ce choix final.





# *Chapitre 2*

*Etude et comparaison  
du volume des treillis  
classiques*

*Photo de première page : Passerelle de Moussac sur le Gardon, en France.  
Source : Bulletin ponts métalliques, n°14, Otua, Paris.*

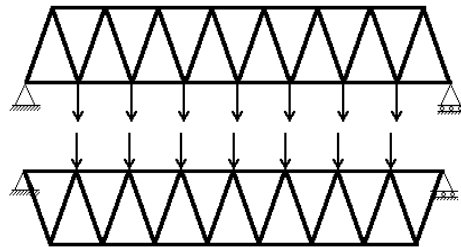
## Préambule

Ce chapitre 2 concerne l'étude et l'optimisation du volume des treillis classiques de type Warren, Pratt et Howe. Ces treillis sont considérés comme totalement isostatiques et on considère que les charges agissent toujours au niveau de la ligne définie par les appuis.

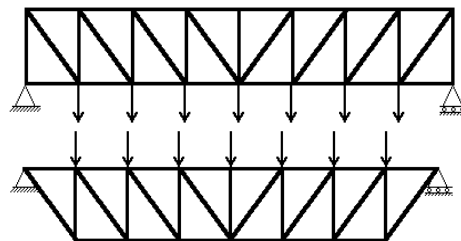
Pour les 3 types de treillis, 8 cas différents sont envisagés. Chacun de ces cas se distingue par le type de charge qu'il doit reprendre (distribuée ou aléatoire), par le type d'optimisation (individuelle ou par catégories) et par la configuration du treillis, qui peut être défini au dessus ou en dessous de la ligne formée par les appuis.

Six configurations sont considérées :

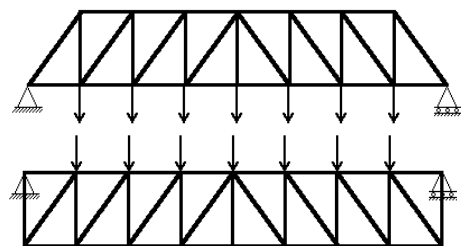
- le treillis Warren situé au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis :



- le treillis Pratt situé au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis :



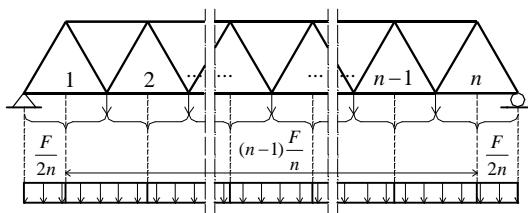
- le treillis Howe situé au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis :



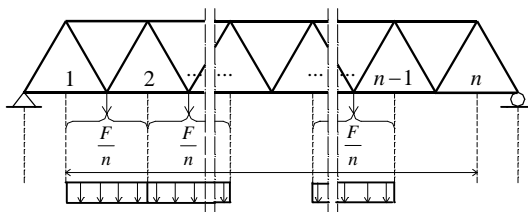
### *Type de chargement :*

Soit "n" le nombre de mailles du treillis et "F" la charge totale extérieure. De façon générale, deux types de charge seront considérés :

- la charge extérieure totale F répartie sur chaque nœud en efforts ponctuels de valeur  $F/n$ , prenant une valeur  $F/2n$  sur chaque appui :



- la charge extérieure totale  $F$  répartie sur chaque nœud de façon aléatoire, pouvant créer une combinaison quelconque d'efforts ponctuels de valeur  $F/n$  sur les nœuds.



**Catégories de barres :**

Pour les six configurations de treillis considérées chacune avec les deux types de charges (répartie ou aléatoire), deux séries d'optimisations sont envisagées :

- Une optimisation individuelle des barres fournissant un treillis optimal dont toutes les barres sont donc différentes.
- Une optimisation par catégories de barres identiques. Quatre catégories de barres sont traitées dans chaque cas :

*Treillis Pratt et Howe* : verticales, diagonales, éléments inférieurs, éléments supérieurs.

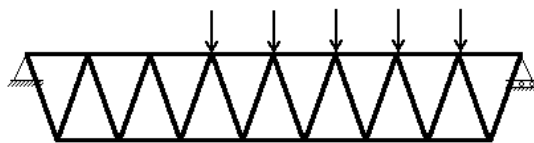
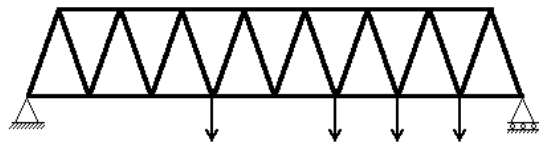
*Treillis Warren* : 2 types de diagonales, éléments inférieurs, éléments supérieurs.

**Au total, 24 cas différents sont donc étudiés dans ce chapitre 2.** Celui-ci comporte d'abord 3 parties (notées I, II, III) relatives aux 3 types de treillis. La partie IV consiste en une synthèse des trois premières parties.



# Partie I

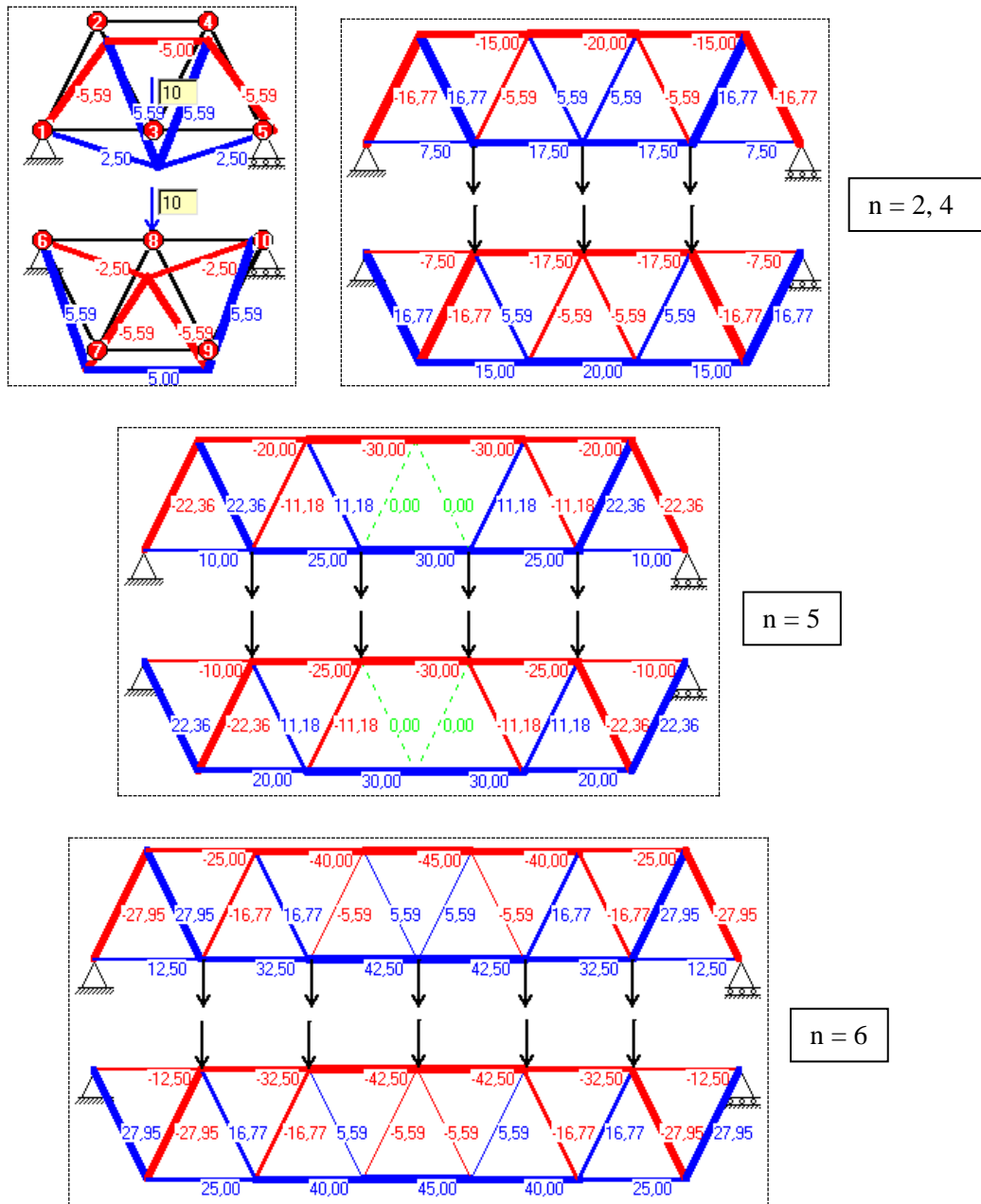
## Les treillis Warren





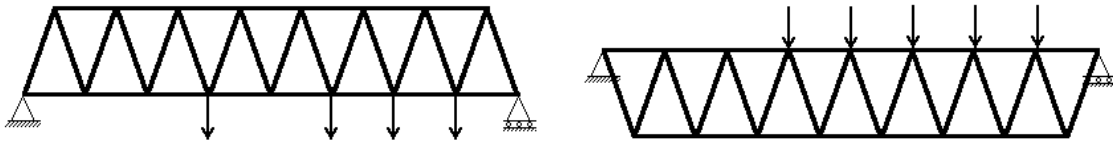
## I.1. AVANT PROPOS

*Avertissement : la présente synthèse tente de résumer plus de 100 figures relatives aux treillis Warren et reprises en annexe 1. Afin de réduire la lourdeur de ce texte, seules les figures les plus significatives y sont intégrées.*



**Figure I.1 :** répartition des efforts dans les poutres Warren, soumises à des charges ponctuelles de 10 kN sur les nœuds de la membrure joignant les appuis ( $F/n = 10$  kN).

De façon générale, l'étude porte donc sur les treillis Warren situés respectivement au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis, et les charges agissent toujours au niveau de celle-ci :



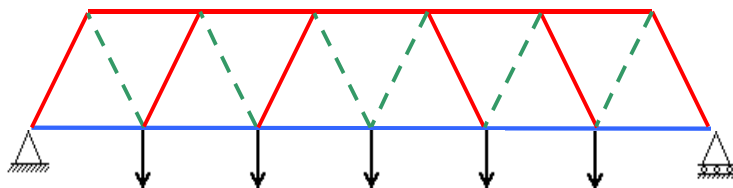
le symbole utilisé pour désigner un treillis situé au dessus des appuis est *Norm* tandis celui désignant le treillis situé en dessous de la ligne définie par les appuis est *Sous*.

Dans chacun des deux cas, on distingue :

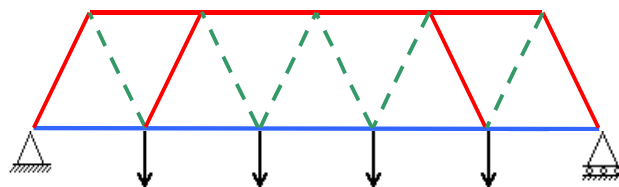
- la charge uniformément distribuée (symbole *Distr*) ou la charge aléatoire (symbole *Aleat*);
- le cas relatif à des barres optimisées de façon individuelle (symbole *Optimax*) ou celui relatif à 4 catégories de barres identiques (symbole *Cat*);

La figure I.1 montre la répartition des efforts dans les treillis Warren à 2, 4, 5 et 6 mailles respectivement, lorsque les treillis sont situés au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis. Chaque nœud chargé est le siège d'un effort valant  $F/n$  qui vaut, dans ce cas précis, 10 kN.

Dans la situation relative à des treillis composés de catégories de barres (*Cat*), on distingue les éléments supérieurs, les éléments inférieurs et deux types d'éléments diagonaux comme illustré à la figure ci-dessous :



Globalement, on distingue donc les éléments diagonaux qui sont en compression (C) ou en traction (T) lorsque la charge est répartie. Dans le cas du treillis chargé de façon uniforme (*Distr*), situé au dessus des appuis (*Norm*) et à nombre impair de mailles, les éléments diagonaux centraux sont le siège d'efforts nuls et ont été classés arbitrairement de la catégorie "barres en traction" (T), comme l'illustre la figure suivante :



Catégories de barres considérées, dans le cas *War\_Distr\_Cat\_Norm*, lorsque le nombre de mailles est impair

Au total, 8 cas sont donc analysés, comme illustré à la figure I.2.

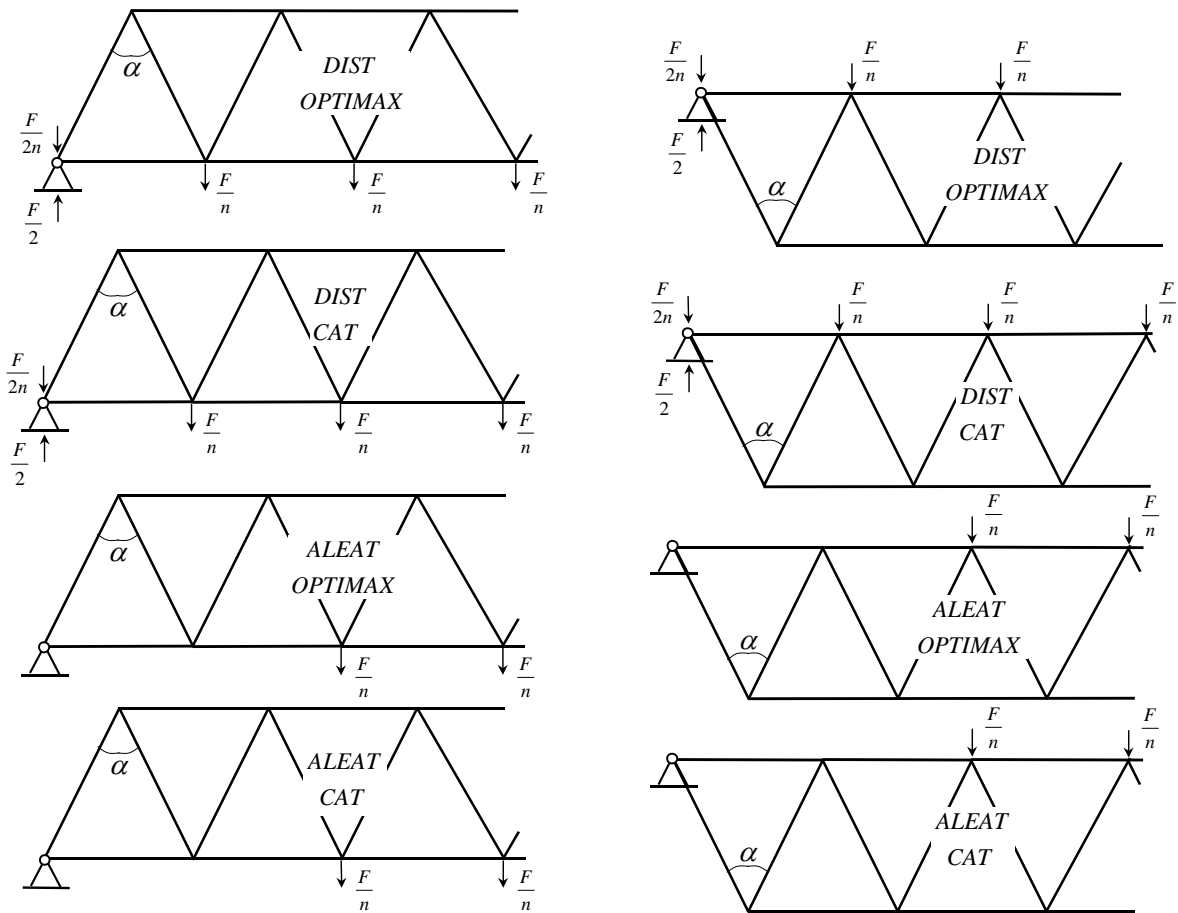


Figure I.2 : les 8 situations étudiées.

## I.2. CONSIDERATIONS GENERALES ET PREMIERES DEDUCTIONS

Les courbes d'efficience relatives aux 8 cas de treillis Warren situés au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis (*Norm*), ainsi que leurs enveloppes pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$ , sont données aux figures suivantes :

- Figures I.17 et I.18 : *Dist\_Optimax\_Norm*
- Figures I.19 et I.20 : *Dist\_Cat\_Norm*
- Figures I.21 et I.22 : *Aleat\_Optimax\_Norm*
- Figures I.23 et I.24 : *Aleat\_Cat\_Norm*
  
- Figures I.25 et I.26 : *Dist\_Optimax\_Sous*
- Figures I.27 et I.28 : *Dist\_Cat\_Sous*
- Figures I.29 et I.30 : *Aleat\_Optimax\_Sous*
- Figures I.31 et I.32 : *Aleat\_Cat\_Sous*

A	B
C	D

Chacune de ces figures est composée de 4 sous figures notées A, B, C et D comme l'illustre le schéma ci-dessus à droite.

Quel que soit le type de treillis, qu'il soit Warren, Pratt ou Howe, ou le cas de figure, les courbes d'efficience ont toutes une allure semblable à celle de la figure I.3. Elles mettent en évidence certaines règles de comportement valables dans tous les cas, et énoncées ci-après, en prenant comme référence le cas de figure *War\_Distr\_Optimax\_Norm*.

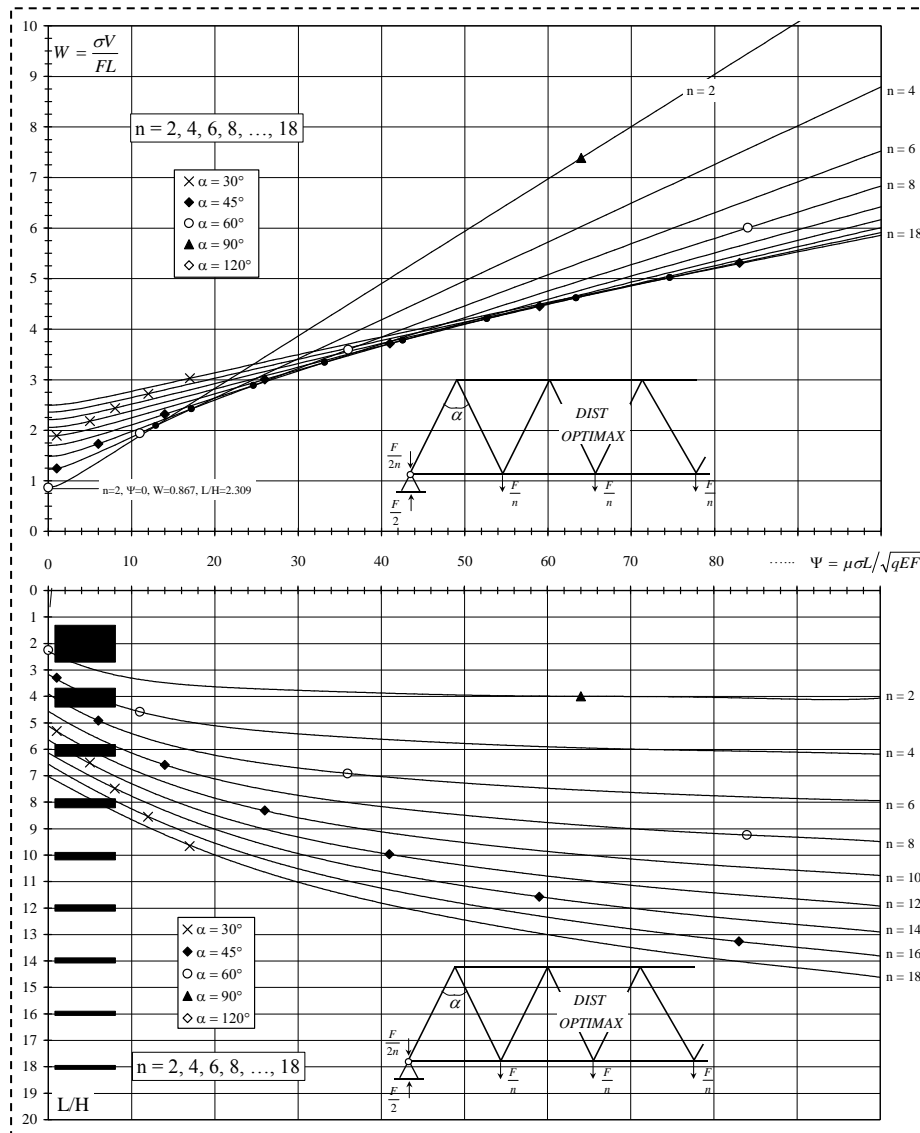
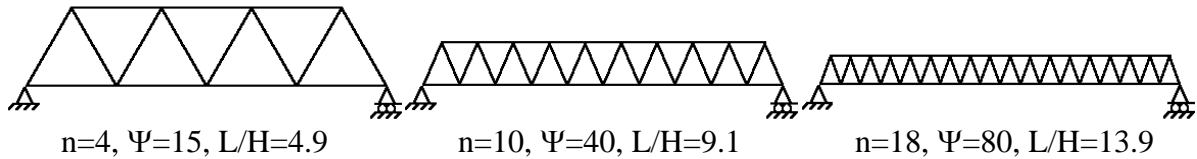


Figure I.3 : courbes d'efficace relatives au cas *Distr\_Optimax\_Norm*, pour les nombres pairs de mailles. Ces figures ont un axe des abscisses commun et sont à lire en vis-à-vis.

**Constatation n°1 :**

- Plus l'indicateur de flambement  $\Psi$  est grand, plus le volume minimum s'obtient pour un treillis à grand nombre de mailles.
- Plus le nombre de mailles est élevé, plus l'élancement  $L/H$  du treillis doit être grand.

Ces deux constatations peuvent s'exprimer par les figures suivantes, qui correspondent à des cas optimaux (*War\_Distr\_Optimax\_Norm*) :



**Constatation n°2 :**

- Globalement, les courbes d'efficience sont sensiblement linéaires, quel que soit le nombre de mailles. Leur expression analytique est la suivante :

$$W = W_0 + b\Psi$$

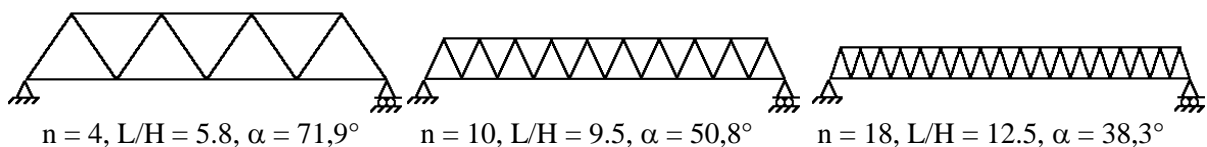
L'ordonnée à l'origine " $W_0$ " représente l'indicateur de volume du treillis dont toutes les barres sont dimensionnées à la même contrainte  $\sigma$ ; Le paramètre " $b\Psi$ " représente le surplus de matière à mettre en œuvre pour éviter les phénomènes de flambement.

- Plus le nombre de mailles est élevé, moins le volume de matière en compression est important par rapport au volume de matière en traction;

La dernière constatation va de soi, puisqu'à même portée un grand nombre de mailles diminue la longueur de flambement moyenne des barres en compression, et donc leur section.

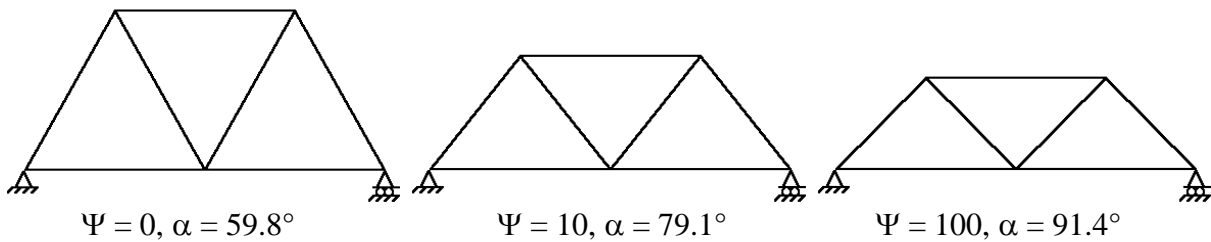
**Constatation n°3 :**

- A même valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  (pour les trois cas *Distr\_optimax\_Norm* ci-dessous,  $\Psi=50$ ), plus le treillis possède de mailles, plus l'angle  $\alpha$  d'ouverture de ces mailles doit être petit. Autrement dit, un treillis possédant un grand nombre de mailles aura de mailles plus "aiguës".



**Constatation n°4 :**

- Pour un même nombre de mailles, plus l'indicateur de flambement  $\Psi$  est grand, plus l'angle d'ouverture des mailles doit être grand, ce qui correspond aussi à un treillis plus élancé.



Au delà des constatations précédentes valables également pour les autres types de treillis, un certain nombre de résultats propres aux treillis Warren découlent des calculs numériques. Ces résultats sont repris ci-après.

### I.3. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS ETUDIÉS

La figure I.4 reprend les 8 courbes enveloppes pour  $\Phi = 0$  (poids propre négligé). Il est essentiel de d'abord remarquer que, dans le cas des treillis situés au dessus des appuis et constitués de catégories de barres identiques (*Distr\_Cat\_Norm* et *Aleat\_Cat\_Norm*), **plus de la moitié des courbes enveloppes sont relatives aux treillis à 3 et/ou 2 mailles**. Dans ces zones, il faut donc prendre ces courbes avec réserves. En effet, un treillis à petit nombre de mailles impose de longues portées aux éléments du tablier qui doivent reporter les charges distribuées aux nœuds. Dans la pratique, il sera donc souvent préférable de choisir des treillis à nombre de mailles plus élevé. Chacune des courbes enveloppes relatives à ces 2 cas est donc en réalité plus convexe dans sa partie gauche.

L'analyse ci-dessous est une comparaison des treillis Warren sur base de différents critères. D'abord, une analyse quantitative de la différence de volume entre un treillis *Norm* et le treillis *Sous* correspondant est développée. Ensuite, on s'intéresse au surplus de volume nécessaire à reprendre une charge aléatoire par rapport à celui qui correspond à la charge répartie. Enfin, une comparaison est effectuée entre les treillis constitués de barres optimisées individuellement et ces mêmes treillis composés de catégories de barres.

#### I.3.1. Comparaison des treillis *Norm* et *Sous* :

Les treillis Warren situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*) sont toujours **PLUS LEGERS** que les treillis Warren situés en dessous des appuis (*Sous*), et ceci dans les 8 cas de figure :

$$W_{\text{Norm}} < W_{\text{Sous}}$$

La propriété précédente est illustrée par les figures I.4, I.5 et en annexe 1 aux pages *Synthèse\_Warren.4* et *5* qui reprennent les valeurs de l'indicateur de volume  $W$  pour chaque nombre de mailles  $n$  dans les 8 cas de figure.

La différence entre les deux cas varie selon que les charges sont distribuées (*Distr*) ou aléatoires (*Aleat*) ou que les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*) ou par catégories (*Cat*). La figure I.5 illustre cette différence dans ces 4 cas, pour 6 et 18 mailles. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (pages *Synthèse\_Warren.8* et *9*).

Ces figures montrent que la différence entre les 2 cas devient insignifiante dès que le nombre de mailles augmente.



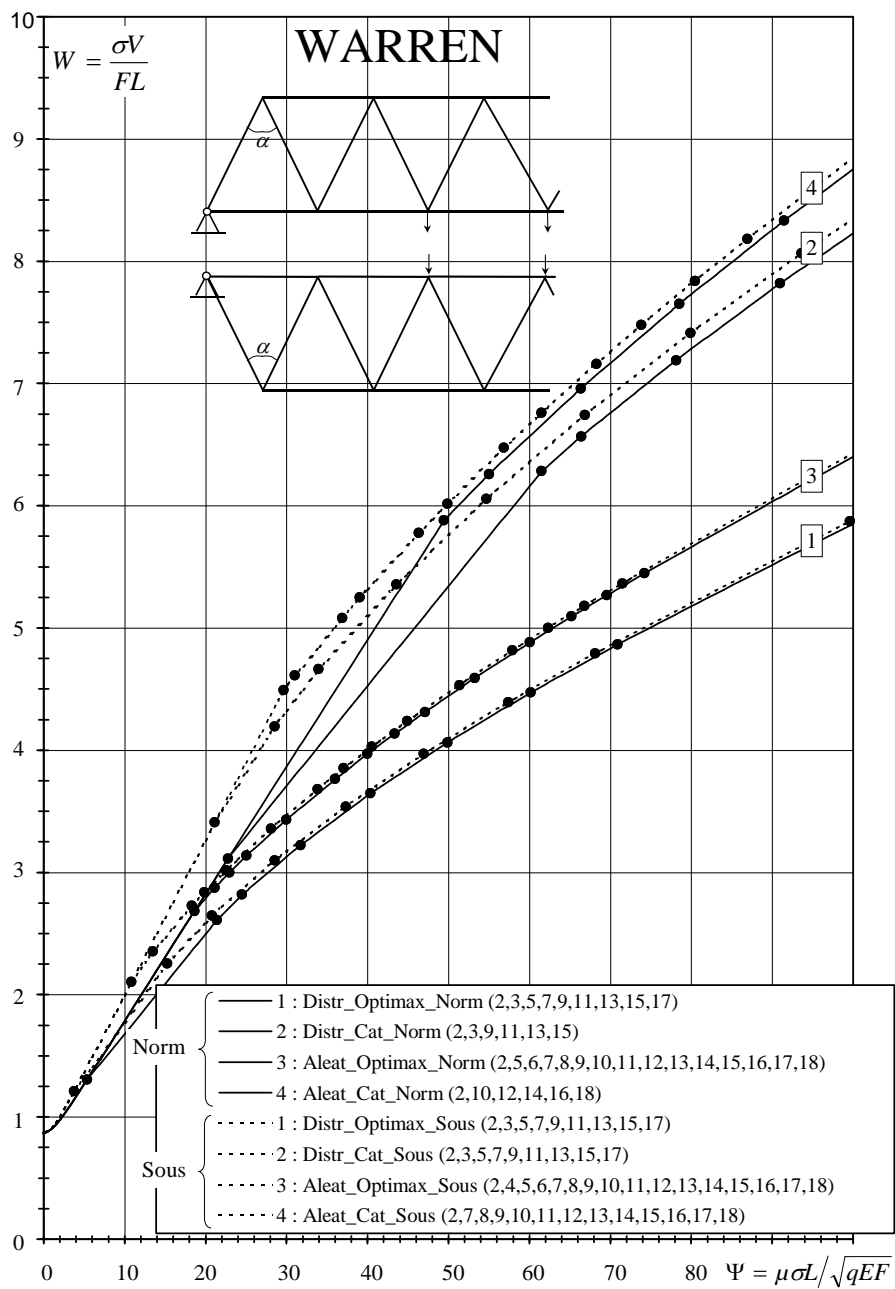


Figure I.4 : indicateur de volume dans les 8 cas de figure de la poutre Warren ( $\Phi = 0$ ). Les courbes en pointillés correspondent au treillis "Sous".

### I.3.2. Influence de la charge aléatoire :

Il est intéressant de s'attarder sur le volume de matière supplémentaire à mettre en œuvre lorsque la charge est aléatoire (*Aleat*) plutôt que distribuée de façon uniforme (*Distr*). Pour les treillis constitués de catégories de barres (*Cat*), ce surplus ne devient non-nul que pour des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  comprises entre 20 et 50, selon le nombre de mailles.

- Dans tous les cas, le surplus de matière à mettre en œuvre lorsqu'une charge aléatoire est considérée n'excède pas 10%.

Ceci est illustré à la figure I.6 pour  $n = 6$  et  $n = 18$ . Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (pages Synthèse\_Warren.10 et 11).

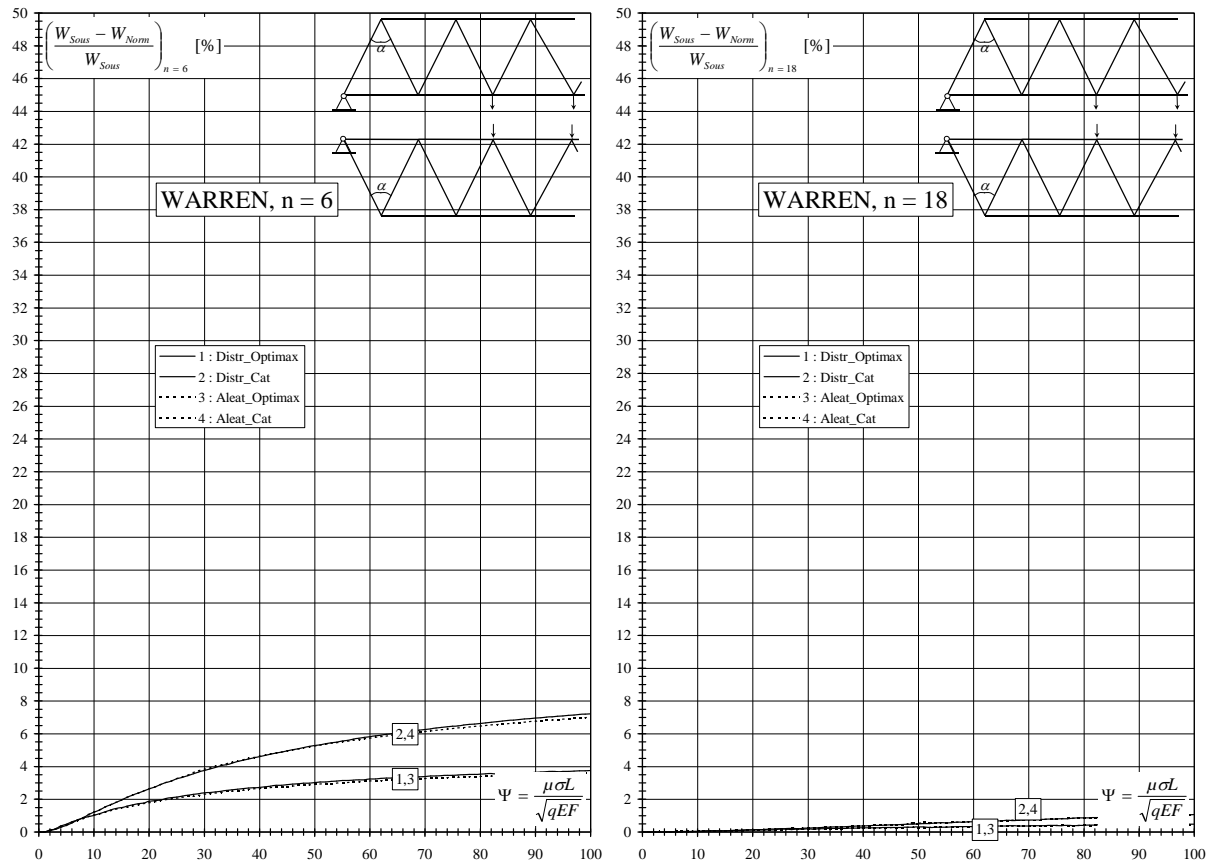
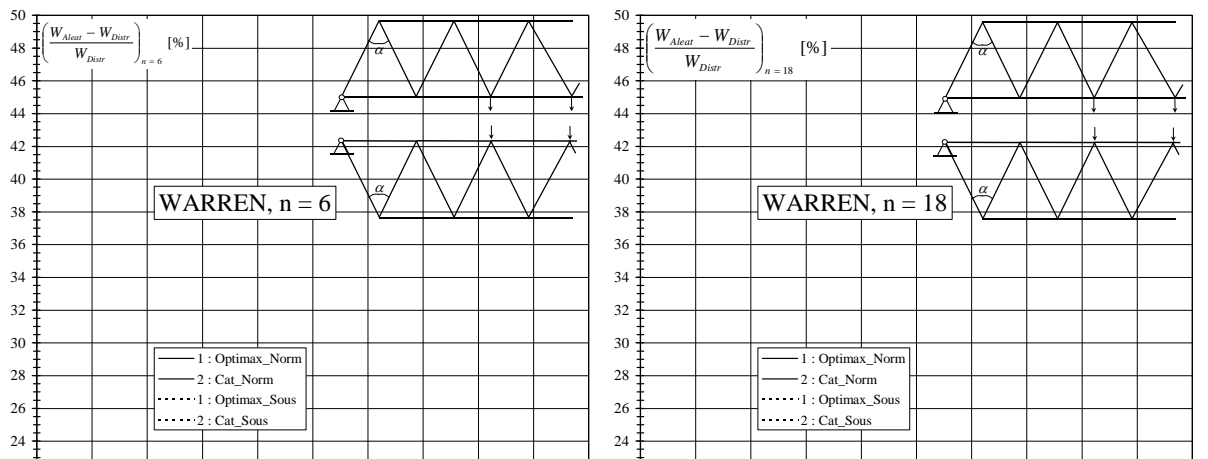


Figure I.5 : valeurs du gain  $(W_{Sous} - W_{Norm})/W_{Sous}$  en indicateur de volume obtenu par le choix de treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (Norm), pour 6 et 18 mailles respectivement.

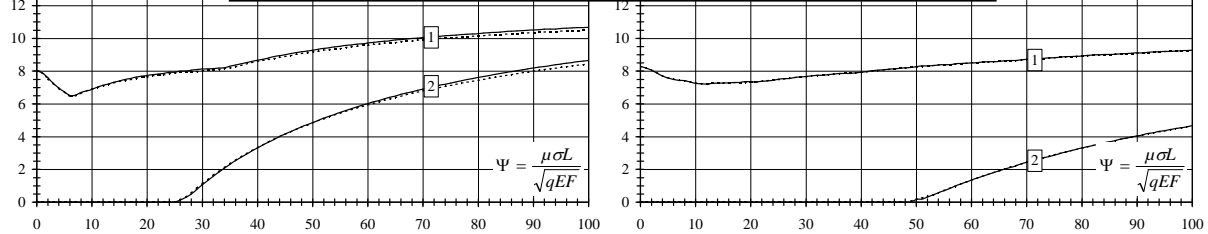
### I.3.3. Optimisation individuelle ou par catégories de barres :

Le gain en volume apporté par une optimisation individuelle des barres (*optimax*), en comparaison avec une optimisation par catégories de barres identiques (*Cat*) varie de **20 à 40 %** selon la configuration, le nombre de mailles ou les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .

Ceci est illustré à la figure I.7 ci-dessous pour  $n=6$  et  $n=18$  respectivement. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 aux figures Synthèse\_Warren.6 et 7.

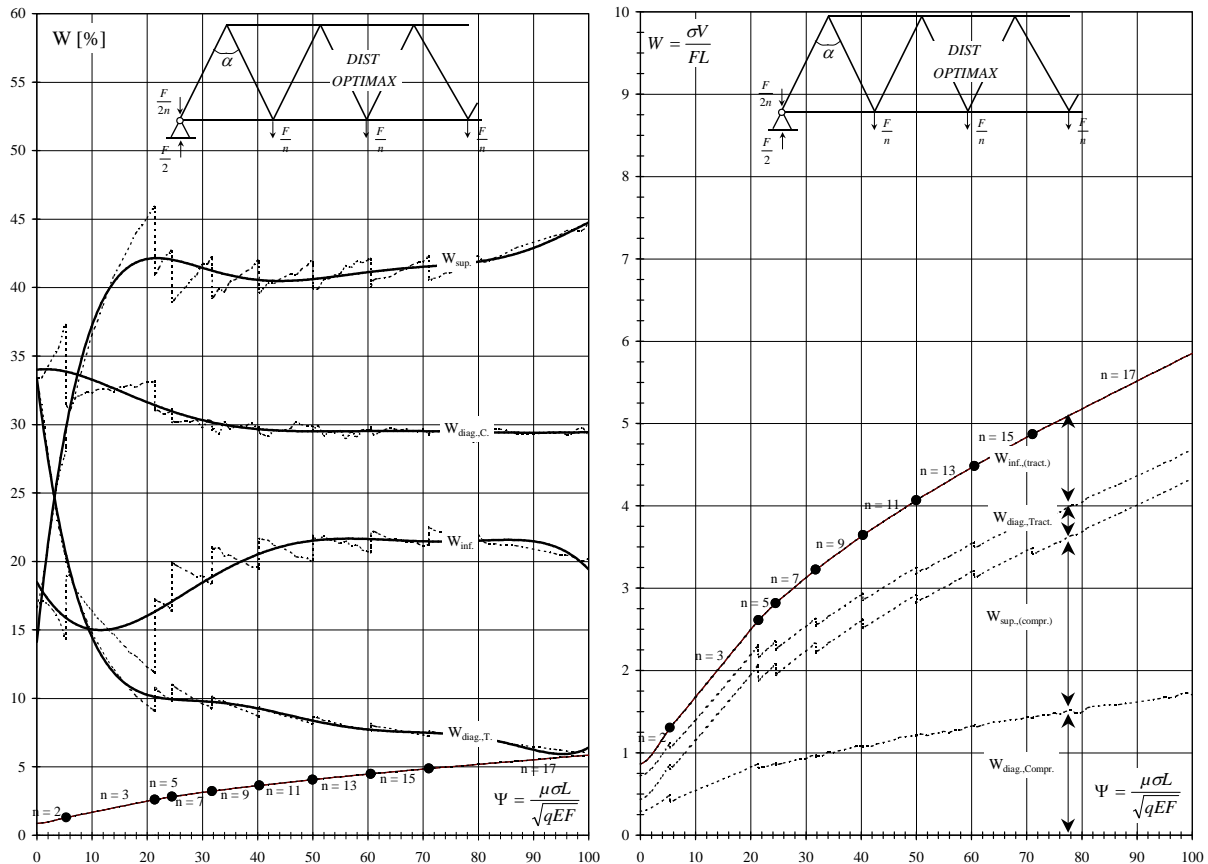


**Figure 1.6 :** valeurs du surplus  $(W_{Aleat} - W_{Distr})/W_{Distr}$  d'indicateur de volume imposé par la charge aléatoire (*Aleat*), pour 6 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis *Sous*.



**Figure 1.7 :** valeurs du gain  $(W_{Cat} - W_{Opti\ max})/W_{Cat}$  d'indicateur de volume obtenu suite à une optimisation individuelle des barres (*Optimax*), pour 6 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis *Sous*.

**I.3.4. Indicateur de volume par groupes de barres :**



**Figure I.8 :** parts d'indicateur de volume par groupes de barres pour le cas *Dist\_Optimax\_Norm*.

On considère ici les courbes enveloppes des courbes d'efficacité constituées de morceaux de courbes relatifs à des nombres de mailles différents, c'est à dire l'ensemble des treillis optimaux. Pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ , ces courbes enveloppes correspondent toujours à 2 mailles et le comportement des treillis est toujours particulier. Pour des nombres de mailles supérieurs à 2, on constate que :

- la membrure supérieure apporte la plus grande part d'indicateur de volume, de l'ordre de **40% à 45%**.
- l'apport des éléments diagonaux (T) de l'ordre de **5 à 15%**.
- l'apport des éléments diagonaux (C) de l'ordre de **30 à 35%**.
- l'apport des éléments inférieurs de l'ordre de **15 à 25%**.

Ces conclusions, illustrées à la figure I.8, sont valables dans les 8 cas de figure relatifs au treillis Warren, comme le montrent les autres figures reprises en annexe 1 (figures War\*.6 et .7, l'astérisque désignant toutes les combinaisons possibles).

**I.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMAUX**

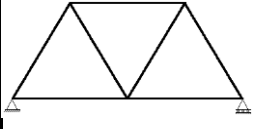
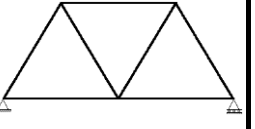
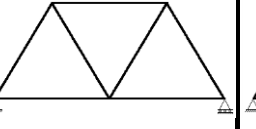
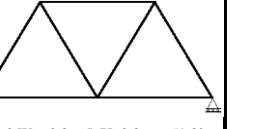
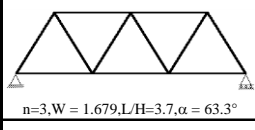
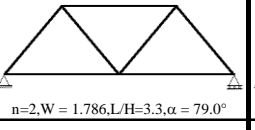
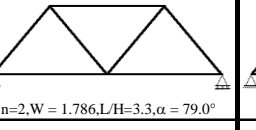
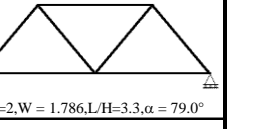
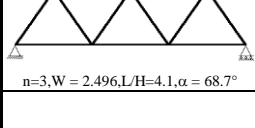
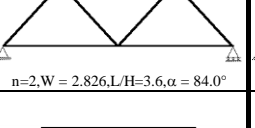
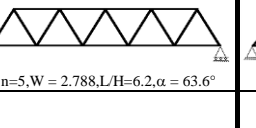
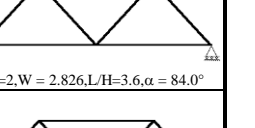
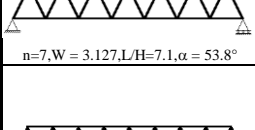
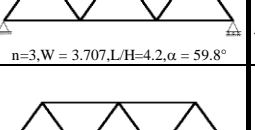
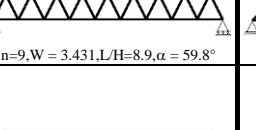
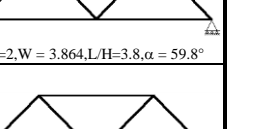
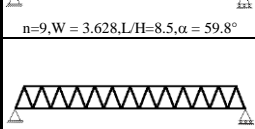
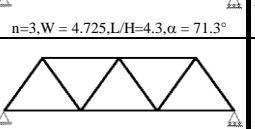
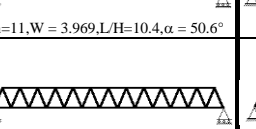
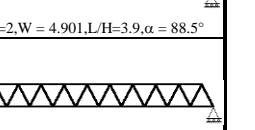
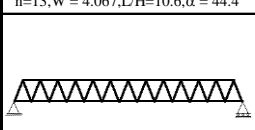
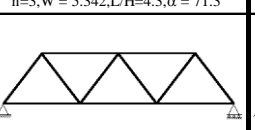
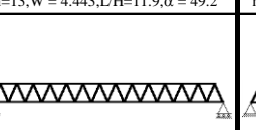
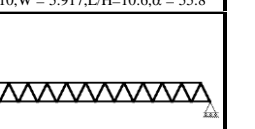
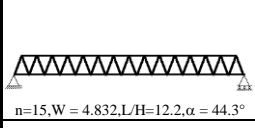
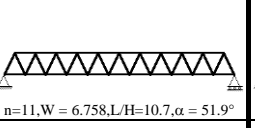
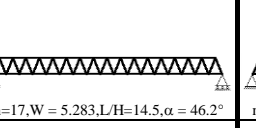
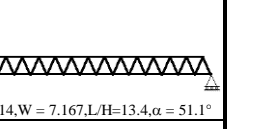
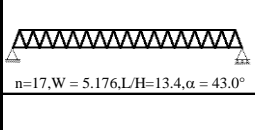
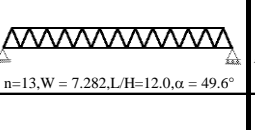
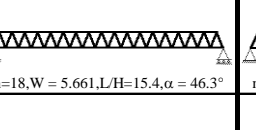
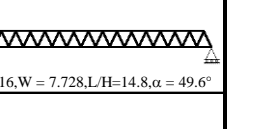
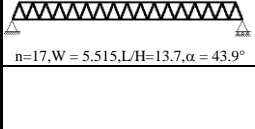
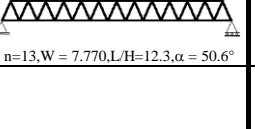
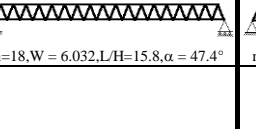
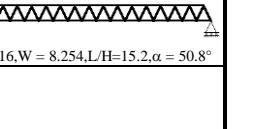
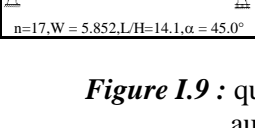
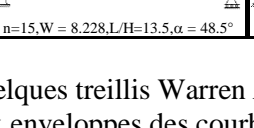
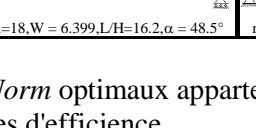
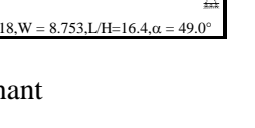

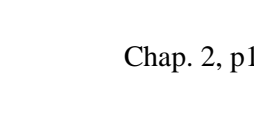


NORM	Distr		Aleat	
	Optimax	Cat	Optimax	Cat
$\Psi = 0$	 $n=2, W = 0.866, L/H=2.3, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=2, W = 0.866, L/H=2.3, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=2, W = 0.866, L/H=2.3, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=2, W = 0.866, L/H=2.3, \alpha = 59.8^\circ$
$\Psi = 10$	 $n=3, W = 1.679, L/H=3.7, \alpha = 63.3^\circ$	 $n=2, W = 1.786, L/H=3.3, \alpha = 79.0^\circ$	 $n=2, W = 1.786, L/H=3.3, \alpha = 79.0^\circ$	 $n=2, W = 1.786, L/H=3.3, \alpha = 79.0^\circ$
$\Psi = 20$	 $n=3, W = 2.496, L/H=4.1, \alpha = 68.7^\circ$	 $n=2, W = 2.826, L/H=3.6, \alpha = 84.0^\circ$	 $n=5, W = 2.788, L/H=6.2, \alpha = 63.6^\circ$	 $n=2, W = 2.826, L/H=3.6, \alpha = 84.0^\circ$
$\Psi = 30$	 $n=7, W = 3.127, L/H=7.1, \alpha = 53.8^\circ$	 $n=3, W = 3.707, L/H=4.2, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=9, W = 3.431, L/H=8.9, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=2, W = 3.864, L/H=3.8, \alpha = 59.8^\circ$
$\Psi = 40$	 $n=9, W = 3.628, L/H=8.5, \alpha = 59.8^\circ$	 $n=3, W = 4.725, L/H=4.3, \alpha = 71.3^\circ$	 $n=11, W = 3.969, L/H=10.4, \alpha = 50.6^\circ$	 $n=2, W = 4.901, L/H=3.9, \alpha = 88.5^\circ$
$\Psi = 50$	 $n=13, W = 4.067, L/H=10.6, \alpha = 44.4^\circ$	 $n=3, W = 5.342, L/H=4.3, \alpha = 71.3^\circ$	 $n=13, W = 4.443, L/H=11.9, \alpha = 49.2^\circ$	 $n=10, W = 5.917, L/H=10.6, \alpha = 55.8^\circ$
$\Psi = 60$	 $n=13, W = 4.465, L/H=11.1, \alpha = 46.2^\circ$	 $n=3, W = 6.157, L/H=4.5, \alpha = 73.7^\circ$	 $n=14, W = 4.879, L/H=12.9, \alpha = 49.5^\circ$	 $n=12, W = 6.567, L/H=12.1, \alpha = 53.5^\circ$
$\Psi = 70$	 $n=15, W = 4.832, L/H=12.2, \alpha = 44.3^\circ$	 $n=11, W = 6.758, L/H=10.7, \alpha = 51.9^\circ$	 $n=17, W = 5.283, L/H=14.5, \alpha = 46.2^\circ$	 $n=14, W = 7.167, L/H=13.4, \alpha = 51.1^\circ$
$\Psi = 80$	 $n=17, W = 5.176, L/H=13.4, \alpha = 43.0^\circ$	 $n=13, W = 7.282, L/H=12.0, \alpha = 49.6^\circ$	 $n=18, W = 5.661, L/H=15.4, \alpha = 46.3^\circ$	 $n=16, W = 7.728, L/H=14.8, \alpha = 49.6^\circ$
$\Psi = 90$	 $n=17, W = 5.515, L/H=13.7, \alpha = 43.9^\circ$	 $n=13, W = 7.770, L/H=12.3, \alpha = 50.6^\circ$	 $n=18, W = 6.032, L/H=15.8, \alpha = 47.4^\circ$	 $n=16, W = 8.254, L/H=15.2, \alpha = 50.8^\circ$
$\Psi = 100$	 $n=17, W = 5.852, L/H=14.1, \alpha = 45.0^\circ$	 $n=15, W = 8.228, L/H=13.5, \alpha = 48.5^\circ$	 $n=18, W = 6.399, L/H=16.2, \alpha = 48.5^\circ$	 $n=18, W = 8.753, L/H=16.4, \alpha = 49.0^\circ$

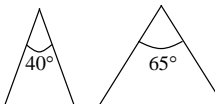
Figure I.9 : quelques treillis Warren Norm optimaux appartenant aux enveloppes des courbes d'efficace.

Les courbes de L/H relatives aux treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficience (reprises en annexe 1 aux figures War\_\*.5, l'astérisque se rapportant aux 8 cas de figure) sont toutes très similaires, sauf pour les 2 cas \*\_Cat\_Norm où elles sont constituées en grande partie de morceaux de courbes relatifs à n=2 et n=3. De façon générale, les treillis optimaux dont le nombre de mailles est compris entre 2 et 18 ont toujours un élanement géométrique compris entre 2 et 17. Cette constatation s'applique d'ailleurs aussi aux treillis Pratt et Howe (cf parties II et III) :

$$2 \leq (L/H)_{opt} \leq 17$$

Par ailleurs, pour les nombres de mailles supérieurs à 3, l'angle d'ouverture des mailles est toujours Compris entre les bornes suivantes :

$40 \leq (\alpha)_{opt} \leq 65^\circ$



Ceci est illustré, entre autres, à la figure I.10 qui montre l'enveloppe des courbes d'efficience de W (figure du dessus) et de L/H et  $\alpha$  (figure du dessous) relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*. Par ailleurs, la figure I.9 montre quelques treillis optimaux relatifs aux treillis situés au dessus des appuis.

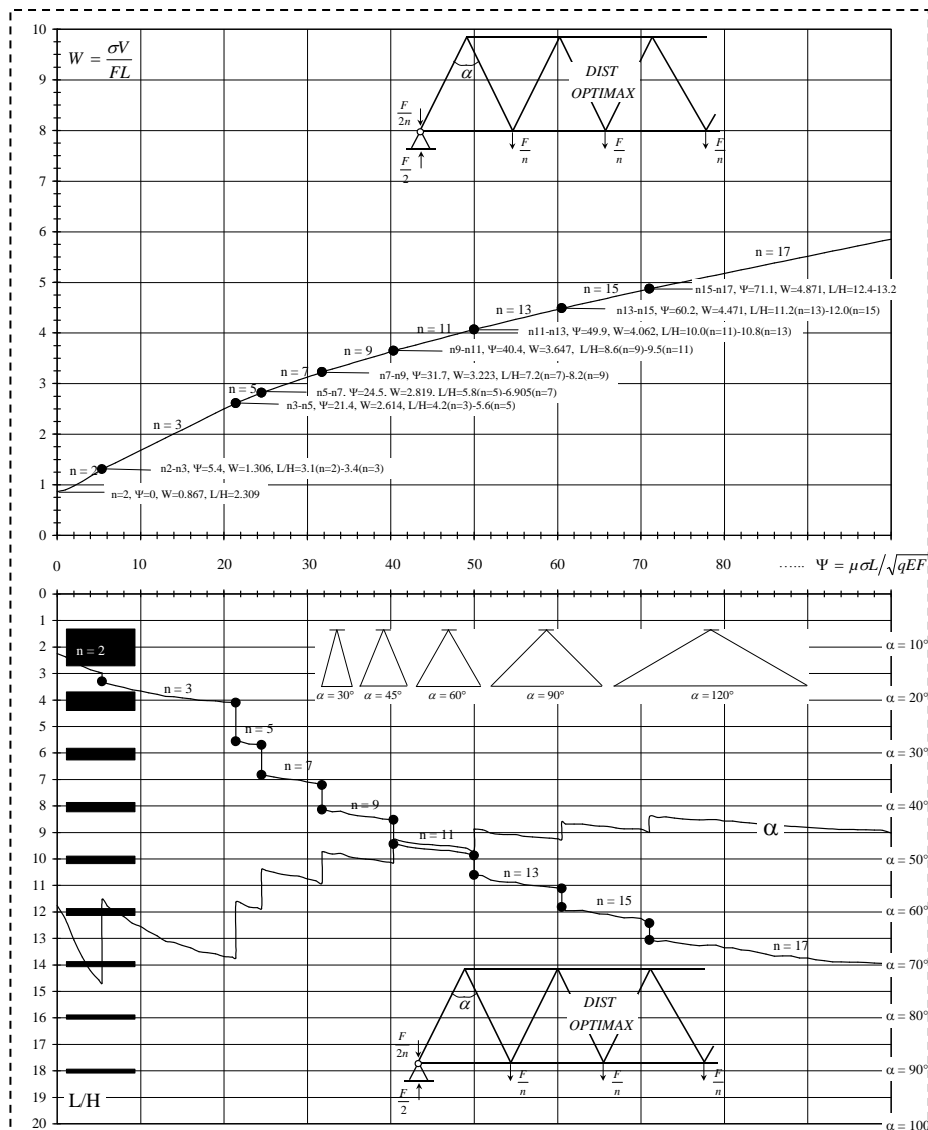
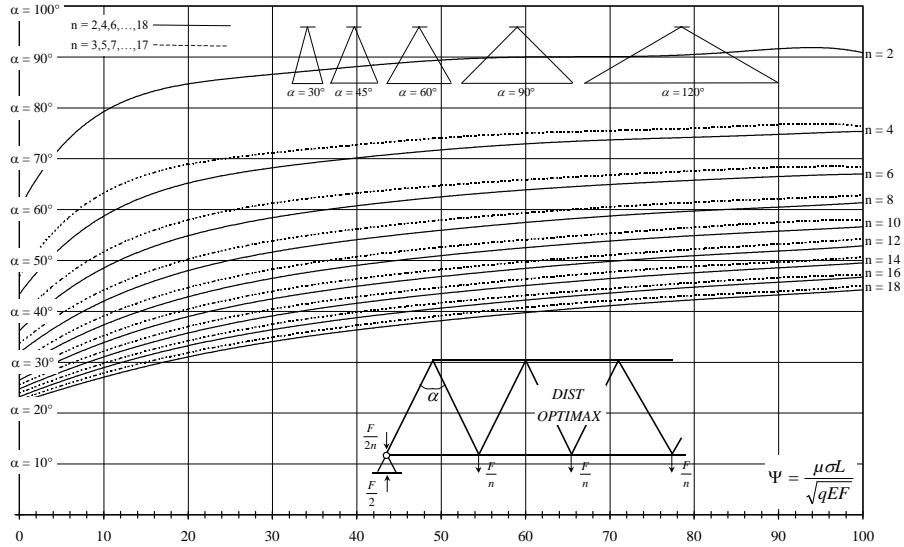
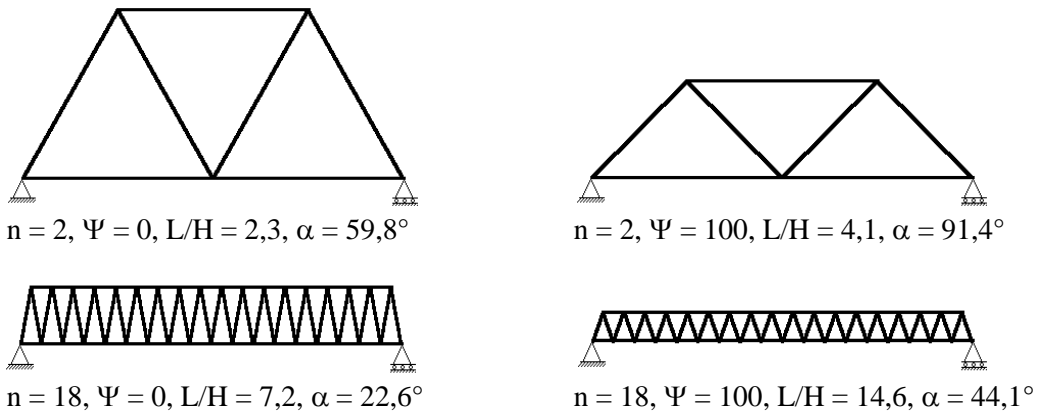


Figure I.10 : Enveloppe des courbes d'efficience relative au cas *Aleat\_Optimax\_Norm*. La figure inférieure comprend les valeurs de l'angle d'ouverture de maille  $\alpha$ , à lire sur l'axe de droite.

La figure I.11 montre, pour ce cas *Distr\_Optimax\_Norm*, les angles d'ouverture de mailles des treillis optimaux pour tous les nombres de mailles compris entre 2 et 18 et sur toute la gamme des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  jusqu'à 100. De façon générale et similaire pour les 7 autres cas, l'angle d'ouverture des mailles doit toujours être compris entre  $20^\circ$  et  $90^\circ$ .



**Figure I.11 :** angles d'ouverture de mailles relatifs aux courbes d'efficace pour  $n=2, 3, 4, 5 \dots 18$  pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

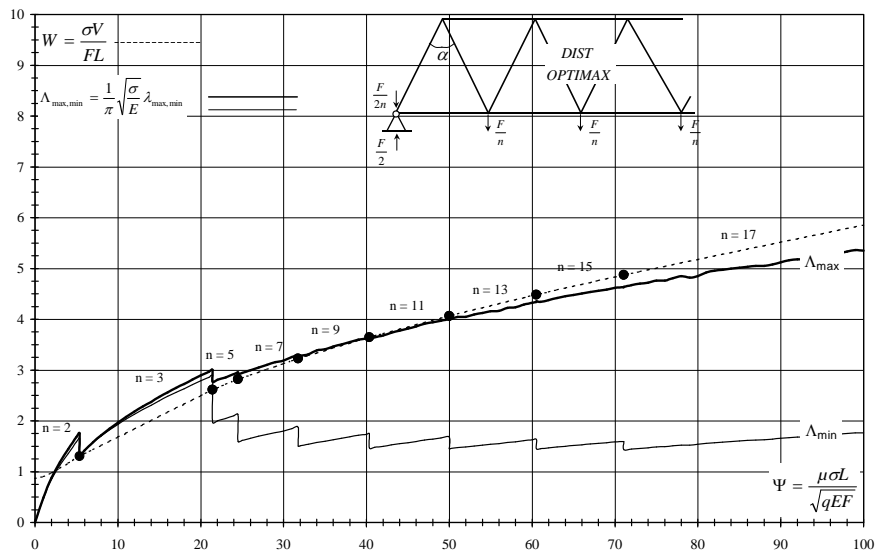


**Figure I.12 :** situations extrêmes (cas *Distr\_Optimax\_Norm*).

La figure I.12 montre les 4 situations extrêmes dans le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

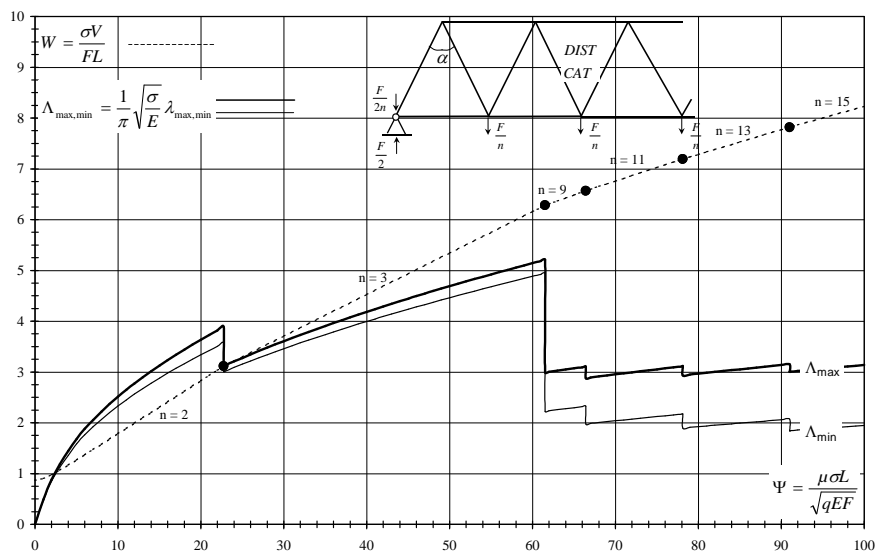
### I.5. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMAUX

Il va de soi que les cas relatifs à une optimisation individuelle des barres et à une charge distribuée invariable sont ceux qui créent les barres les plus élancées. Pour les treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*), les barres en compression les plus élancées sont les diagonales les plus proches du centre du treillis. La figure I.13 représente les valeurs de l'indicateur d'élancement  $\Lambda$  des diagonales en compression les plus élancées pour les treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficace dans le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.



**Figure I.13 :** indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  (courbe en gras) des diagonales les plus élancées relatives aux treillis de l'enveloppe des courbes d'efficacité (cas *Distr\_Optimax\_Norm*).

La figure I.14 montre ces mêmes valeurs pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*. Les courbes relatives aux autres cas sont reprises en annexe 1 et mènent aux mêmes conclusions. Dans le cas d'une optimisation individuelle des barres, on constate que l'indicateur d'élancement dépasse des valeurs de 5 pour  $\Psi \rightarrow 100$ , ce qui est difficilement acceptable. En pratique, Il faudra donc surdimensionner les 2 barres concernées, ce qui ne devrait pas avoir de grande conséquence sur la valeur de l'indicateur de volume et sur les conclusions précédentes. La figure I.14 montre par ailleurs une certaine amélioration, sur ce point de vue, lorsque les treillis sont composés de catégories de barres identiques et que le nombre de mailles est supérieur à 3. L'indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  oscille alors autour de 3. Pour 2 et 3 mailles, la valeur de l'indicateur d'élancement dépasse 3, ce qui est une raison supplémentaire pour choisir, dans cette gamme de valeurs de  $\Psi$ , des treillis à nombre de mailles plus élevé (l'autre raison étant que les treillis à faible nombre de mailles imposent une grande longueur aux éléments du tablier chargés de reporter les charges sur les nœuds).

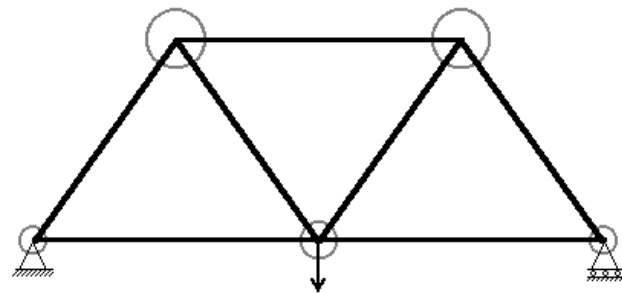


**Figure I.14 :** indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  (courbe en gras) des diagonales les plus élancées relatives aux treillis de l'enveloppe des courbes d'efficacité (cas *Distr\_Cat\_Norm*).

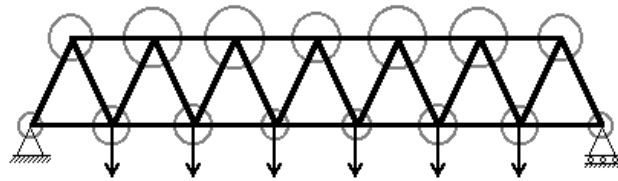


## I.6. REPARTITION DU POIDS PROPRE

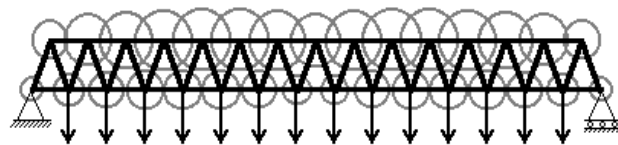
**Figure I.15 :** répartition du poids propre dans quelques treillis optimaux de la courbe enveloppe relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*. Le rayon des cercles est proportionnel à la charge de poids propre reportée sur le nœud correspondant.



$$n = 2, L/H = 2.9, \Psi = 5, \Phi = 0$$

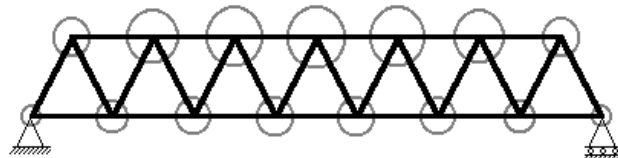


$$n = 7, L/H = 6.9, \Psi = 25, \Phi = 0$$

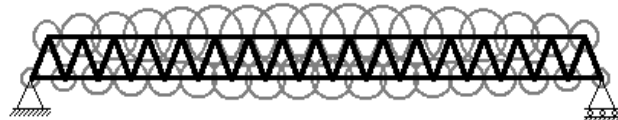


$$n = 15, L/H = 12.2, \Psi = 70, \Phi = 0$$

**Figure I.16 :** répartition du poids propre dans quelques treillis optimaux de la courbe enveloppe relative au cas *Aleat\_Optimax\_Norm*.



$$n = 7, L/H = 7.6, \Psi = 25, \Phi = 0$$



$$n = 17, L/H = 14.5, \Psi = 70, \Phi = 0$$

Au niveau de la répartition du poids propre sur chaque nœud, celle-ci est forcément moins homogène lorsque les barres sont optimisées individuellement plutôt que par catégories. La figure I.15, relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*, montre une diminution du poids propre au centre et vers les appuis. Lorsque la charge est aléatoire par contre, on constate une augmentation du poids propre des appuis vers le centre, au niveau des deux membrures, comme le montre la figure I.16.

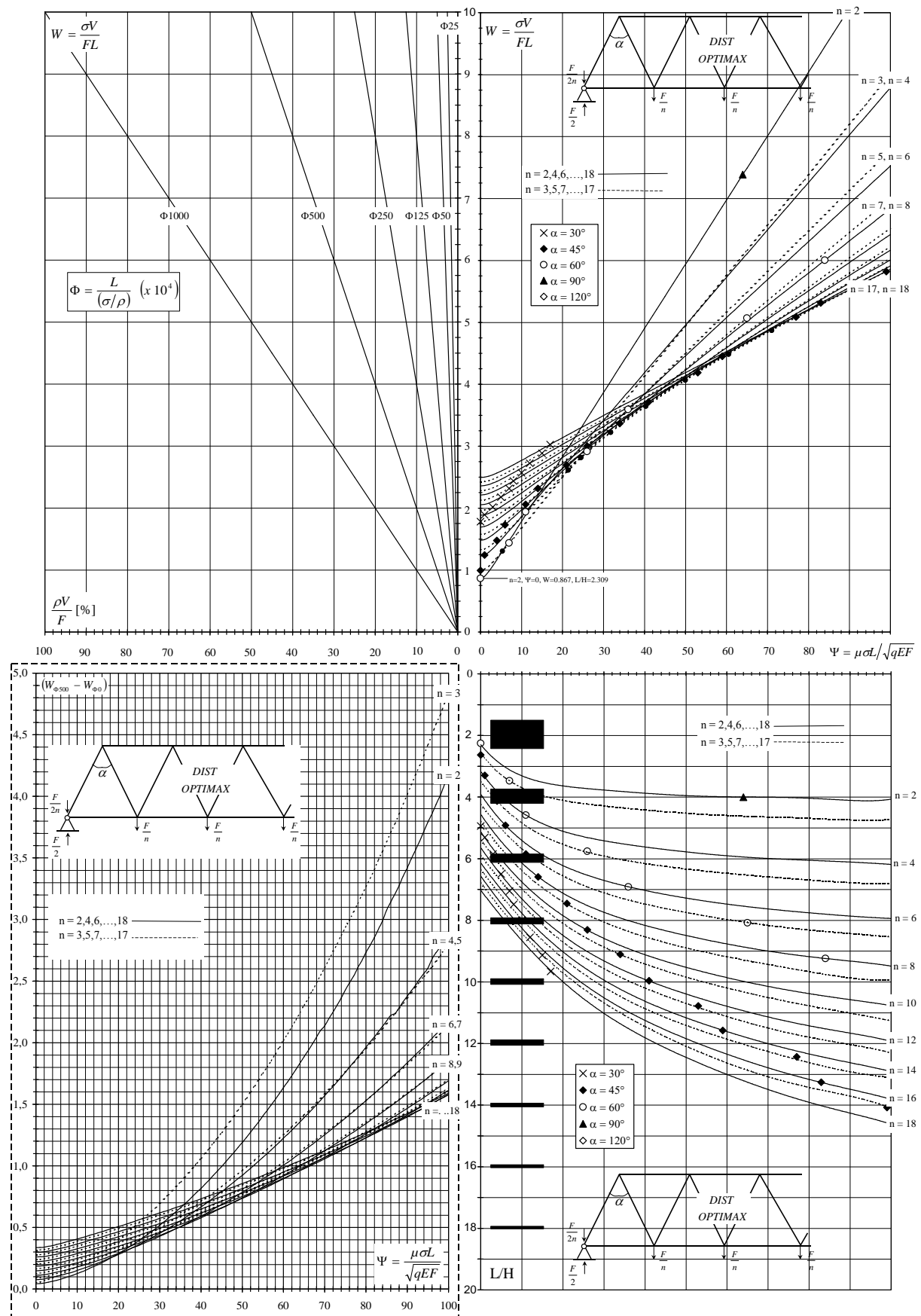


Figure 1.17 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

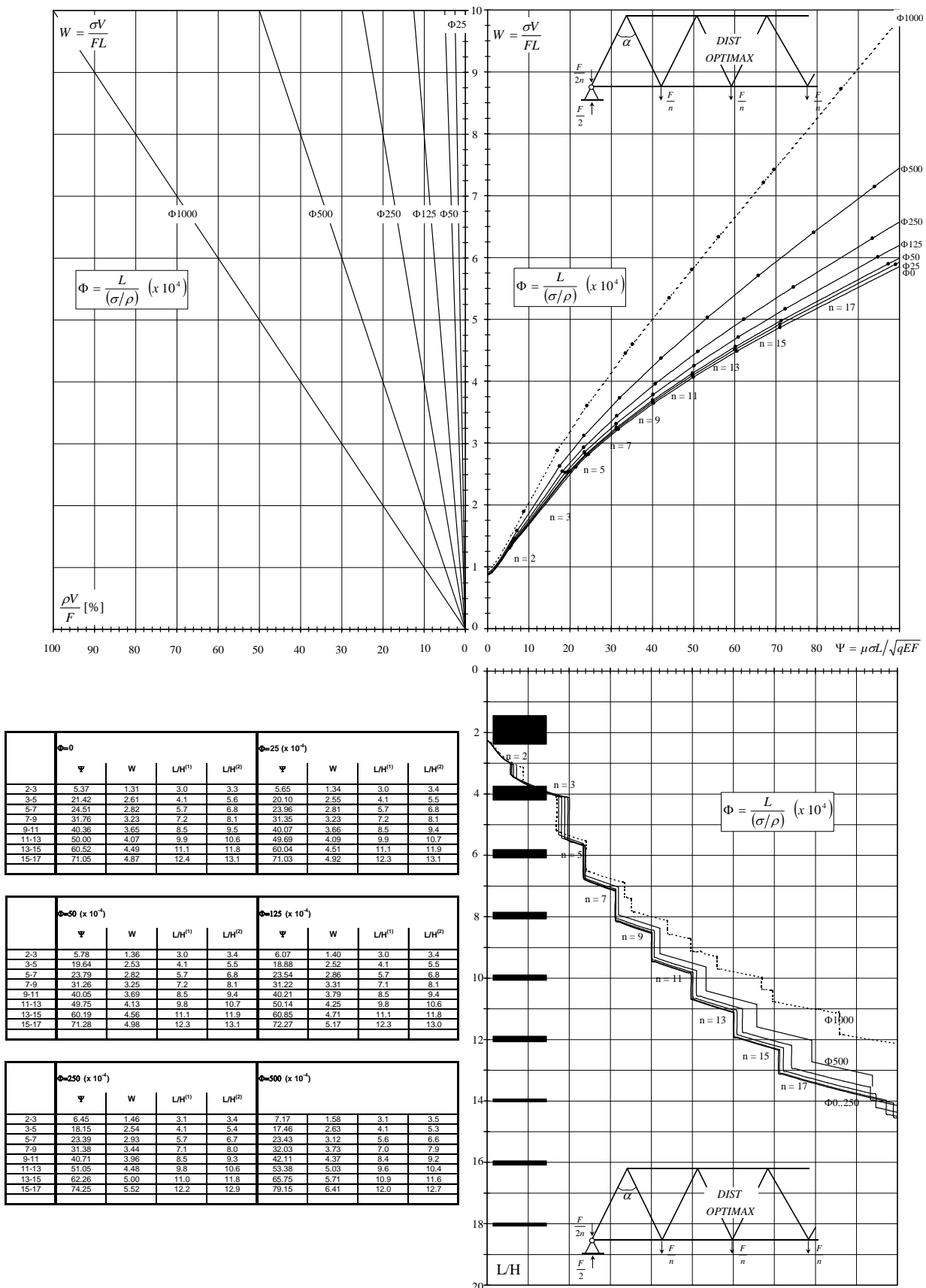


Figure 1.18 : enveloppes des courbes d'efficacité pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

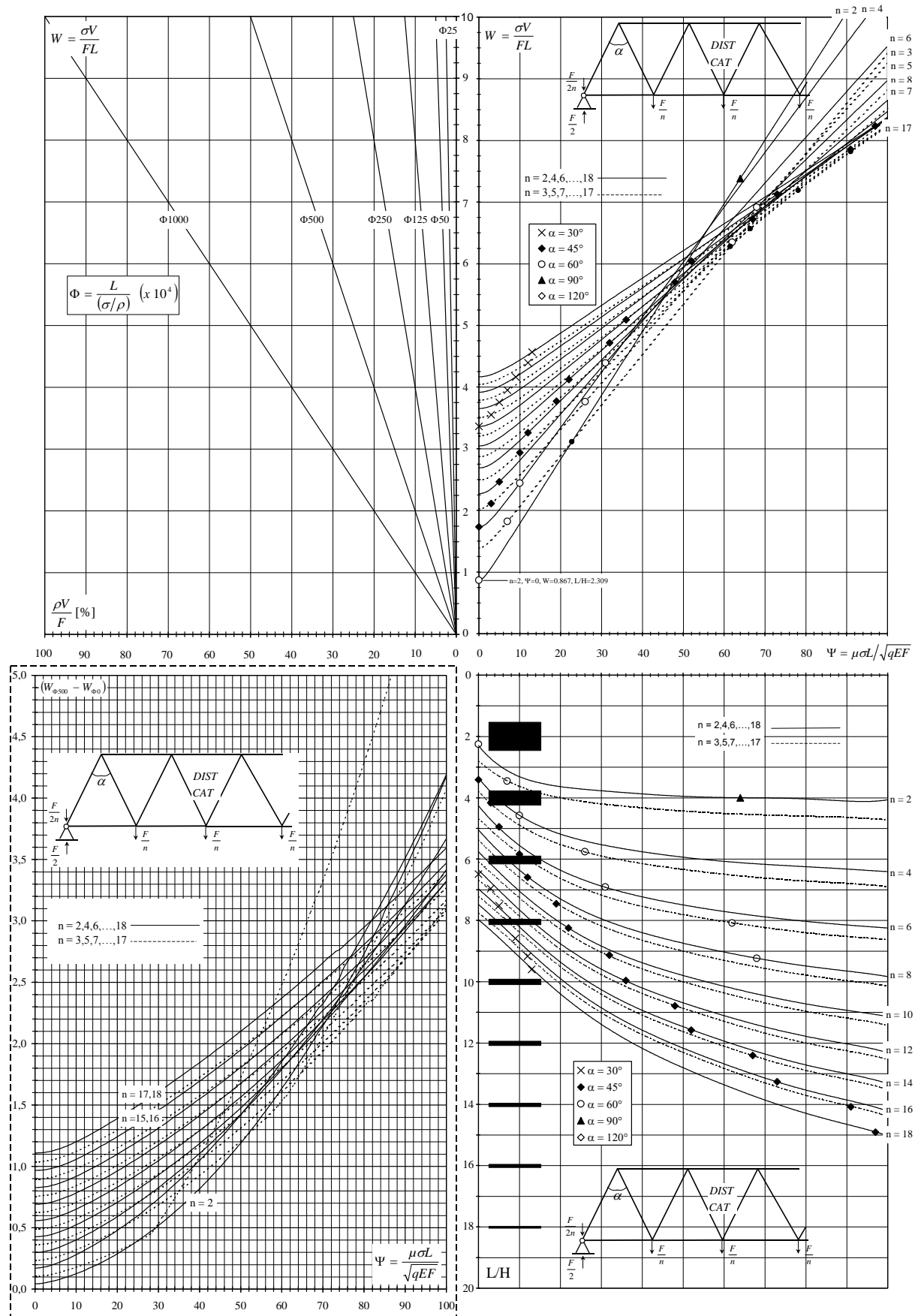


Figure 1.19 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*.

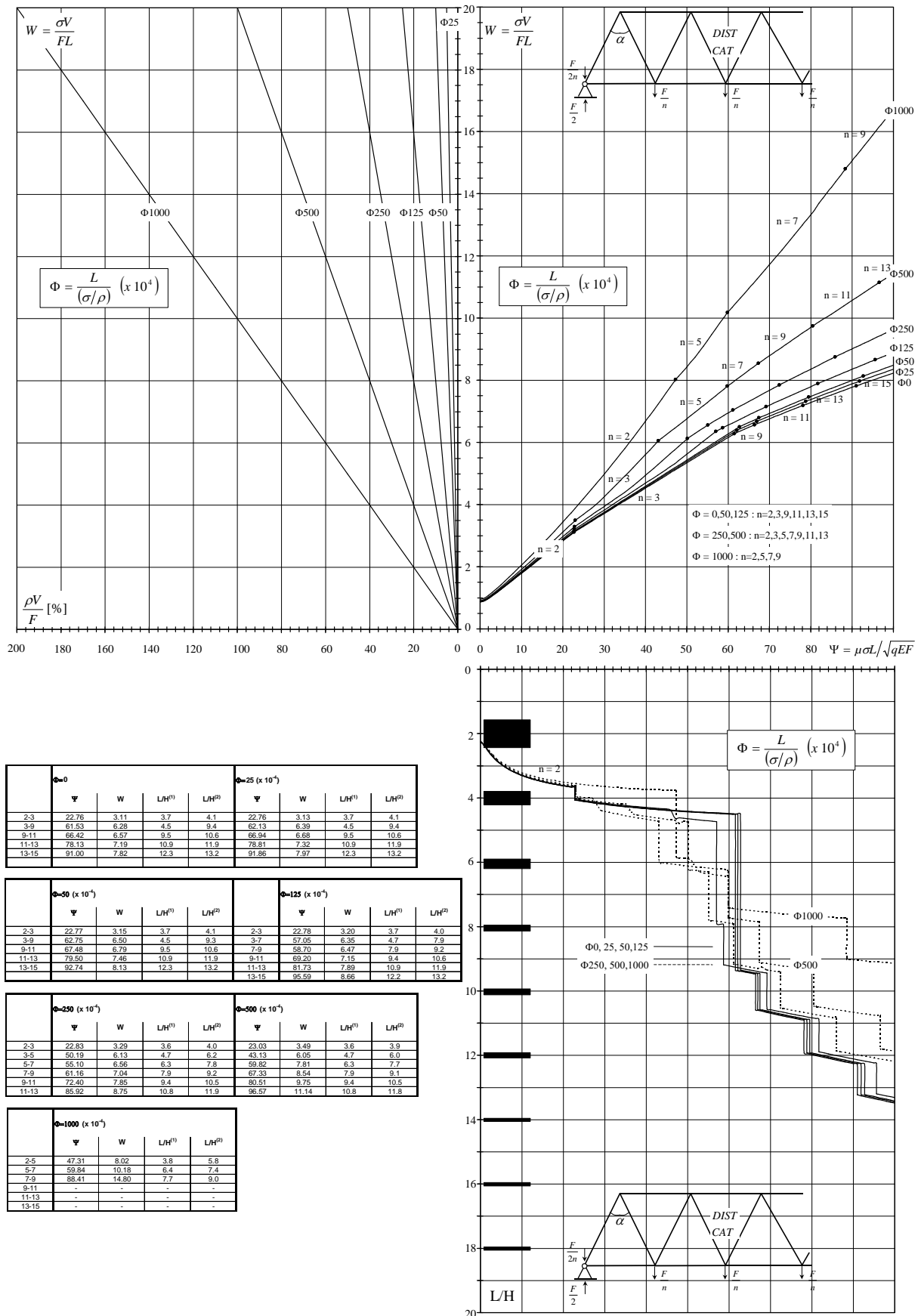


Figure 1.20 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ pour le cas Distr\_Cat\_Norm.

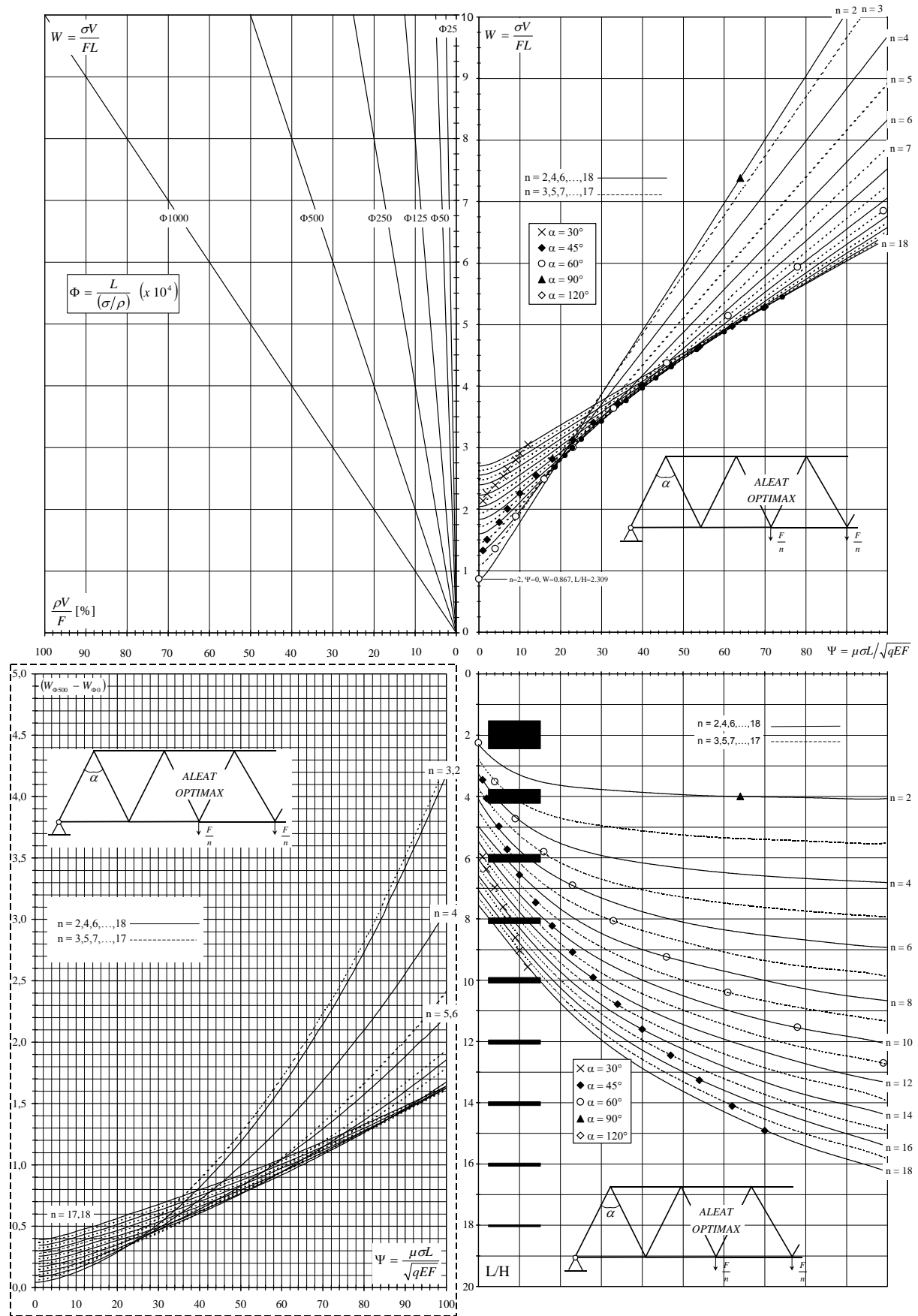
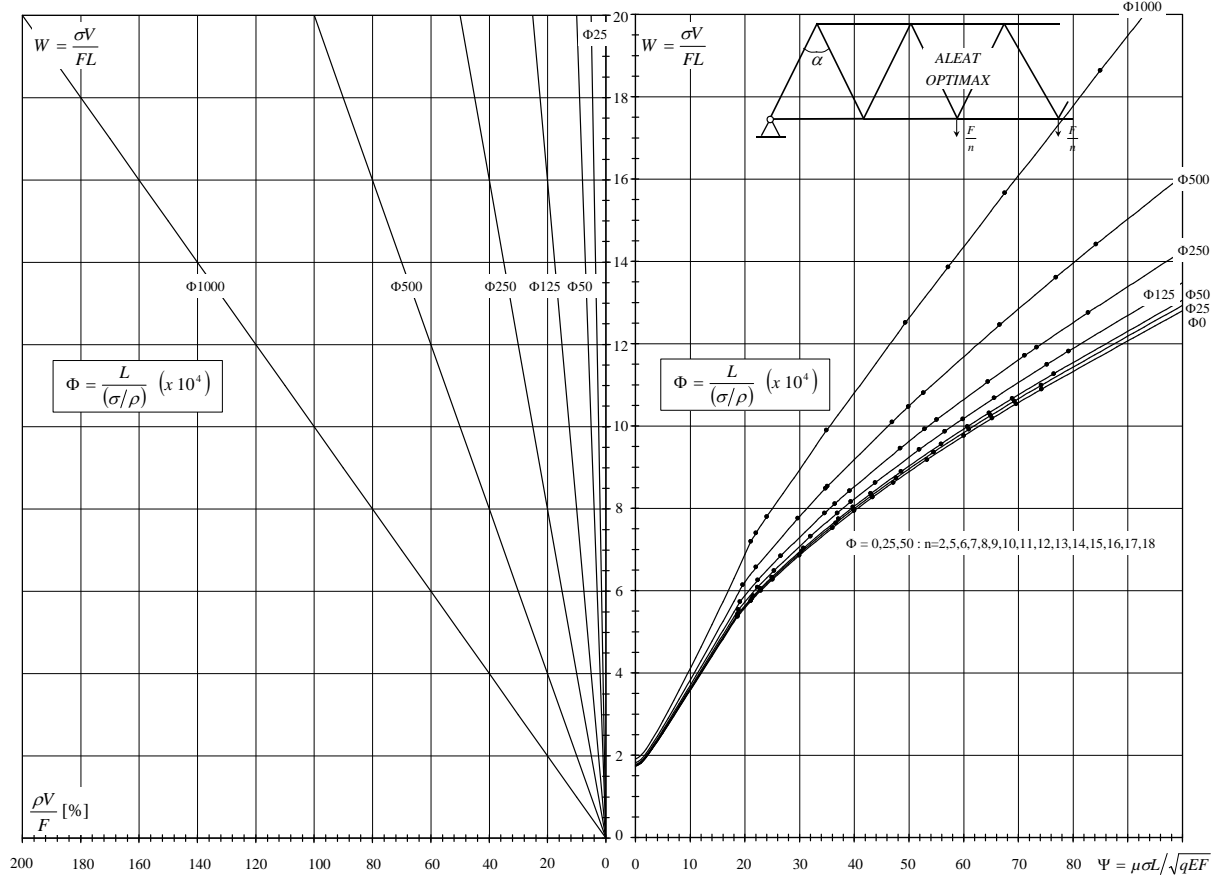


Figure 1.21 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas Aleat\_Optimax\_Norm.



n	Φ=0				Φ=25 (x 10 <sup>4</sup> )			
	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>
2-5	18.64	2.69	3.6	6.0	18.68	2.70	3.6	6.0
5-6	21.11	2.97	6.3	9.9	21.32	2.99	6.3	9.9
6-7	22.93	3.00	6.9	7.6	22.96	3.01	6.9	7.6
7-8	25.06	3.14	7.6	8.1	24.99	3.15	7.6	8.1
8-9	29.97	3.43	8.5	8.9	30.94	3.47	8.5	8.9
9-10	36.03	3.76	9.3	9.7	36.64	3.82	9.3	9.7
10-11	40.00	3.97	10.0	10.4	39.89	3.99	9.9	10.4
11-12	43.34	4.13	10.6	11.1	43.18	4.16	10.6	11.0
12-13	47.11	4.31	11.3	11.7	47.65	4.37	11.3	11.6
13-14	53.28	4.59	12.1	12.4	54.53	4.68	12.1	12.5
14-15	60.04	4.88	12.9	13.2	60.94	4.96	12.8	13.2
15-16	69.22	5.09	13.5	13.8	69.94	5.13	13.4	13.8
16-17	69.60	5.27	14.1	14.5	69.25	5.30	14.0	14.4
17-18	74.25	5.45	14.7	15.1	74.17	5.49	14.7	15.0

n	Φ=50 (x 10 <sup>4</sup> )				Φ=125 (x 10 <sup>4</sup> )				
	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>	
2-5	18.72	2.72	3.6	6.0	2-5	18.85	2.77	3.6	6.0
5-6	21.85	2.94	6.3	6.8	5-7	22.30	3.04	6.2	7.4
6-7	22.84	3.03	6.9	7.4	7-8	25.33	3.24	7.6	7.9
7-8	24.94	3.16	7.6	8.1	8-9	32.00	3.66	8.5	8.8
8-9	30.73	3.52	8.5	8.9	9-10	36.89	3.94	9.2	9.7
9-10	37.09	3.87	9.2	9.7	10-11	39.39	4.08	9.8	10.3
10-11	39.76	4.01	9.9	10.4	11-12	43.84	4.31	10.5	10.9
11-12	43.02	4.18	10.6	11.0	12-13	51.88	4.71	11.4	11.7
12-13	48.59	4.45	11.3	11.7	13-14	56.56	4.94	12.0	12.4
13-14	55.89	4.78	12.1	12.5	14-15	59.63	5.09	12.6	13.0
14-15	60.71	4.99	12.7	13.2	15-16	65.61	5.34	13.2	13.6
15-16	64.63	5.16	13.3	13.8	16-17	75.20	5.75	14.1	14.4
16-17	69.88	5.33	14.0	14.4	17-18	79.16	5.91	14.6	15.0
17-18	76.50	5.64	14.7	15.0					

n	Φ=250 (x 10 <sup>4</sup> )				Φ=500 (x 10 <sup>4</sup> )				
	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>	
2-5	19.09	2.86	3.6	5.9	2-5	19.63	3.07	3.6	5.9
5-7	22.36	3.13	6.1	7.3	5-7	22.04	3.28	6.0	7.4
7-8	26.53	3.42	7.6	8.0	7-8	29.70	3.89	7.6	8.0
8-9	34.60	3.94	8.5	8.9	8-9	34.73	4.24	8.2	8.7
9-10	38.44	4.06	9.0	9.5	9-10	39.09	4.27	8.8	9.2
10-11	39.13	4.21	9.7	10.0	10-11	46.94	5.05	9.8	10.1
11-12	48.39	4.73	10.6	11.0	11-12	49.87	5.24	10.3	10.7
12-13	52.88	4.97	11.2	11.6	12-13	52.63	5.49	10.8	11.2
13-14	55.09	5.08	11.7	12.1	13-15	66.58	6.23	11.7	12.5
14-15	64.42	5.54	12.5	12.9	15-16	76.89	6.81	12.9	13.2
15-16	71.16	5.86	13.2	13.6	16-18	84.21	7.21	13.4	14.1
16-17	73.33	5.95	13.7	14.1					
17-18	82.76	6.38	14.4	14.7					

n	Φ=1000 (x 10 <sup>4</sup> )			
	Ψ	W	L/H <sup>(1)</sup>	L/H <sup>(2)</sup>
2-5	21.08	3.60	3.5	5.8
5-6	22.03	3.70	5.8	6.4
6-7	23.89	3.90	6.5	6.9
7-8	34.92	4.85	7.3	8.3
8-11	49.36	6.26	8.8	9.7
11-12	57.15	6.83	9.9	10.3
12-14	67.90	7.83	10.4	11.3
14-16	84.97	9.32	11.7	12.4

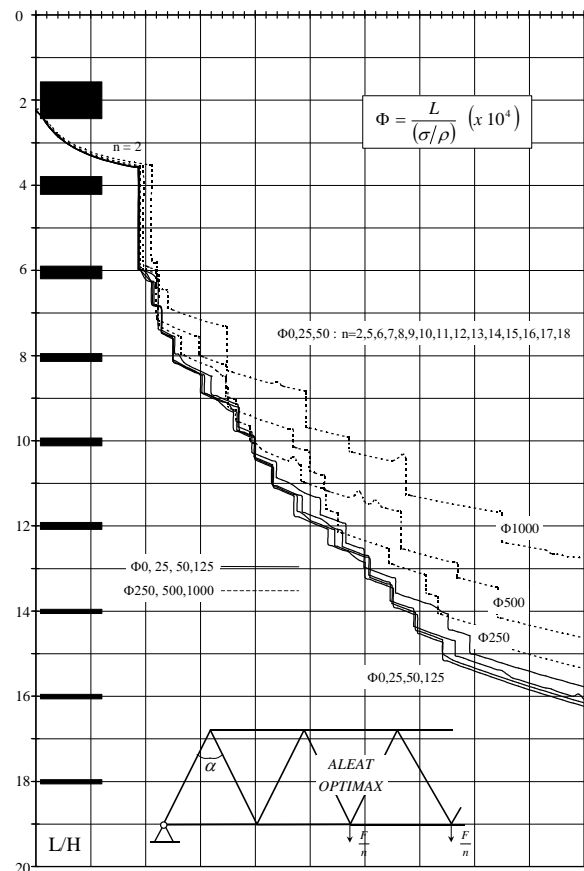


Figure I.22 : enveloppes des courbes d'efficience pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ pour le cas Aleat\_Optimax\_Norm.

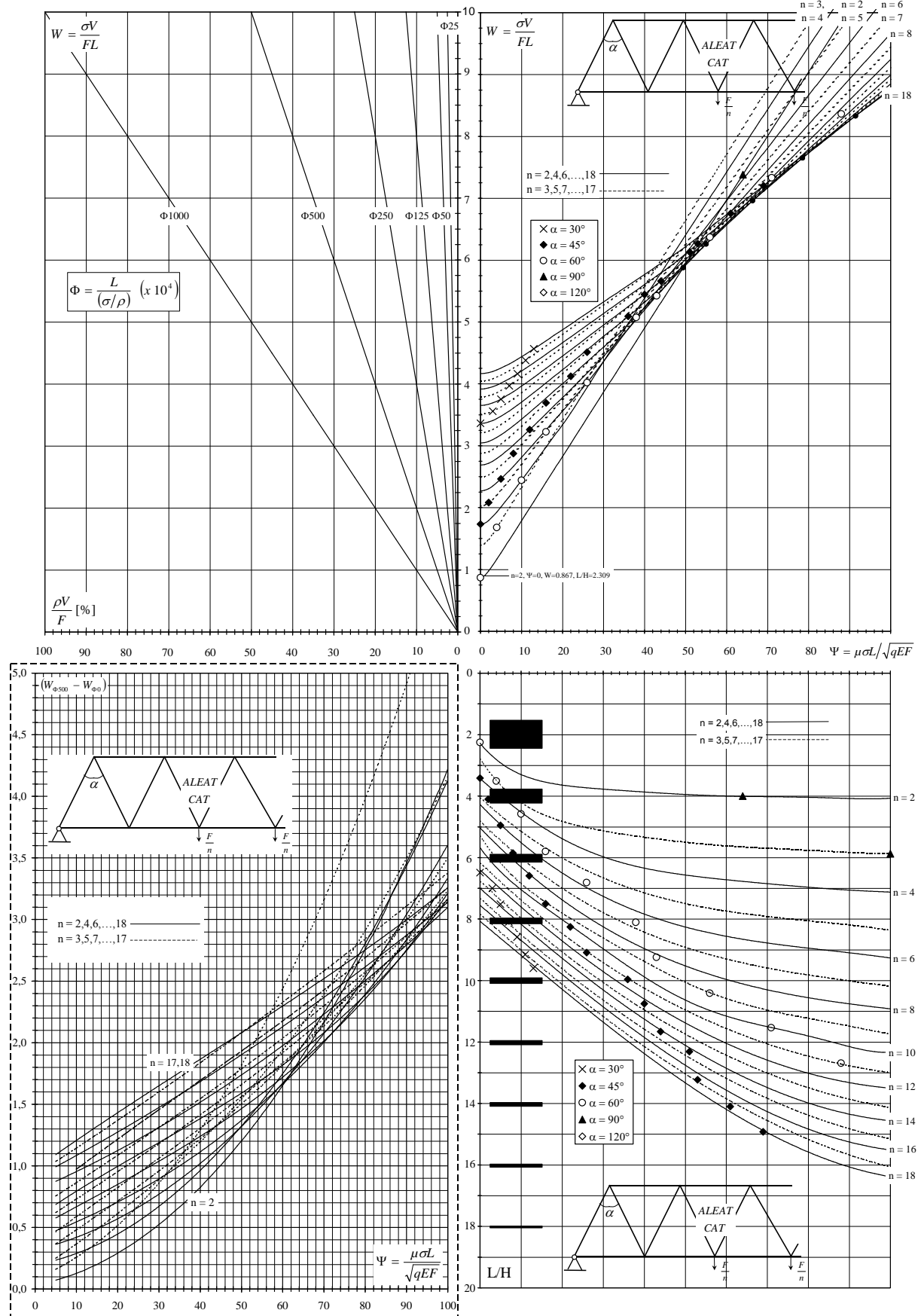


Figure 1.23 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.



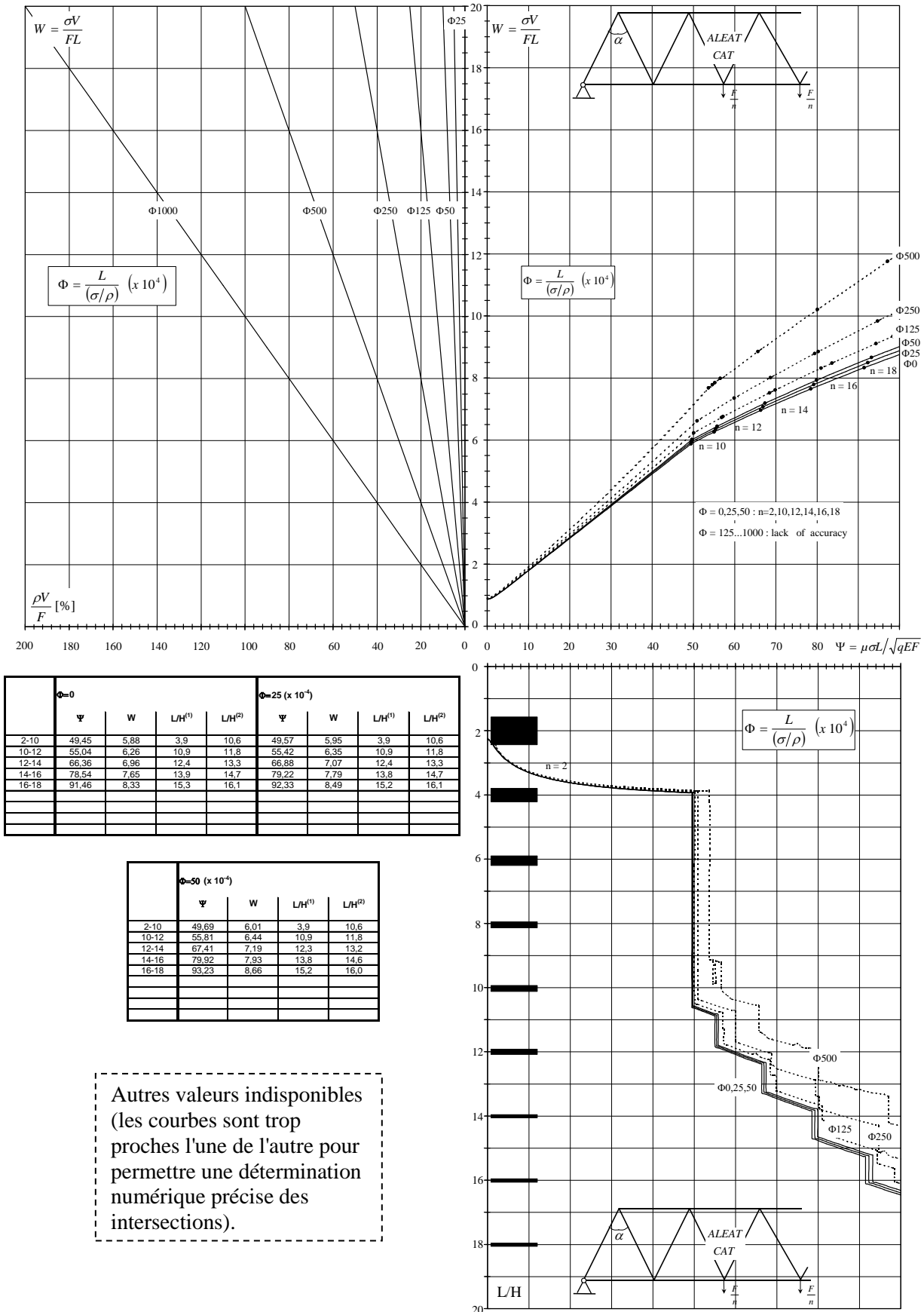


Figure 1.24 : enveloppes des courbes d'efficacité pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.

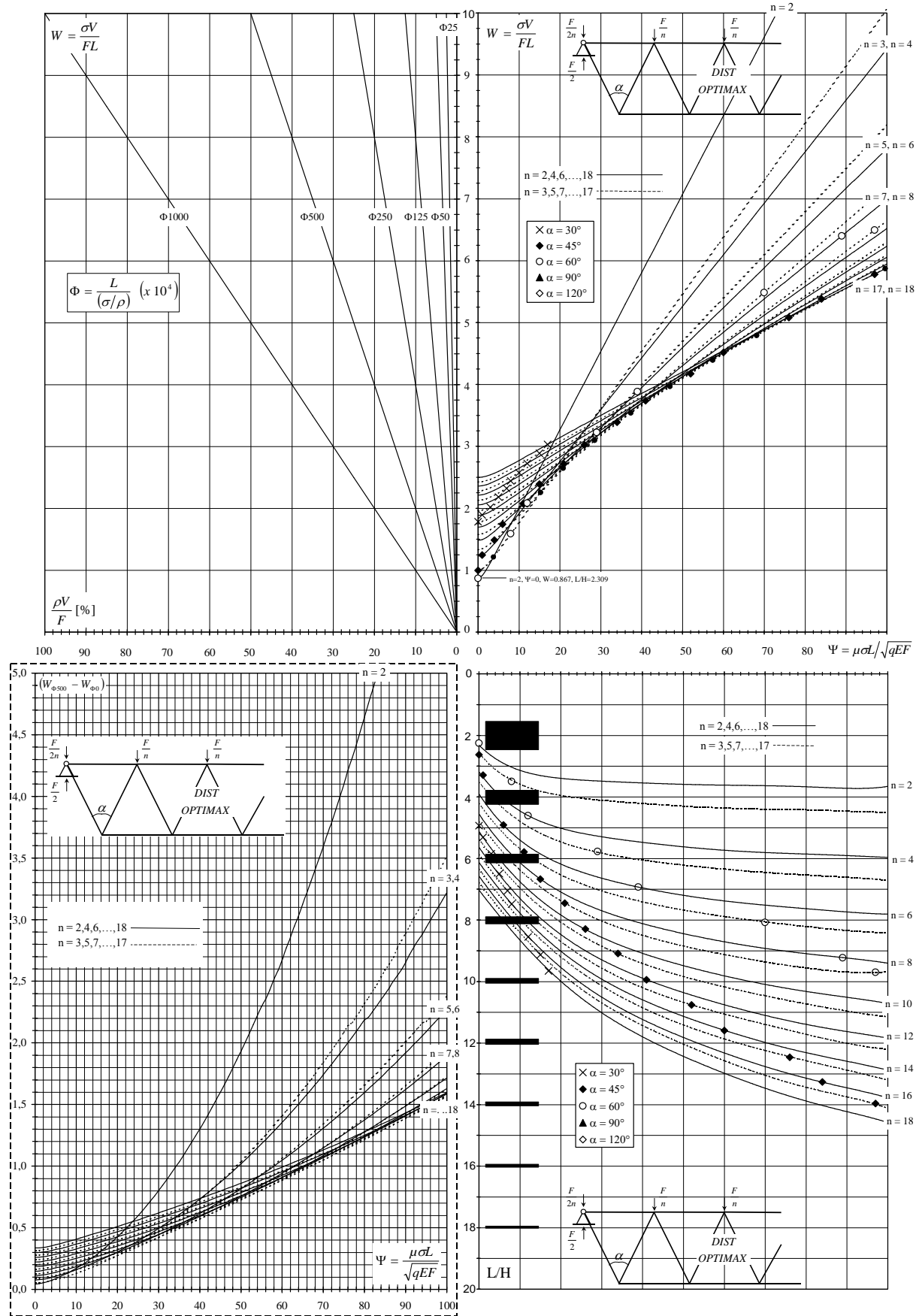


Figure 1.25 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Sous*.

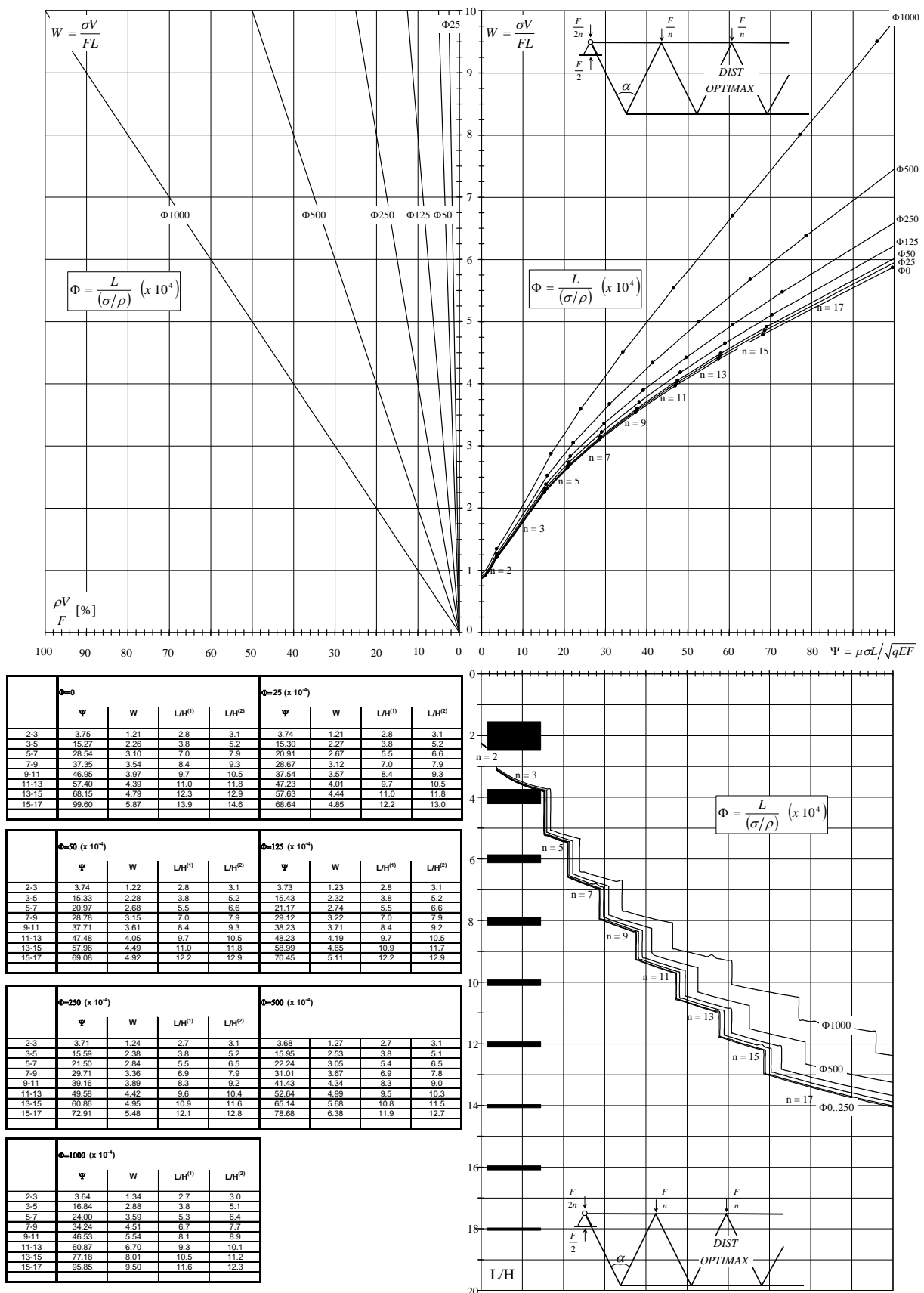


Figure I.26 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Optimax\_Sous*.

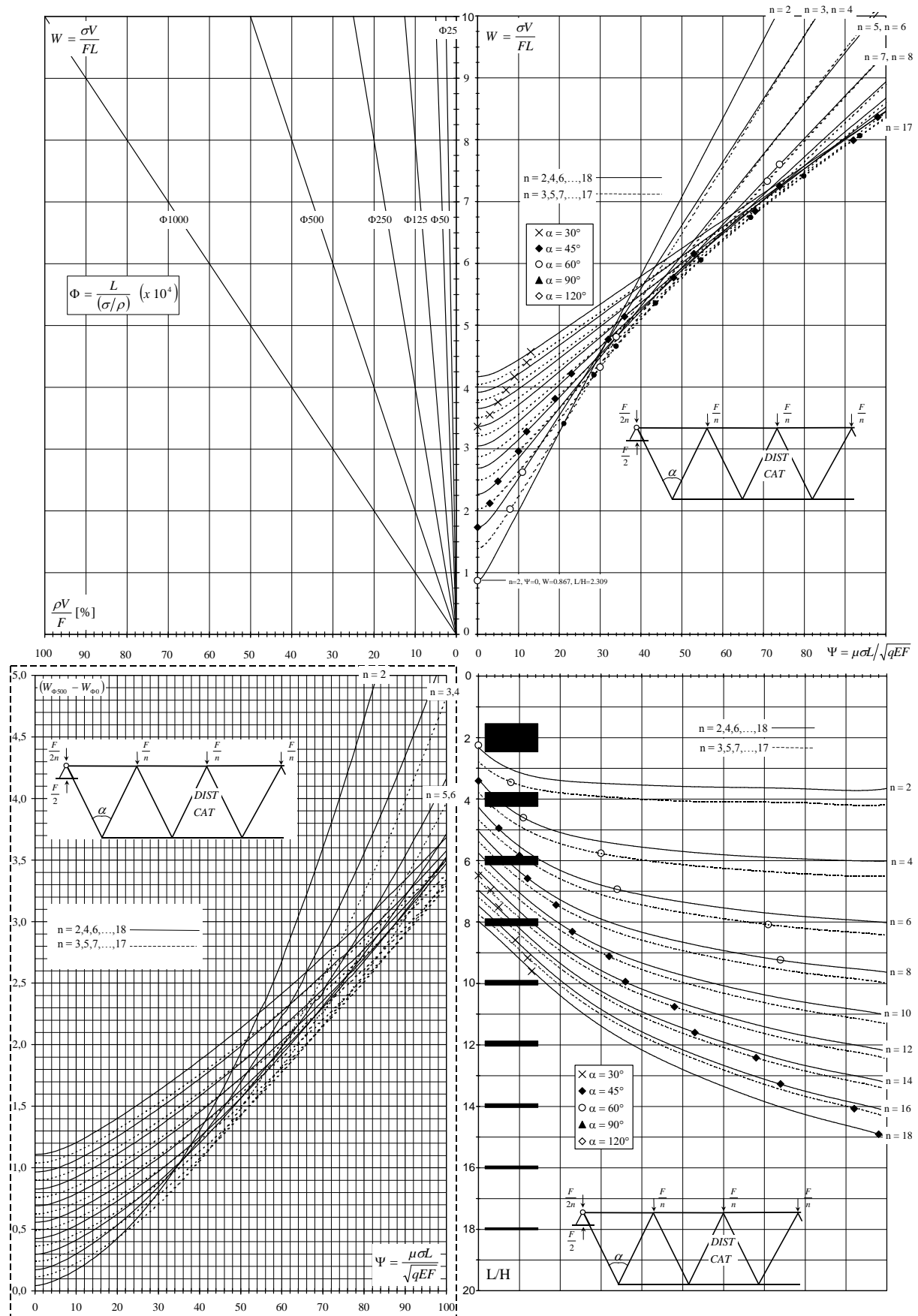


Figure 1.27 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Sous*.

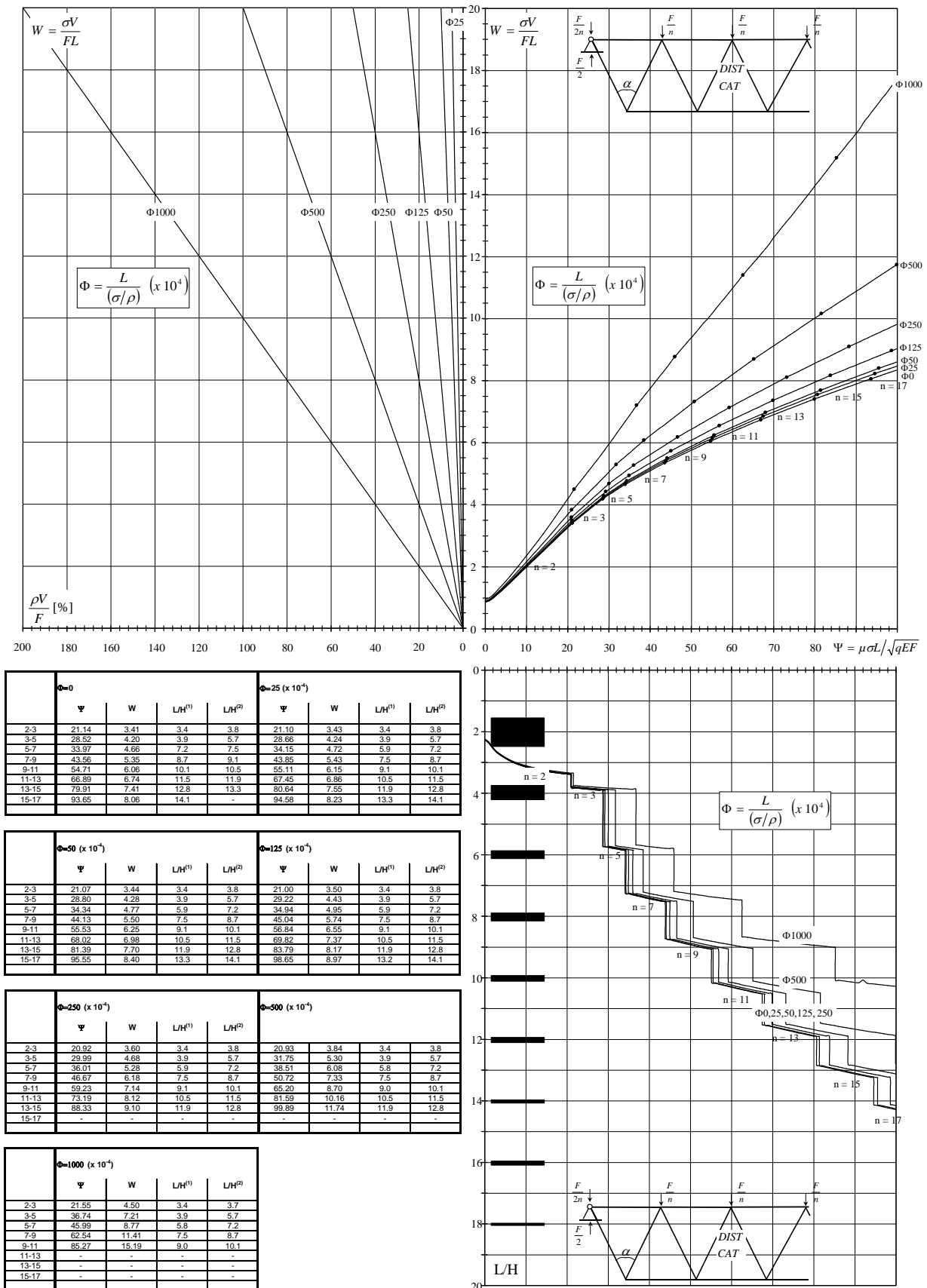


Figure I.28 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Dist\_Cat\_Sous*.

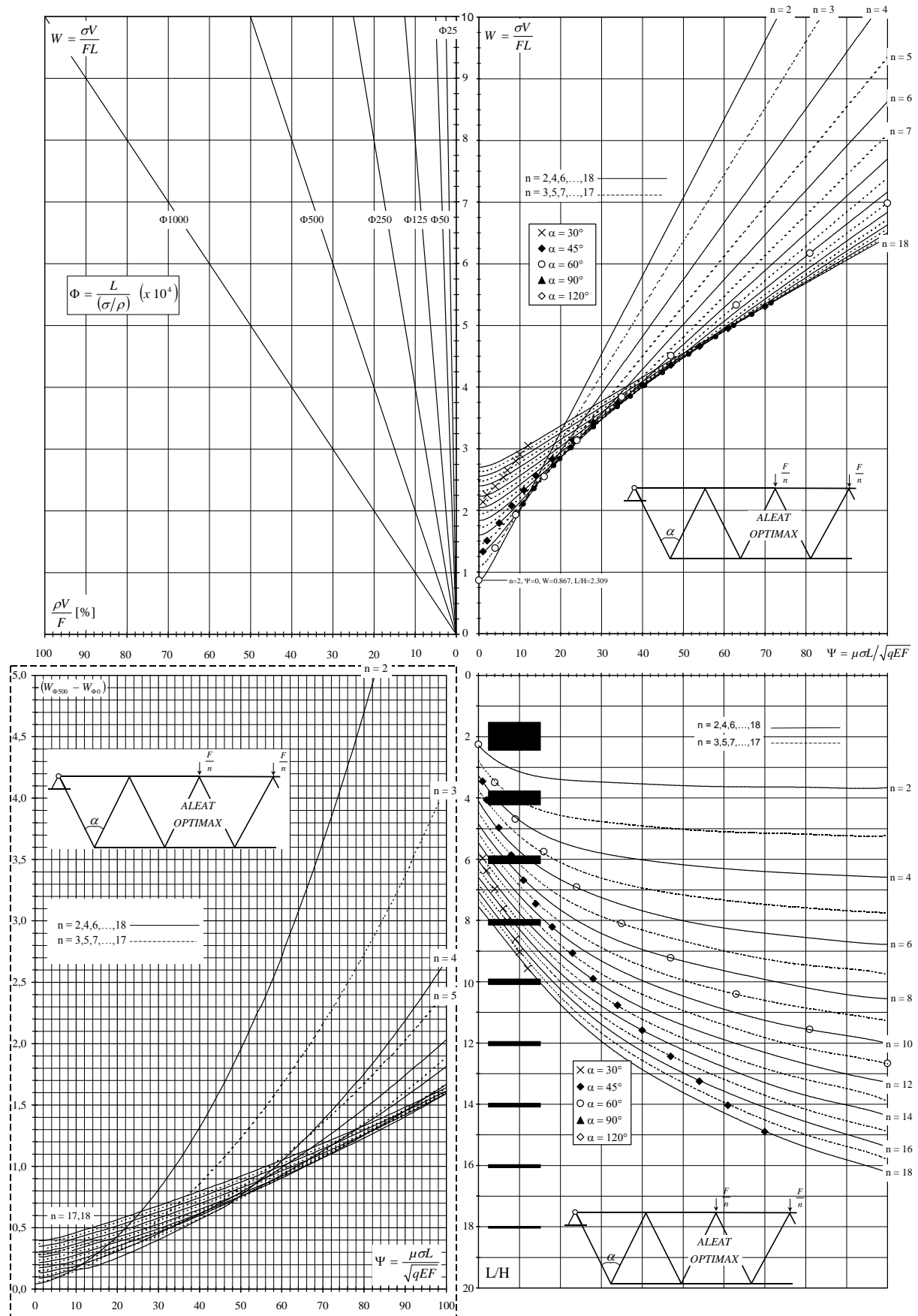


Figure 1.29 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Aleat\_Optimax\_Sous*.

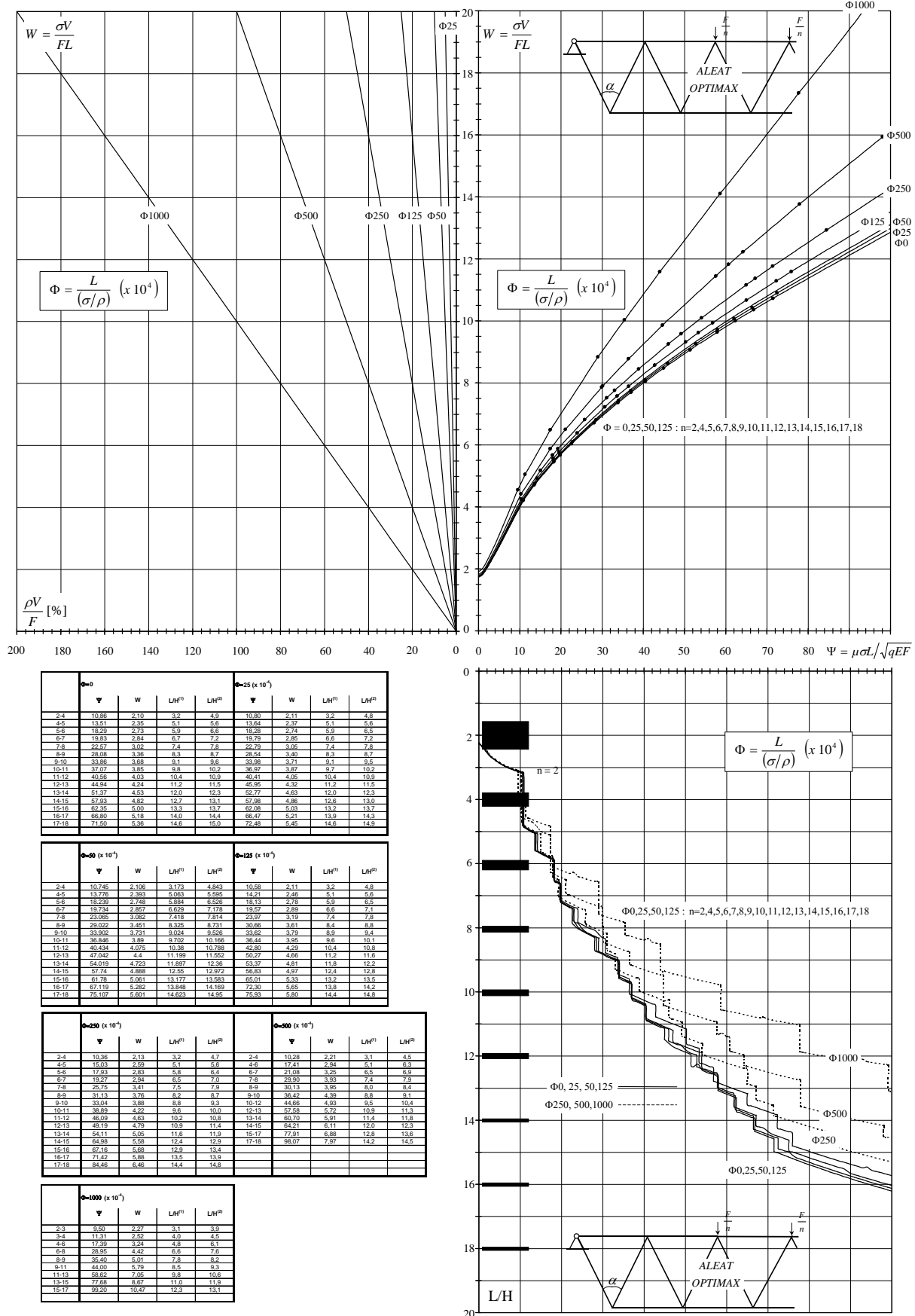


Figure 1.30 : enveloppes des courbes d'efficience pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ pour le cas Aleat\_Optimax\_Sous.

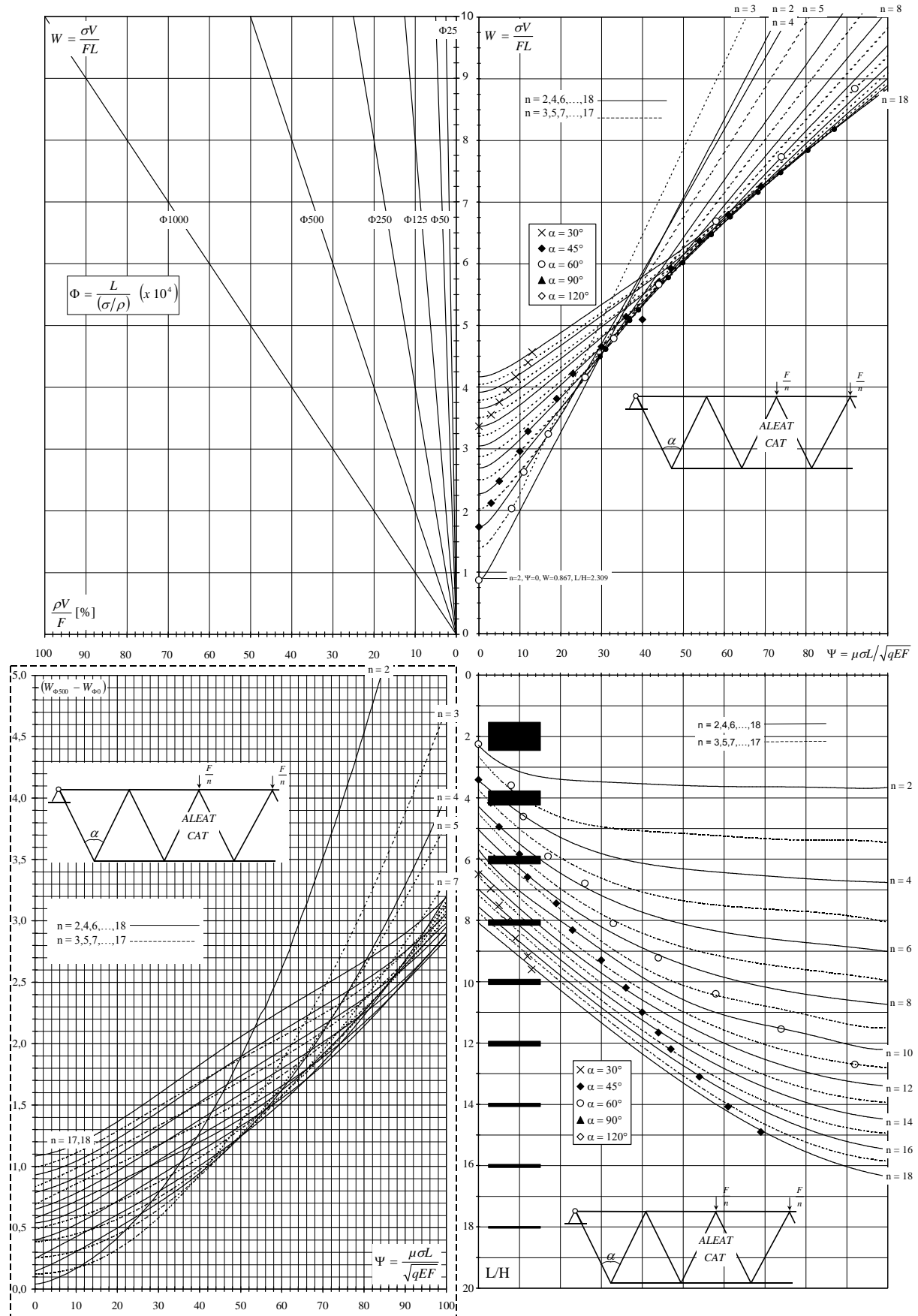


Figure 1.31 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas ALEAT\_Cat\_Sous.



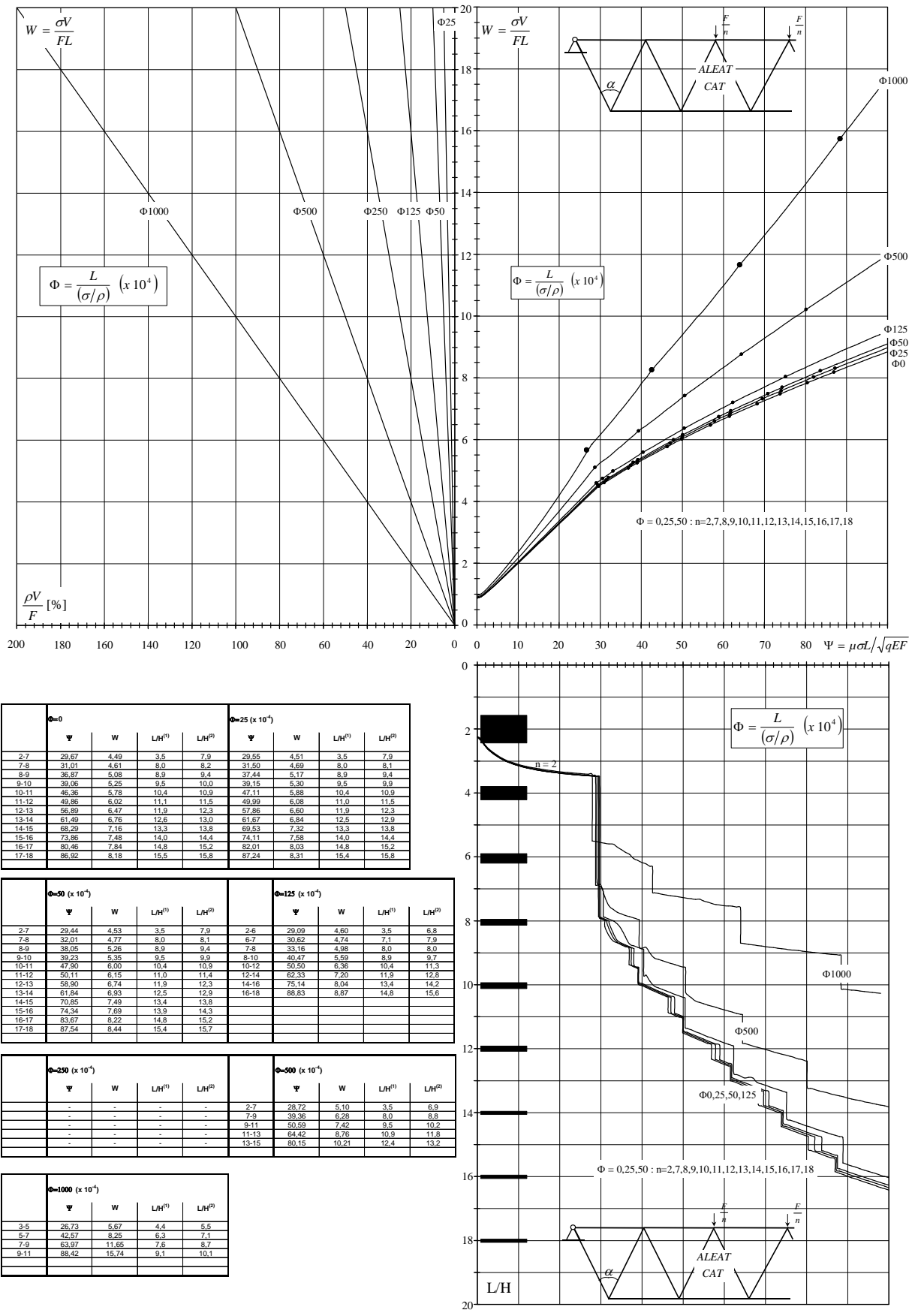
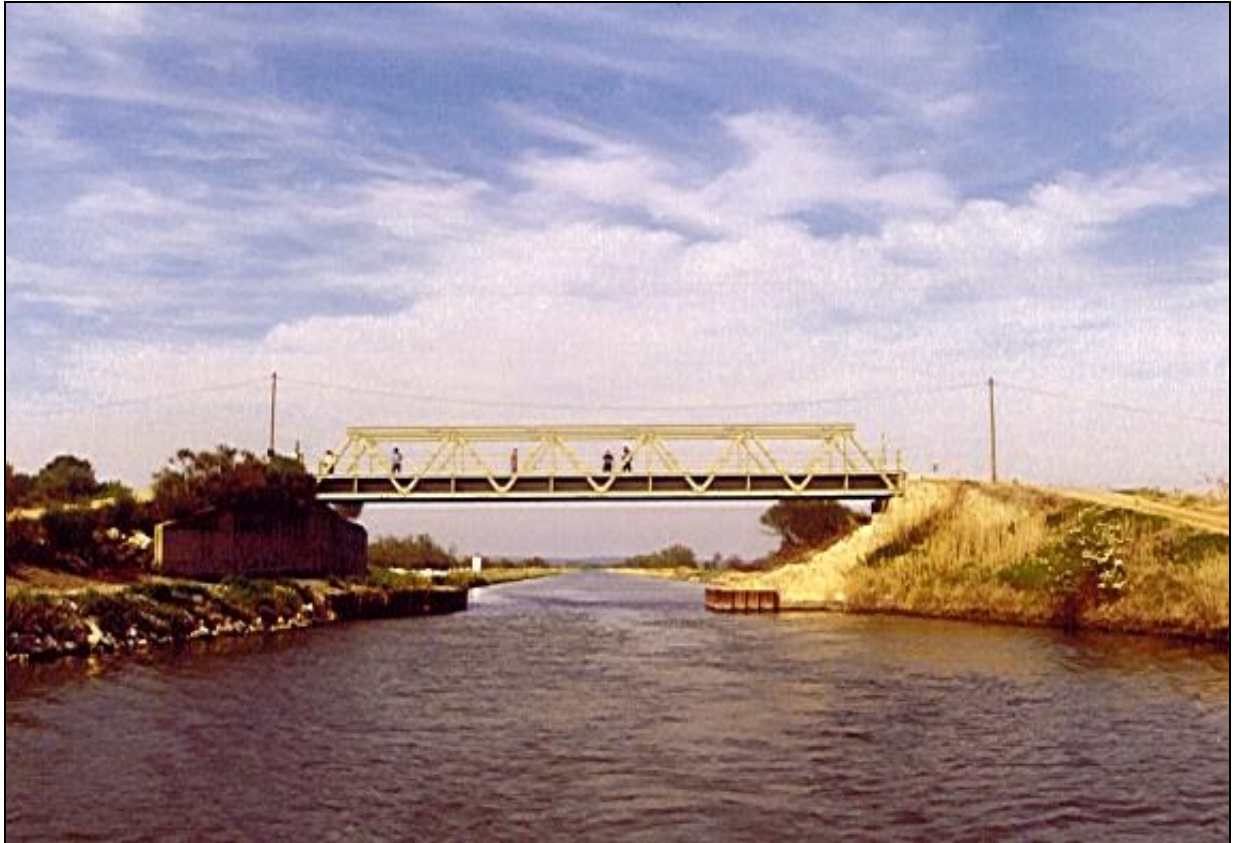


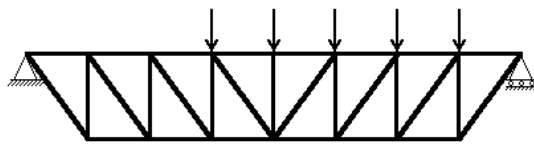
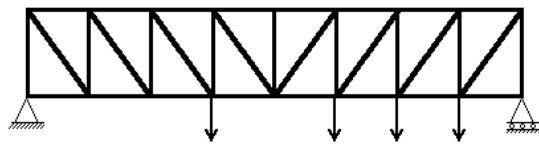
Figure 1.32 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ pour le cas Aleat\_Cat\_Sous.



*Pont Warren sur le canal du midi, en France.*

# Partie II

## Les treillis Pratt

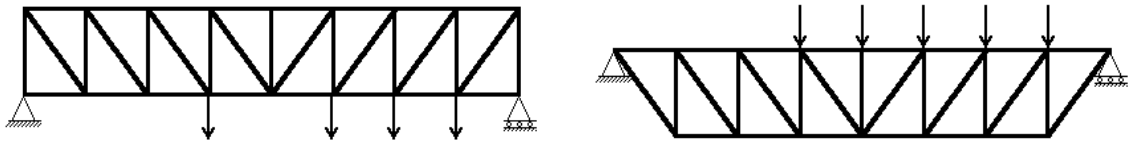




## II.1. AVANT PROPOS

*Avertissement* : la présente synthèse tente de résumer plus de 100 figures relatives aux treillis Pratt et reprises en annexe 1. Afin de réduire la lourdeur de ce texte, seules les figures les plus significatives y sont intégrées.

De façon générale, l'étude porte donc sur les treillis Pratt situés respectivement au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis, et les charges agissent toujours au niveau de celle-ci :



Dans chacun des deux cas, on distingue :

- la charge uniformément distribuée (symbole *Dist*) ou la charge aléatoire (Symbole *Aleat*);
- le cas relatif à des barres optimisées de façon individuelle (Symbole *Optimax*) ou celui relatif à 4 catégories de barres identiques (Symbole *Cat*);

le symbole utilisé pour désigner un treillis situé au dessus des appuis est *Norm* tandis que celui désignant un treillis situé en dessous de la ligne définie par les appuis est *Sous*. Au total, 8 cas sont donc analysés, comme illustré à la figure II.1.

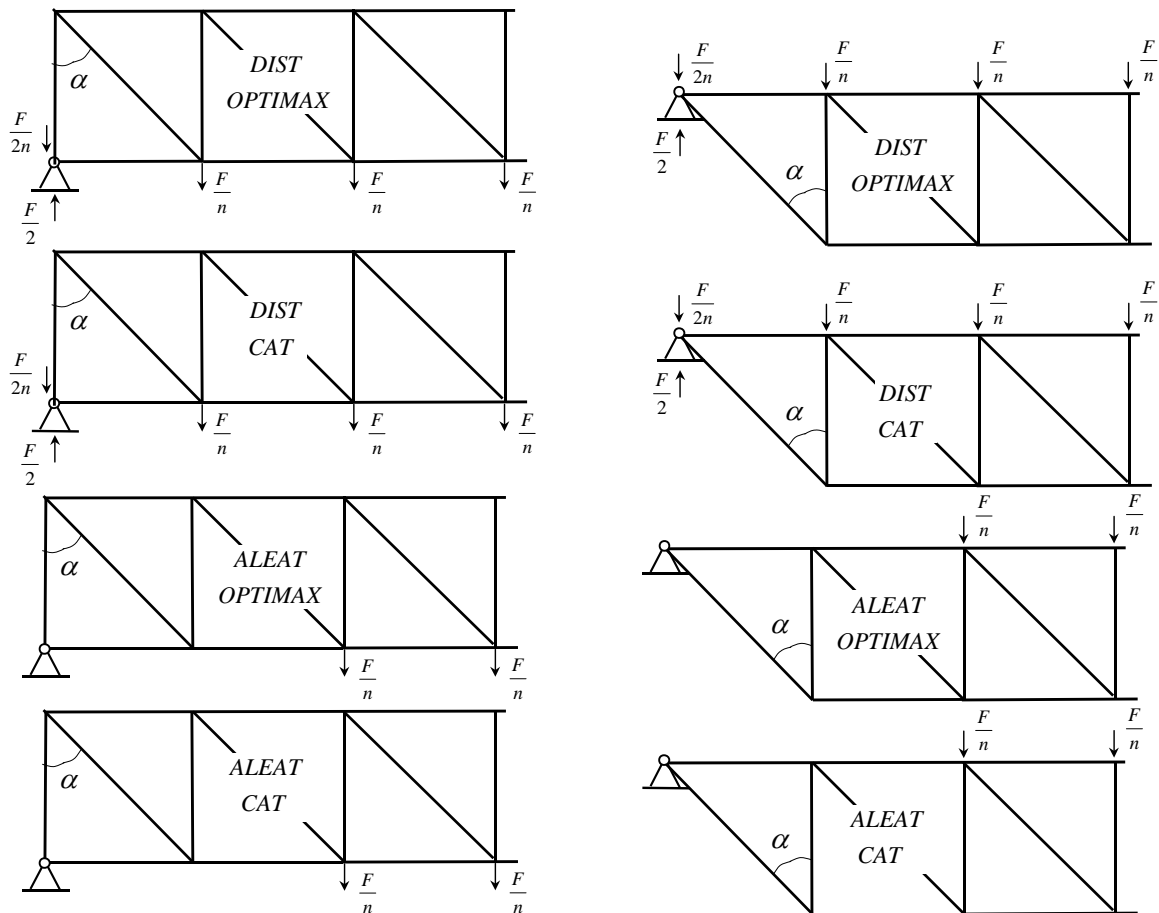
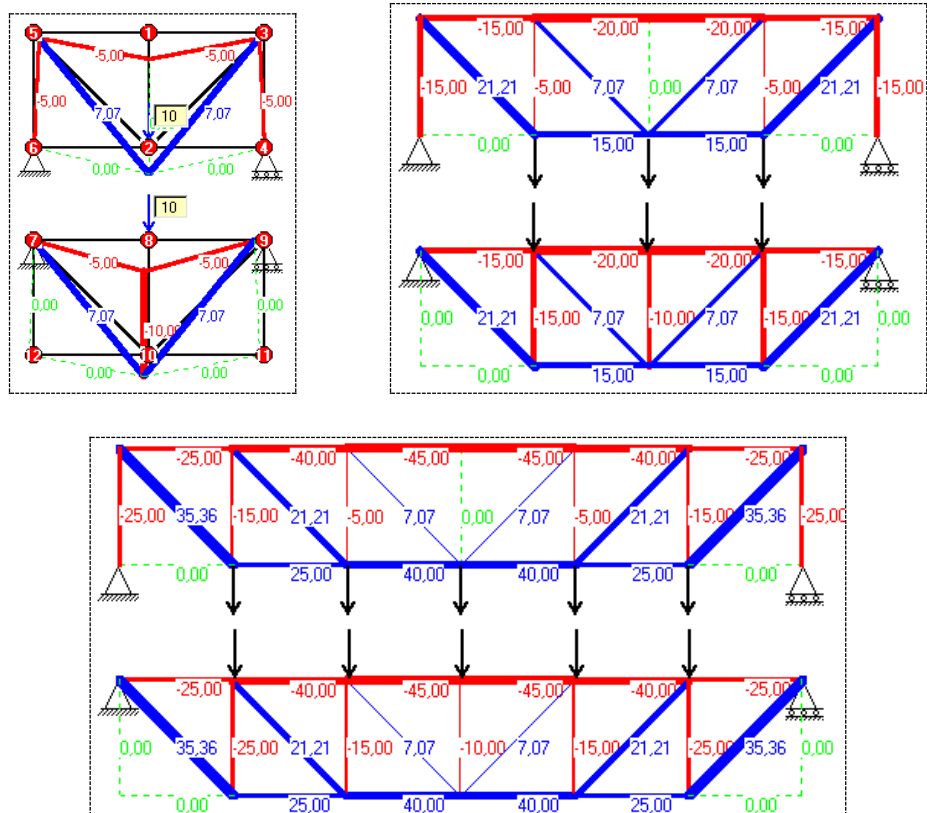


Figure II.1 : les 8 situations étudiées



**Figure II.2 :** répartition des efforts dans les poutres Pratt, soumises à des charges ponctuelles de 10 kN sur les nœuds de la membrure joignant les appuis ( $F/n = 10$  kN).

La figure II.2 montre la répartition des efforts dans les treillis Pratt à 2, 4 et 6 mailles respectivement lorsque les treillis sont situés au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis. Chaque nœud chargé est le siège d'un effort valant  $F/n$  qui vaut, en l'occurrence, 10 kN.

Si on analyse les efforts dans les barres de deux treillis Pratt duaux (ce qui veut dire que l'un est situé au dessus et l'autre en dessous de la ligne définie par les appuis) à même nombre de mailles, on peut faire les commentaires suivants :

- les efforts d'une même diagonale, d'un même élément supérieur ou d'un même élément inférieur sont égaux dans chacun des deux treillis; seuls les éléments verticaux se distinguent;
- l'effort maximal dans les éléments verticaux a la même valeur dans les deux cas;
- la verticale centrale du treillis situé sous les appuis est le siège d'un effort de compression de valeur  $F/n$ , tandis que le treillis situé au dessus des appuis comporte 2 verticales supportant un effort de compression valant  $F/2n$ . Les autres verticales sont le siège d'efforts identiques dans les deux cas, bien que décalés (ce qui n'a aucune importance).

Si les barres sont optimisées de façon individuelle, la seule différence entre deux treillis duaux, quelque soit le nombre de mailles, se situe au niveau du volume de matière à mettre en œuvre pour deux barres soumises chacune à un effort de compression  $F/2n$  par rapport au volume de matière à mettre en œuvre pour une seule barre soumise à un effort de compression de  $F/n$ .

De manière générale, le treillis situé sous la ligne définie par les appuis aura un indicateur de volume légèrement inférieur à celui du treillis situé au dessus de cette ligne. La différence vaut :

$$dW = \frac{1}{2n} \frac{H}{L} \left( \sqrt{1 + \frac{8n}{\pi^2} (H/L)^2 \Psi^2} - \sqrt{1 + \frac{4n}{\pi^2} (H/L)^2 \Psi^2} \right)$$

Dans le cas d'une charge aléatoire, on montre que cette différence s'accroît (voir figure II.3).

Si les treillis sont constitués de catégories de barres, l'indicateur de volume du treillis situé sous les appuis est plus petit que l'indicateur du treillis dual puisque ce dernier contient 2 verticales et 2 éléments inférieurs en plus.

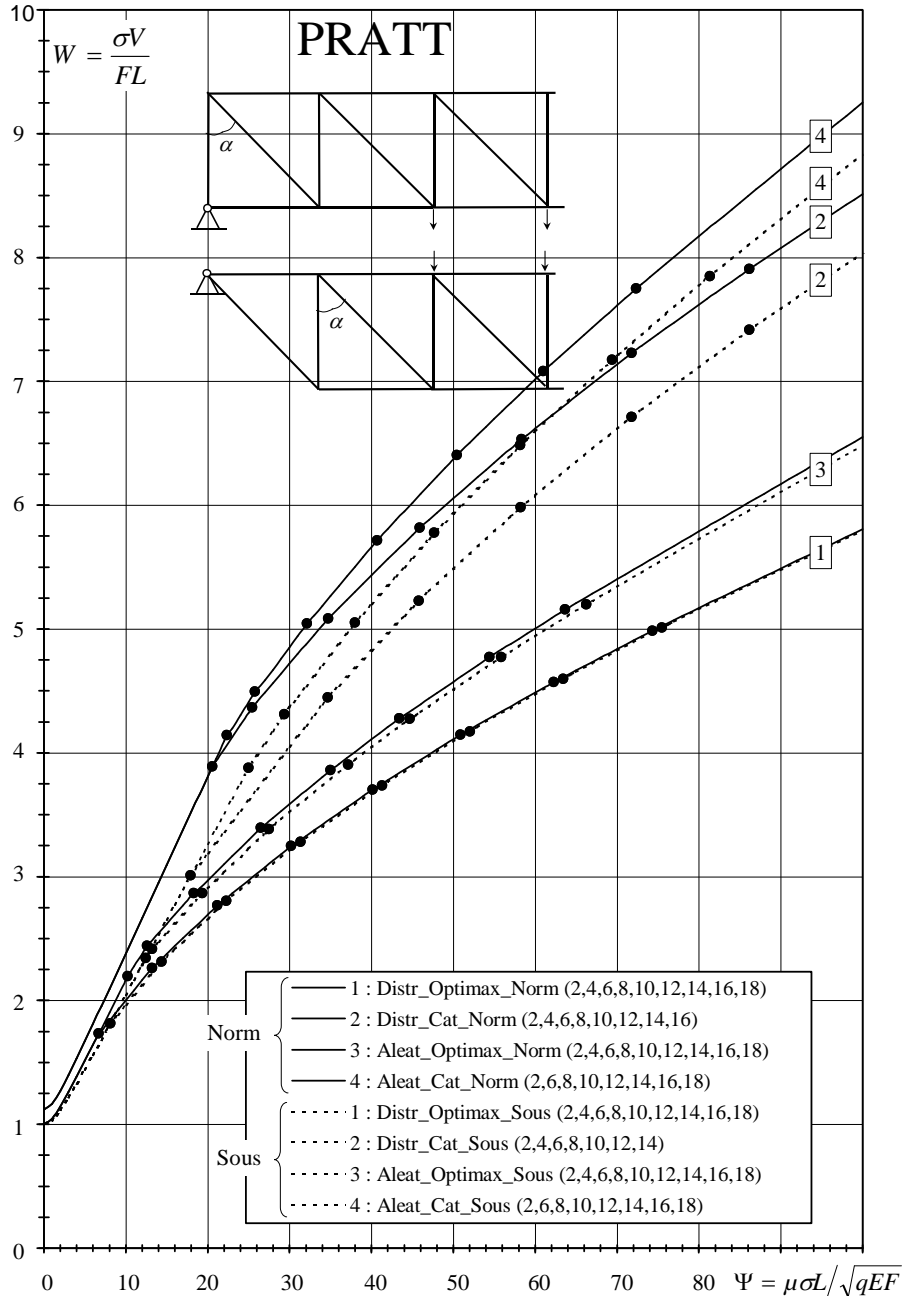


Figure II.3 : indicateur de volume dans les 8 cas de figure de la poutre Pratt ( $\Phi = 0$ ). Les courbes en pointillés correspondent au treillis "Sous".

## II.2. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS ETUDIÉS

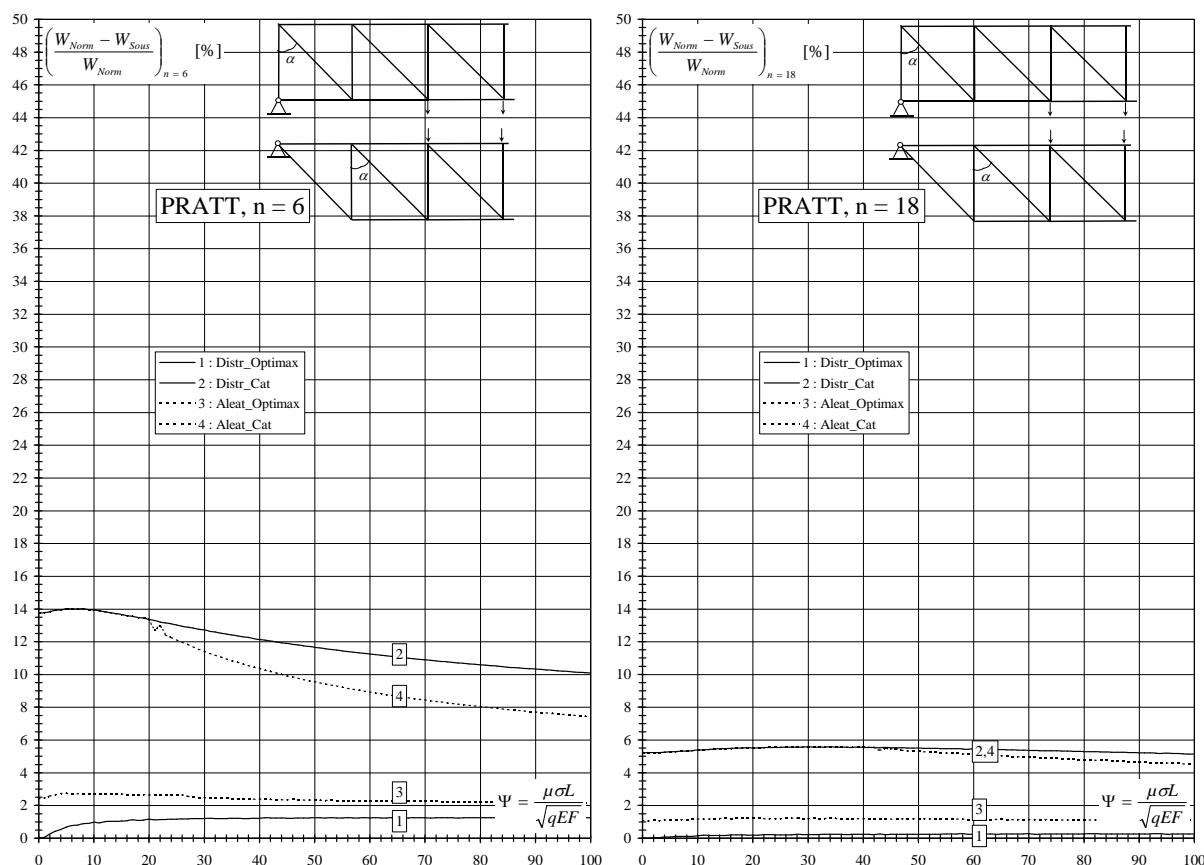
Les courbes d'efficiency relatives aux 8 cas de treillis Pratt ainsi que leurs enveloppes pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$ , sont données aux figures suivantes :

- Figures II.16 et II.17 : *Dist\_Optimax\_Norm*
- Figures II.18 et II.19 : *Dist\_Cat\_Norm*
- Figures II.20 et II.21 : *Aleat\_Optimax\_Norm*
- Figures II.22 et II.23 : *Aleat\_Cat\_Norm*
  
- Figures II.24 et II.25 : *Dist\_Optimax\_Sous*
- Figures II.26 et II.27 : *Dist\_Cat\_Sous*
- Figures II.28 et II.29 : *Aleat\_Optimax\_Sous*
- Figures II.30 et II.31 : *Aleat\_Cat\_Sous*

A	B
C	D

Chacune de ces figures est composée de 4 sous figures notées A, B, C et D comme l'illustre le schéma ci-dessus.

### II.2.1. Comparaison des treillis (Norm) et (Sous) :



**Figure II.4 :** valeurs du gain  $(W_{Norm} - W_{Sous})/W_{Norm}$  en indicateur de volume obtenu par le choix de treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (Norm), pour 6 et 18 mailles respectivement.



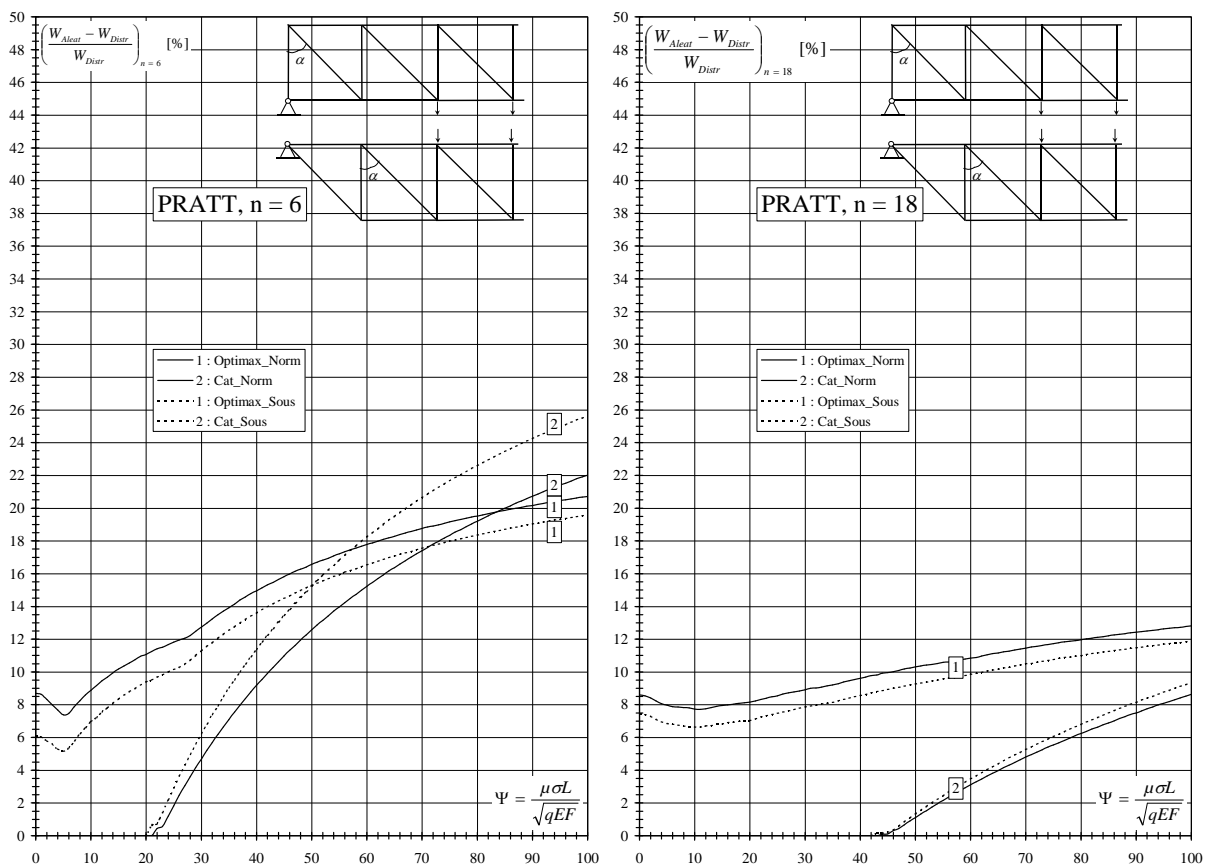
La figure II.3 reprend les 8 courbes enveloppes pour  $\Phi = 0$ . Celle-ci met en évidence la propriété suivante :

**Les treillis Pratt situés sous la ligne définie par les appuis (*Sous*) sont toujours PLUS LEGERS que les treillis Pratt situés au dessus des appuis (*Norm*), et ceci dans tous les cas de figure :**

$$W_{\text{Sous}} < W_{\text{Norm}}$$

La propriété précédente est aussi illustrée en annexe 1 aux figures *Synthèse\_Pratt.4* et *5* qui reprennent les valeurs de l'indicateur de volume  $W$  pour chaque valeur du nombre de mailles  $n$  dans les 8 cas de figure.

La différence entre les deux cas varie selon que les charges sont distribuées (*Distr*) ou aléatoires (*Aleat*) ou que les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*) ou par catégories (*Cat*). La figure II.4 illustre cette différence dans ces 4 cas, pour 6 et 18 mailles. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (Figures *Synthèse\_Pratt.8* et *9*). Si les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*), la différence entre les deux cas de figure n'excède jamais 3%, et devient insignifiante pour les grands nombres de mailles. Si les treillis comportent des catégories de barres identiques, alors le gain en volume relatif à un treillis situé sous les appuis varie de 5 à 15 % selon le nombre de mailles et les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .



**Figure II.5 :** valeurs du surplus  $(W_{Aleat} - W_{Distr})/W_{Distr}$  d'indicateur de volume imposé par la charge aléatoire (*Aleat*), pour 6 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis *Sous*.

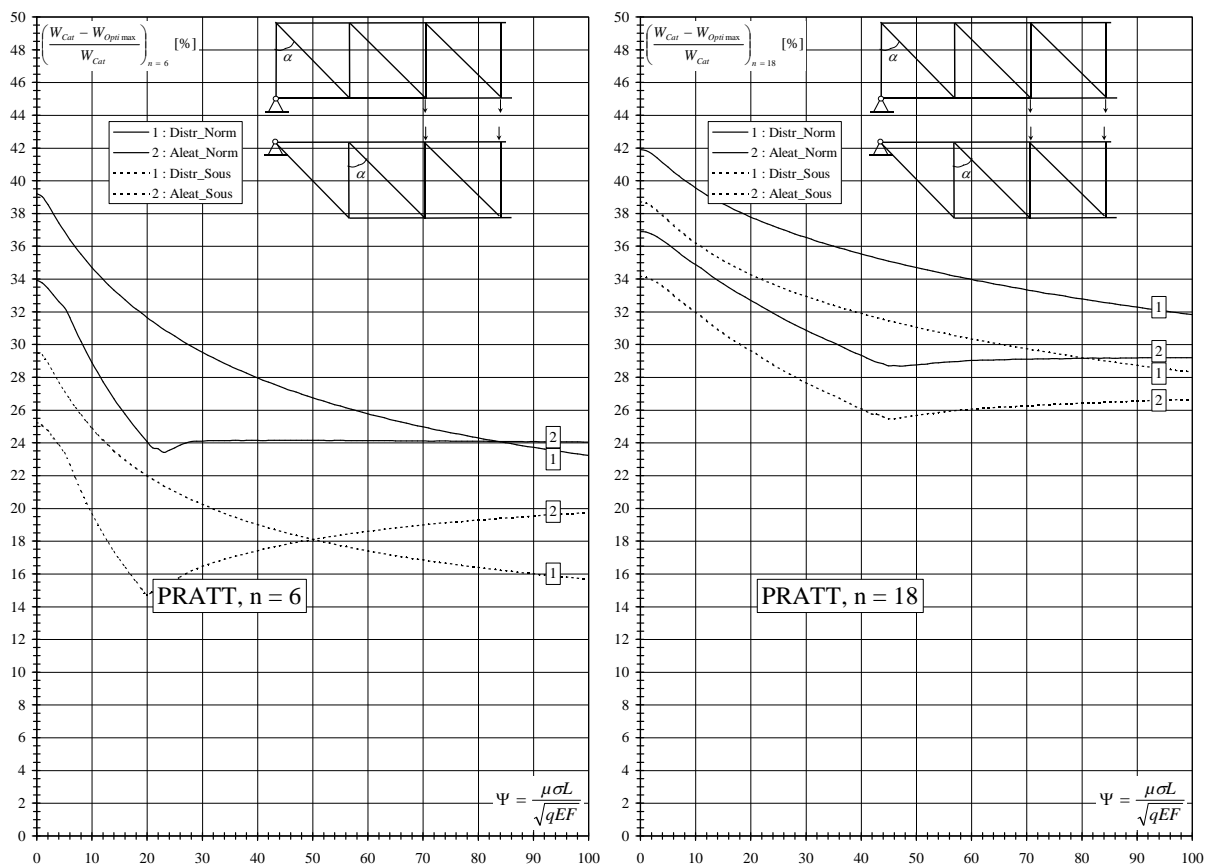
### II.2.2. Influence de la charge aléatoire :

Il est intéressant de s'attarder sur le volume de matière supplémentaire à mettre en œuvre lorsque la charge est aléatoire (*Aleat*) plutôt que distribuée de façon uniforme (*Distr*). Pour les treillis constitués de catégories de barres (*Cat*), ce surplus ne devient non-nul que pour des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  comprises entre 15 et 40, selon le nombre de mailles. **Dans tous les cas, ce surplus de matière est limité à 30% (et 15% pour  $n > 8$ )**, comme le montre la figure II.5, pour  $n = 6$  et  $n = 18$ . Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (*Figures Synthèse\_Pratt.10 et 11*).

### II.2.3. Optimisation individuelle ou par catégories de barres :

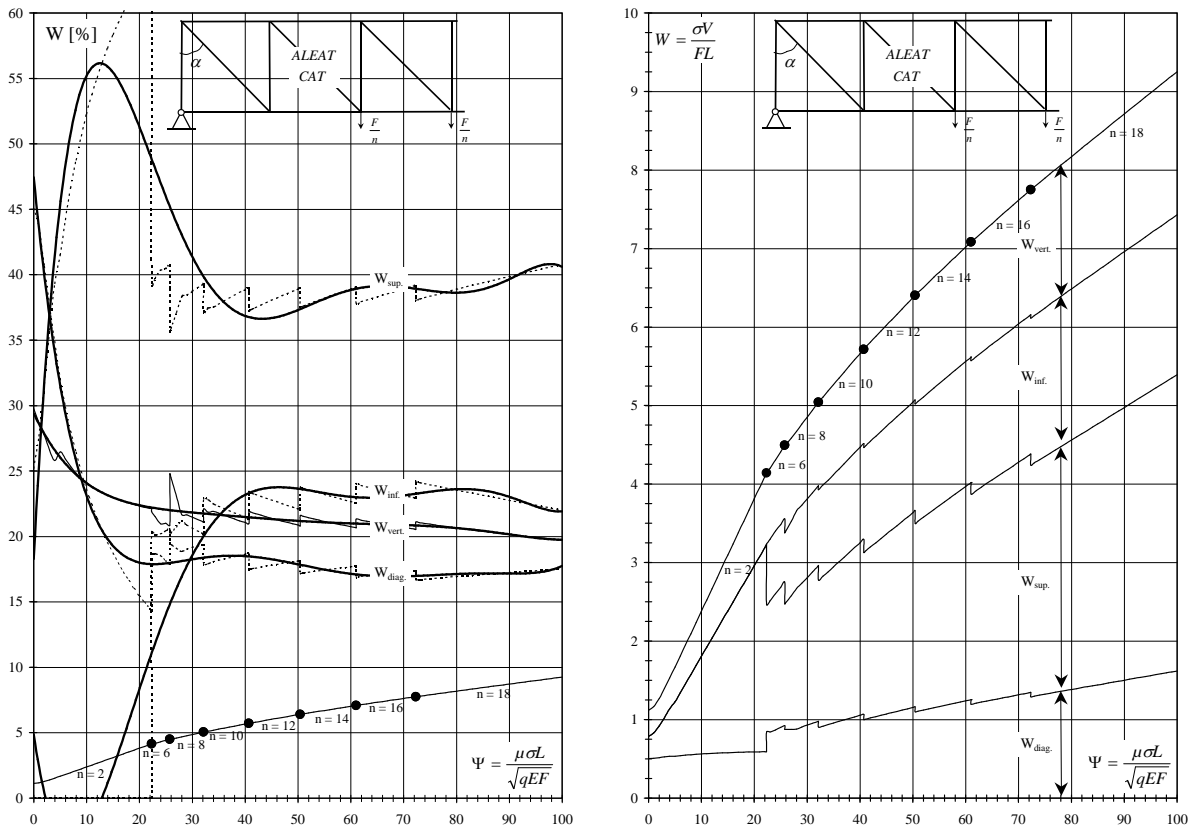
Le gain en volume apporté par une optimisation individuelle des barres (*optimax*), en comparaison avec une optimisation par catégories de barres identiques (*Cat*) varie de **20 à 40 %** selon la configuration, le nombre de mailles (sauf pour les petits nombres de mailles ou ces pourcentages peuvent diminuer pour le cas *Sous*) ou les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .

Ceci est illustré à la figure II.6 ci-dessous pour  $n=6$  et  $n=18$  respectivement. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1.



**Figure II.6 :** valeurs du gain  $(W_{Cat} - W_{Optimax})/W_{Cat}$  d'indicateur de volume obtenu suite à une optimisation individuelle des barres (*Optimax*), pour 8 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis *Sous*.

## II.2.4. Indicateur de volume par groupes de barres :


 Figure II.7 : parts d'indicateur de volume par groupes de barres pour le cas *Aleat\_Cat\_Norm*.

Que les barres soient optimisées individuellement (*Optimax*) ou par catégories (*Cat*), il peut être intéressant de connaître les parts d'indicateur de volume relatives à chaque groupe de barres (diagonales, verticales, éléments supérieurs et inférieurs). On considère ici les courbes enveloppes des courbes d'efficacité constituées de morceaux de courbes relatifs à des nombres de mailles différents. Pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ , ces courbes enveloppes correspondent toujours à 2 mailles et le comportement des treillis est toujours particulier comme on peut le voir sur la figure II.7 relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*. Pour des nombres de mailles supérieurs à 2, on constate que :

*Pour les charges distribuées :*

- la membrure supérieure apporte la plus grande part d'indicateur de volume, de l'ordre de **40% à 50%**.
- les éléments verticaux apportent une contribution au volume total de l'ordre de **25%**.
- l'apport des éléments diagonaux et inférieurs est plus variable, selon les valeurs de  $\Psi$  : de **5 à 25%**,

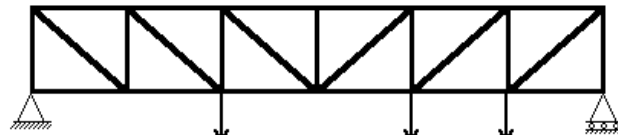
*Pour les charges aléatoires, la répartition est beaucoup moins variable :*

- la membrure supérieure apporte la plus grande part d'indicateur de volume, de l'ordre de **40%**.
- les éléments verticaux, diagonaux et inférieurs apportent chacun une contribution au volume total relativement constante de l'ordre de **20 %**.

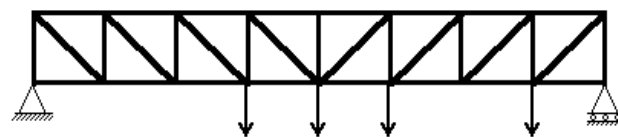
Ces conclusions sont valables dans les 8 cas de figure relatifs au treillis Pratt, comme le montrent les autres figures reprises en annexe 1 (*Figures Pratt\_\*.3 et 4*).

### II.3. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMAUX

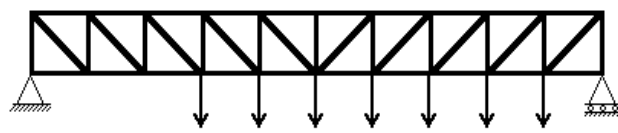
**Figure II.8 :** quelques treillis optimaux composant la courbe enveloppe des treillis composés de catégories de barres et soumis à une charge aléatoire. (*Pratt\_Aleat\_Cat\_Norm*).



$$\Psi = 25, n = 6, W = 4,411, L/H = 7,2, \alpha = 50,0^\circ$$



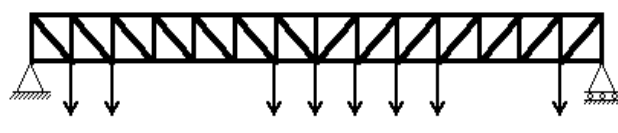
$$\Psi = 30, n = 8, W = 4,851, L/H = 8,5, \alpha = 46,8^\circ$$



$$\Psi = 40, n = 10, W = 5,661, L/H = 10,1, \alpha = 45,2^\circ$$



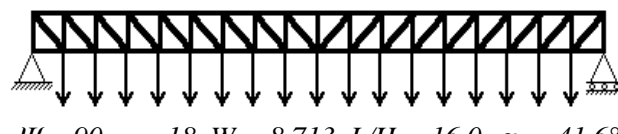
$$\Psi = 50, n = 12, W = 6,372, L/H = 11,6, \alpha = 43,9^\circ$$



$$\Psi = 60, n = 14, W = 7,016, L/H = 12,9, \alpha = 42,8^\circ$$



$$\Psi = 70, n = 16, W = 7,612, L/H = 14,3, \alpha = 41,7^\circ$$



$$\Psi = 90, n = 18, W = 8,713, L/H = 16,0, \alpha = 41,6^\circ$$

Les courbes enveloppes de L/H des treillis optimaux (figure II.9 et en annexe 1 aux figures Pratt\_\*.2 (bas)) sont toutes très similaires, quelque soit le cas de figure. De façon générale, les treillis optimaux

dont le nombre de mailles est compris entre 2 et 18 ont toujours un élargement géométrique compris entre 2 et 17 :

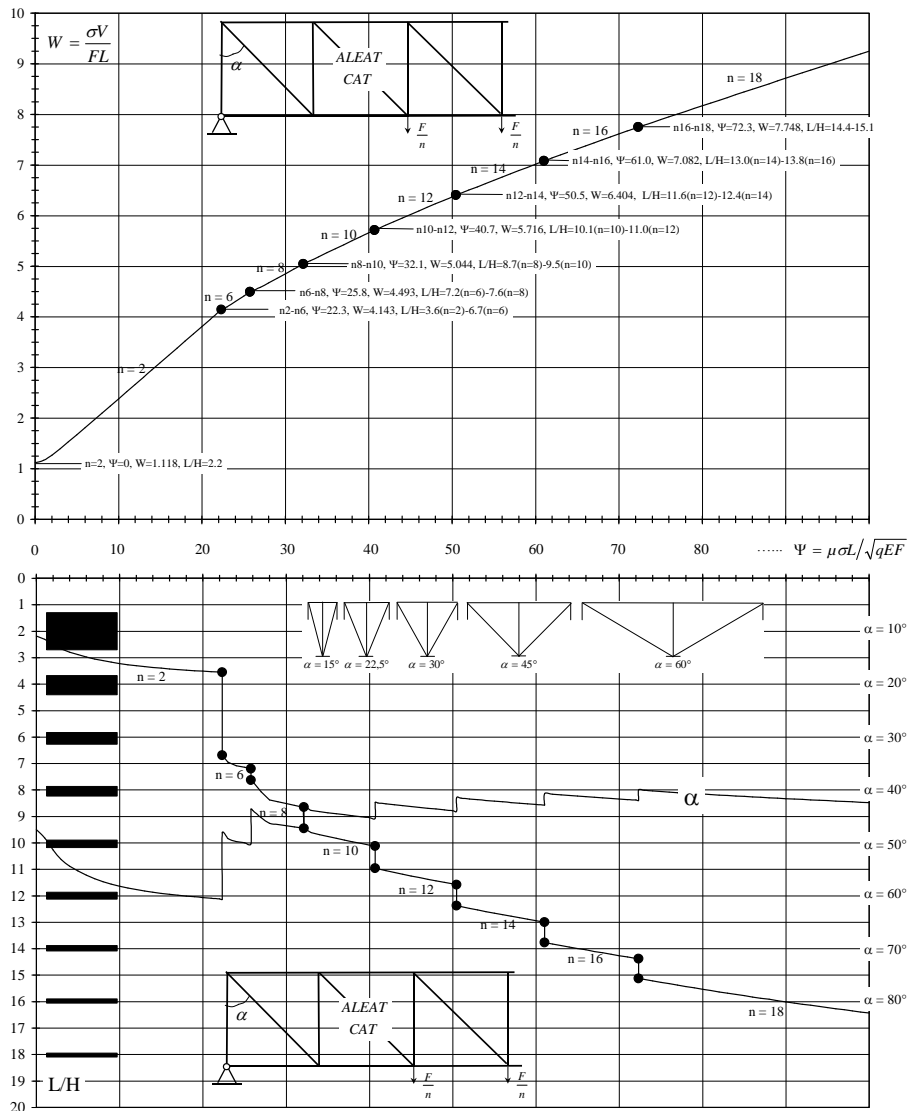
$$2 \leq (L/H)_{opt} \leq 17$$

Par ailleurs, pour les nombres de mailles supérieurs à 6, l'angle d'ouverture des mailles est toujours sensiblement constant, quelque soit le cas. Ceci est illustré à la figure II.9 qui montre, entre autres, l'enveloppe des courbes d'efficacité relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*.

$$(35^\circ \dots) 40 \leq (\alpha)_{opt} \leq 45^\circ$$

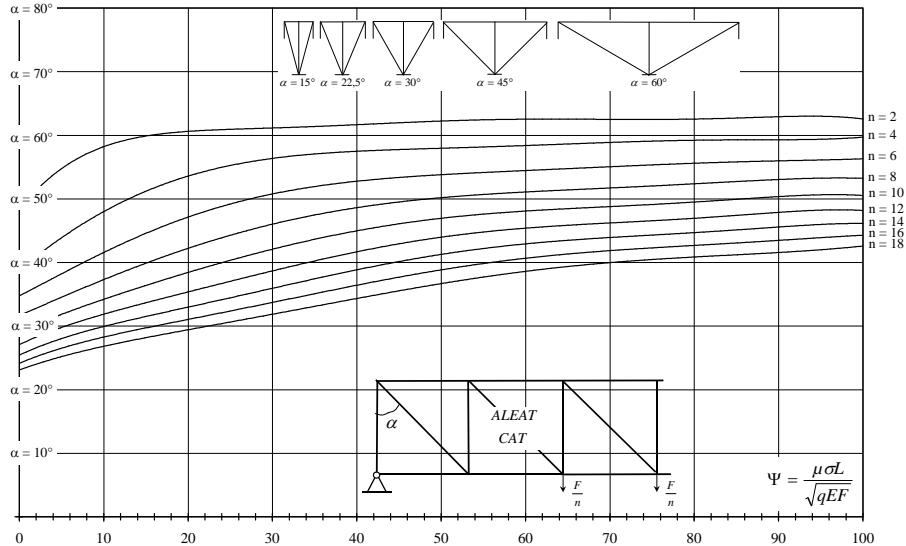
Globalement, les treillis optimaux des courbes enveloppes des courbes d'efficacité sont constitués de **mailles carrées**.

La figure II.8 montre quelques treillis optimaux relatifs au cas *Aleat\_Cat\_Norm*.

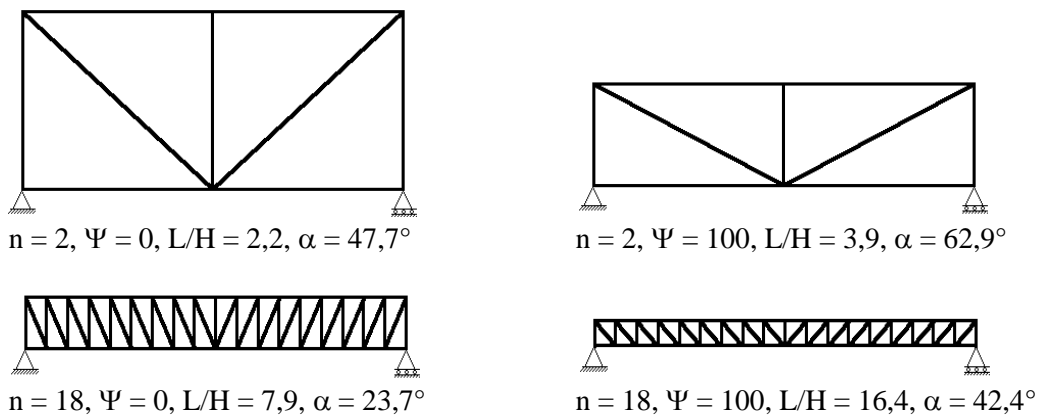


**Figure II.9 :** Enveloppe des courbes d'efficacité relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*. La figure inférieure comprend les valeurs de l'angle d'ouverture de maille  $\alpha$ , à lire sur l'axe de droite.

La figure II.10 montre, pour ce cas *Aleat\_Cat\_Norm*, les angles d'ouverture de mailles pour tous les nombres de mailles compris entre 2 et 18 et sur toute la gamme des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  jusqu'à 100. De façon générale et similaire pour les 7 autres cas, l'angle d'ouverture des mailles doit toujours être compris entre  $20^\circ$  et  $65^\circ$ .



**Figure II.10 :** angles d'ouverture de mailles relatifs aux courbes d'efficacité pour  $n=2, 4, \dots, 18$  pour le cas *Aleat\_Cat\_Norm*. Les courbes relatives aux autres cas, reprises en annexe 1, sont très semblables.



**Figure II.11 :** cas extrêmes (cas *Aleat\_Cat\_Norm*).

La figure II.11 montre les 4 cas extrêmes dans le cas *Aleat\_Cat\_Norm*. Les autres cas sont très similaires.

## II.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMAUX

Il va de soi que les cas relatifs à une optimisation individuelle des barres et à une charge distribuée uniformément sont ceux qui créent les barres les plus élancées. Pour les treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*), les barres en compression les plus élancées sont les 2 verticales voisines de la verticale centrale. Pour les treillis situés sous les appuis, c'est la verticale centrale qui est la plus élancée.

La figure II.12 montre la répartition des efforts dans les deux cas typiques (*Norm* et *Sous*). L'exemple correspond à 6 mailles et une charge de 10 kN par nœud.

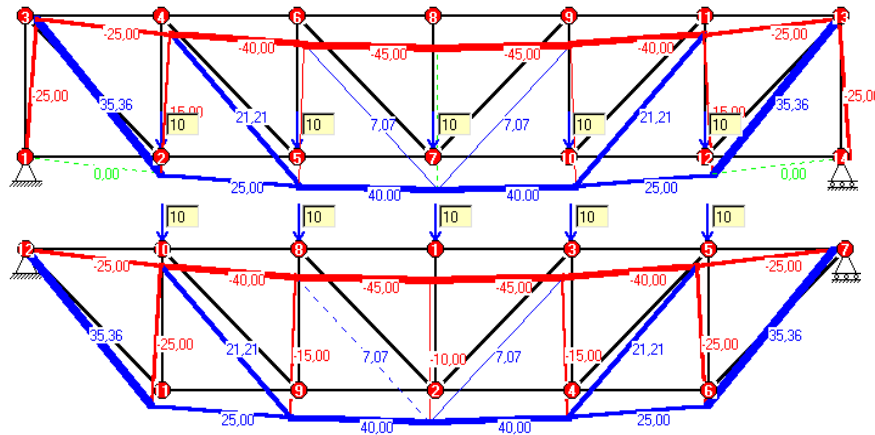


Figure II.12 : répartition des efforts dans les treillis Pratt.

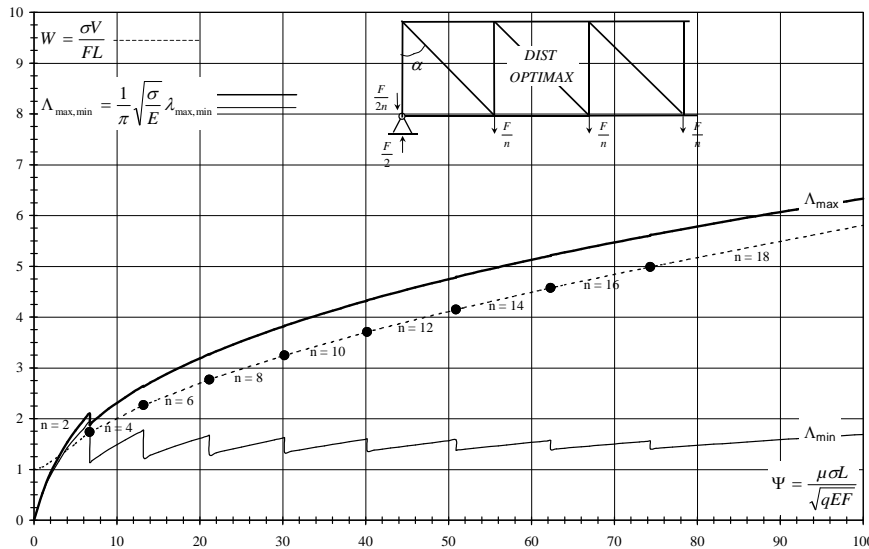
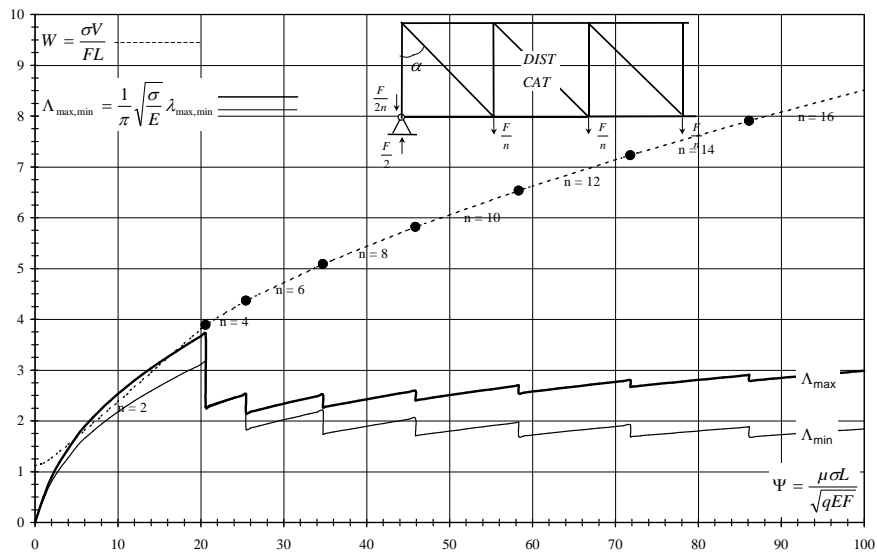


Figure II.13 : indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  (courbe en gras) des verticales les plus élancées relatives aux treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficacité (cas *Distr\_Optimax\_Norm*).

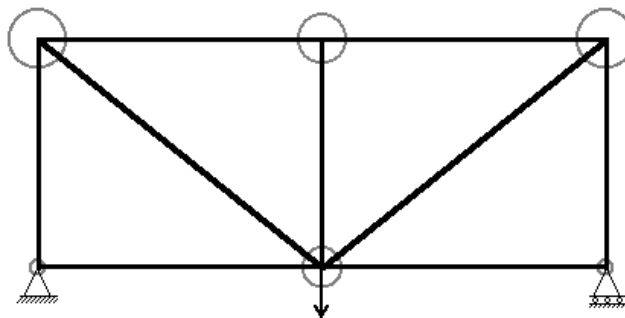
La figure II.13 représente les valeurs de l'indicateur d'élancement  $\Lambda$  des barres en compression les plus élancées pour les treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficacité dans le cas *Distr\_Optimax\_Norm*. La figure II.14 montre ces mêmes valeurs pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*. Les courbes relatives aux autres cas sont reprises en annexe 1 et mènent aux mêmes conclusions. Dans le cas d'une optimisation individuelle des barres, on constate que l'indicateur d'élancement dépasse des valeurs de 5, voire 6 pour  $\Psi \rightarrow 100$ , ce qui est difficilement acceptable. En pratique, Il faudra donc surdimensionner les barres concernées, ce qui ne devrait pas avoir de grande conséquence sur la valeur de l'indicateur de volume et sur les conclusions précédentes. La figure II.14 montre par ailleurs une amélioration sensible, sur ce point de vue, lorsque les treillis sont composés de catégories de barres identiques. Dans ce cas en effet l'indicateur d'élancement de ces barres ne dépasse pas 3 (sauf sur le segment de courbe relatif à  $n=2$ , mais sans toutefois dépasser 4).



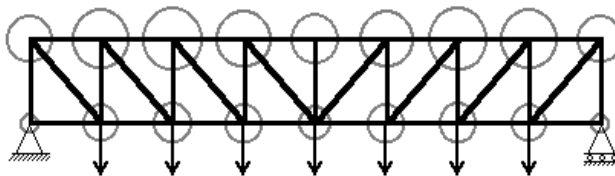
**Figure II.14 :** indicateur d'élancement  $\Lambda_{\max}$  (courbe en gras) des verticales les plus élancées relatives aux treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficacité (cas *Distr\_Cat\_Norm*).

### II.5. REPARTITION DU POIDS PROPRE

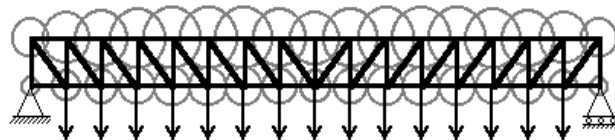
**Figure II.15 :** répartition du poids propre dans quelques treillis optimaux de la courbe enveloppe relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*. Le rayon des cercles est proportionnel à la charge de poids propre reportée sur le nœud.



$n = 2, L/H = 2.5, \Psi = 5, \Phi = 0$



$n = 8, L/H = 7.2, \Psi = 25, \Phi = 0$



$n = 16, L/H = 12.5, \Psi = 70, \Phi = 0$

Au niveau de la répartition du poids propre sur chaque nœud, celle-ci est forcément la moins homogène lorsque les barres sont optimisées individuellement et soumises à une charge uniformément distribuée. La figure II.15, relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*, montre que cette distribution est, même dans ces cas, relativement homogène. Cette propriété a permis de réduire le nombre d'itérations lors du calcul des courbes d'efficacité pour des valeurs non-nulles de l'indicateur de poids propre  $\Phi$ .





Passerelle Pratt sur le canal du midi (France).

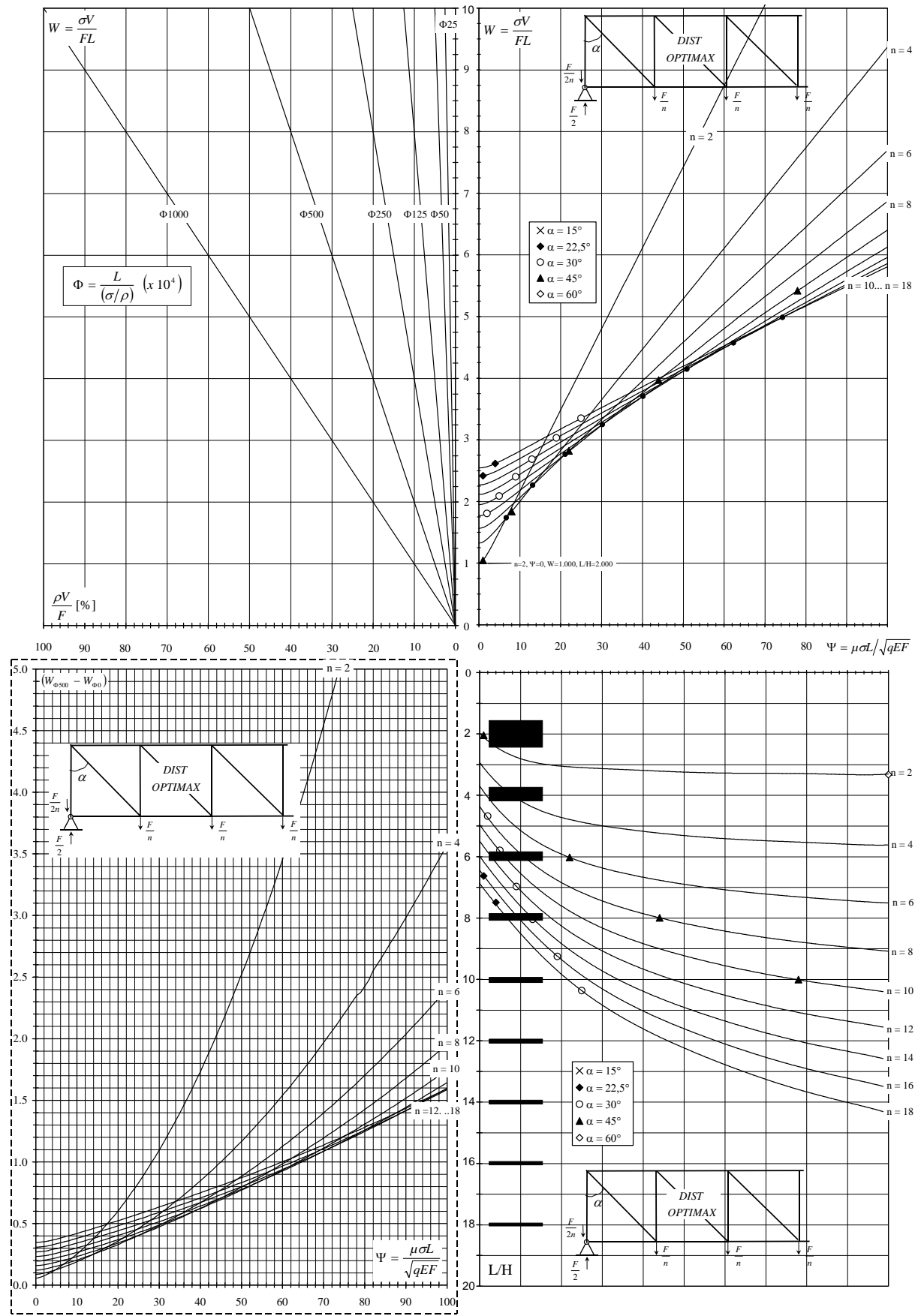


Figure II.16 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.



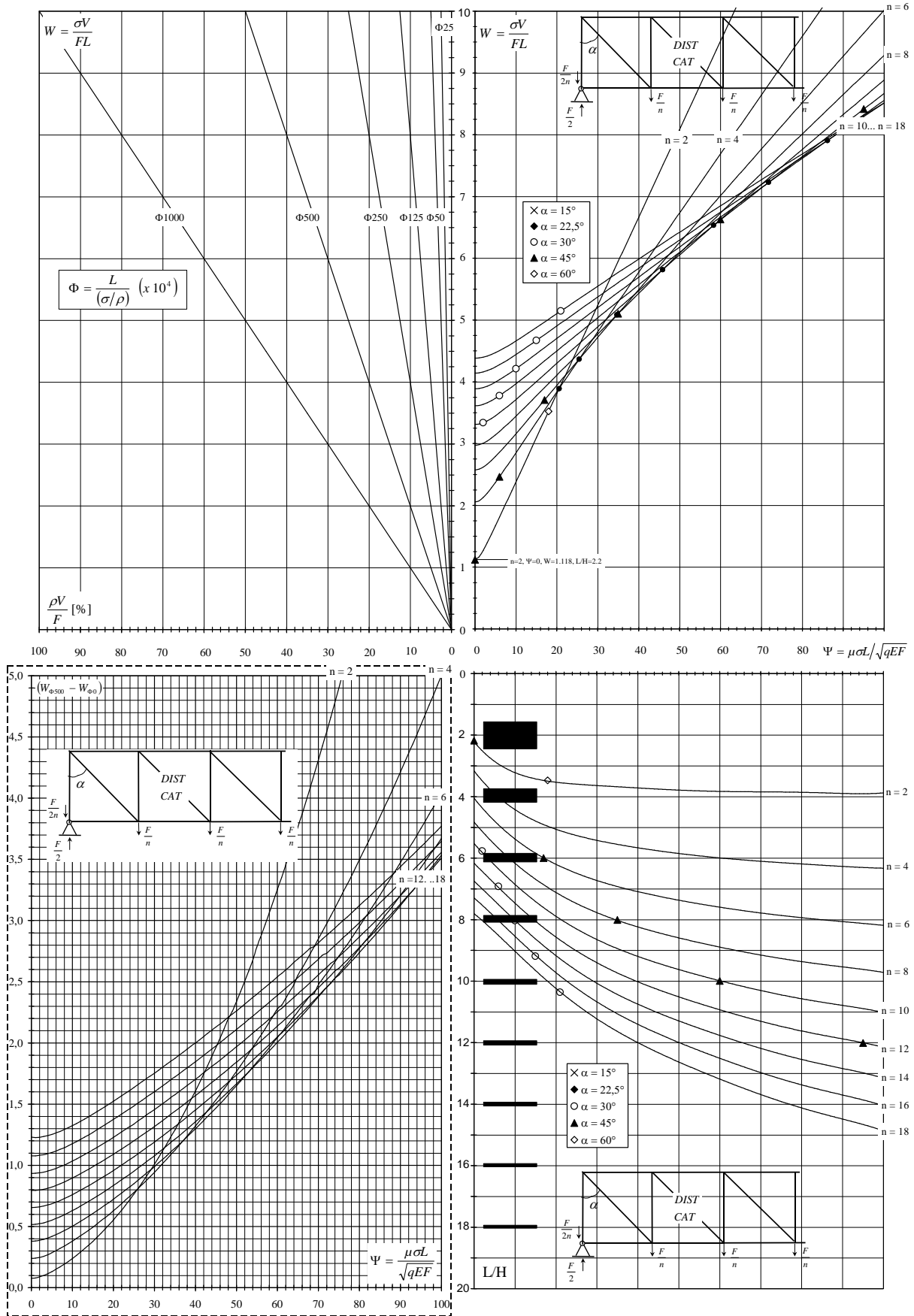


Figure II.18 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*.

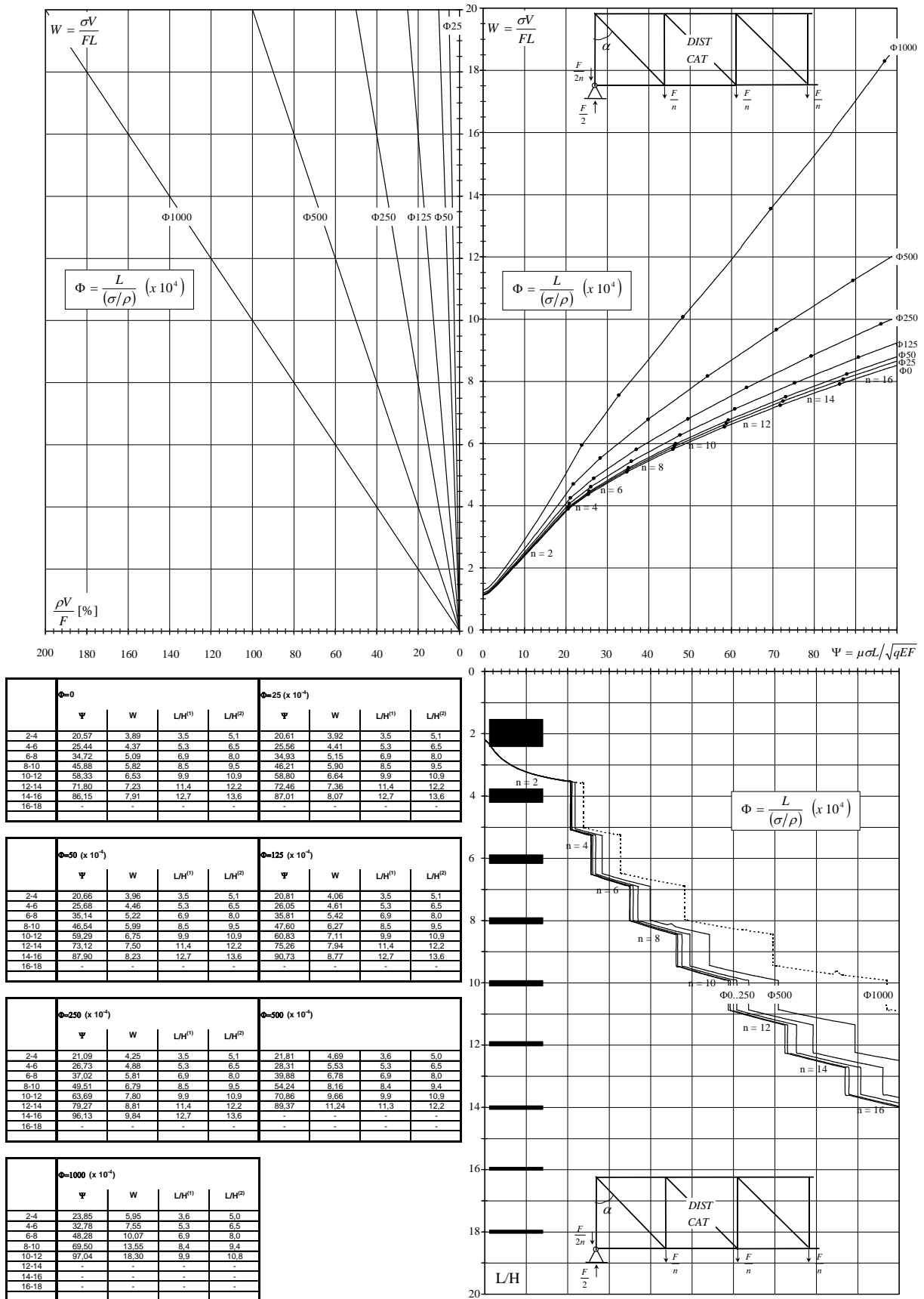


Figure II.19 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*.

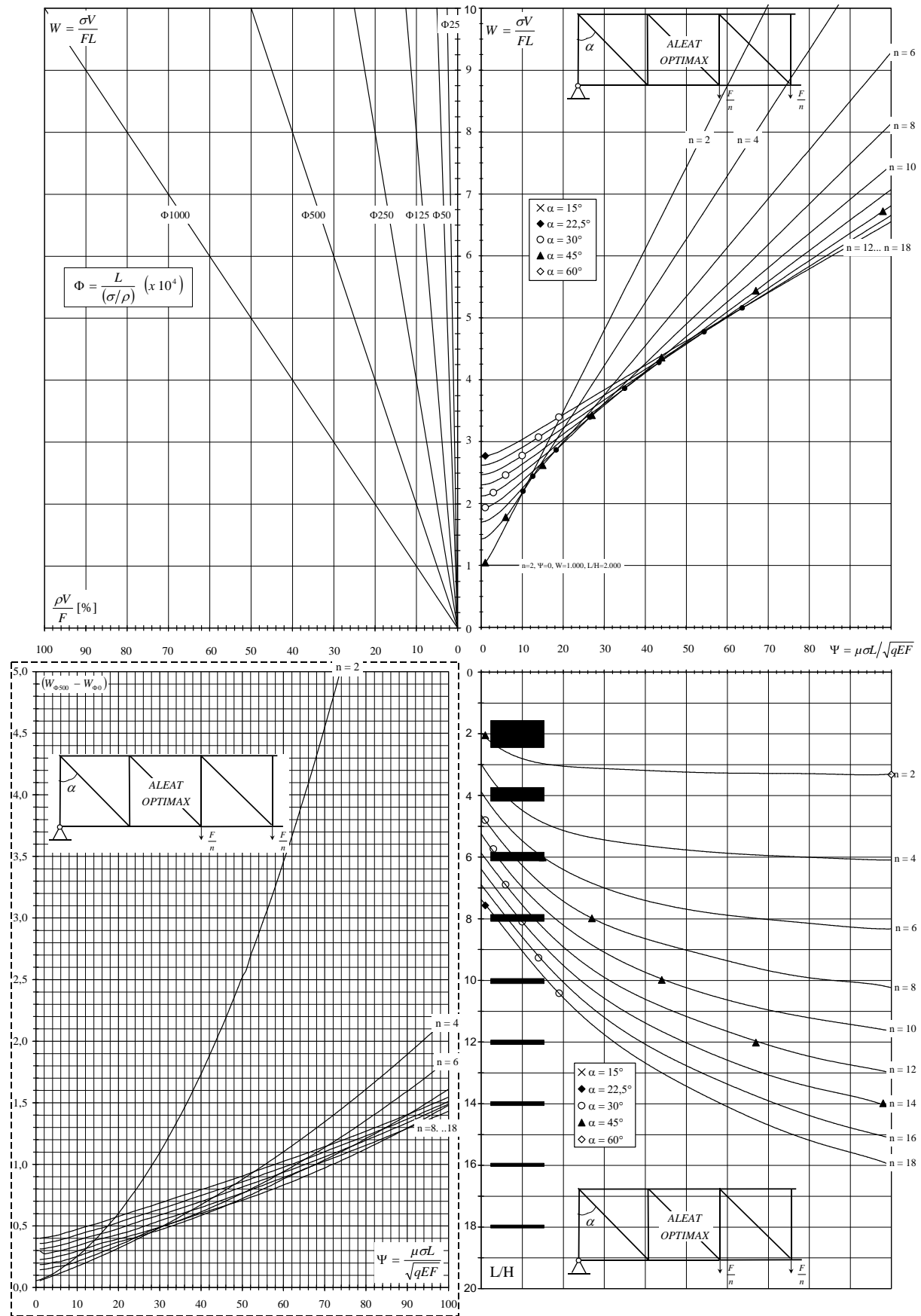


Figure II.20 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Aleat\_Optimax\_Norm*.

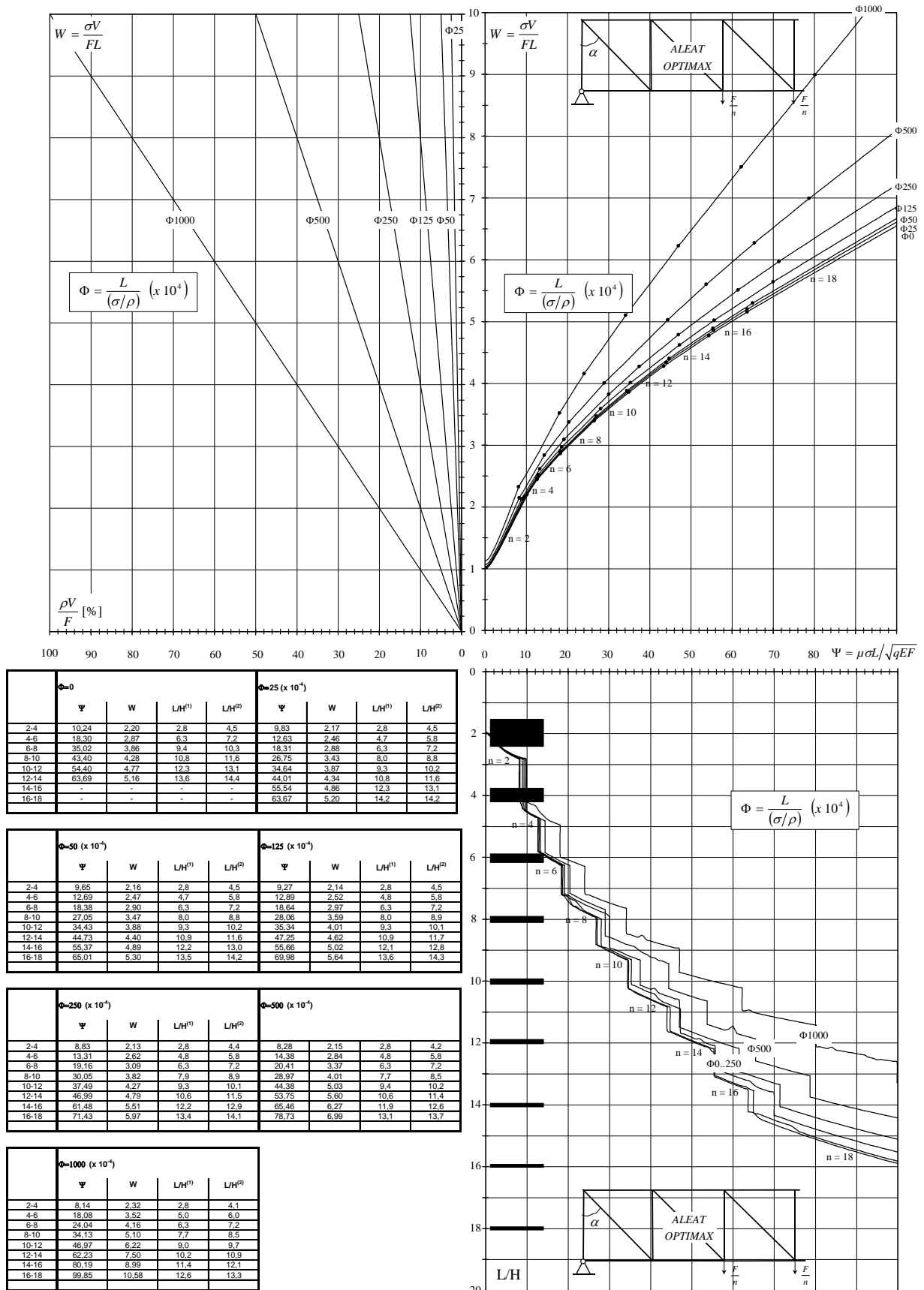


Figure II.21 : enveloppes des courbes d'efficience pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Optimax\_Norm.

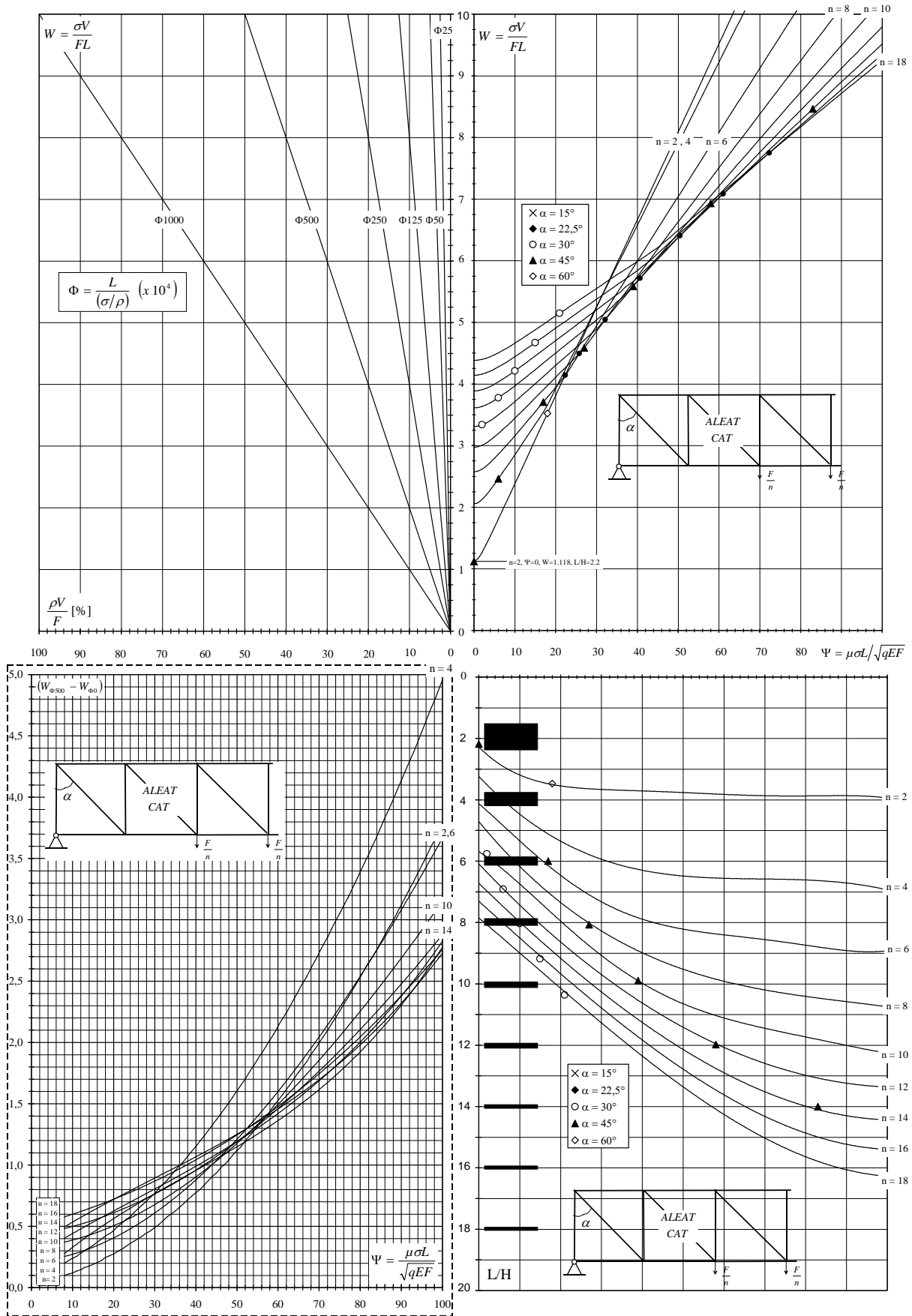


Figure II.22 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Aleat\_Cat\_Norm*.



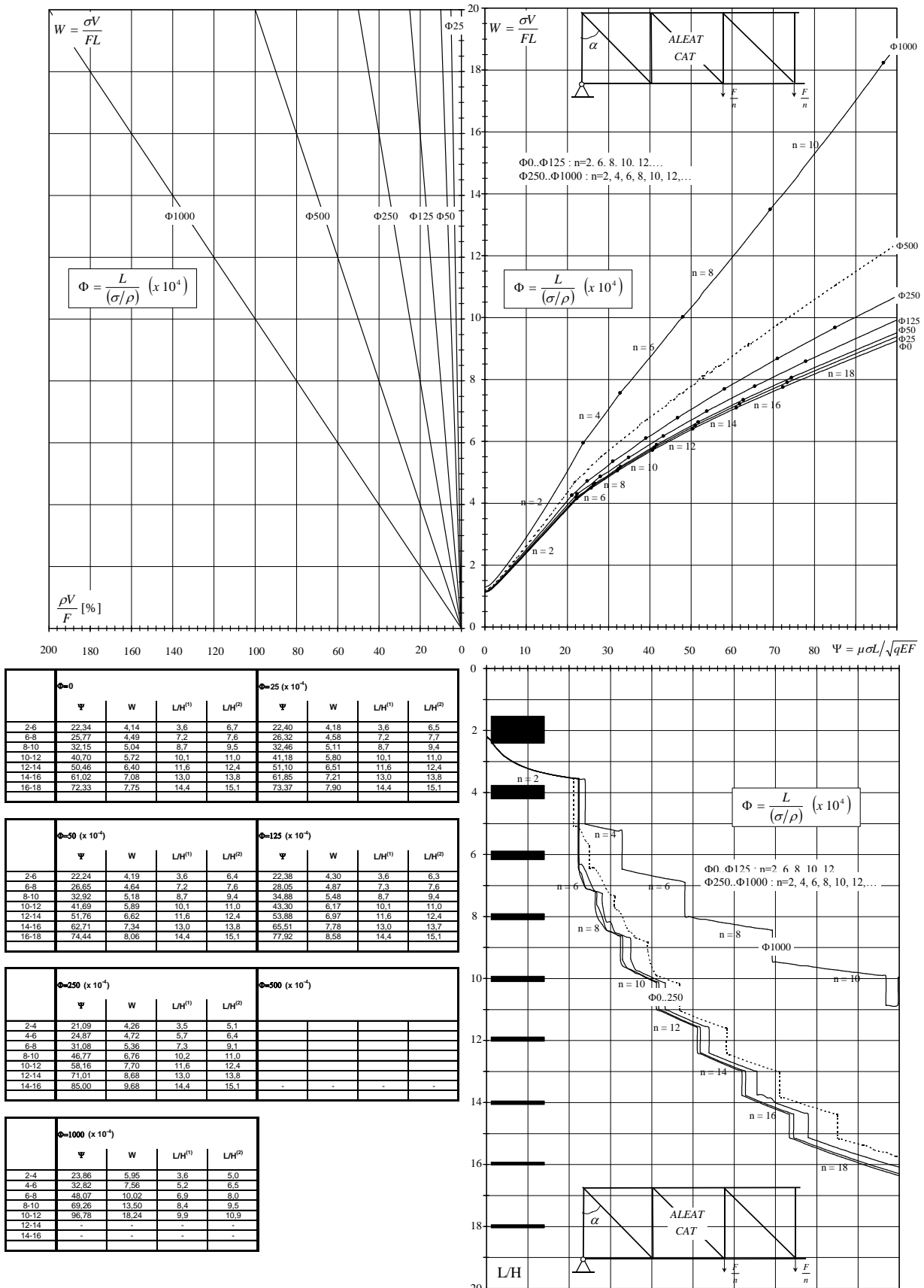


Figure II.23 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.

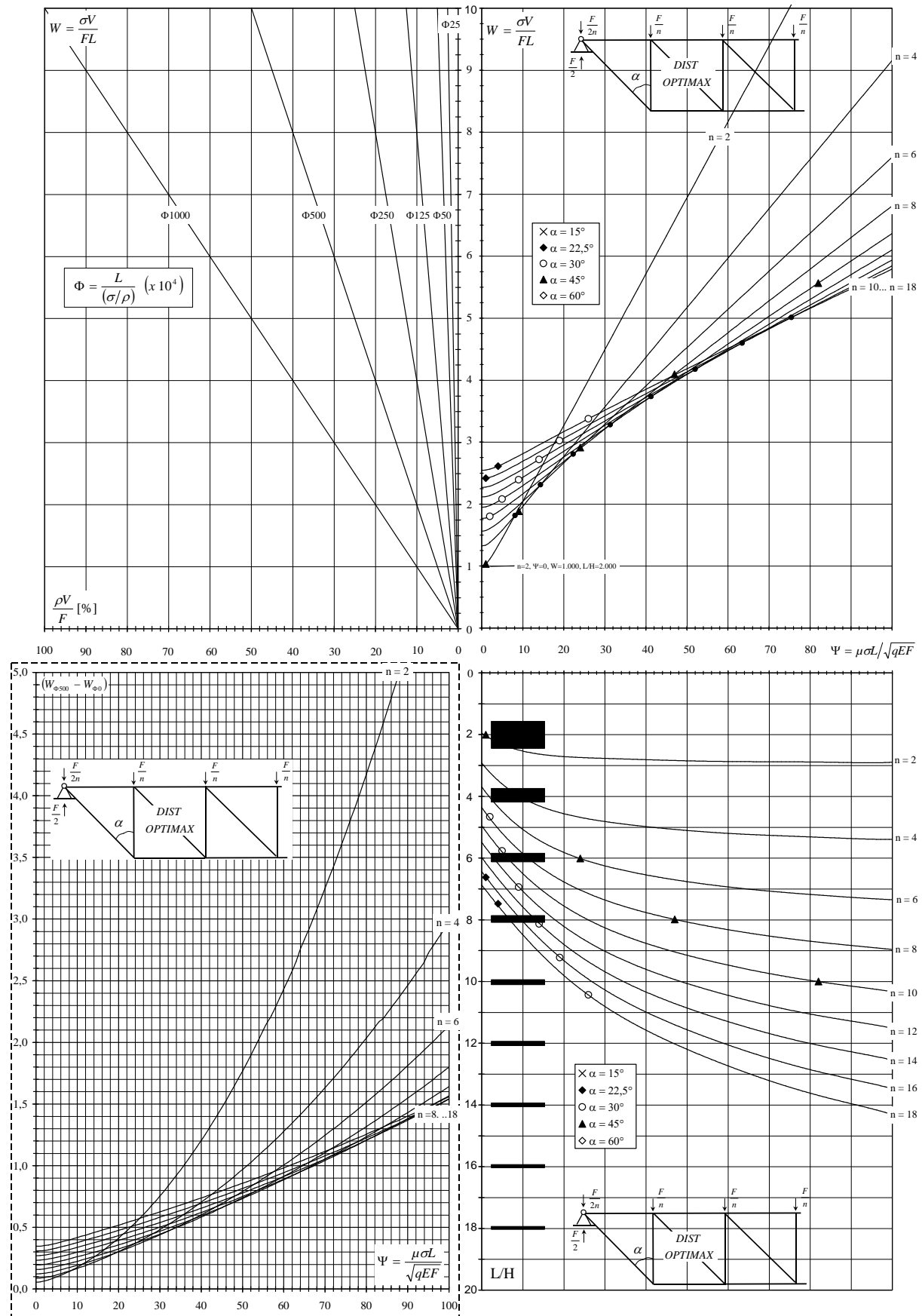


Figure II.24 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Sous*.

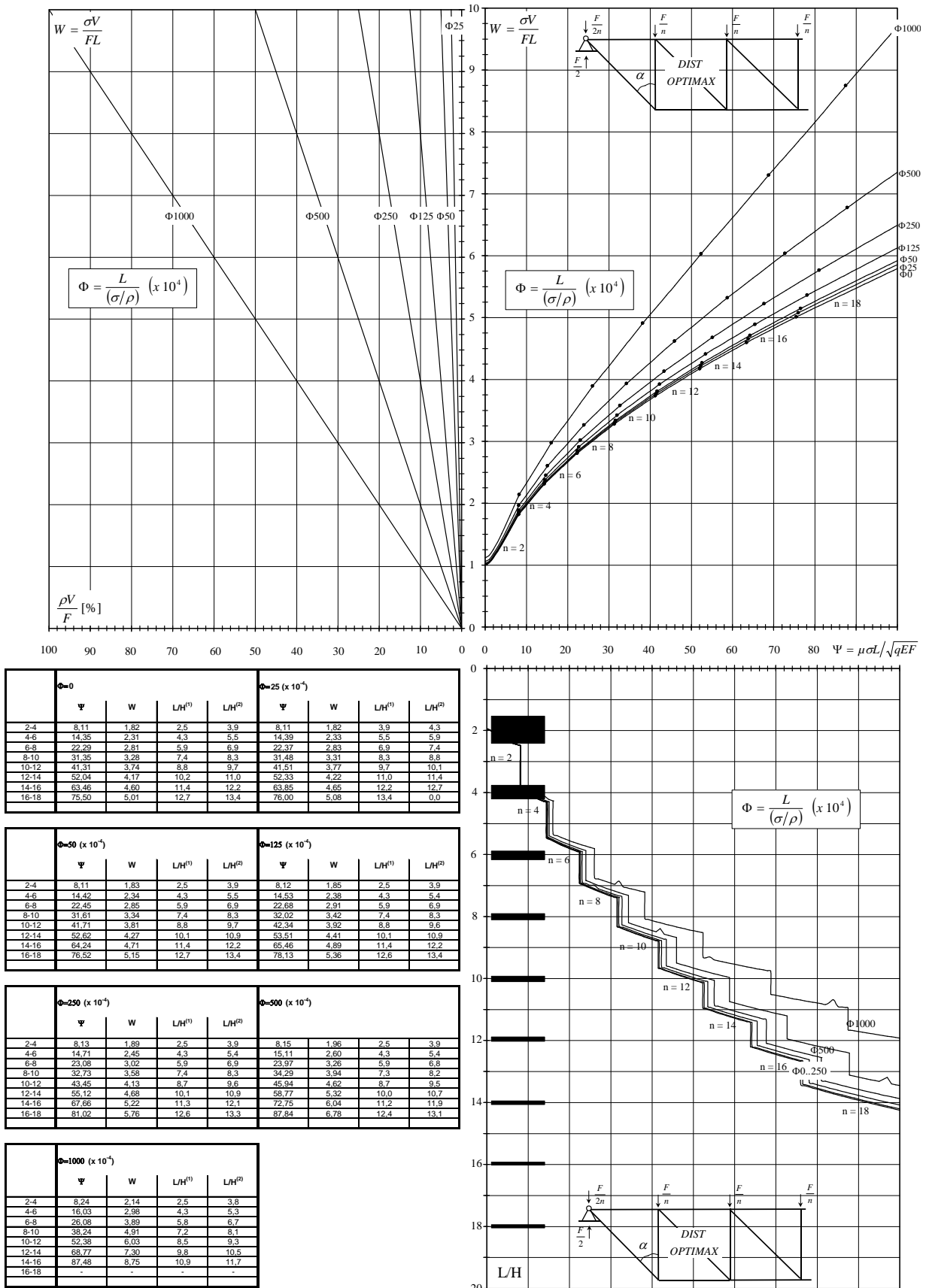


Figure II.25 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Optimax\_Sous*.

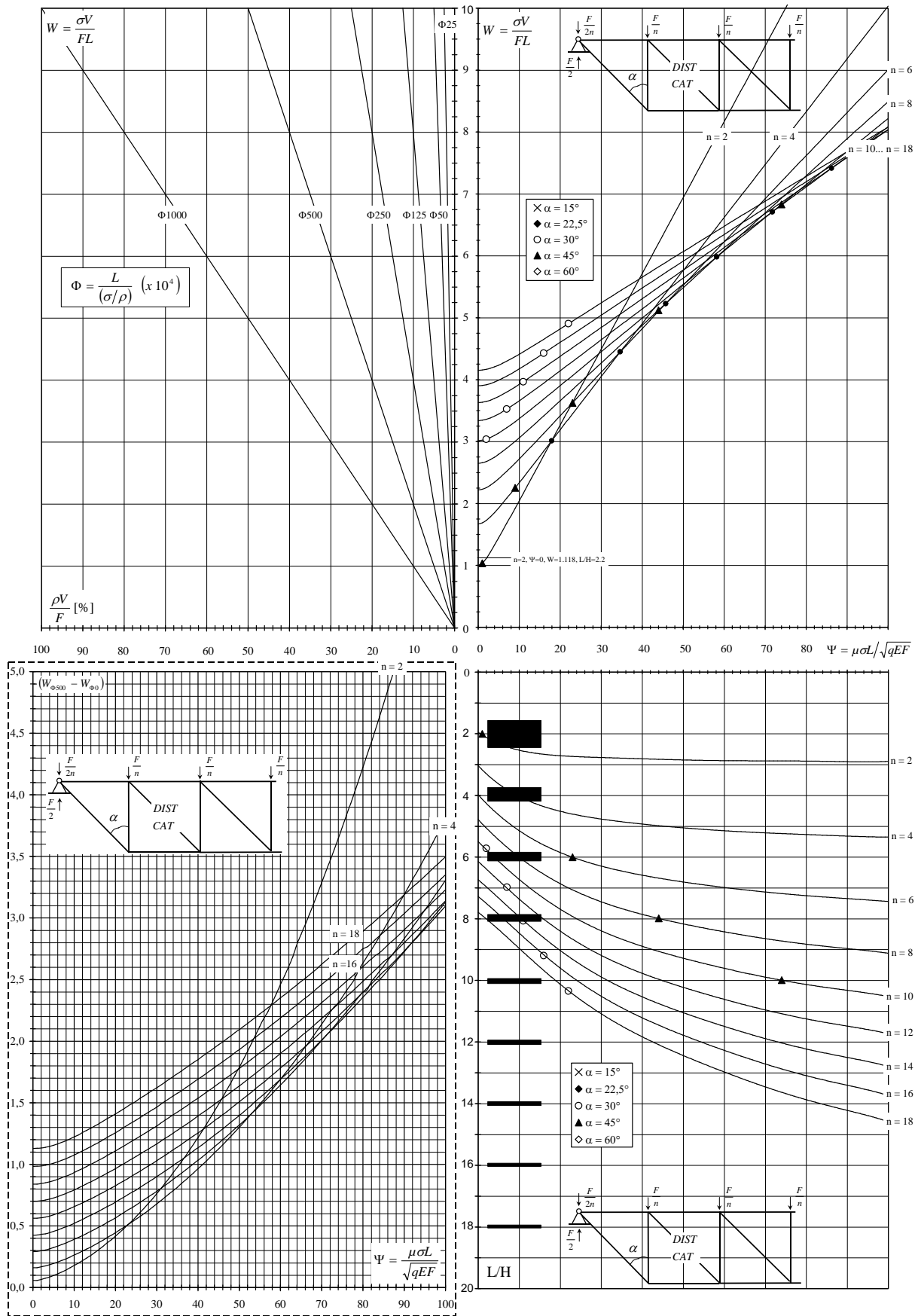


Figure II.26 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Sous*.

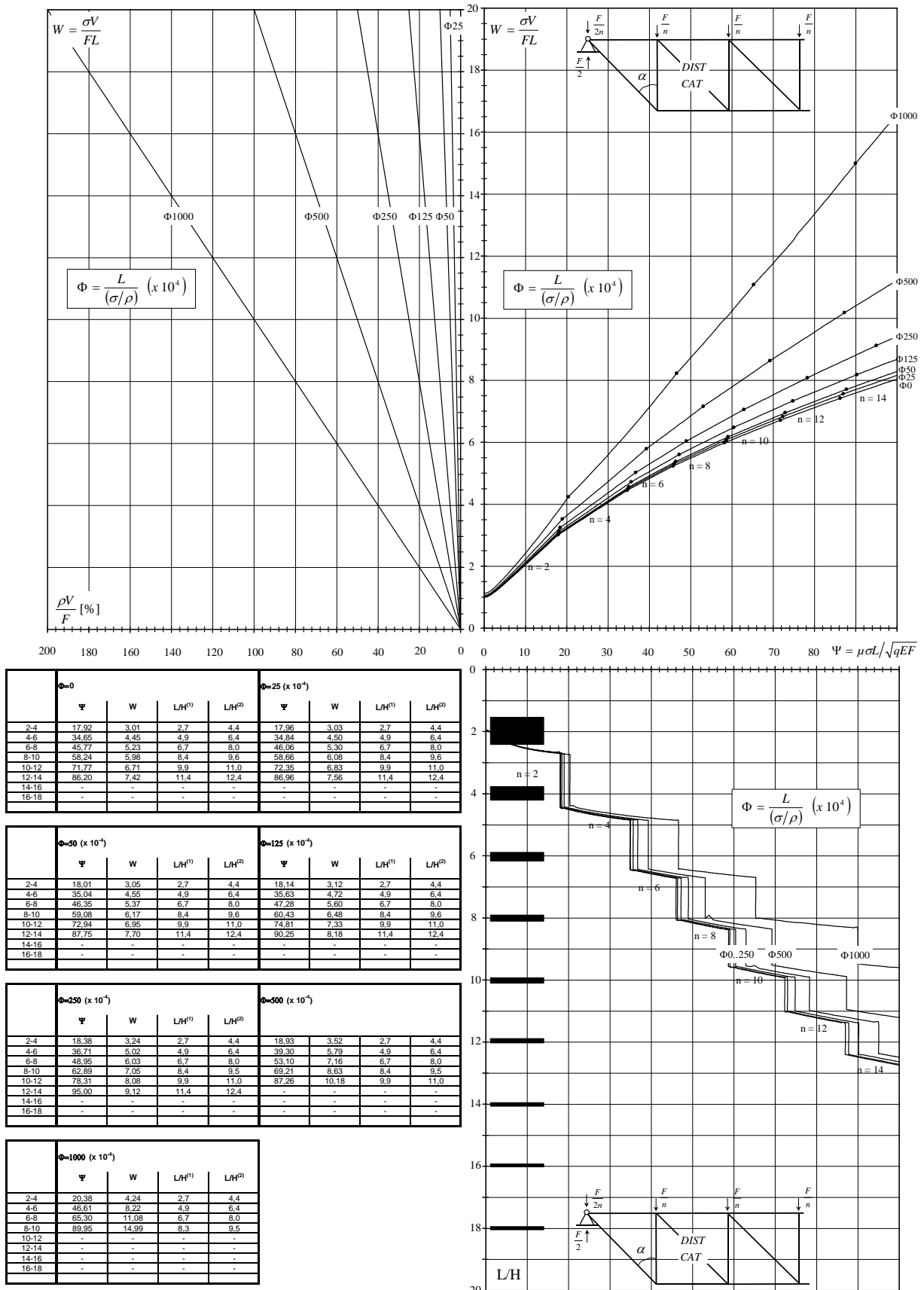


Figure II.27 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Cat\_Sous*.

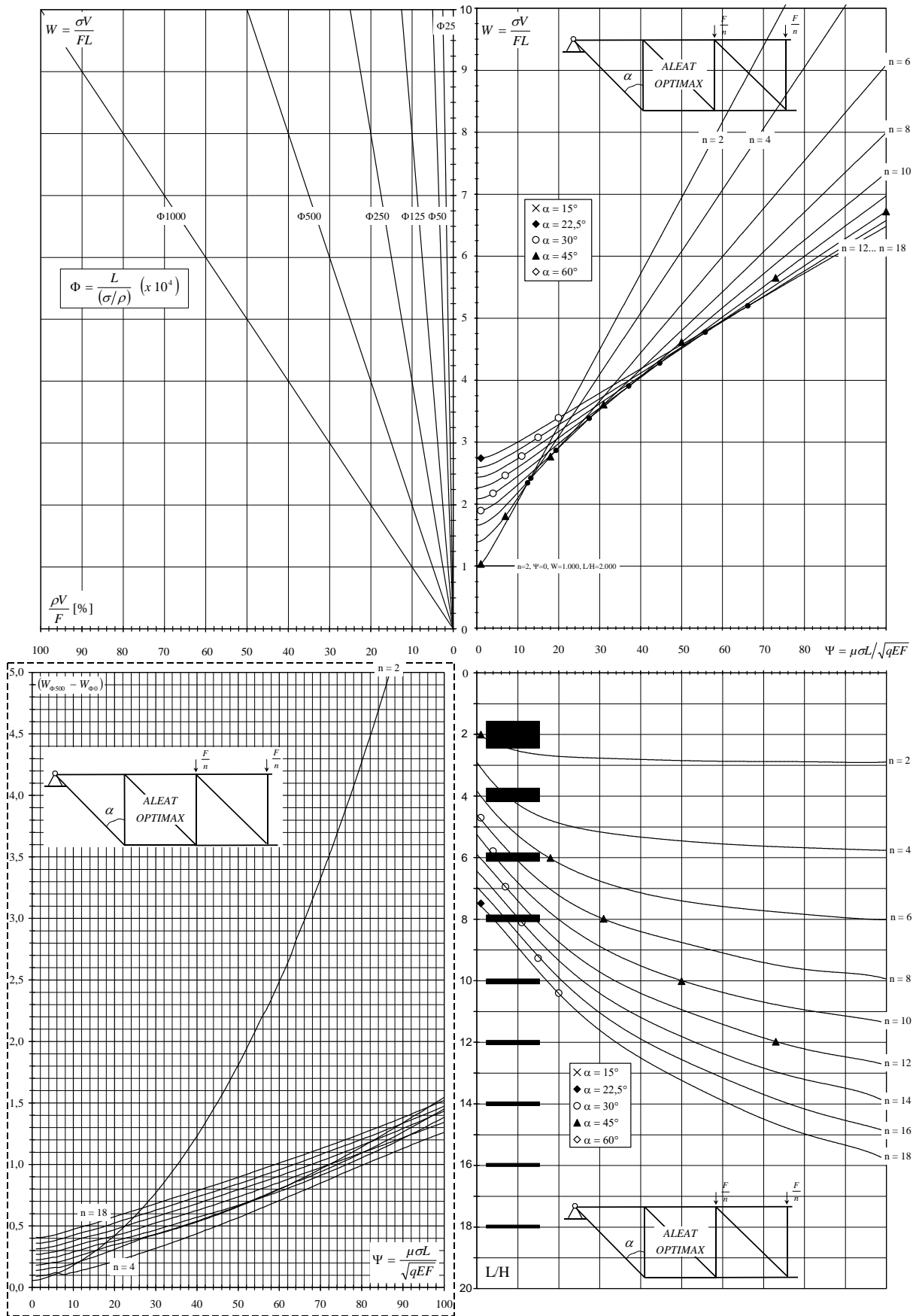


Figure II.28 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas Aleat\_Optimax\_Sous.

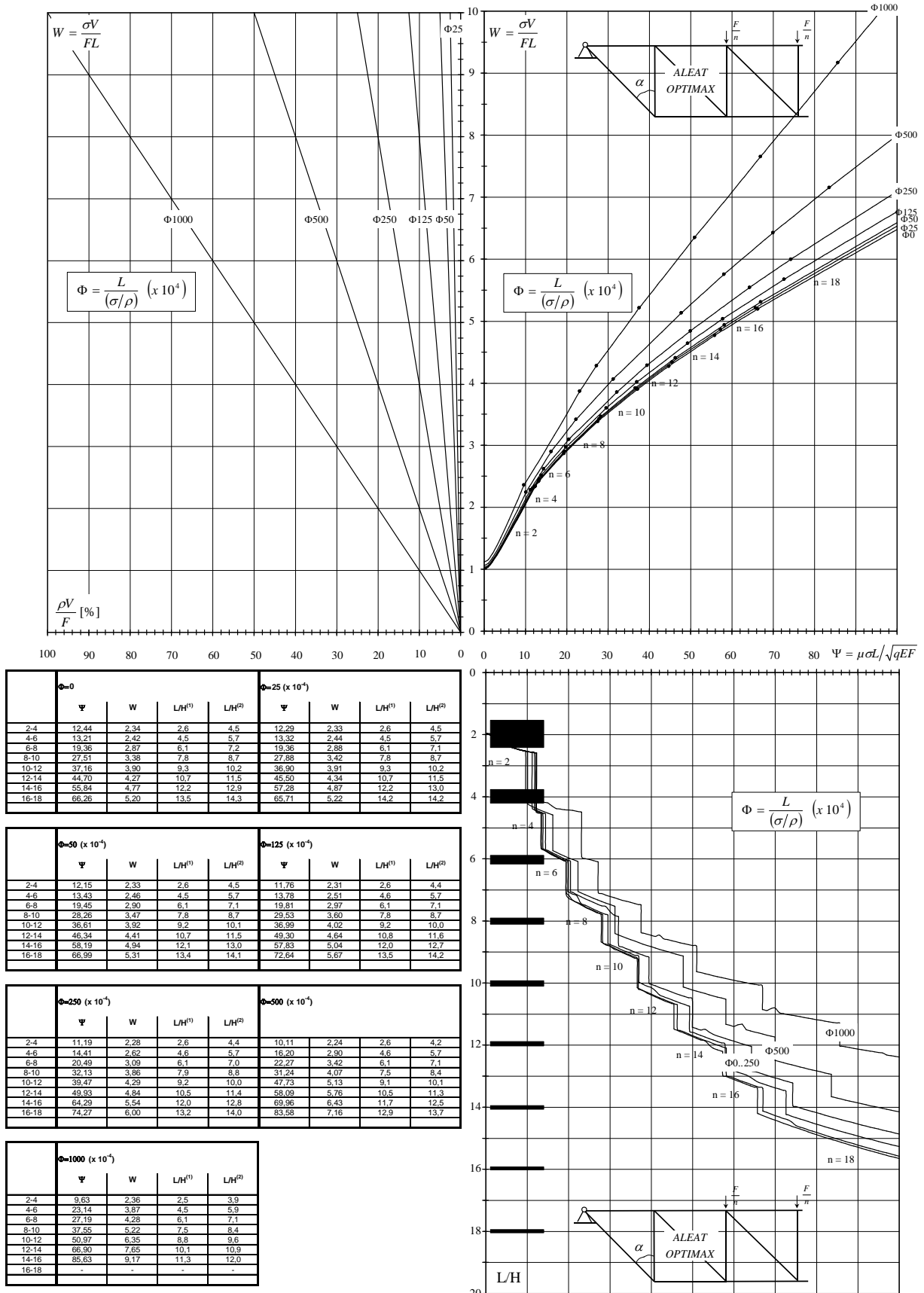


Figure II.29 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Aleat\_Optimax\_Sous*.

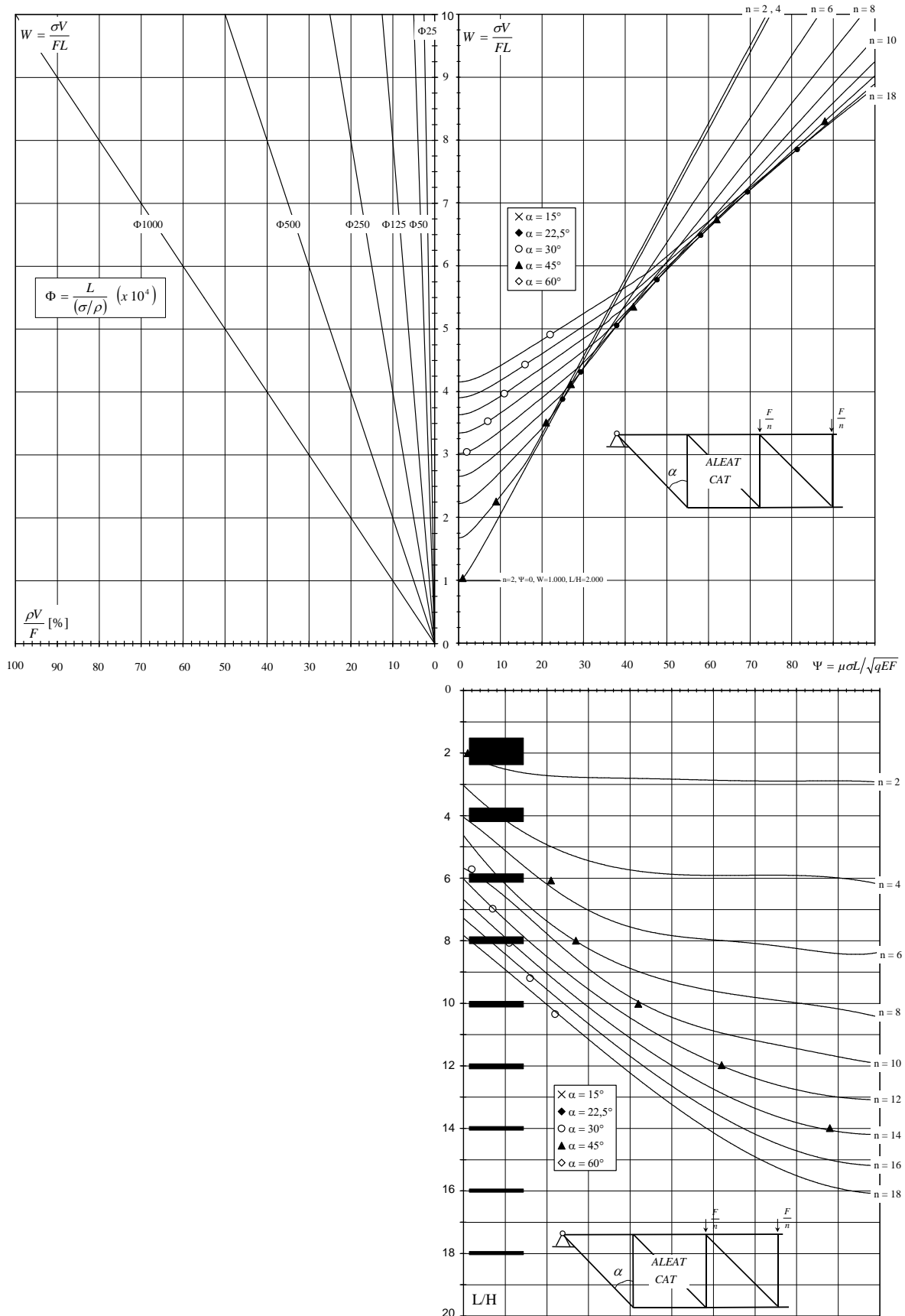


Figure II.30 : courbes d'efficace pour le cas Aleat\_Cat\_Sous.



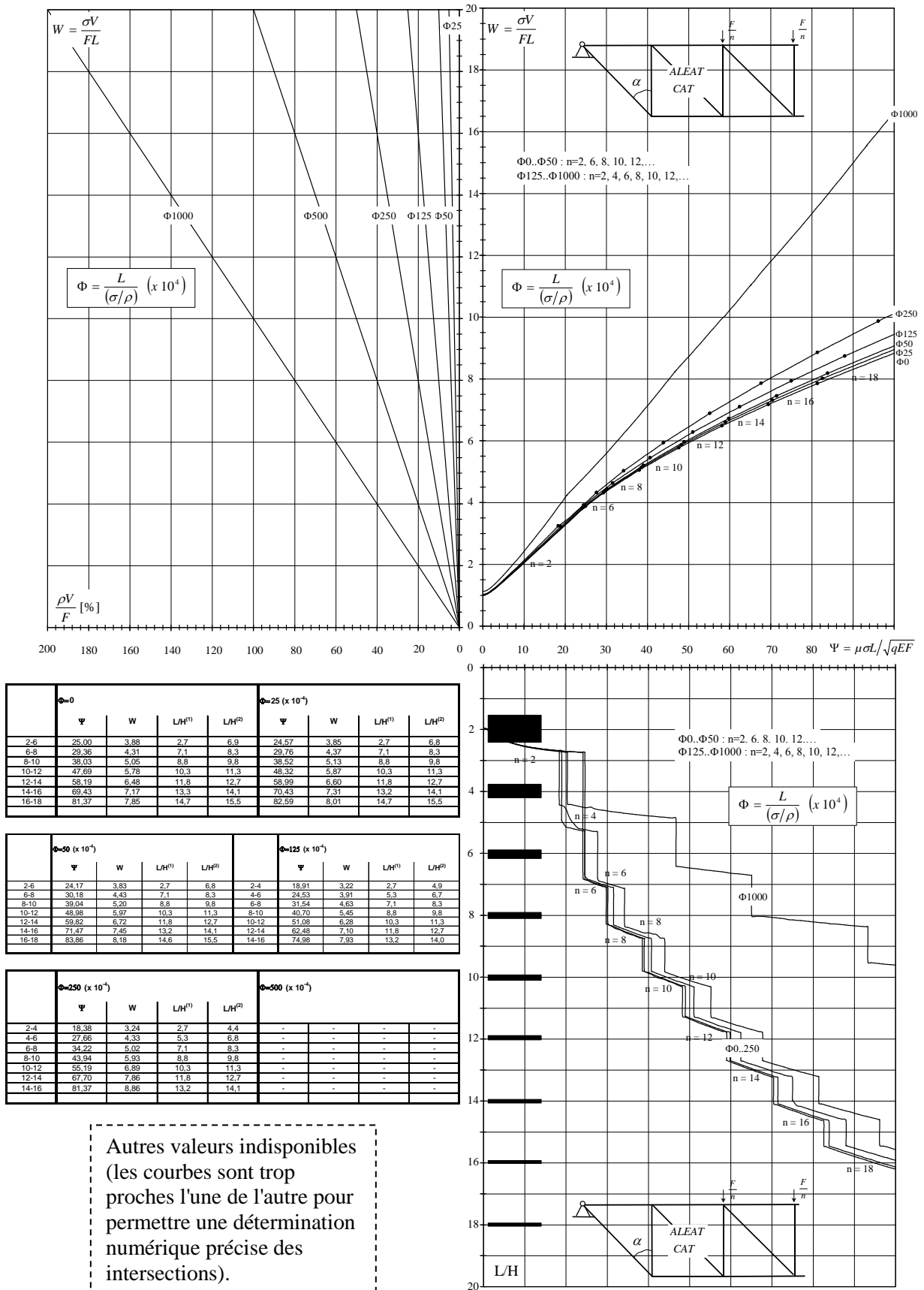
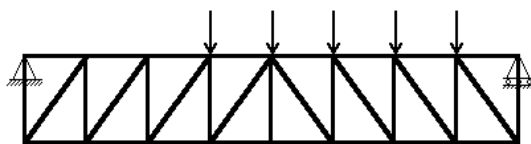
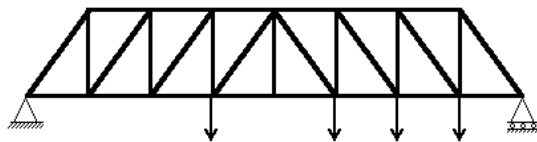


Figure II.31 : enveloppes des courbes d'efficacité pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Cat\_Sous.



# Partie III

## Les treillis Howe

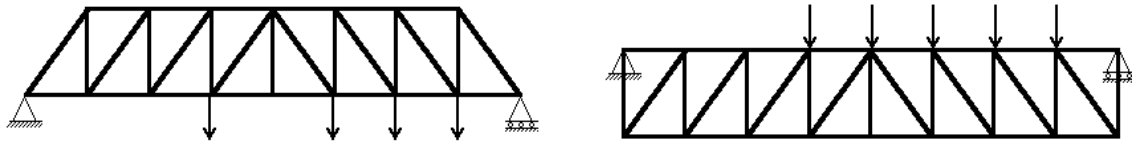




### III.1. AVANT PROPOS

*Avertissement* : la présente synthèse tente de résumer plus de 100 figures relatives aux treillis Howe et reprises en annexe 1. Afin de réduire la lourdeur de ce texte, seules les figures les plus significatives y sont intégrées.

De façon générale, l'étude porte sur les treillis Howe situés respectivement au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis, et les charges agissent toujours au niveau de celle-ci :



De nouveau, 8 cas sont donc analysés, comme illustré à la figure III.1. Le symbole utilisé pour désigner un treillis situé au dessus des appuis est *Norm* tandis que celui désignant le treillis situé en dessous est *Sous*. Pour chacune des deux configurations, on distingue :

- la charge uniformément distribuée (symbole *Dist*) ou la charge aléatoire (Symbole *Aleat*);
- le cas relatif à des barres optimisées de façon individuelle (Symbole *Optimax*) ou celui relatif à 4 catégories de barres identiques (Symbole *Cat*);

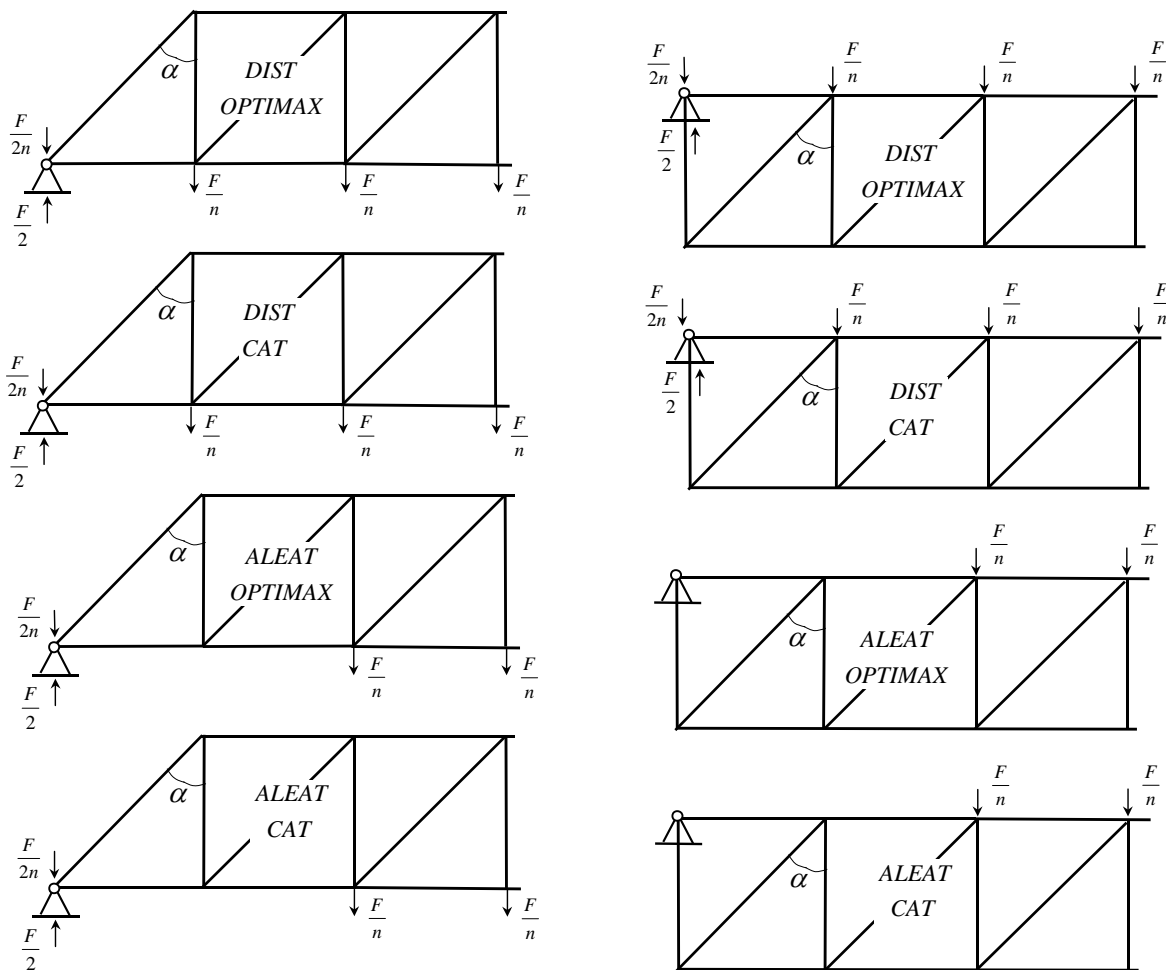
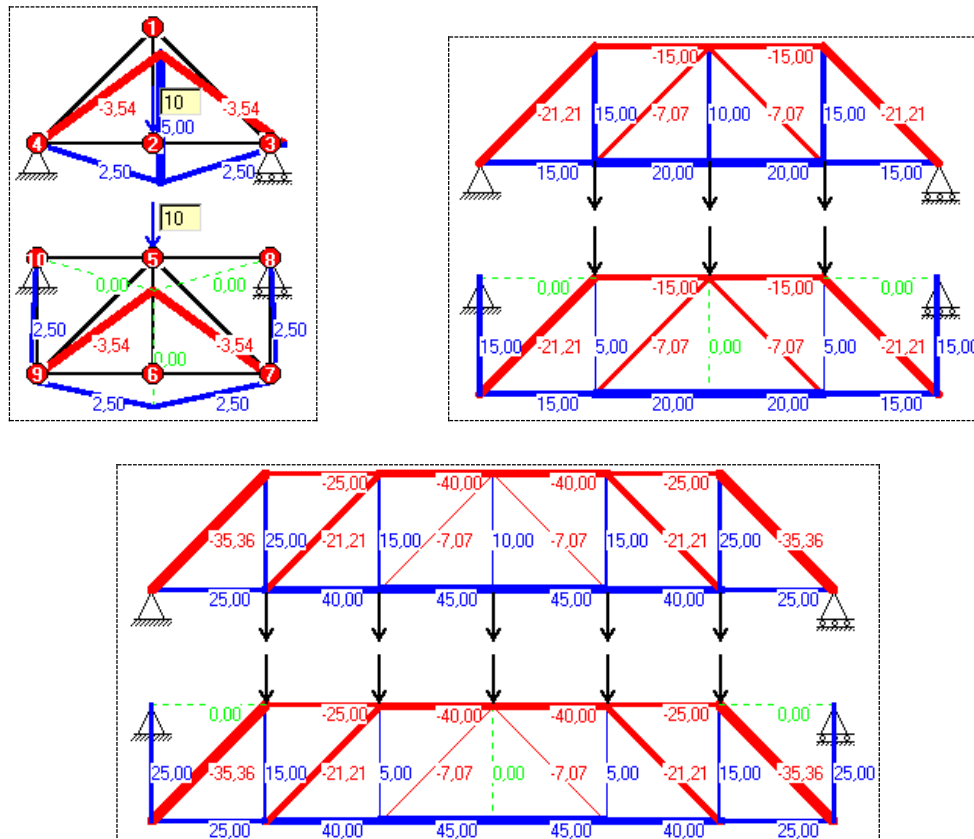


Figure III.1 : les 8 situations étudiées.

La différence essentielle entre les treillis Pratt et Howe se situe au niveau des éléments diagonaux qui, dans le treillis Howe, sont en compression, contrairement aux treillis Pratt où ils sont en traction. Globalement, les éléments en compression ont donc une longueur plus importante au sein des treillis Howe, ce qui les rend moins performants au niveau de la quantité de matière mise en œuvre (et donc du poids propre). La comparaison entre les deux types de treillis est effectuée au §III.6.



**Figure III.2 :** répartition des efforts dans les poutres Howe, soumises à des charges ponctuelles de 10 kN sur les nœuds de la membrure joignant les appuis ( $F/n = 10$  kN).

La figure III.2 montre la répartition des efforts dans les treillis Howe à 2, 4 et 6 mailles respectivement lorsque les treillis sont situés au dessus et en dessous de la ligne définie par les appuis. Chaque nœud chargé est le siège d'un effort valant  $F/n = 10$  kN.

On peut voir sur la figure III.2 que la répartition des efforts de compression dans les treillis deux est identique. Quant aux efforts de traction, ils sont décalés dans les verticales, et la barre centrale soumise à un effort de  $F/n$  dans le treillis défini au dessus des appuis équivaut aux deux barres soumise chacune à un effort de  $F/2n$  dans le treillis situé sous les appuis. On peut donc en conclure que, au point de vue de l'indicateur de volume, **les cas *Distr\_Optimax\_Sous* et *Distr\_Optimax\_Norm* sont équivalents.**

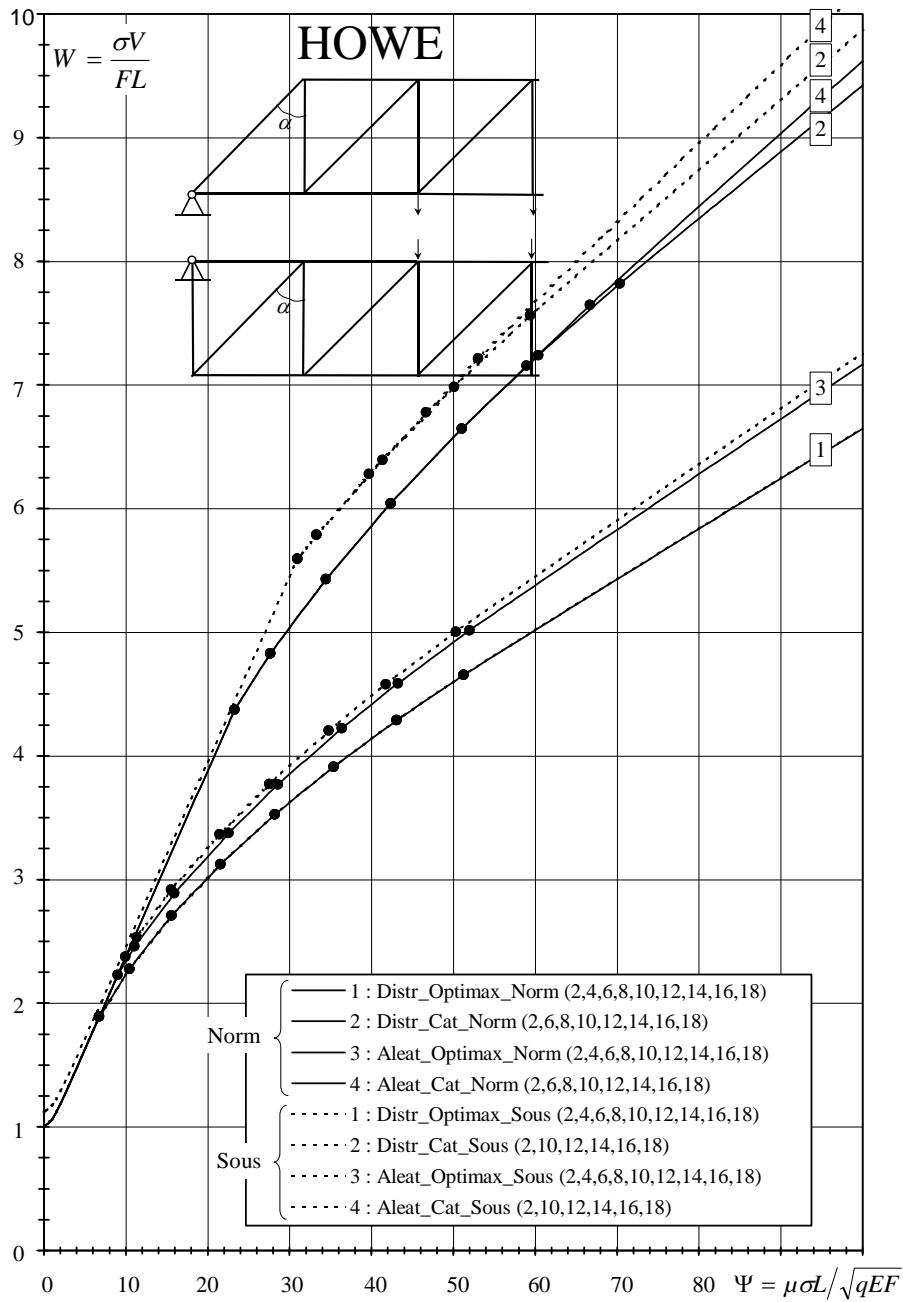


Figure III.3 : indicateur de volume dans les 8 cas de figure de la poutre Howe ( $\Phi = 0$ ). Les courbes en pointillés correspondent au treillis "Sous".

### III.2. INDICATEUR DE VOLUME : COMPARAISON DES 8 CAS

Les courbes d'efficiency relatives aux 8 cas de treillis Howe ainsi que leurs enveloppes pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$ , sont données aux figures suivantes :

- Figures III.18 et III.19 : *Dist\_Optimax\_Norm*
- Figures III.20 et III.21 : *Dist\_Cat\_Norm*
- Figures III.22 et III.23 : *Aleat\_Optimax\_Norm*
- Figures III.24 et III.25 : *Aleat\_Cat\_Norm*

A	B
C	D

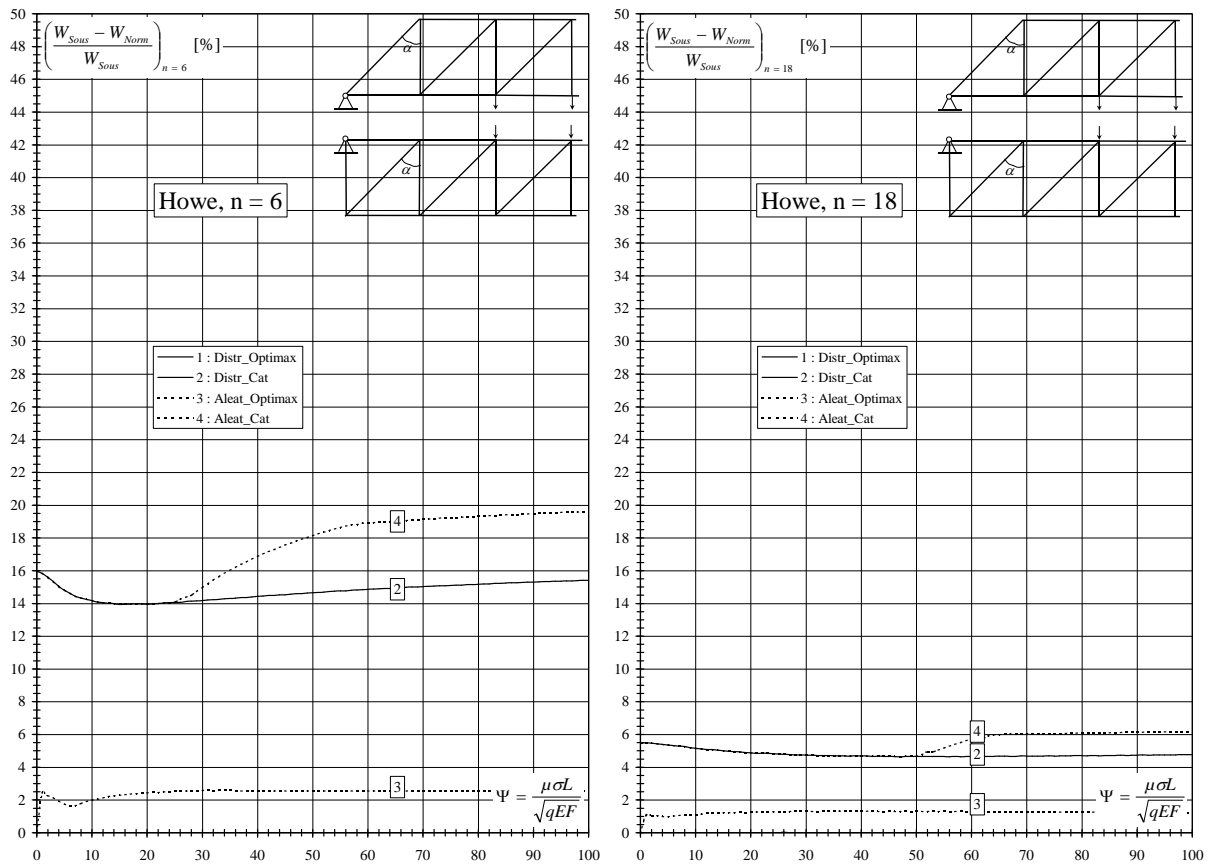
- Figures III.26 et III.27 : *Dist\_Optimax\_Sous*
- Figures III.28 et III.29 : *Dist\_Cat\_Sous*
- Figures III.30 et III.31 : *Aleat\_Optimax\_Sous*
- Figures III.32 et III.33 : *Aleat\_Cat\_Sous*

Chacune de ces figures est composée de 4 sous figures notées A, B, C et D comme l'illustre le schéma ci-dessus.

Ces figures, ainsi que la figure III.3 montrent une première différence notable avec les treillis Pratt : pour être efficaces, **les treillis Howe nécessitent un plus grand nombre de mailles plus vite**, c'est à dire pour de plus petites valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . On voit en effet que, sur les courbes enveloppes (fig. III.3), le passage au segment de courbe relatif à 18 mailles se fait très vite : dès  $\Psi=50$  pour les cas d'optimisation individuelle. Cette particularité est désavantageuse, car un treillis composé d'un grand nombre de mailles nécessite globalement plus de main d'œuvre (plus d'éléments, plus d'assemblages).

Remarquons que la présente étude est limitée aux treillis à 18 mailles, et les courbes enveloppes de la figure III.3 devraient idéalement être complétées des segments relatifs aux nombres de mailles supérieurs à 18.

### III.2.1. Comparaison des treillis (Norm) et (Sous) :



**Figure III.4 :** valeurs du gain  $(W_{Sous} - W_{Norm})/W_{Sous}$  en indicateur de volume obtenu par le choix de treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*), pour 6 et 18 mailles respectivement.



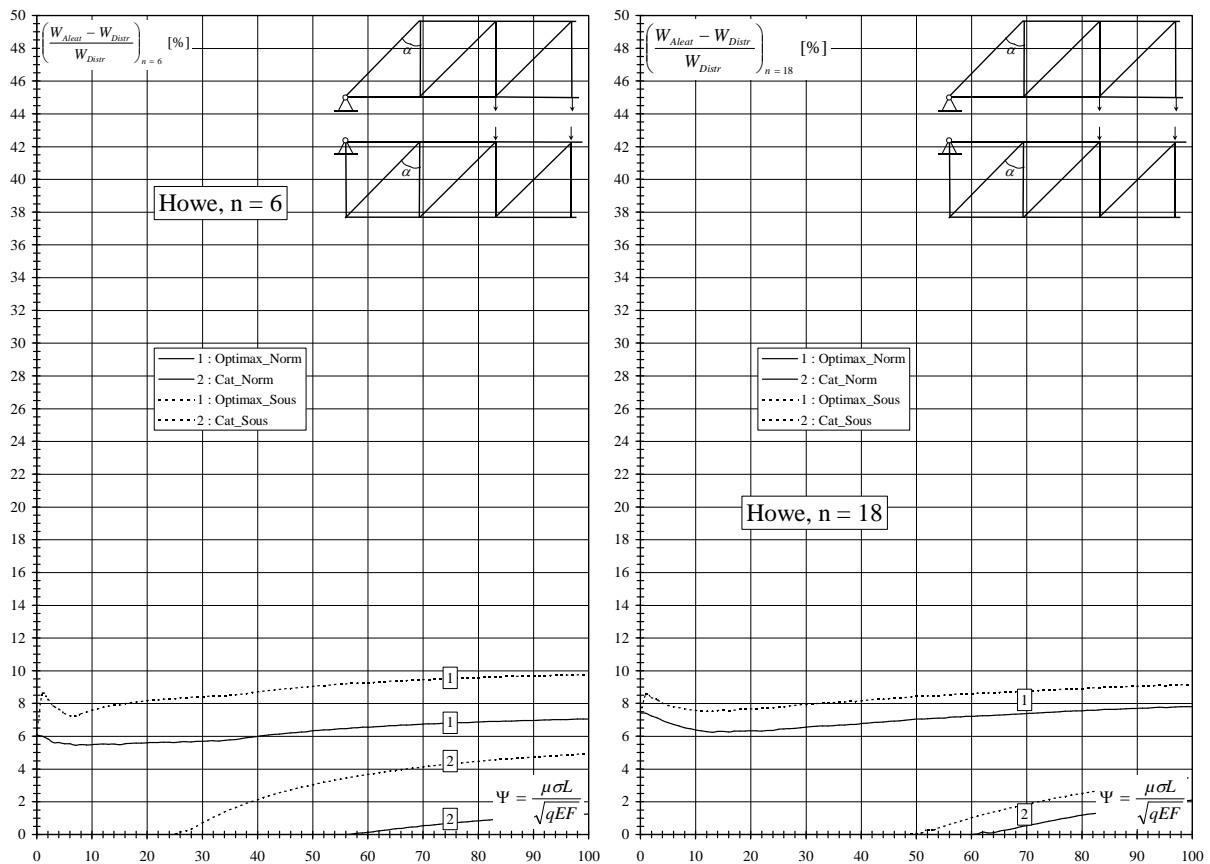
Il a été montré ci-dessus qu'il n'existe aucune différence entre les cas deux relatifs à une charge distribuée avec optimisation individuelle. La comparaison s'effectue donc ici sur les trois autres cas. Par ailleurs, la figure III.3 met en évidence, pour ces trois cas, la propriété suivante :

**Les treillis Howe situés sous la ligne définie par les appuis (Sous) sont toujours PLUS LOURDS que les treillis Howe situés au dessus des appuis (Norm), et ceci dans tous les cas de figure :**

$$W_{\text{Sous}} > W_{\text{Norm}}$$

La propriété précédente est aussi illustrée en annexe 1 aux figures *Synthèse\_Howe.4* et *5* qui reprennent les valeurs de l'indicateur de volume  $W$  pour chaque valeur du nombre de mailles dans les 8 cas.

La différence entre les deux cas varie selon que les charges sont distribuées (*Distr*) ou aléatoires (*Aleat*) ou que les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*) ou par catégories (*Cat*). La figure III.4 illustre cette différence dans ces 4 cas, pour 6 et 18 mailles. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (Pages *Synthèse\_Howe.8* et *9*). Si les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*), la différence entre les deux cas de figure est nulle pour le cas *Distr* et presque insignifiante pour le cas *Aleat*. Si les treillis comportent des catégories de barres identiques, alors le gain en volume relatif à un treillis situé au dessus des appuis varie de 5% à 25% selon le nombre de mailles.



**Figure III.5 :** valeurs du surplus  $(W_{Aleat} - W_{Distr})/W_{Distr}$  d'indicateur de volume imposé par la charge aléatoire (*Aleat*), pour 6 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis situés sous les appuis.

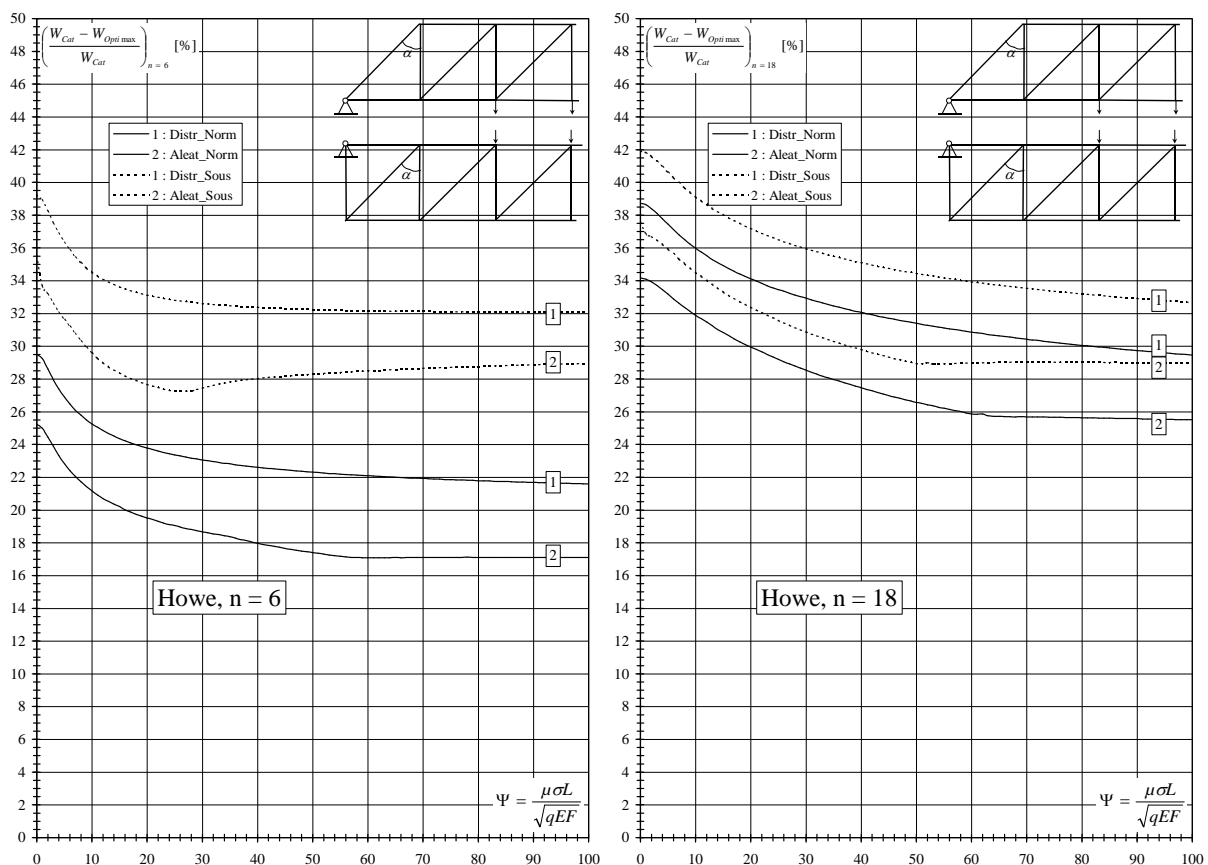
### III.2.2. Influence de la charge aléatoire :

Contrairement aux treillis Pratt, il est étonnant de remarquer que le surplus de matière à considérer lorsque les charges sont aléatoires est relativement constant et peu sensible non seulement au nombre de mailles mais aux valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . C'est particulièrement le cas lorsque l'optimisation des barres est individuelle. **Dans aucun cas ce surplus ne dépasse 10%**, comme le montre la figure III.5 pour  $n = 6$  et  $n = 18$ . Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1 (*pages Synthèse\_Howe.10 et 11*).

### III.2.3. Optimisation individuelle ou par catégories de barres :

La conclusion est ici identique à celle relative aux treillis Pratt : le gain en volume apporté par une optimisation individuelle des barres (*optimax*), en comparaison avec une optimisation par catégories de barres identiques (*Cat*) varie globalement de **20 à 40 %** selon la configuration, le nombre de mailles ou les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Pour les nombres de mailles plus petits (2, 4, 6), ce gain peut diminuer jusqu'à 10% lorsque l'optimisation est individuelle.

Ceci est illustré à la figure III.6 ci-dessous pour  $n=6$  et  $n=18$  respectivement. Les figures relatives aux autres nombres de mailles sont reprises en annexe 1.



**Figure III.6 :** valeurs du gain  $(W_{Cat} - W_{Opti_{max}}) / W_{Cat}$  d'indicateur de volume obtenu suite à une optimisation individuelle des barres (*Optimax*), pour 6 et 18 mailles respectivement. Les pointillés correspondent aux treillis situés sous les appuis.

III.2.4. Indicateur de volume par groupes de barres :

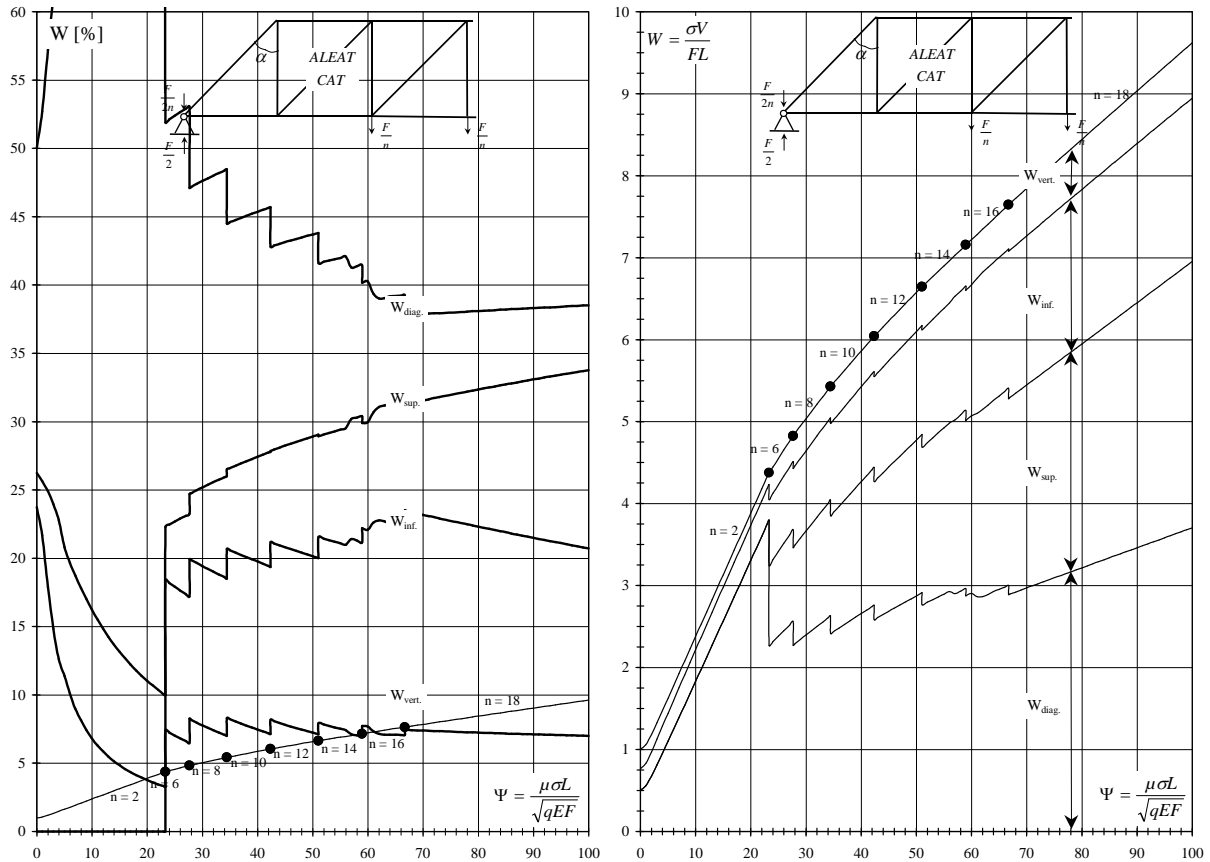


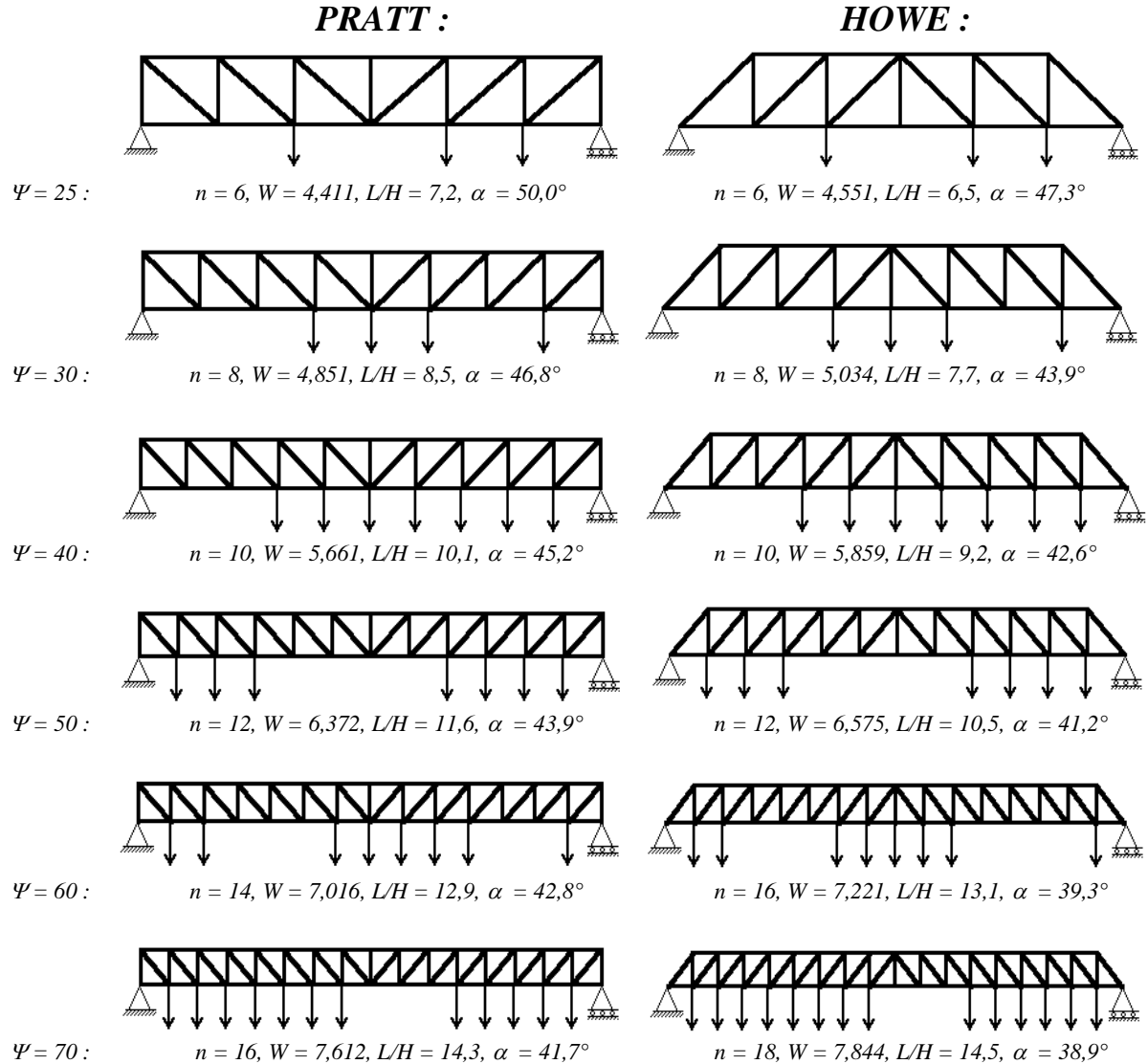
Figure III.7 : parts d'indicateur de volume par groupes de barres pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.

Les résultats sont plus disparates que ceux relatifs aux treillis Pratt. On considère ici les courbes enveloppes des courbes d'efficacité constituées morceaux de courbes relatifs à des nombres de mailles différents. Pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ , ces courbes enveloppes correspondent toujours à 2 mailles et le comportement des treillis est toujours particulier comme on peut le voir sur la figure III.7 relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*. Pour des nombres de mailles supérieurs à 2, on constate que :

- les diagonales apportent la plus grande part d'indicateur de volume, de l'ordre de **35% à 50%** selon les cas.
- les éléments verticaux apportent une contribution au volume total de l'ordre de **10%**, voire moins.
- les éléments inférieurs apportent une contribution au volume total de l'ordre de : de **15 à 25%**,
- l'apport des éléments supérieurs est variable, selon les valeurs de  $\Psi$  : de **20 à 35%**,

Ces conclusions sont valables dans les 8 cas de figure relatifs au treillis Howe, comme le montrent les autres figures reprises en annexe 1 (*Figures Howe\_\*.3 et .4*).

### III.3. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT L/H ET SUR L'ANGLE D'OUVERTURE DES MAILLES DES TREILLIS OPTIMAUX



**Figure III.8 :** quelques treillis optimaux composant la courbe enveloppe des treillis composés de catégories de barres et soumis à une charge aléatoire (*Howe\_Aleat\_Cat\_Norm*), en vis à vis pour les treillis Pratt et Howe.

Les valeurs de L/H relatives aux treillis des courbes enveloppes des courbes d'efficacité (reprises en annexe 1 aux figures *Howe\_\*.2* (bas)) sont toutes très similaires, quelque soit le cas de figure, et aussi très similaires à celles qui correspondent aux treillis Pratt. De façon générale, les treillis optimaux dont le nombre de mailles est compris entre 2 et 18 ont toujours un élancement géométrique compris entre 2 et 16 :

$$2 \leq (L/H)_{opt} \leq 16$$

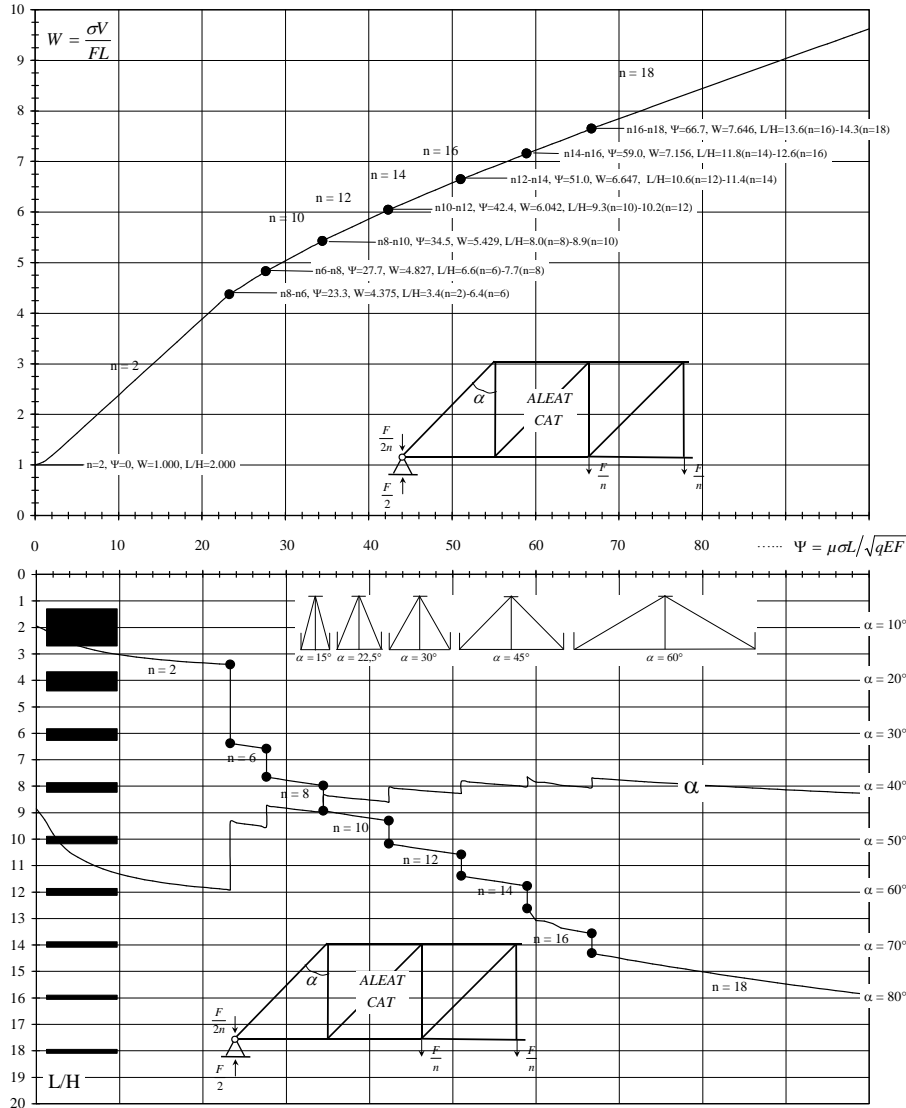
Par ailleurs, pour les nombres de mailles supérieurs à 6, l'angle d'ouverture des mailles est toujours sensiblement constant, quelque soit le cas :

$$35^\circ \leq (\alpha)_{opt} \leq 45^\circ$$

Ceci est illustré à la figure III.9 qui montre, entre autres, l'enveloppe des courbes d'efficacité relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*.

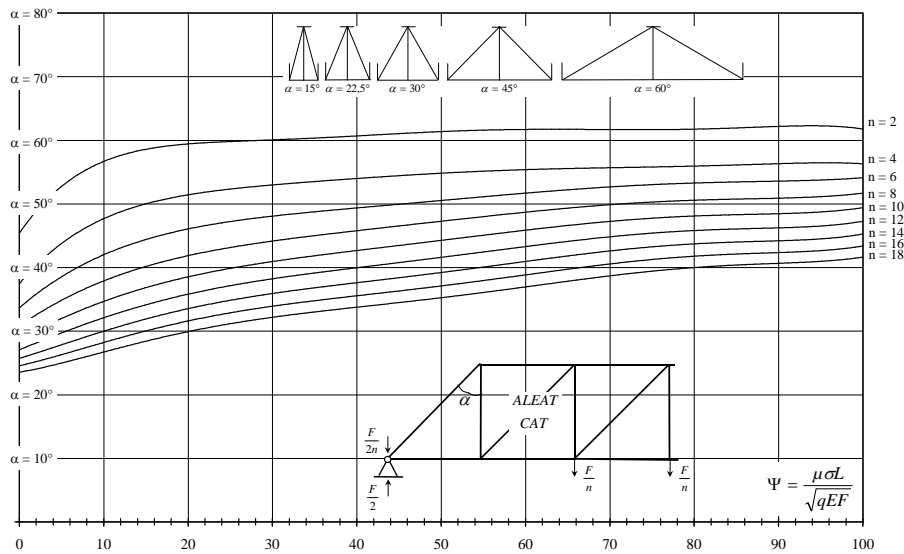
La conclusion est donc la même que pour les treillis Pratt : les treillis optimaux de la courbe enveloppe des courbes d'efficacité sont constitués de **mailles globalement carrées**.

La figure III.8 montre quelques treillis optimaux relatifs au cas *Aleat\_Cat\_Norm*.



**Figure III.9 :** Enveloppe des courbes d'efficacité relative au cas *Aleat\_Cat\_Norm*. La figure inférieure donne les valeurs de l'angle d'ouverture de maille  $\alpha$ , à lire sur l'axe de droite.

La figure III.10 montre, pour ce cas *Aleat\_Cat\_Norm*, les angles d'ouverture de mailles pour tous les nombres de mailles compris entre 2 et 18 et sur toute la gamme des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  jusqu'à 100. De façon générale et similaire pour les 7 autres cas, l'angle d'ouverture des mailles doit toujours être compris entre  $20^\circ$  et  $65^\circ$ .

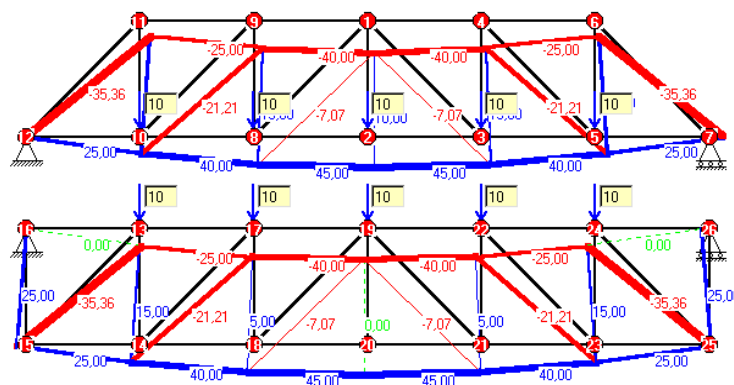


**Figure III.10 :** angles d'ouverture de mailles relatifs aux courbes d'efficace pour  $n=2, 4, \dots, 18$  pour le cas *Aleat\_Cat\_Norm*. Les courbes relatives aux autres cas, reprises en annexe 1, sont très semblables, et aussi très similaires à celles des treillis Pratt.

### III.4. CONSIDERATIONS SUR L'ELANCEMENT DES BARRES EN COMPRESSION DES TREILLIS OPTIMAUX

Pour les treillis Howe, qu'ils soient situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*) ou en dessous (*Sous*), les barres en compression les plus élancées sont les 2 diagonales voisines de la verticale centrale.

La figure III.12 montre la répartition des efforts dans les deux cas typiques (*Norm* et *Sous*). L'exemple correspond à 6 mailles et une charge de 10 kN par nœud.



**Figure III.12 :** répartition des efforts dans les treillis Howe.

De manière générale les conclusions sont très similaires à celles relatives aux treillis Pratt. La figure III.13 représente les valeurs de l'indicateur d'élancement  $\Lambda$  des diagonales centrales pour les treillis de la courbe enveloppe des courbes d'efficace dans le cas *Distr\_Optimax\_Norm(&Sous)*. La figure III.14 montre ces mêmes valeurs pour les cas *Distr\_Cat\_Norm*. Les courbes relatives aux autres cas sont reprises en annexe 1 et mènent aux mêmes conclusions. Dans le cas d'une optimisation individuelle des barres, on constate que l'indicateur d'élancement approche des valeurs de 7 pour

$\Psi \rightarrow 100$ , ce qui est difficilement acceptable. En pratique, Il faudra donc surdimensionner les 2 diagonales concernées, ce qui ne devrait pas avoir de grande conséquence sur la valeur de l'indicateur de volume et sur les conclusions précédentes. De nouveau, la figure III.14 montre une amélioration sensible, sur ce point de vue, lorsque les treillis sont composés de catégories de barres identiques. Dans ce cas en effet l'indicateur d'élanement ne dépasse une valeur de 3 que pour les treillis à 2 mailles.

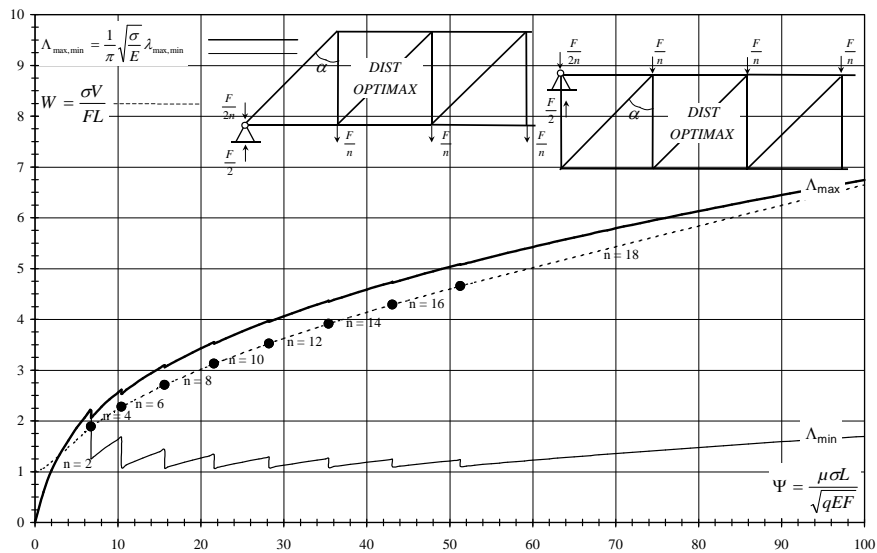


Figure III.13 : indicateur d'élanement  $\Lambda_{max}$  (courbe en gras) des diagonales centrales relatives aux treillis de la courbes enveloppe des courbes d'efficience (cas *Distr\_Optimax\_Norm*).

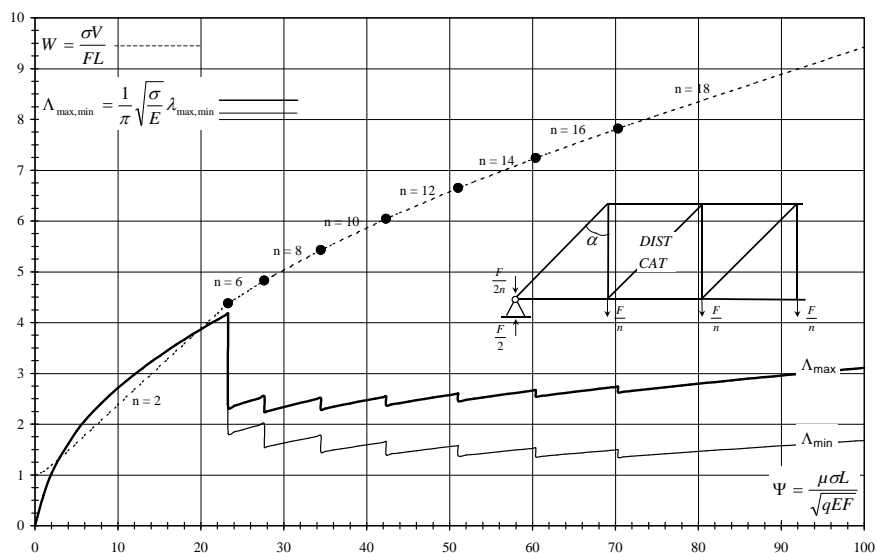
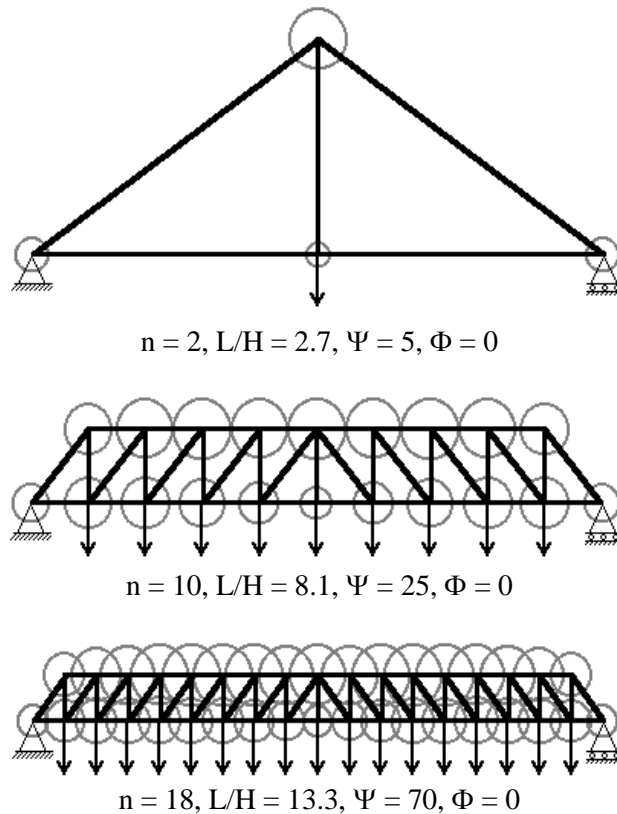


Figure III.14 : indicateur d'élanement  $\Lambda_{max}$  (courbe en gras) des diagonales centrales relatives aux treillis de la courbes enveloppe des courbes d'efficience (cas *Distr\_Cat\_Norm*).

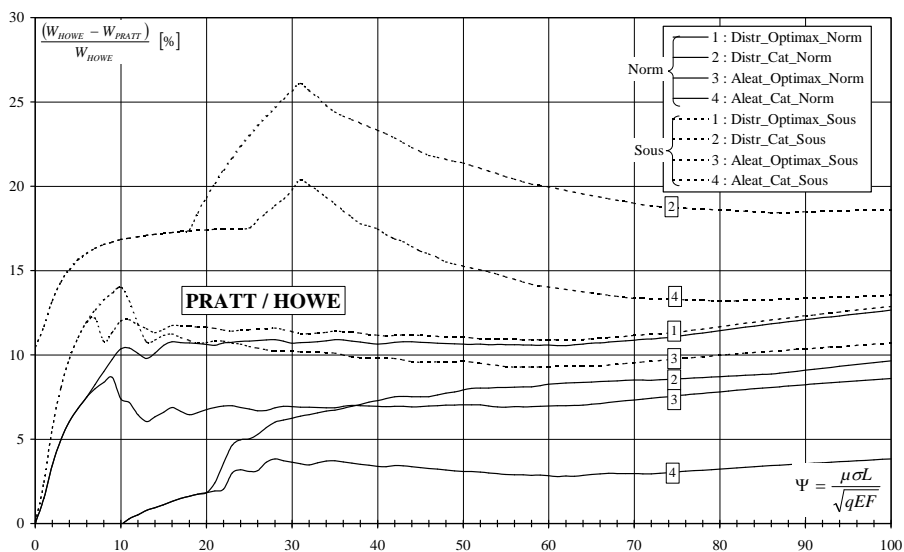
### III.5. REPARTITION DU POIDS PROPRE

**Figure III.15 :** répartition du poids propre dans quelques treillis optimaux de la courbe enveloppe relative au cas *Distr\_Optimax\_Norm*. Le rayon des cercles est proportionnel à la charge de poids propre reportée sur le nœud.



Comme pour le treillis Pratt, on constate une distribution du poids propre relativement homogène dans les treillis de la courbe enveloppe, avec toutefois une légère diminution des charges équivalentes sur la membrure inférieure lorsque l'on se rapproche du centre de la travée.

### III.6. COMPARAISON ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME DES TREILLIS PRATT ET HOWE



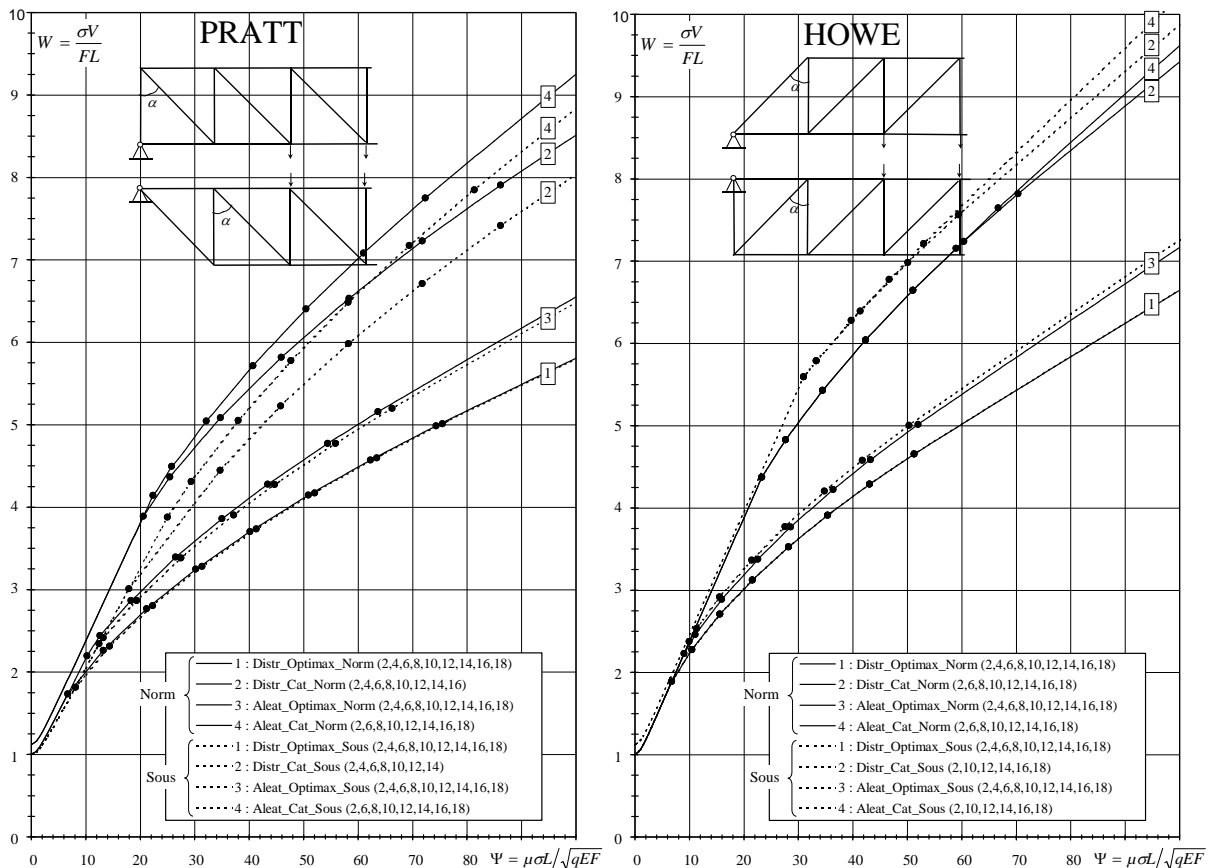
**Figure III.16 :** gain en volume obtenu par l'utilisation des treillis Pratt au lieu des treillis Howe, dans les 8 cas de figure.



Les figures III.16 et III.17 résument toute l'étude portant sur les treillis Pratt et Howe. De façon générale, on constate, comme annoncé, une nette différence d'efficacité entre les deux types de treillis. Quelle que soit la configuration, **les treillis Pratt sont en effet toujours plus légers que les treillis Howe.**

La figure III.16 exprime le gain en volume  $(W_{HOWE} - W_{PRATT})/W_{HOWE}$  apporté par les treillis Pratt par rapport aux treillis Warren. Elle suggère les commentaires suivants :

- les cas d'optimisation individuelle des barres (*Optimax*) correspondent à un gain en volume relativement constant et globalement égal à **10 %**.
- les cas relatifs à des treillis définis sous les appuis (*Sous*) et composés de catégories de barres identiques (*Cat*) correspondent à un gain en volume plus élevé, **dépassant 15 % et pouvant atteindre 25%**.
- le cas *Aleat\_Cat\_Norm* est celui qui correspond au gain le plus petit, soit quelques pourcents.



**Figure III.17 :** enveloppes des courbes d'efficacité pour les 8 cas de figure pour chacun des deux types de treillis, Pratt et Howe.

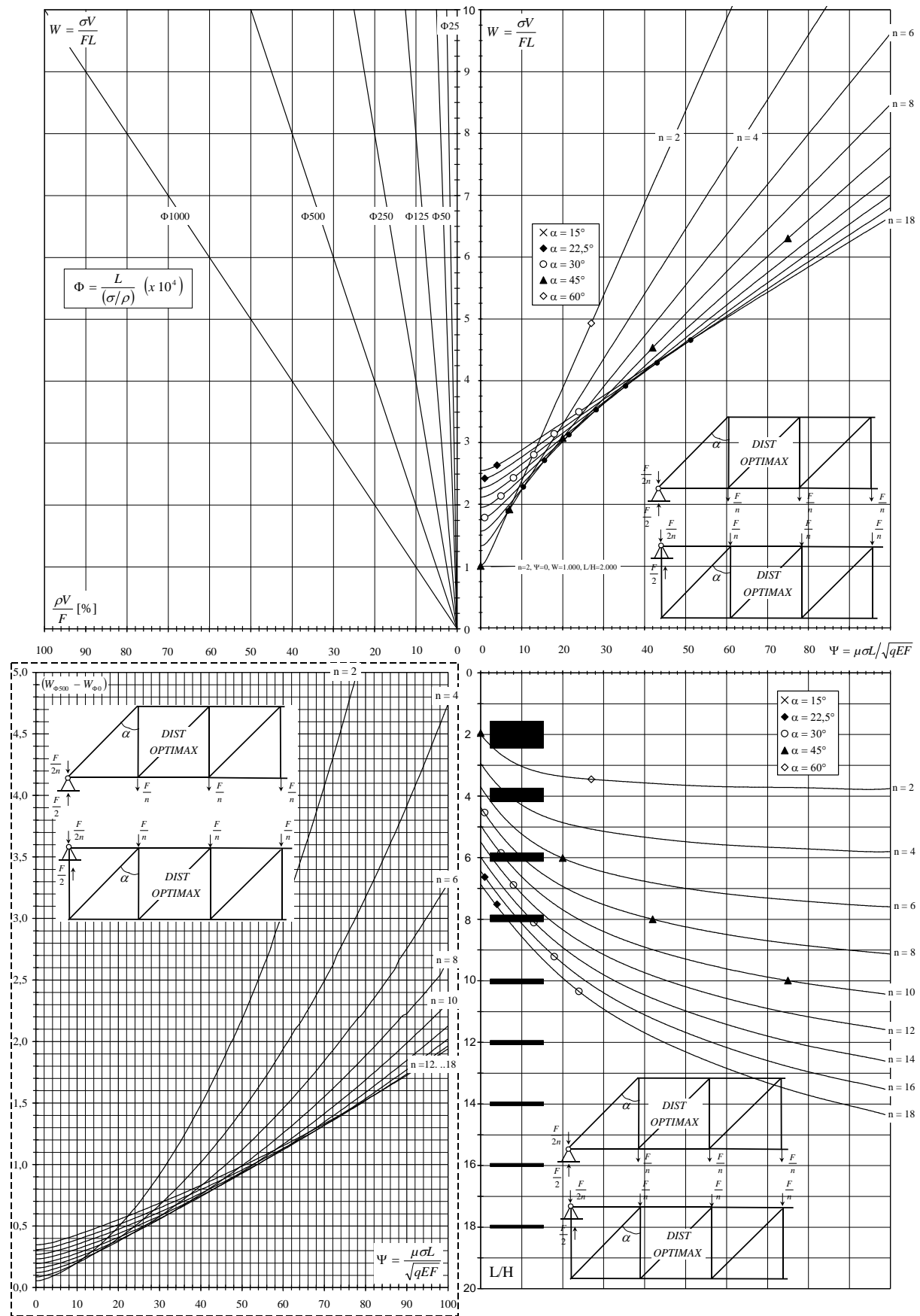


Figure III.18 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

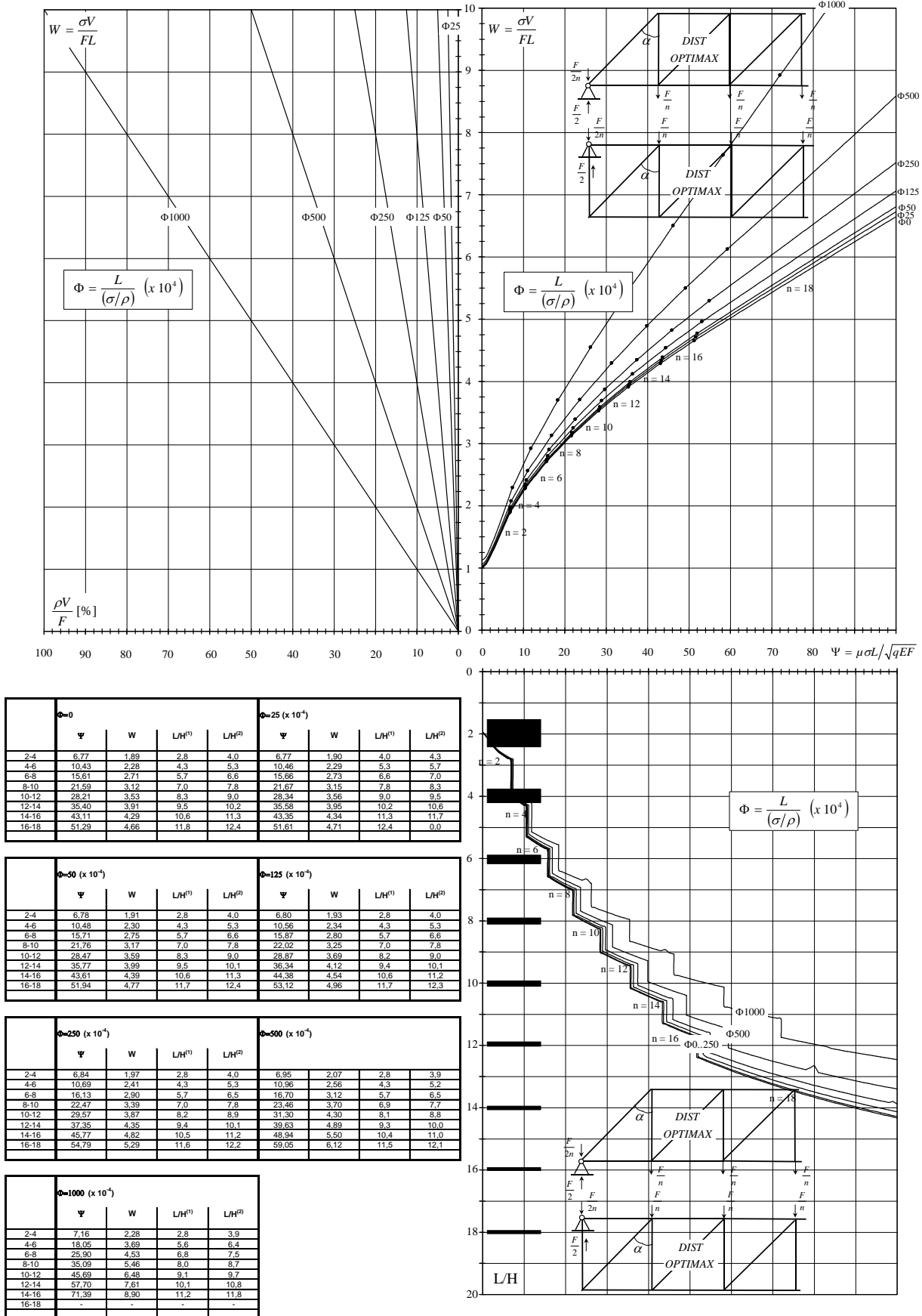


Figure III.19 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Optimax\_Norm*.

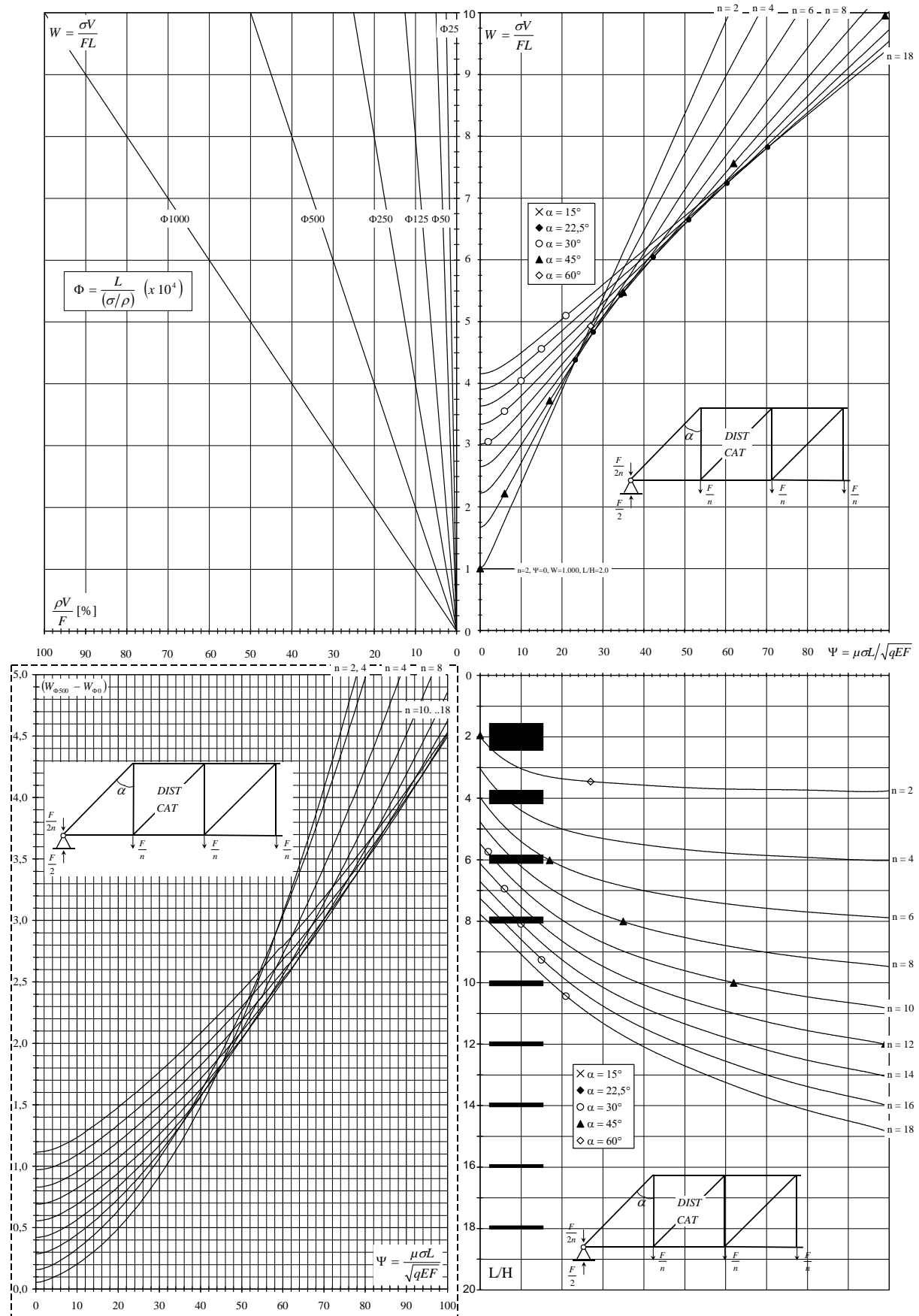


Figure III.20 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*.

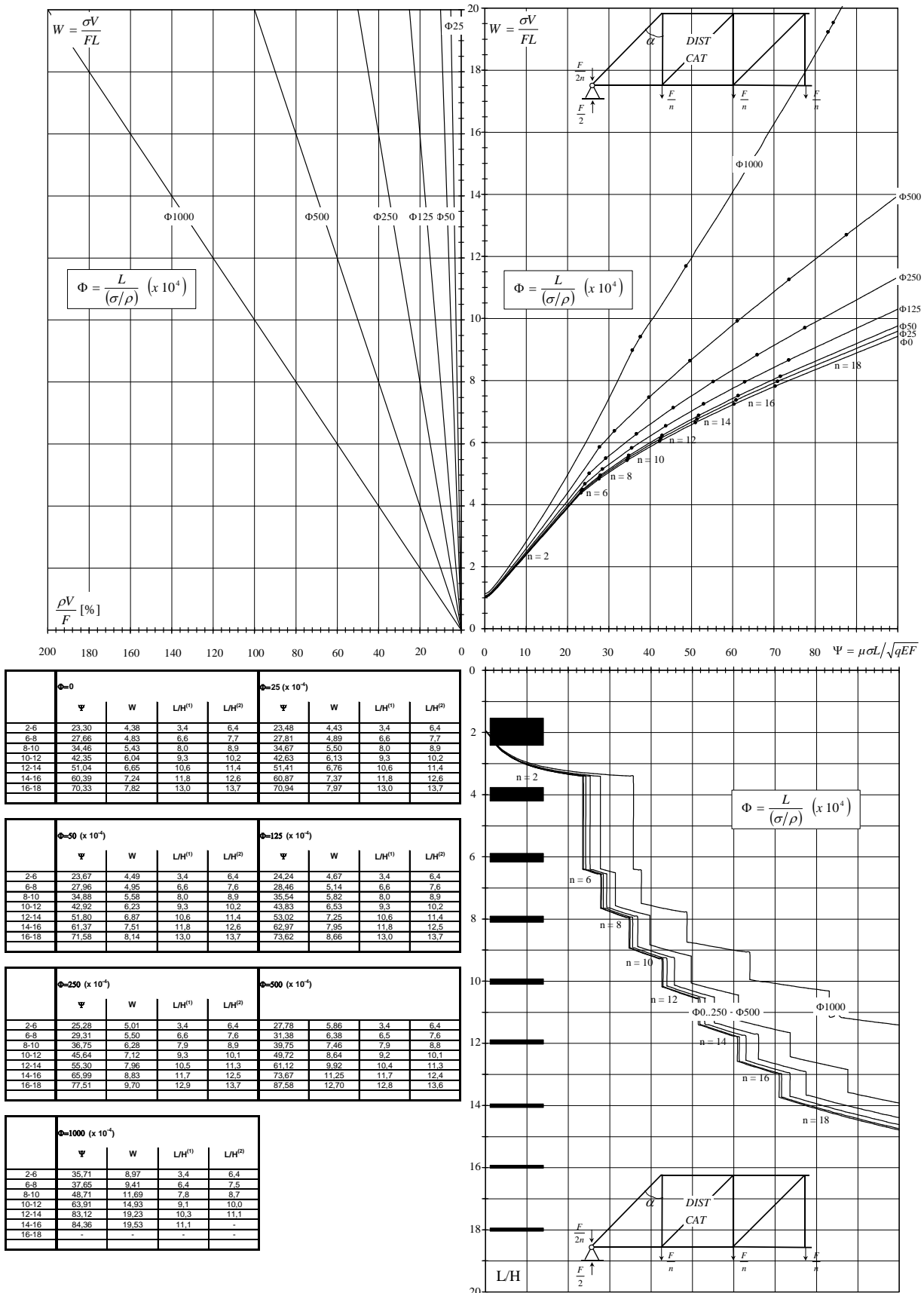


Figure III.21 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Cat\_Norm*.

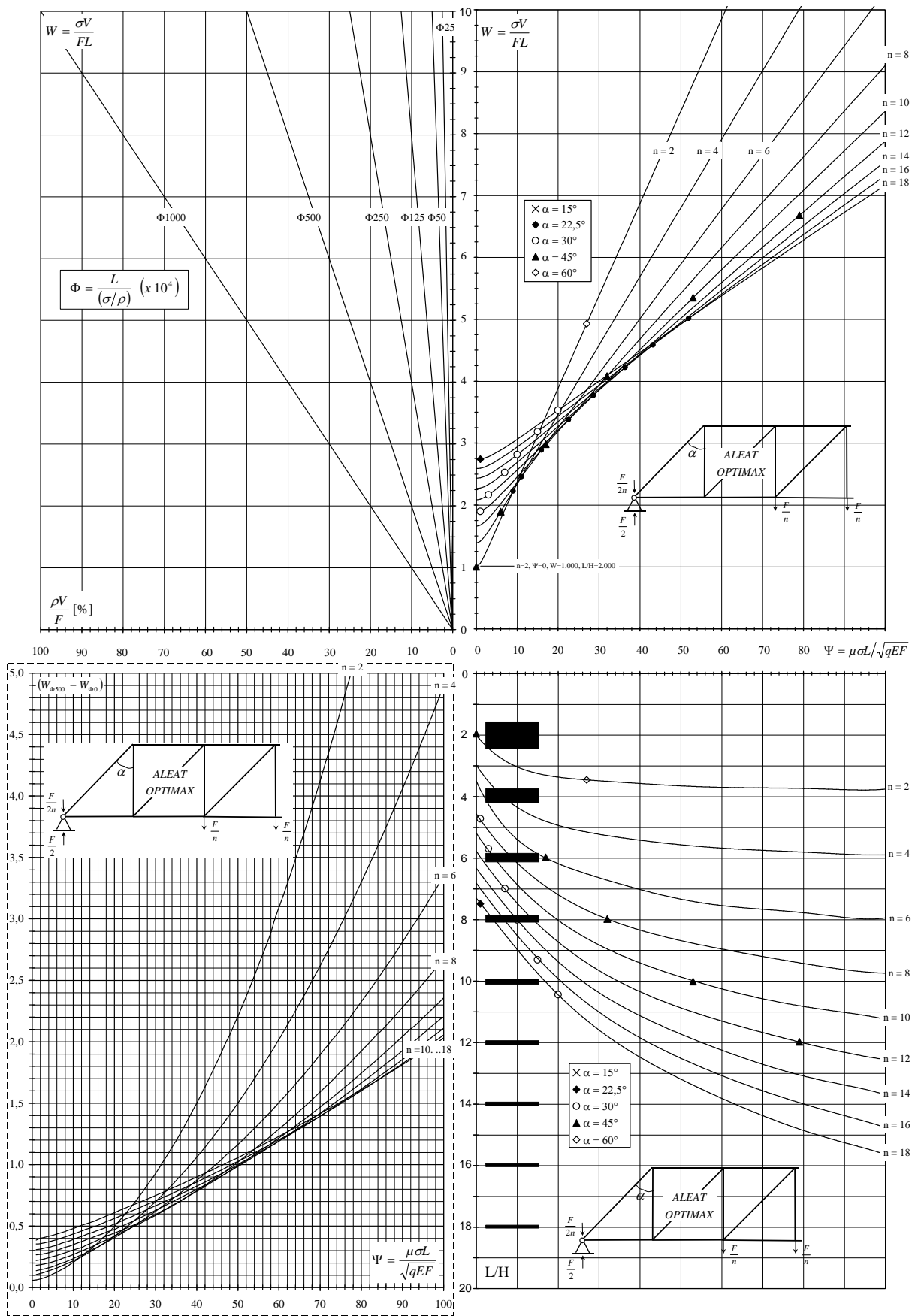


Figure III.22 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Aleat\_Optimax\_Norm*.

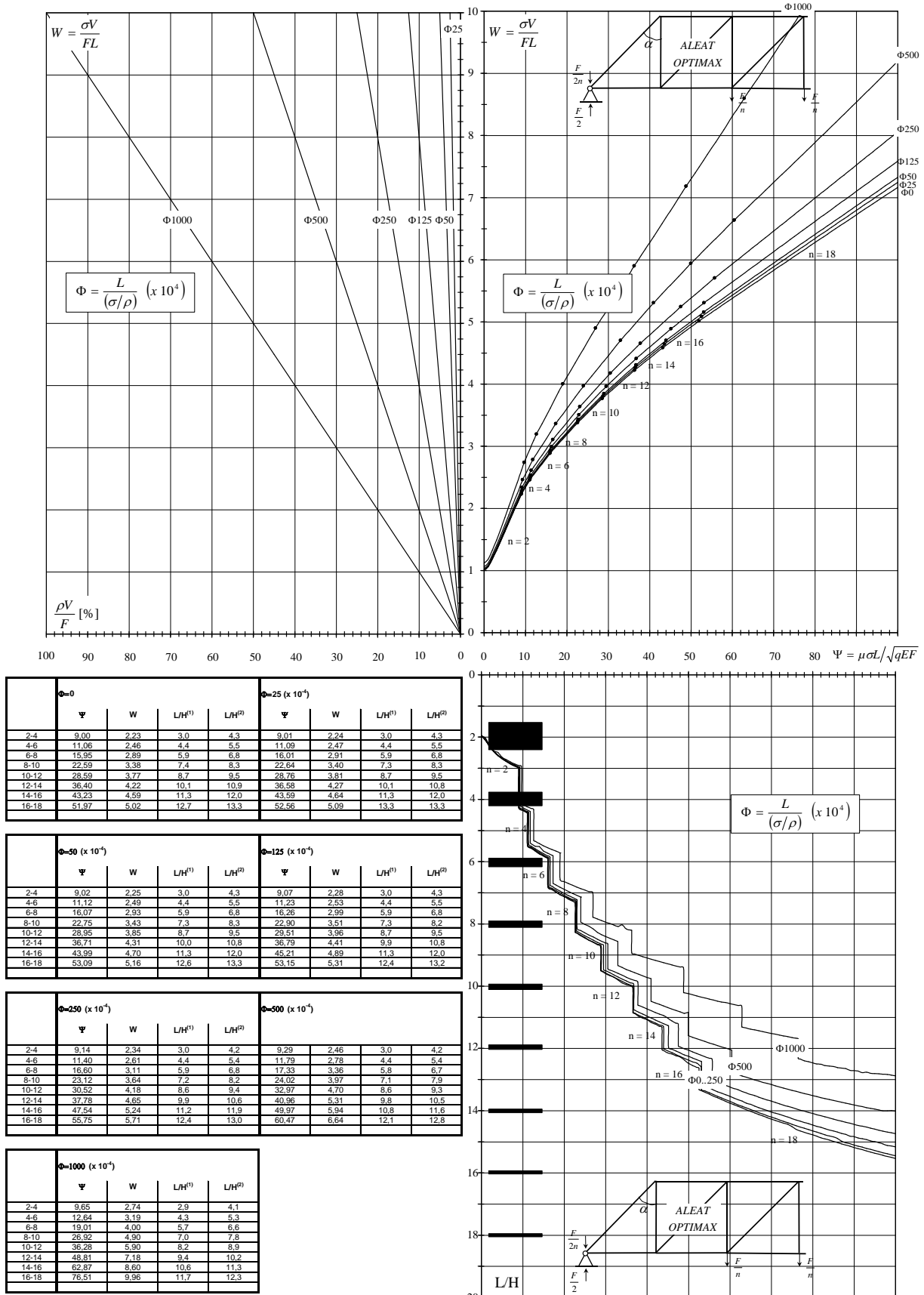


Figure III.23 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Optimax\_Norm.

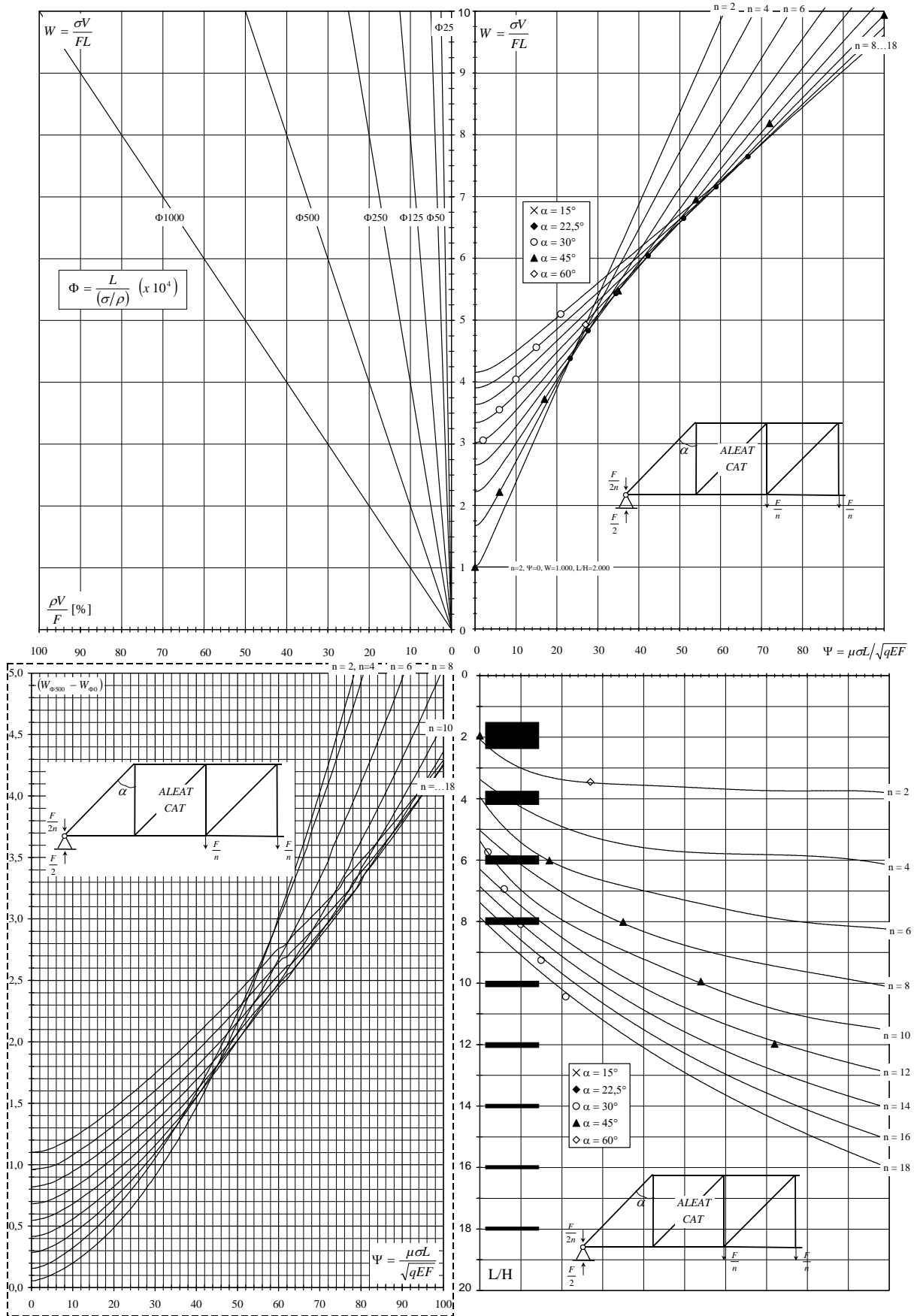


Figure III.24 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.



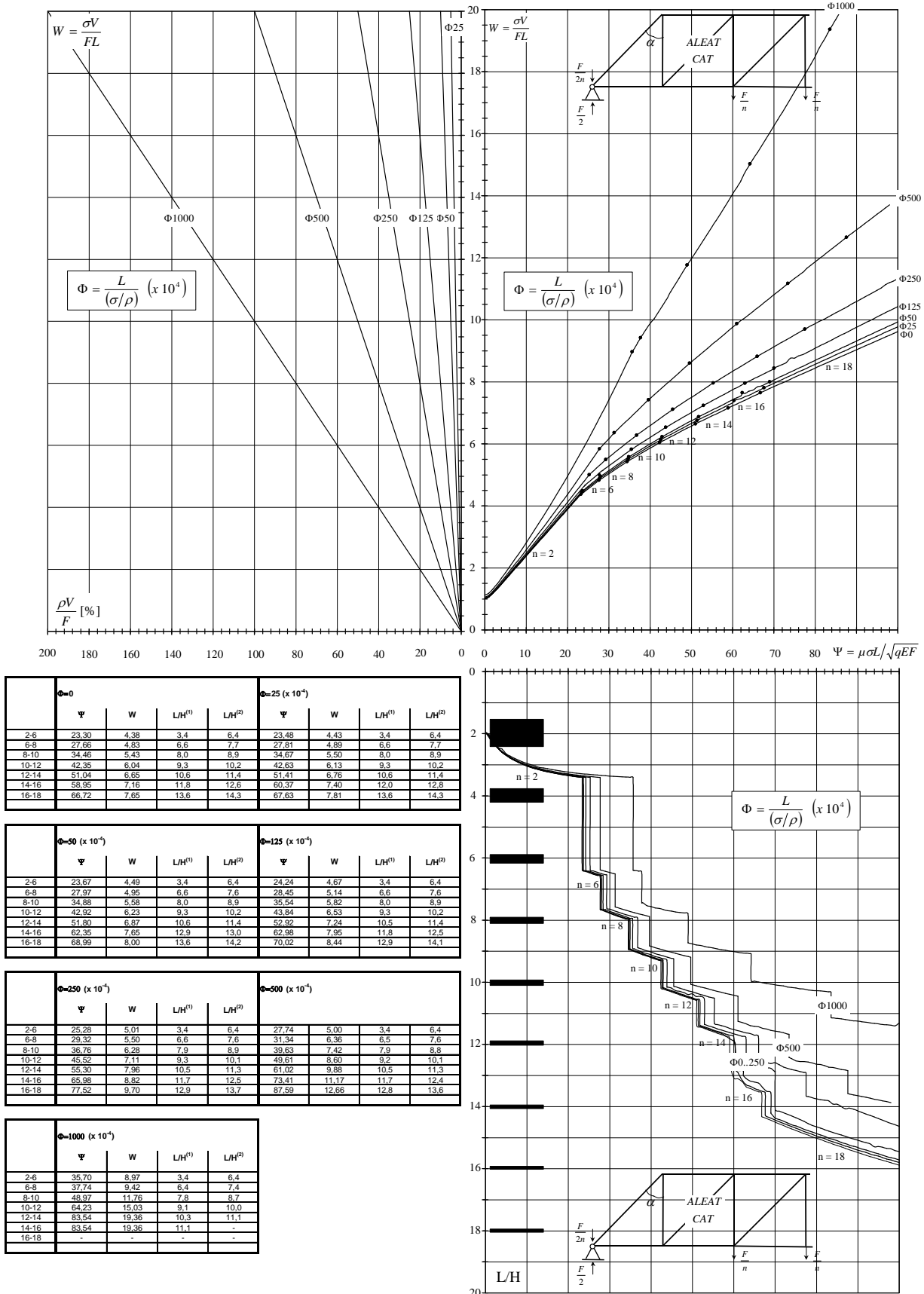


Figure III.25 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Cat\_Norm.

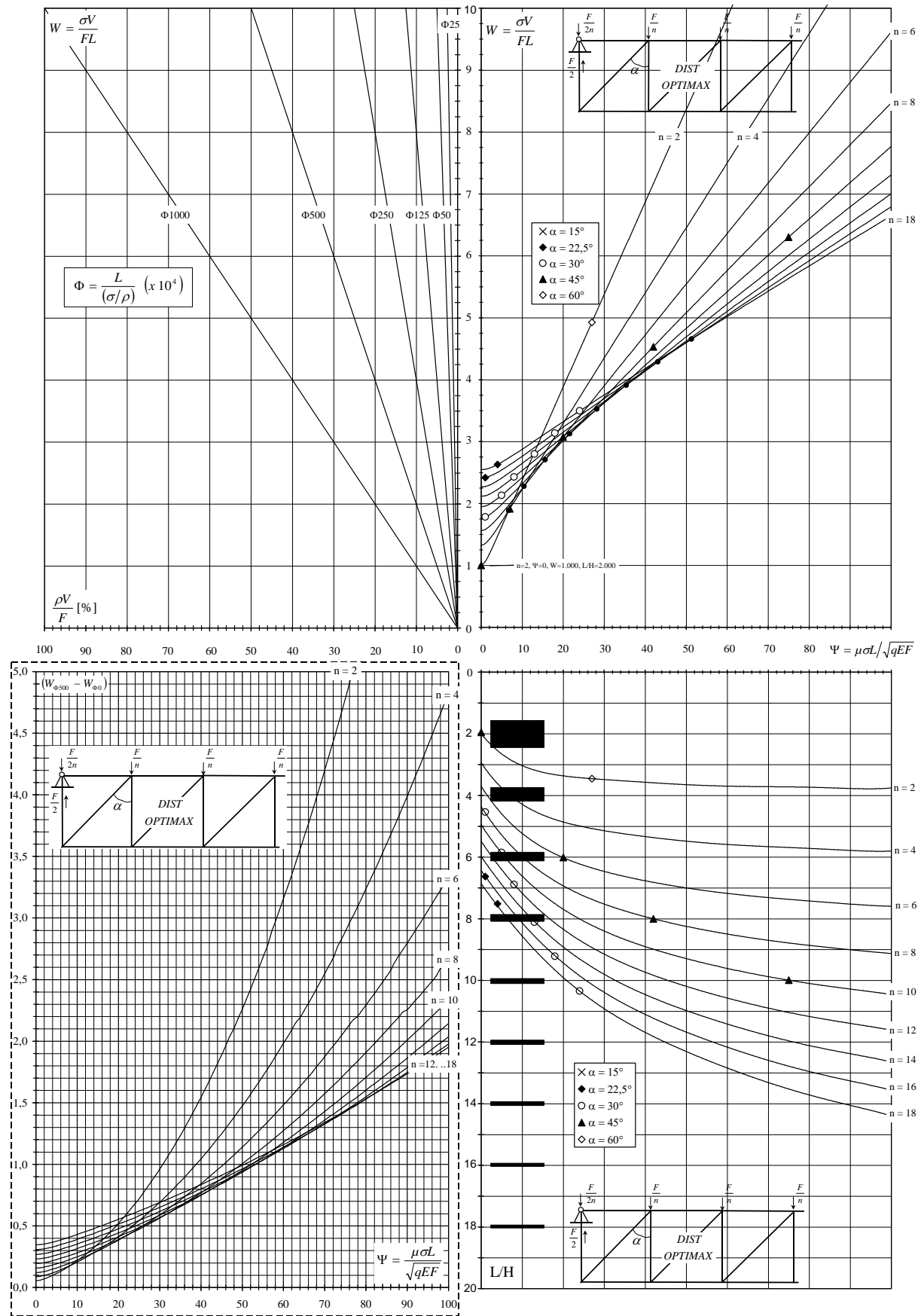


Figure III.26 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Optimax\_Sous*.

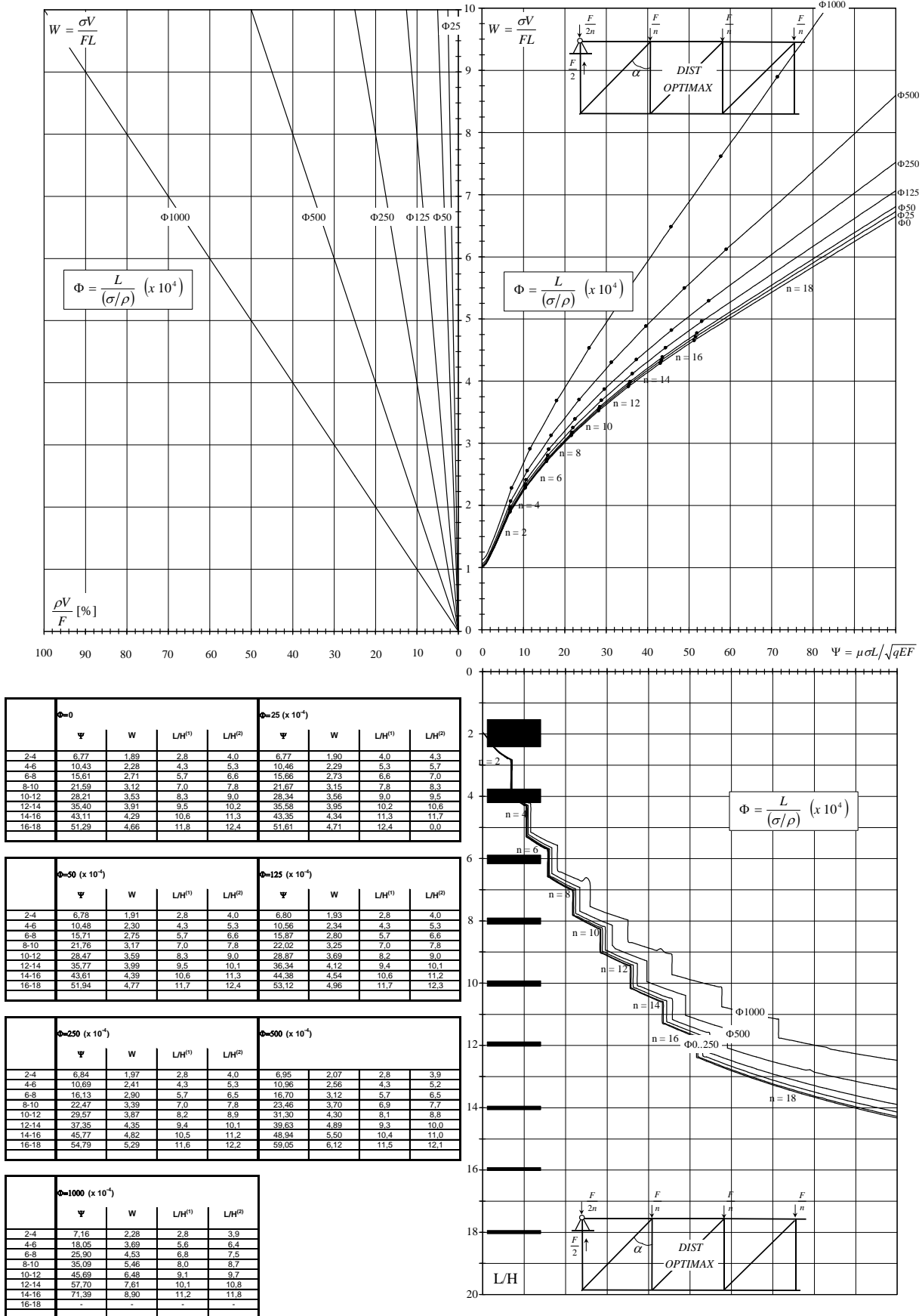


Figure III.27 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Ditr\_Optimax\_Sous*.

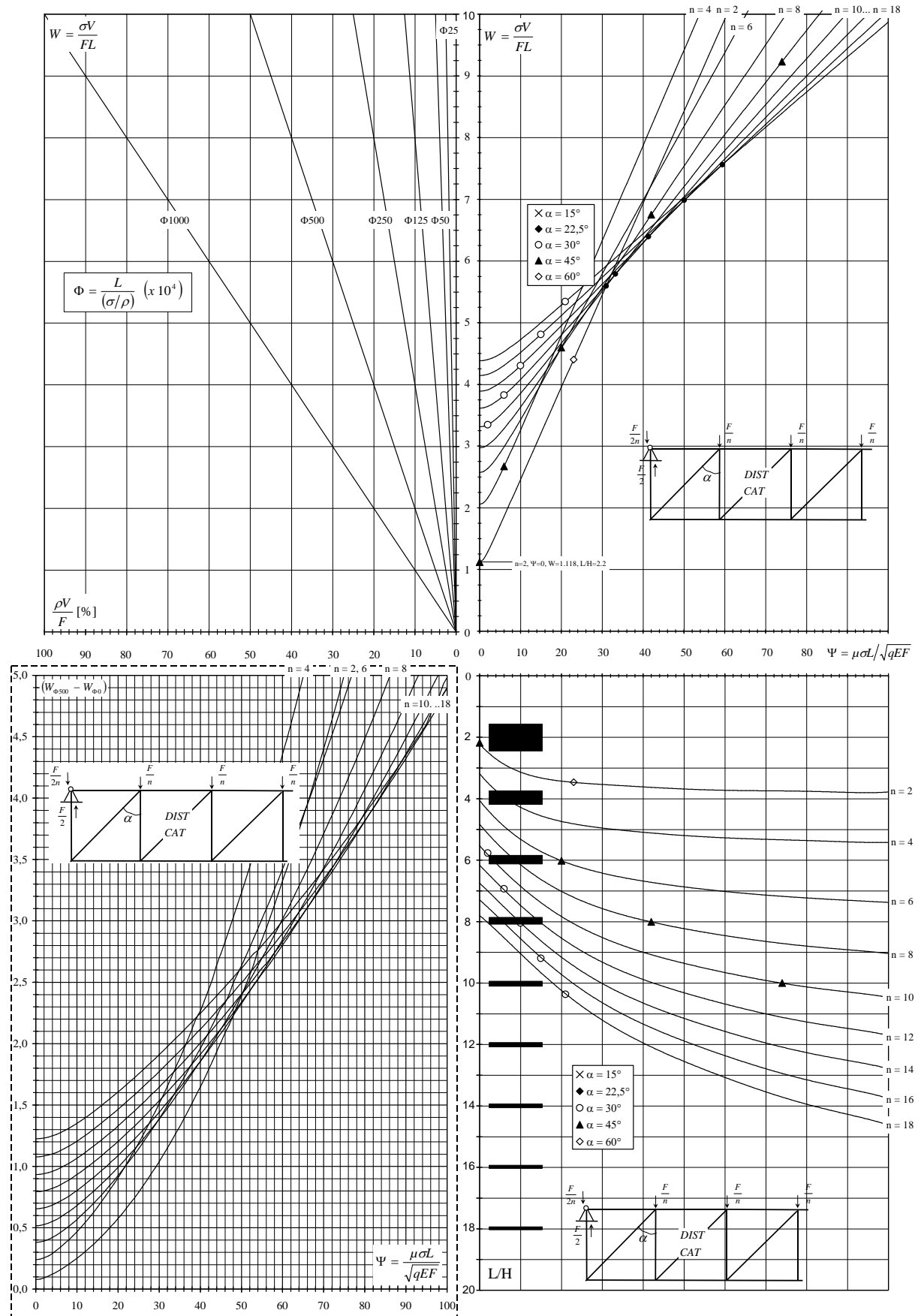


Figure III.28 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Distr\_Cat\_Sous*.

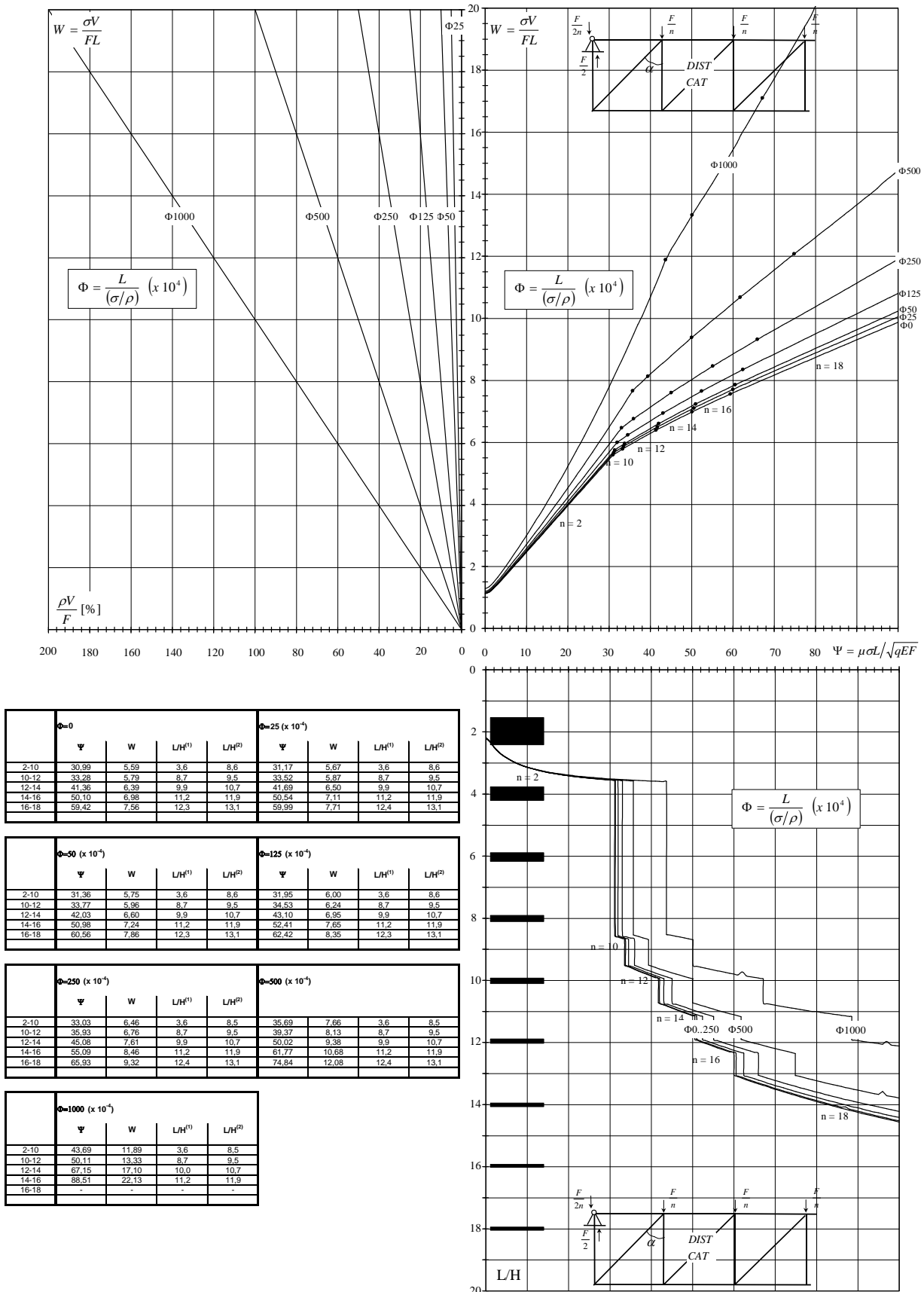


Figure III.29 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas *Distr\_Cat\_Sous*.

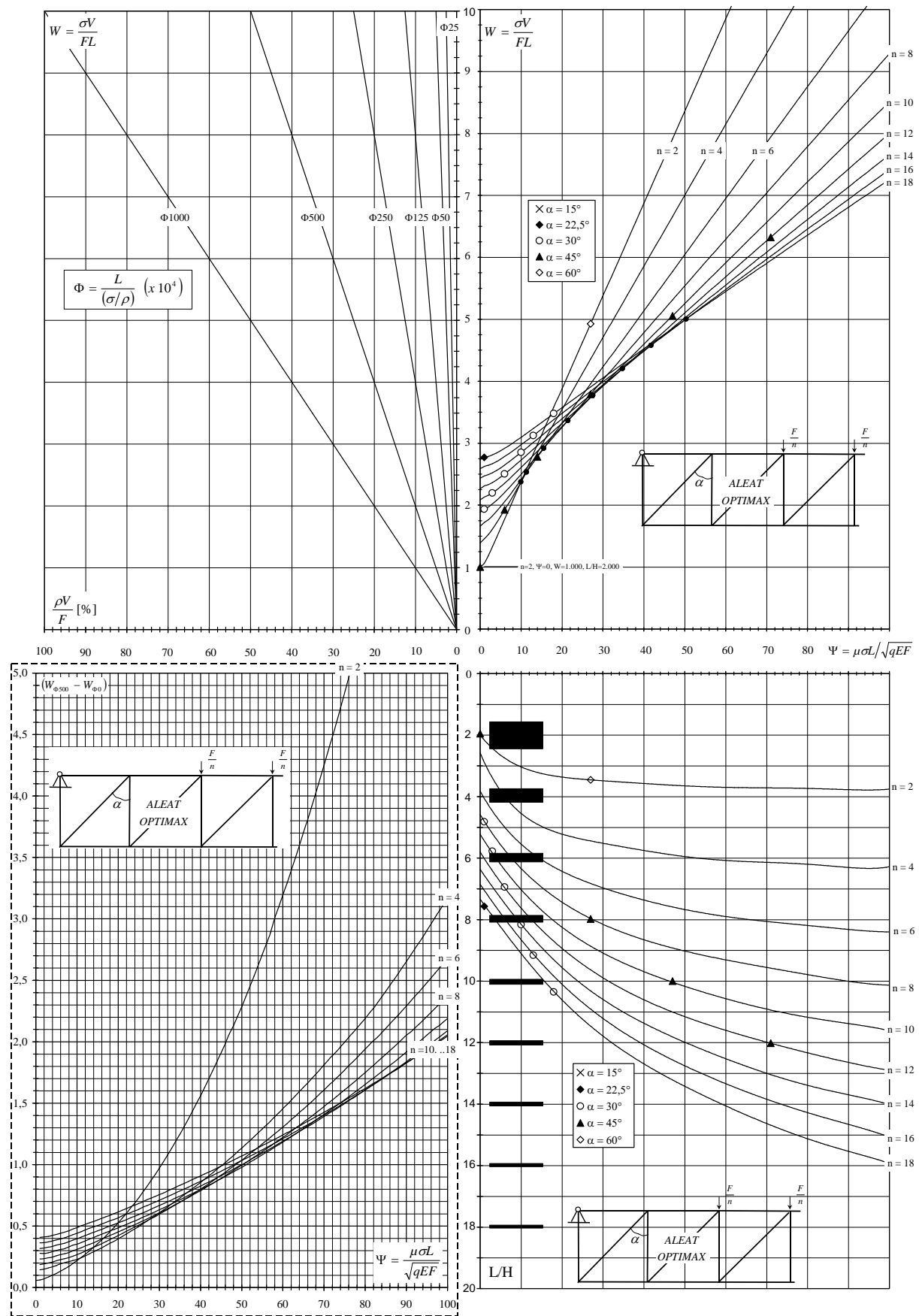


Figure III.30 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas *Aleat\_Optimax\_Sous*.

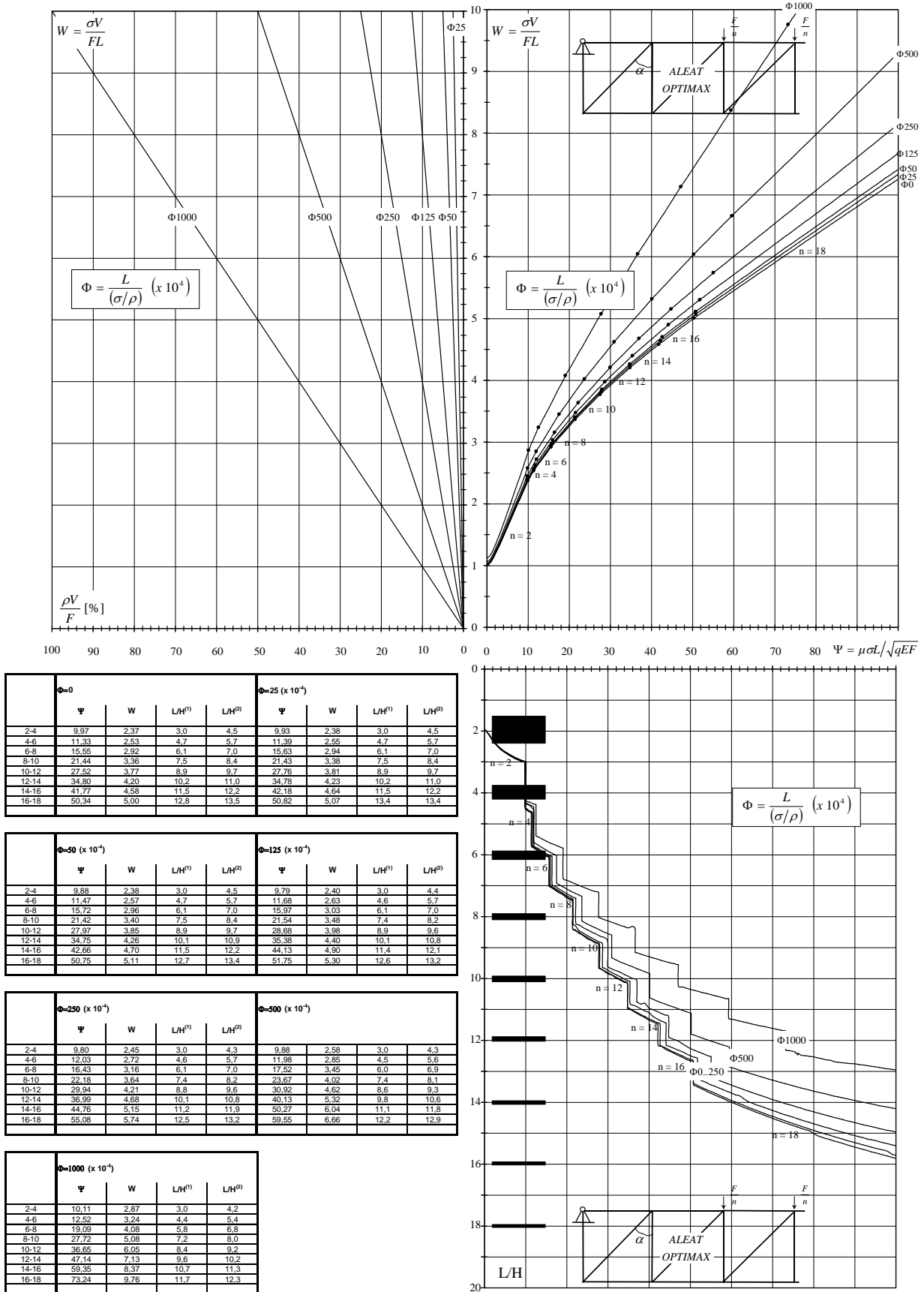


Figure III.31 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Optimax\_Sous.

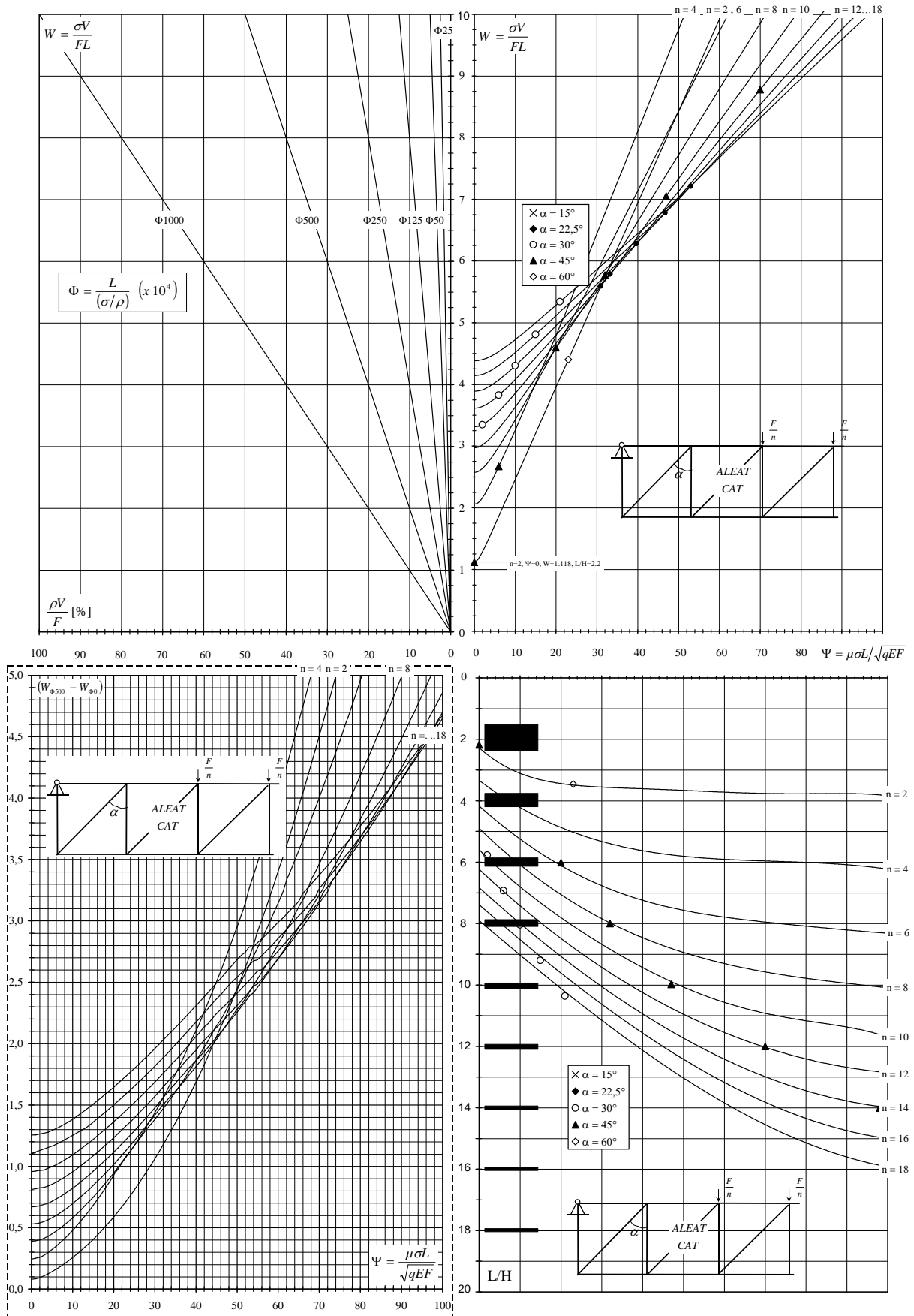


Figure III.32 : courbes d'efficace avec courbes de correction de poids propre pour le cas Aleat\_Cat\_Sous.



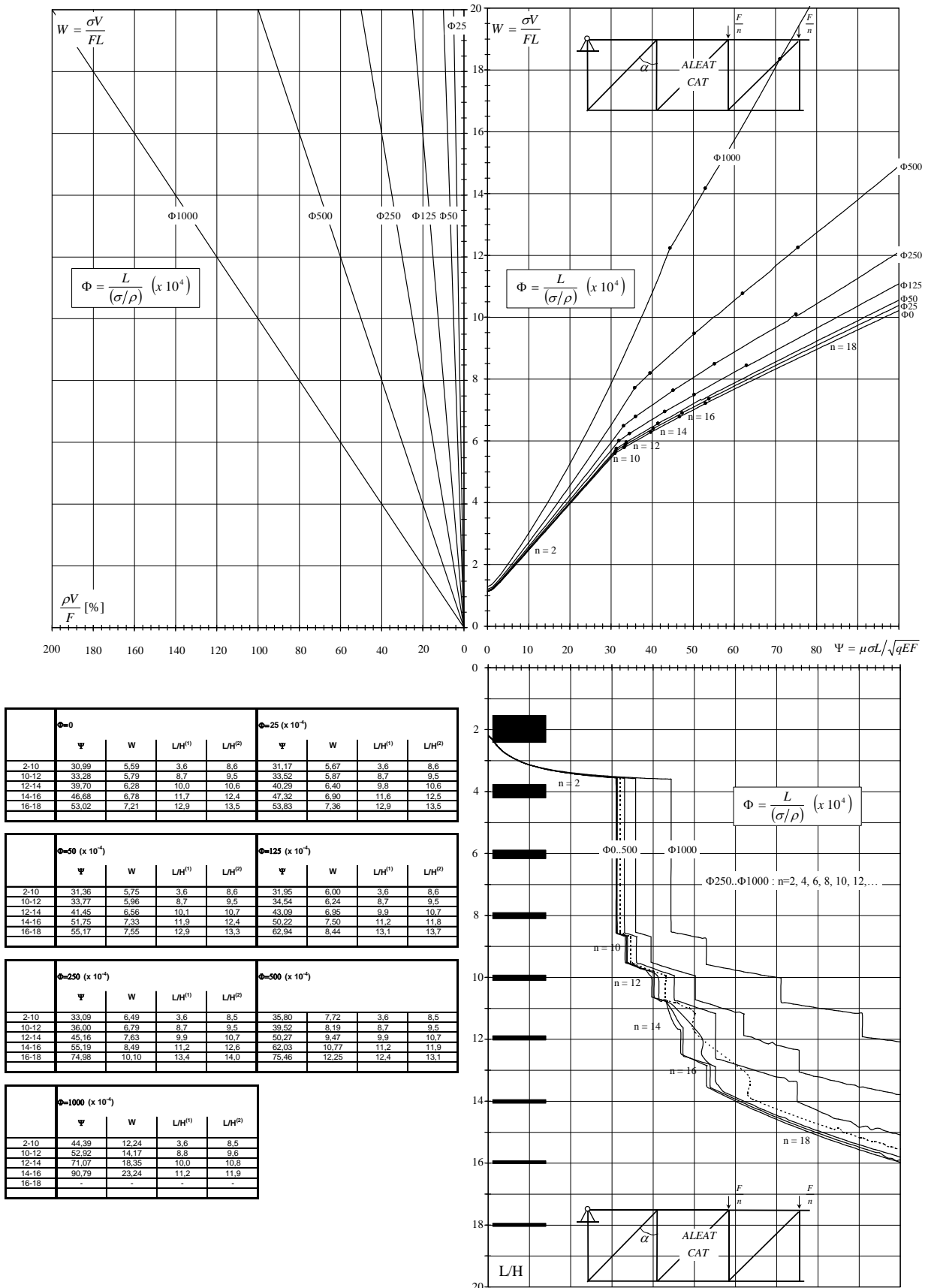
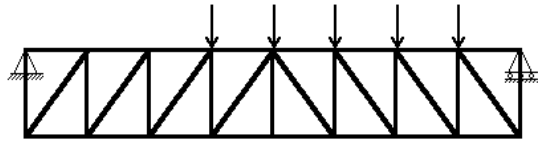
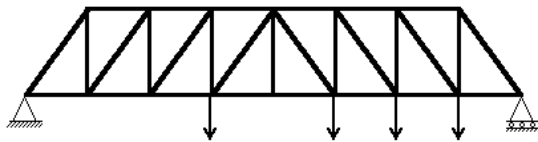
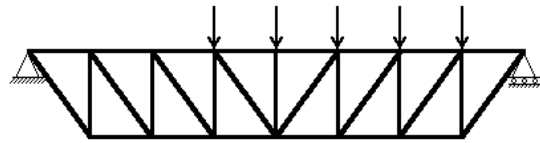
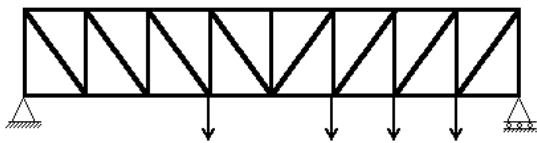
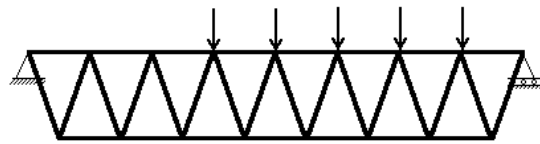
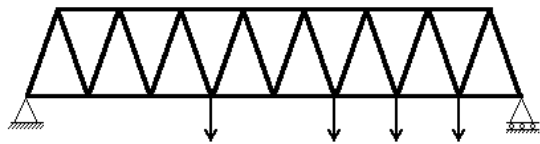


Figure III.33 : enveloppes des courbes d'efficace pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  pour le cas Aleat\_Cat\_Sous.



# Partie IV

## Synthèse

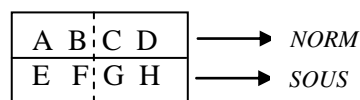




## IV.1. COMPARAISON DE L'INDICATEUR DE VOLUME DES 3 TYPES DE TREILLIS WARREN, PRATT ET HOWE

La figure IV.1 reprend les enveloppes des courbes d'efficacité pour les 3 types de treillis classiques et dans les 8 cas de figure. La supériorité des treillis Pratt par rapport aux treillis Howe, dans tous les cas de figure, a été établie et discutée dans la partie III. Il a été montré que le volume des treillis Pratt pouvait être jusqu'à 25% inférieur à celui des treillis Howe. La présente partie concerne donc essentiellement la comparaison entre le treillis Warren et le treillis Pratt.

Chacune des 8 sous-figures de la figure IV.2 comprend trois courbes relatives, respectivement, à l'enveloppe des courbes d'efficacité des 3 types de treillis. Ces 8 sous-figures résultent des 8 combinaisons possibles entre les cas Distr/Aleat, Sous/Norm et Optimax/Cat et sont dénommées 2.A à 2.H comme illustré ci dessous :



Ces figures confirment que le treillis Howe est moins efficace que les 2 autres, quelque soit le cas envisagé. De plus, elles suggèrent les commentaires suivants :

Pour les treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*) :

- **Le treillis Warren est plus efficace que tous les autres**, et particulièrement les treillis composés de catégories de barres identiques et chargés de façon aléatoire (Fig. 2.D). Dans ce cas le gain en volume par rapport au treillis Pratt dépasse 5% lorsque les courbes sont comparables, c'est à dire lorsqu'elles se rapportent à des nombres de mailles supérieurs à 3.

Pour les treillis situés en dessous de la ligne définie par les appuis (*Sous*) :

- **Les treillis Warren et Pratt sont en compétition très serrée**. Seul le cas *Distr\_Cat\_Sous* (Fig. 2.G) montre un avantage du treillis Pratt de quelques pourcents seulement.

## IV.2. AUTRES CONSIDERATIONS

### *A propos de la charge aléatoire :*

Il a été montré que le surplus de matière à mettre en œuvre lorsque la charge est aléatoire plutôt qu'uniformément distribuée est limitée à 10% pour les treillis Warren et Howe, tandis qu'elle peut atteindre des valeurs plus élevées pour les treillis Pratt, surtout pour les petits nombres de mailles.

### *A propos de l'optimisation individuelle des barres :*

Sur ce point, il y a entière concordance entre tous les types de treillis, puisque l'optimisation individuelle des barres procure dans les 3 cas un gain en matière de l'ordre de 20% à 40% selon les cas de figure et les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .

***A propos du volume par catégories de barres :***

Il n'y a pas de règle générale sur ce point de vue. Pour les treillis Warren et Pratt, c'est la membrure supérieure qui prend la plus grande part de matière, de l'ordre de 40 à 50%. Pour les treillis Howe, ce sont les diagonales. Les autres catégories de barres se partagent des pourcentages variables selon les cas de figure et les types de treillis.

***A propos de l'angle d'ouverture des mailles :***

Pour les treillis Howe et surtout Pratt appartenant aux enveloppes des courbes d'efficacité, il a été montré que l'angle d'ouverture de mailles était proche de 45 degrés, ce qui correspond à des mailles carrées et à la majorité des treillis Pratt que l'on rencontre dans la pratique. Pour les treillis Warren appartenant aux enveloppes des courbes d'efficacité, les mailles équilatérales ne sont efficaces que pour les treillis à faibles nombre de mailles, c'est à dire pour les petites valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Pour les treillis à plus grands nombres de mailles, la tendance se rapproche d'angles dont l'ouverture est de 45°, comme le montre la figure I.9 (Chap. 2, p17).

### **IV.3. CONCLUSION**

Tout d'abord, rappelons les limitations de cette étude, basée sur les hypothèses suivantes :

- les éléments en compression sont dimensionnés selon la courbe d'Euler en cloche dont l'équation est justifiée au chapitre 1 (§2.3.). Pour le matériau bois, cette courbe en cloche est une approximation grossière considérée valable pour tous les types de bois dans tous les types d'application. Pour le matériau acier, elle induit un surdimensionnement des sections, comme le montre la figure 8 du chapitre 1.
- les éléments en compression ont tous un même facteur de forme  $q = I/\Omega^2$ . Dans le cas ou, par exemple, la membrure supérieure est composée d'éléments creux (facteur de forme  $q_1$ ) et les diagonales en compression d'éléments composés (facteur de forme  $q_2$ ), il faut introduire un indicateur morphologique supplémentaire et l'optimisation devient plus complexe. Dans ce cas, la relation de base devient :

$$W = f(L/H, \Psi_1, \Psi_2, \Phi)$$

- L'étude ne tient pas en compte le surplus de volume à considérer pour les assemblages.
- L'étude ignore l'influence des contraintes parasites, qui peuvent être importantes comme le montre le chapitre 5 qui met en évidence que celles-ci peuvent être étudiées par l'intermédiaire d'un *indicateur de contraintes parasites*.

Cette partie IV clôture l'étude du volume des treillis classiques et leur comparaison. L'étude montre l'infériorité du treillis Howe par rapport aux treillis Pratt et la relative supériorité du treillis Warren.

L'une des autres conclusions de cette étude concerne la géométrie des mailles : si la maille carrée est la plus efficace pour les treillis Pratt dans la plupart des configurations (ce qui correspond à la plupart des situations rencontrées dans la pratique), la maille équilatérale ne l'est pour les treillis Warren que pour les faibles nombres de mailles. Les treillis de type Warren à grandes portées devront en effet posséder des mailles dont l'angle d'ouverture est plus aigu, plus proche de 45 degrés.

D'autre part, il faut rappeler que ces treillis ne sont rigoureusement comparables que si leur volume est associé au volume de matière relatif aux éléments du tablier chargés de reporter les charges aux

nœuds. Dans de nombreuses situations, un treillis à petit nombre de mailles devra donc être remplacé par un treillis à plus grand nombre de mailles, même si ce dernier est, a priori, moins efficient. Une solution permettant de comparer rigoureusement tous les types de treillis dans toutes les situations consiste à remplacer les éléments fléchis du tablier par des éléments exclusivement en traction ou en compression. C'est le cas des treillis multi-liernes (ou multi-haubanés) ou des multi-treillis étudiés par Ph. Samyn dans sa thèse de doctorat (voir bibliographie). Une étude approfondie des courbes d'efficacité des treillis multi-liernes est décrite dans l'épilogue de cette thèse.

Une autre conclusion concerne le gain en volume obtenu grâce à une optimisation individuelle des barres, de l'ordre de 20% à 40% par rapport aux cas de treillis composés de catégories de barres identiques. Ceci représente un gain de matière considérable, mais dont l'inconvénient est évidemment la difficulté pratique de réalisation d'une structure dont toutes les barres et tous les assemblages sont différents.

Par ailleurs, cette étude ignore totalement les rigidités des treillis qui, s'ils sont optimaux au niveau du volume, ne le sont pas nécessairement au niveau de la flèche à mi-travée, qui pourrait être excessive dans certains cas. Le chapitre 3, consacré à l'étude de la raideur de ces treillis classiques, apporte un grand nombre d'informations à ce sujet et montre que les déplacements des treillis optimaux au niveau du volume ne présentent jamais de déplacements excessifs.





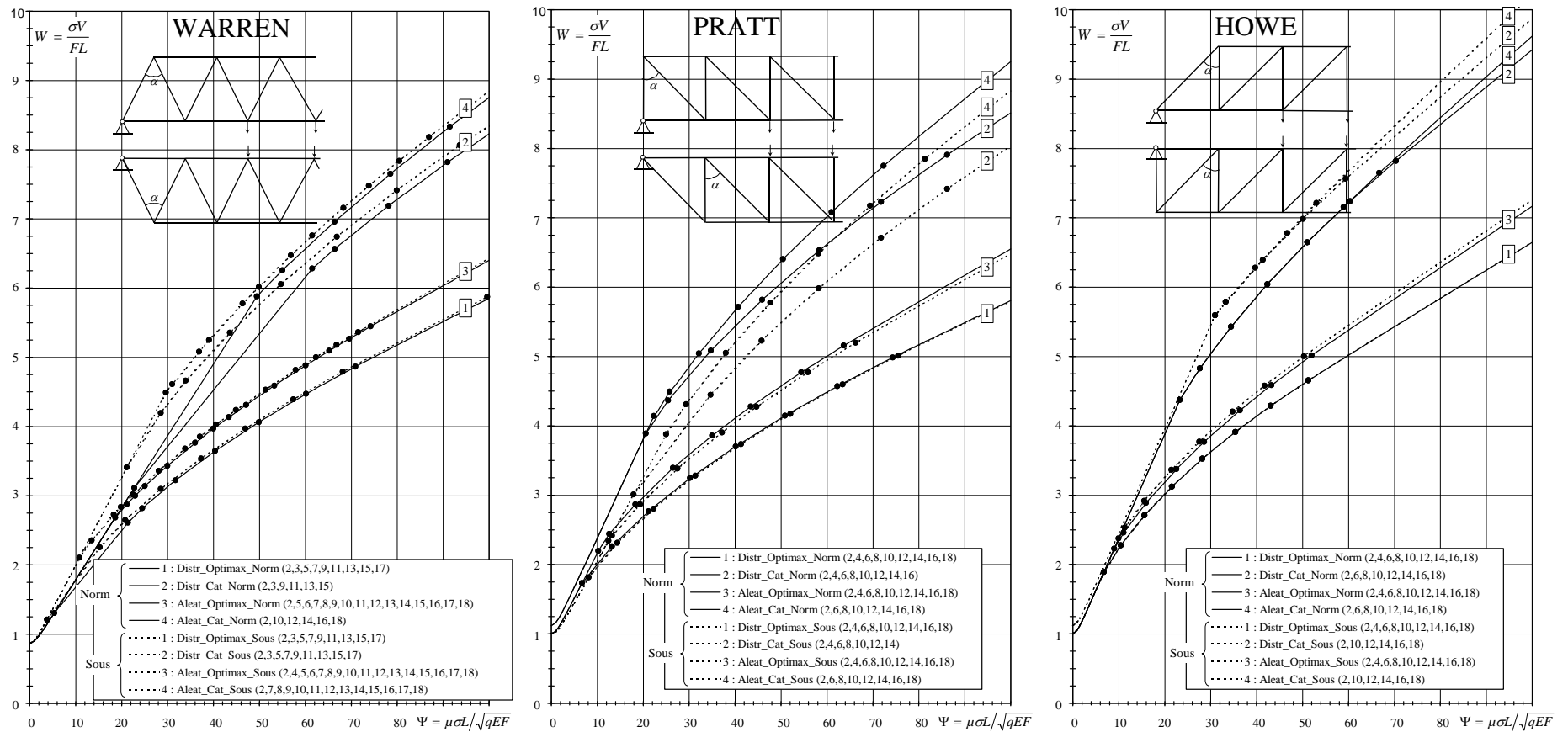


Figure IV.1 : enveloppes des courbes d'efficience des 3 types de treillis.

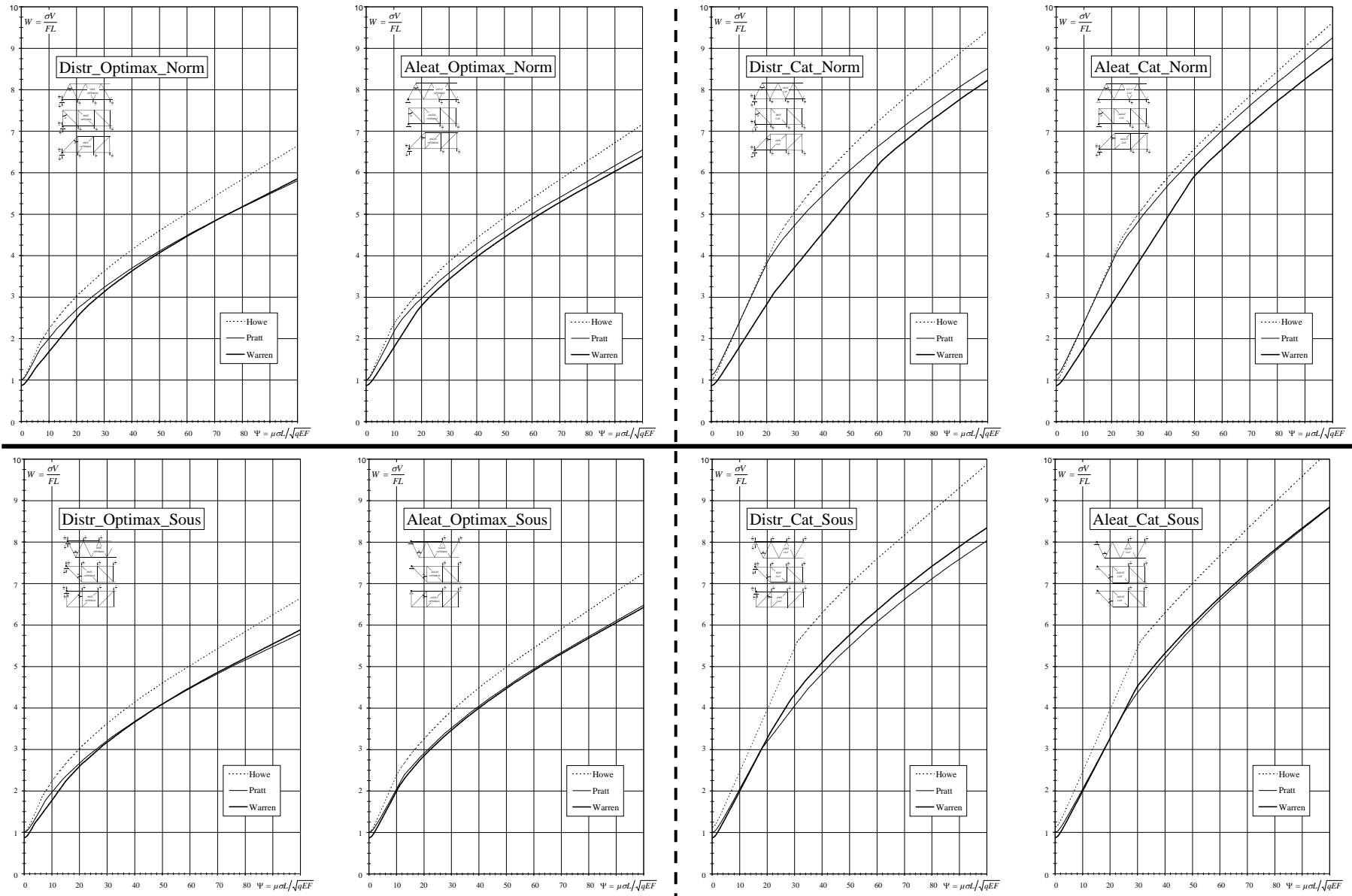


Figure IV.2 : enveloppes des courbes d'efficience dans les 8 cas de figure, pour les 3 types de treillis classiques.



# *Chapitre 3*

*Indicateur de  
déplacement et raideur  
des treillis classiques*

*Photo de première page : pont sur le petit Rhône en France.*

## 1. INTRODUCTION

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à l'optimisation du poids des treillis, sans tenir compte d'aucune contrainte portant, par exemple, sur leurs déformations. En pratique, il faudra souvent limiter les flèches relatives à mi-travée à une fraction de la portée  $L$ , par exemple  $1/300$ , voire  $1/500$  ou plus. Il est évident qu'une contre-flèche peu être envisagée, mais elle implique alors une mise en œuvre plus délicate.

Ce chapitre montre que la rigidité des treillis peut être étudiée par l'utilisation d'un *indicateur de déplacement*. Tout comme l'indicateur de volume, il ne dépend que des trois nombres sans dimensions déjà évoqués : l'*élancement géométrique*  $L/H$  du treillis, l'*indicateur de flambement*  $\psi$  et l'*indicateur de poids propre*  $\Phi$  :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \text{Fonction}(L/H, \Psi, \Phi)$$

Cet indicateur de déplacement permet de tracer les *courbes d'efficacité de déplacement* des différents treillis. Ces courbes représentent les treillis les moins déformables et les rapports  $L/H$  qui leurs sont associés. Elles sont d'un intérêt limité. En effet, pour un prédimensionnement, il semble légitime de se baser d'abord sur les courbes d'efficacité de volume même s'il faut par la suite concéder à certaines modifications de géométrie pour limiter la flèche.

Il sera montré que les treillis les plus légers ne sont pas nécessairement ceux qui présentent les plus petites flèches. Ensuite, les courbes enveloppes des courbes d'efficacité de volume des treillis classiques (commentées au chapitre 2) seront associées aux indicateurs de déplacement qui leurs correspondent, afin de voir si les déplacements associés aux treillis de poids minimum ne sont pas excessifs.

Enfin, une approche de calcul des courbes d'efficacité de volume sous contrainte de flèche relative imposée à mi-travée sera décrite.

## 2. EXPRESSION DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT

### 2.1. Flambement et poids propre négligés

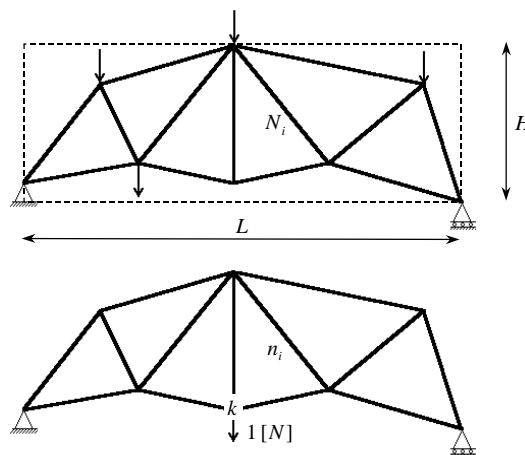


Figure 1

Soit un treillis soumis à une charge totale extérieure  $F$ , inscrit dans un rectangle de dimensions  $L$  et  $H$ , et dont chaque barre d'indice "i", caractérisée par une section  $\Omega_i$  et une longueur  $l_i$ , est soumise à un effort normal  $N_i$ .

Soit ce même treillis soumis à l'un de ses nœuds d'indice "k" à une charge verticale unitaire de 1 [N] créant dans chaque barre d'indice "i" un effort normal  $n_i$  (\* 1 [N]).

Si les charges s'appliquent aux nœuds et si ceux-ci sont articulés, le déplacement vertical du nœud "k" dans le treillis soumis à la charge totale F vaut :

$$\delta = \sum_i \frac{N_i n_i l_i}{E \Omega_i}$$

Si la structure est constituée d'un seul matériau de module d'élasticité E, et si toutes les barres ont une section  $\Omega_i$  adaptée à la même contrainte  $\sigma$ , l'expression précédente peut se réécrire :

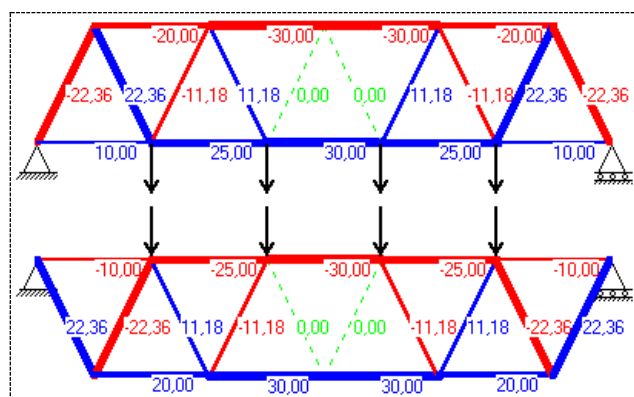
$$\Omega_i = \frac{N_i}{\sigma} \Rightarrow \delta = \frac{\sigma L}{E} \sum_i n_i (l_i/L) \Rightarrow \Delta = \frac{E \delta}{\sigma L} = \sum_i n_i (l_i/L)$$

Or, les nombres  $n_i$  et  $l_i/L$  ne dépendent que du rapport L/H (voir Chap.1, §2). Les relations précédentes mènent donc à la définition d'un *indicateur de déplacement* qui correspond au déplacement vertical du nœud "k" :

$$\Delta = \frac{E \delta}{\sigma L} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H} \right)$$

**Remarque :** il est intéressant de remarquer que *l'indicateur de déplacement relatif à un nœud donné est indépendant du cas de charge pour lequel le treillis est optimisé*. Il s'agit là d'une propriété remarquable de l'indicateur de déplacement, valable uniquement si toutes les barres sont optimisées individuellement et si les charges ne sont pas aléatoires.

Il faut toutefois nuancer la propriété précédente dans la situation où un cas de charge correspond à un effort  $N_i$  nul dans certaines barres (dont la section est non-nulle en pratique). En effet, ces barres n'apportent alors aucune contribution au terme de somme  $\sum_i N_i n_i l_i / \Omega_i$  et l'indicateur de déplacement prend une valeur plus petite. Cette situation se produit par exemple pour le treillis Warren à nombre impair de mailles et soumis à une charge distribuée :



La figure 2 représente (à gauche) les valeurs de l'indicateur de déplacement relatif à la flèche à mi-travée correspondant au treillis Warren à "n" mailles (n = 2 à 18) chargé sur sa membrure inférieure par une charge totale F distribuée sur chaque nœud sous forme d'un effort ponctuel valant F/n (et F/2n

à chaque appui). Chaque barre est optimisée individuellement. Cette figure est extraite du doctorat de Philippe Samyn (voir bibliographie)

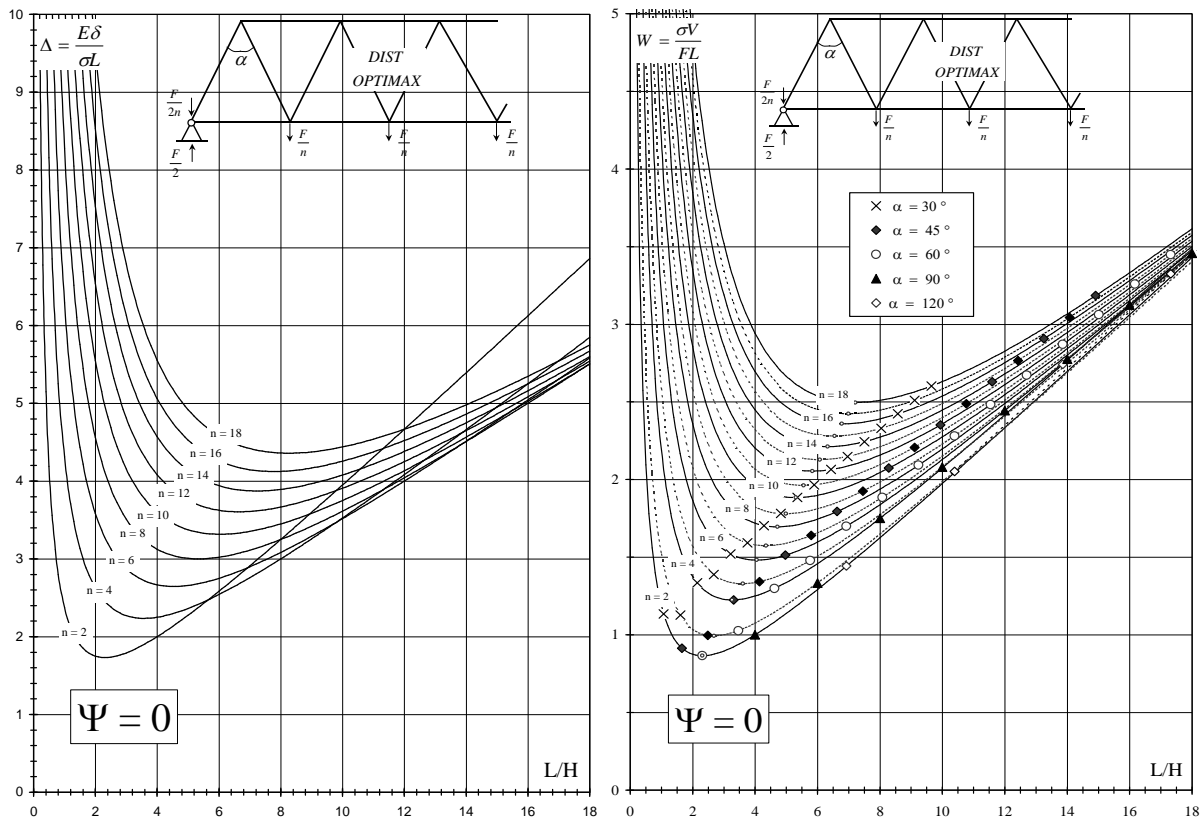
Pour ce cas, la figure 3 montre la répartition des efforts, respectivement, lorsque la charge s'applique sur toute la membrure du treillis et lorsqu'une charge unitaire s'applique sur le nœud central. Ces valeurs analytiques des efforts sont à l'origine de l'expression ci-dessous de l'indicateur de déplacement dont les valeurs sont reprises à la figure 2 (à gauche) :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \sum n_i \left( \frac{l_i}{L} \right) = (n-1) \frac{H}{L} + \left( \frac{n^2 + n - 1}{4n^2} \right) \frac{L}{H}$$

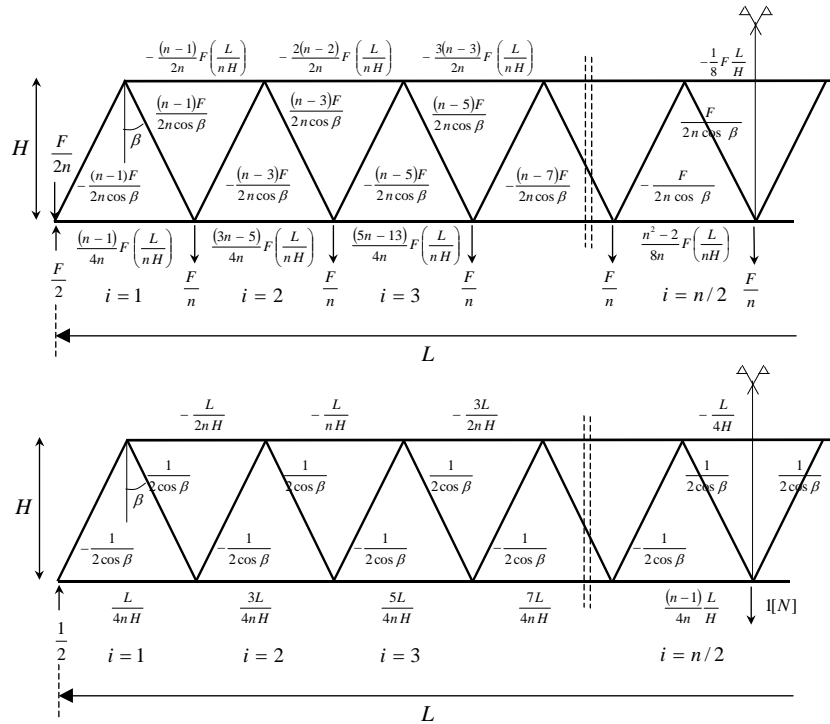
(Pour n pair)

$\Psi = 0$	$L/H^{(Wopti)}$	$L/H^{(\Delta opti)}$
n = 2	2,3	2,3
n = 4	3,3	3,5
n = 6	4	4,5
n = 8	4,7	5,3
n = 10	5,3	6
n = 12	5,8	6,6
n = 14	6,3	7,2
n = 16	6,8	7,8
n = 18	7,2	8,3

La figure 2 montre qu'à chaque treillis relatif à un nombre donné de mailles correspond une valeur du rapport L/H qui minimise l'indicateur de déplacement  $\Delta$ . Il est intéressant de comparer ces valeurs de L/H avec celles qui minimisent l'indicateur de volume des mêmes treillis, illustré à la figure 2 (droite) reprise du chapitre 1. Dans ce cas où le flambement est négligé ( $\psi = 0$ ), les ratios L/H qui minimisent l'indicateur de volume W sont très proches de ceux qui minimisent l'indicateur de déplacement  $\Delta$ . Ceci est illustré au tableau ci-contre pour n pair.



**Figure 2 :** indicateur de déplacement vertical à mi-travée (à gauche) et indicateur de volume (à droite) d'un treillis Warren chargé sur sa membrure inférieure et dont les barres sont optimisées de façon individuelle (*War\_Distr\_Optimax\_Norm*).



**Figure 3 :** répartition des efforts dans les barres d'un treillis Warren à nombre pair de mailles pour, respectivement, une charge totale  $F$  répartie sur la membrure inférieure et une charge ponctuelle unitaire appliquée au nœud central de cette même membrure.

## 2.2. Prise en compte du flambement

La courbe de flambement considérée dans toute cette étude est représentée à la figure 8 du chapitre 1. L'équation analytique correspondante est la suivante :

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Lambda^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Lambda = \lambda / (\pi \sqrt{E/\sigma}) \\ \lambda = \mu l \sqrt{\Omega/I} \end{cases}$$

Cette équation a permis (voir Chap1, § 2.3.2.) de calculer la section d'une barre soumise à un effort de compression  $N_i = k_i F$  :

$$\Omega_i = \frac{k_i F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) \quad [1]$$

Dans le cas d'une barre soumise à traction, on a :  $\Omega_i = \frac{k_i F}{\sigma}$ .

Si (T) et (C) représentent respectivement l'ensemble des barres en traction et l'ensemble des barres en compression, le déplacement du nœud "k" vaut (voir figure 1) :

$$\delta = \sum_{(T)} \frac{N_i n_i l_i}{E \Omega_i} + \sum_{(C)} \frac{N_i n_i l_i}{E \Omega_i} = \sum_{(T)} \frac{(k_i F) n_i l_i}{E \Omega_i} + \sum_{(C)} \frac{(k_i F) n_i l_i}{E \Omega_i} = \frac{\sigma L}{E} \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + \frac{FL}{E} \sum_{(C)} \frac{k_i n_i (l_i/L)}{\Omega_i}$$



Si on y substitue la valeur de  $\Omega_i$  correspondant aux barres en compression et reprise ci-dessus, on obtient :

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + \frac{2\sigma L}{E} \sum_{(C)} \frac{n_i (l_i/L)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2}\right)}$$

Finalement, l'expression de l'indicateur de déplacement est la suivante :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + 2 \sum_{(C)} \frac{n_i (l_i/L)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2}\right)} = \text{Fonction}(L/H, \Psi)$$

**Pour**  $\Psi \rightarrow 0$  , c'est à dire lorsqu'il n'y a aucun danger de flambement, on retrouve l'expression de l'indicateur de déplacement obtenue lorsque les barres en compression sont dimensionnées à la même contrainte  $\sigma$  :

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} (\Delta) = \sum_{(T)+(C)} n_i \left(\frac{l_i}{L}\right)$$

**Pour**  $\Psi \rightarrow \infty$  , c'est à dire lorsque les barres en compression ont fortement tendance à flamber, on retrouve l'expression de l'indicateur de déplacement que l'on obtient lorsque les barres en compression sont dimensionnées à la loi d'Euler théorique  $\sigma_{crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$  :

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} (\Delta) = \sum_{(T)} n_i \left(\frac{l_i}{L}\right) + \frac{\pi}{\Psi} \sum_{(C)} n_i \sqrt{k_i} \quad \left( \approx \sum_{(T)} n_i \left(\frac{l_i}{L}\right) \right)$$

Cette dernière relation montre que **les déplacements d'une structure sont d'autant plus petits que les éléments de la structure ont tendance à flamber**. Cela va de soi puisque plus les éléments ont des sections importantes, plus la structure est rigide (à condition de tenir compte du poids propre lors de leur dimensionnement).

### 3. INDICATEUR DE DEPLACEMENT D'UN TREILLIS COMPOSE DE CATEGORIES DE BARRES IDENTIQUES

Si "j" est le nombre de catégories de barres et si  $n_j$  est le nombre de barres de la catégorie "j", on a :

$$\delta = \sum_j \left( \sum_{n_j} \frac{N_j n_j l_j}{E \Omega_j} \right)$$

Or, la section  $\Omega_j$ , identique pour toutes les barres de la catégorie "j", correspond à une barre dont la section, en traction ou en compression, détermine toutes les autres. Cette section peut toujours s'exprimer par une relation du type :  $\Omega_j = k_j F f_j^{(L/H, \Psi)} / \sigma$  .

Par ailleurs, comme  $N_i = k_i F$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta &= \sum_j \left( \sum_{n_j} \frac{\sigma k_i n_i l_i}{E k_j f_j^{(L/H, \Psi)}} \right) = \frac{\sigma L}{E} \sum_j \left( \sum_{n_j} \frac{k_i n_i (l_i/L)}{k_j f_j^{(L/H, \Psi)}} \right) \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{E \delta}{\sigma L} = \sum_j \left( \sum_{n_j} \frac{k_i n_i (l_i/L)}{k_j f_j^{(L/H, \Psi)}} \right) = \text{fonction}(L/H, \Psi) \end{aligned}$$

Comme  $k_i$ ,  $k_j$ ,  $n_i$  et  $l_i/L$  ne dépendent que du rapport  $L/H$  (voir Chap 1, §2), il en résulte une expression de l'indicateur de déplacement qui ne dépend, elle aussi, que de  $L/H$  et  $\Psi$ .

#### 4. INDICATEUR DE DEPLACEMENT D'UN TREILLIS SOUMIS A UNE CHARGE ALEATOIRE

Dans cette situation, la structure peut être soumise à une charge qui peut s'appliquer n'importe où sur la membrure, et même de façon discontinue. La charge totale est alors une fraction  $iF/n$  ( $i = 1..n$ ) de la charge maximale (et distribuée)  $F$  pouvant agir sur le treillis. Chaque nœud de la membrure est donc soit dépourvu de toute charge soit soumis à un effort de valeur  $F/n$ . La procédure d'optimisation du volume relative à un tel cas est décrite au chapitre 1 (§5.2). Elle consiste à dimensionner la section de chaque barre en fonction des efforts maximaux de traction et/ou de compression qu'elle peut subir. Dans tous les cas, il en résulte une section de barre qui dépend des deux paramètres  $L/H$  et  $\psi^{-1}$  (voir chap.1, §2.2 et §2.3.2) :

$$\Omega_i = (F/\sigma) f_i^{(L/H, \Psi)}$$

Le déplacement du nœud "k" vaut donc :

$$\delta = \sum_i \frac{N_i n_i l_i}{E \Omega_i} = \sum_i \frac{\sigma (k_i F) n_i l_i}{E (f_i F)} = \frac{\sigma L}{E} \sum_i \frac{k_i n_i}{f_i} \left( \frac{l_i}{L} \right)$$

Et l'indicateur de déplacement ne dépend à nouveau que des deux paramètres  $L/H$  et  $\Psi$  :

$$\Delta = \frac{E \delta}{\sigma L} = \text{Fonction} \left( \frac{L}{H}, \Psi \right)$$

---

<sup>1</sup> Et de l'indicateur de poids propre  $\Phi$  si on en tient compte.

## 5. PRISE EN COMPTE DU POIDS PROPRE DANS L'EXPRESSION DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT

### 5.1. Si le flambement est négligé

L'expression de l'indicateur de déplacement telle qu'elle a été établie ci-dessus ne dépend pas de la valeur de la charge totale ( $F+\rho V$ ), puisque la structure de référence n'est soumise qu'à un effort unitaire et en aucun cas à son poids propre :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \sum_i n_i (l_i/L)$$

On peut donc en conclure que, **si le flambement est négligé, la prise en compte du poids propre ne modifie pas la valeur de l'indicateur de déplacement.**

### 5.2. Si le flambement est pris en compte

- La section d'une barre d'indice "i" en traction travaillant à la contrainte  $\sigma$  vaut (voir §2.1) :

$$\Omega_i = \frac{k_i (F + \rho V) L}{\sigma}$$

- La section d'une barre en compression adaptée à la contrainte critique d'Euler selon la courbe en cloche (voir chap. 1, §2.3.1.) vaut :

$$\Omega_i = \frac{k_i (F + \rho V)}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4 (l_i/L)^2}{\pi^2 k_i} \frac{(\mu\sigma L)^2}{qE(F + \rho V)}} \right)$$

Le déplacement vertical du nœud "k" (voir figure 1) vaut alors :

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{(T)} \frac{N_i n_i l_i}{E\Omega_i} + \sum_{(C)} \frac{N_i n_i l_i}{E\Omega_i} = \frac{\sigma L}{E} \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + \sum_{(C)} \frac{(k_i (F + \rho V)) n_i l_i}{E\Omega_i} \\ &= \frac{\sigma L}{E} \left( \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + 2 \sum_{(C)} n_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4 (l_i/L)^2}{\pi^2 k_i} \frac{(\mu\sigma L)^2}{qEF \left( 1 + \frac{\rho V}{F} \right)}} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, il a été montré (Chap.1, §4.2.3. et §4.2.4.) :

1. Que le rapport  $\rho V/F$  est égal au produit de l'indicateur de volume par l'indicateur de flambement :  $\frac{\rho V}{F} = W \Phi$
2. Que l'indicateur de volume  $W$  est une fonction implicite de  $L/H$ ,  $\Psi$  et  $\Phi$  :

$$W = \text{Fonction} (L/H, \Psi, \Phi)$$

On le notera  $W^{(L/H, \Psi, \Phi)}$ .

La relation ci-dessus peut donc se réécrire :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + 2 \sum_{(C)} \frac{n_i (l_i/L)}{\left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)}$$

De cette ultime approche résulte donc une expression de l'indicateur de déplacement qui dépend implicitement des trois paramètres  $L/H$ ,  $\psi$  et  $\Phi$  :

$$\Delta = \text{fonction implicite}(L/H, \Psi, \Phi)$$

La relation ci-dessus montre aussi que l'indicateur de déplacement est d'autant plus grand que le poids propre est important, ce qui va de soi (voir aussi §7.3.).

**Pour  $\Phi \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque l'on néglige le poids propre de la structure, on retrouve l'expression de l'indicateur de déplacement obtenue au §2.2. :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} \stackrel{\Phi \rightarrow 0}{=} \Delta^{(T)} + 2 \sum_{(C)} \frac{n_i (l_i/L)}{\left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)}$$

**Pour  $\Phi \rightarrow \infty$** , c'est à dire lorsque la structure est essentiellement soumise à son poids propre ( $F \ll \rho V/F$ ), on obtient :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \sum_{(T)} n_i (l_i/L) + 2 \sum_{(C)} \frac{n_i (l_i/L)}{\left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi_{pp}^2} \right)}$$

où  $\Psi_{pp} = \frac{\mu \sigma L}{\sqrt{q E \rho V}}$  est l'indicateur de flambement sous poids propre.

## 6. FLECHES RELATIVES

Pour une valeur donnée de la flèche relative  $\delta/L$ , l'indicateur de déplacement est une fonction linéaire de  $E/\sigma$ , illustrée à la figure 4 (à gauche) :

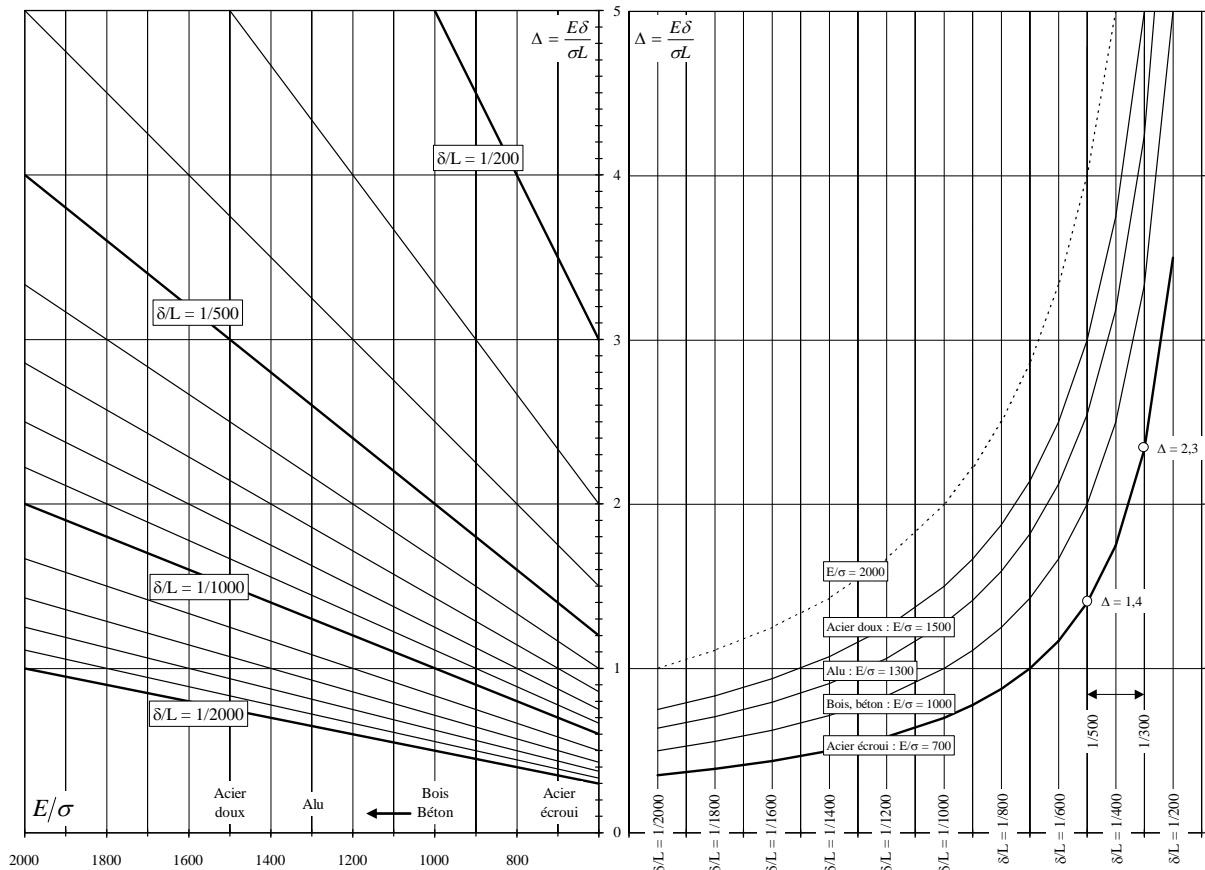
$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \left( \frac{\delta}{L} \right) \left( \frac{E}{\sigma} \right)$$

Les valeurs moyennes de  $E/\sigma$  pour les différents matériaux sont les suivantes :

- pour l'acier HLE :  $E/\sigma = 700$ , ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);
- pour l'acier doux :  $E/\sigma = 1500$ , ( $\sigma = 140$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);

- pour l'aluminium :  $E/\sigma = 1273,$  ( $\sigma = 55$  Mpa,  $E = 70000$  MPa);
- pour le bois :  $E/\sigma = 1000,$  ( $\sigma = 10$  Mpa,  $E = 10000$  MPa);
- pour le béton :  $E/\sigma = 1000\dots,$  ( $\sigma = 10..15\dots$  Mpa,  $E = 15000\dots30000$  MPa).

La figure 4 (droite) montre que pour l'acier HLE, l'indicateur de déplacement doit être limité à 1,4 pour assurer une flèche inférieure à L/500 et limité à 2,3 pour assurer une flèche inférieure à L/300.



**Figure 4 :** variation de  $\Delta$  en fonction du rapport  $E/\sigma$  (à gauche) et de la flèche relative  $\delta/L$  (à droite).

## 7. ANALYSE ET COMPARAISON DES TREILLIS WARREN, PRATT ET HOWE

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du volume des treillis classiques. Un certain nombre de comparaisons ont été effectuées et certaines conclusions concernant l'efficacité de ces treillis ont été tirées. L'une de ces conclusions concerne l'infériorité du treillis Howe par rapport aux deux autres. Deux questions essentielles se posent à présent : dans une même famille de treillis, les treillis optimaux ne correspondent-ils pas à des flèches trop importantes ? l'indicateur de déplacement qui leur correspondent (relatif à la flèche à mi-travée) est-il lui aussi optimum et sinon, quel est l'écart par rapport à l'optimum ?

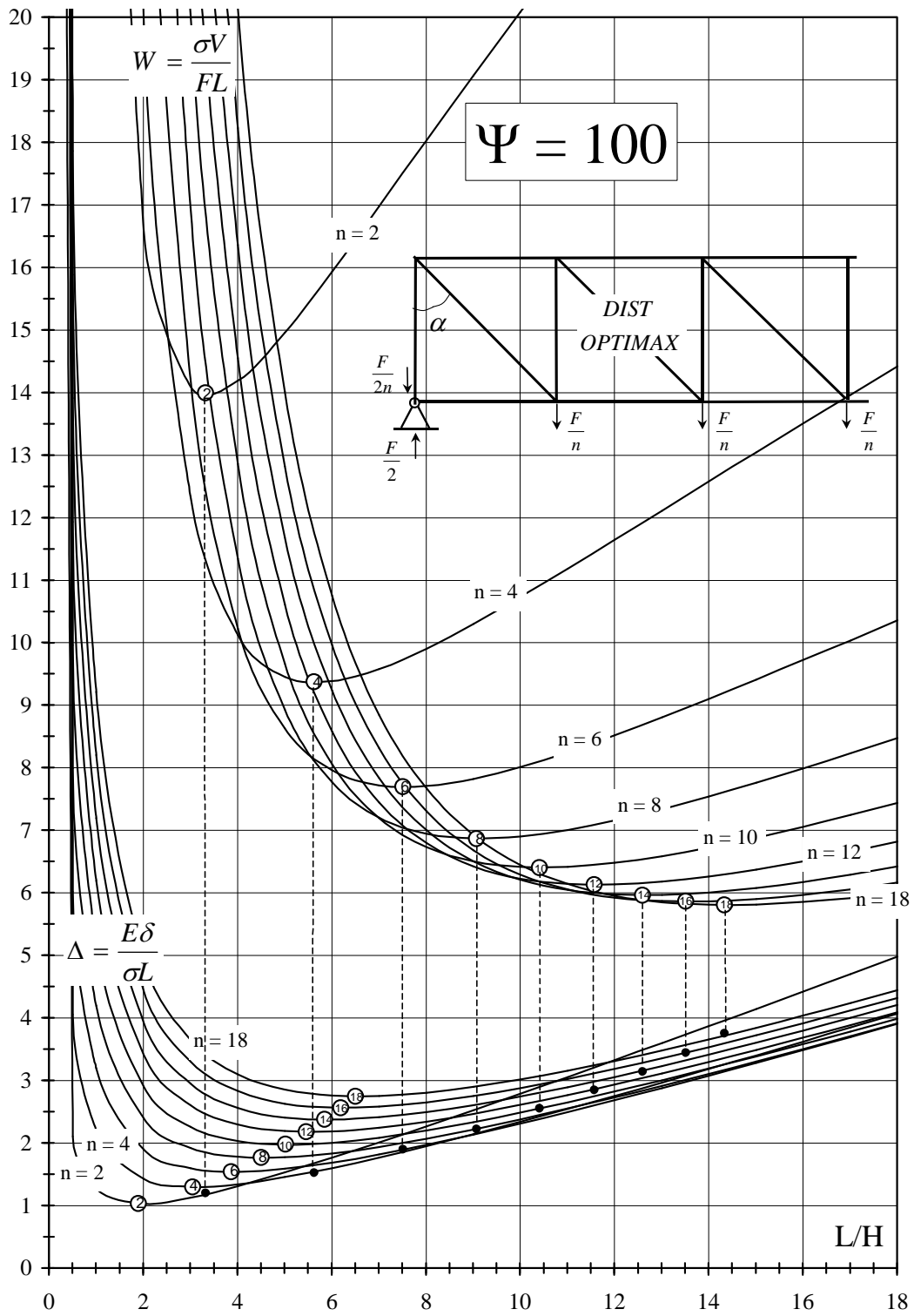


Figure 5 : Indicateur de volume  $W$  et indicateur de déplacement  $\Delta$  en fonction de  $L/H$  pour  $\Psi = 100$ , dans le cas *Pratt\_Distr\_Optimax\_Norm.*

### 7.1. Courbes d'efficacité de déplacement

Tout comme l'indicateur de volume, l'indicateur de déplacement ne dépend que des deux paramètres  $L/H$  et  $\Psi$  (plus  $\Phi$  si l'on considère le poids propre). On peut donc tracer des courbes d'efficacité qui représentent les treillis dont la flèche à mi-travée est minimale. Ceci se fait par un calcul numérique dont l'organigramme est similaire à celui de la figure 9 du chapitre 1. La seule différence se situe au niveau du point 6 de cet organigramme qui consiste cette fois en une recherche du rapport  $L/H$  qui minimise la flèche à mi-travée, toutes autres choses restant égales.

Les courbes d'efficacité (de déplacement) relatives aux treillis Warren, Pratt et Howe situés au dessus de la ligne définie par les appuis (*Norm*) et dont les barres sont optimisées individuellement (*Optimax*) ou par catégories (*Cat*) sont reprises aux figures suivantes :

- Figure 6 : *War\_Dist\_Optimax\_Norm*
- Figure 7 : *War\_Dist\_Cat\_Norm*
- Figure 8 : *Pratt\_Dist\_Optimax\_Norm*
- Figure 9 : *Pratt\_Dist\_Cat\_Norm*
- Figure 10 : *Howe\_Dist\_Optimax\_Norm*
- Figure 11 : *Howe\_Dist\_Cat\_Norm*

A	B
C	D

Les cas de charges aléatoires (*Aléat*) ou de treillis situés sous (*Sous*) la ligne définie par les appuis fournissent des résultats très similaires.

Chaque figure est divisée en 4 sous-figures comme indiqué sur le schéma ci-dessus. La figure B représente les courbes d'efficacité relatives à l'indicateur de déplacement, pour tous les nombres de mailles compris entre 2 et 18. Ces courbes correspondent donc aux treillis les moins déformables. La figure A, à lire en vis à vis de la figure B qui partage son axe des ordonnées, permet d'évaluer directement la flèche relative, chacune de ces courbes correspondant à un matériau donné.

La figure D, dont l'axe des ordonnées est à lire de haut en bas et qui partage son axe des abscisses avec la figure B, reprend les valeurs du rapport  $L/H$  associées aux treillis les moins déformables.

Enfin, la figure C (encadrée en pointillés), concerne les valeurs du rapport  $L/H$  associées aux courbes d'efficacité relatives à l'indicateur de volume. La figure C est à comparer avec la figure D.

Les figures 6 à 11 suggèrent les commentaires suivants :

- **Plus un treillis possède de mailles, plus il est déformable.** Cette constatation doit être nuancée pour les treillis Warren : le treillis à 3 mailles est moins déformable que le treillis à 2 mailles.
- Les figures B suggèrent que plus l'indicateur de flambement  $\Psi$  est grand, moins le treillis est déformable. Ceci voudrait dire que plus la portée d'un treillis est grande, toutes autres choses restant égales (y compris la charge par unité de longueur), plus la flèche relative  $\delta/L$  est petite. **Ceci n'est vrai que si le nombre de mailles est constant.** En réalité, les courbes d'efficacité relatives à l'indicateur de volume ont montré que le nombre de mailles doit augmenter si l'indicateur de flambement augmente. Or, si le nombre de mailles augmente, l'indicateur de déplacement augmente et par conséquent la flèche relative. Pour lever le doute, il faut calculer les valeurs de  $\Delta$  relatives aux enveloppes des courbes d'efficacité de W. C'est l'objet du §7.2.

- les figures C et D montrent que, Excepté pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  (voir figure 2), les élancements  $L/H$  relatifs aux treillis les plus rigides sont plus petits que les élancements  $L/H$  relatifs aux treillis de volume minimum. Cette propriété s'accroît encore pour les treillis composés de catégories de barres. La figure 5 reprend les valeurs de  $W$  et de  $\Delta$  en fonction de  $L/H$  pour un indicateur de flambement  $\Psi$  fixé à 100, dans le cas *Pratt\_Distr\_Optimax\_Norm*. Cette figure montre que le surplus d'indicateur de déplacement imposé par le treillis de poids minimum par rapport à l'indicateur de déplacement minimum atteint 35 % pour  $n = 18$ . Cet écart s'accroît davantage pour les plus grands nombres de mailles. Il est donc regrettable de constater que **les treillis de poids minimum ne sont pas les moins déformables**.
- Les treillis Warren, Pratt et Howe montrent des courbes d'efficacité de déplacement très semblables. Globalement, les trois familles sont équivalentes si l'on exclut toute comparaison avec l'indicateur de volume, ce qui sera fait ci-après.





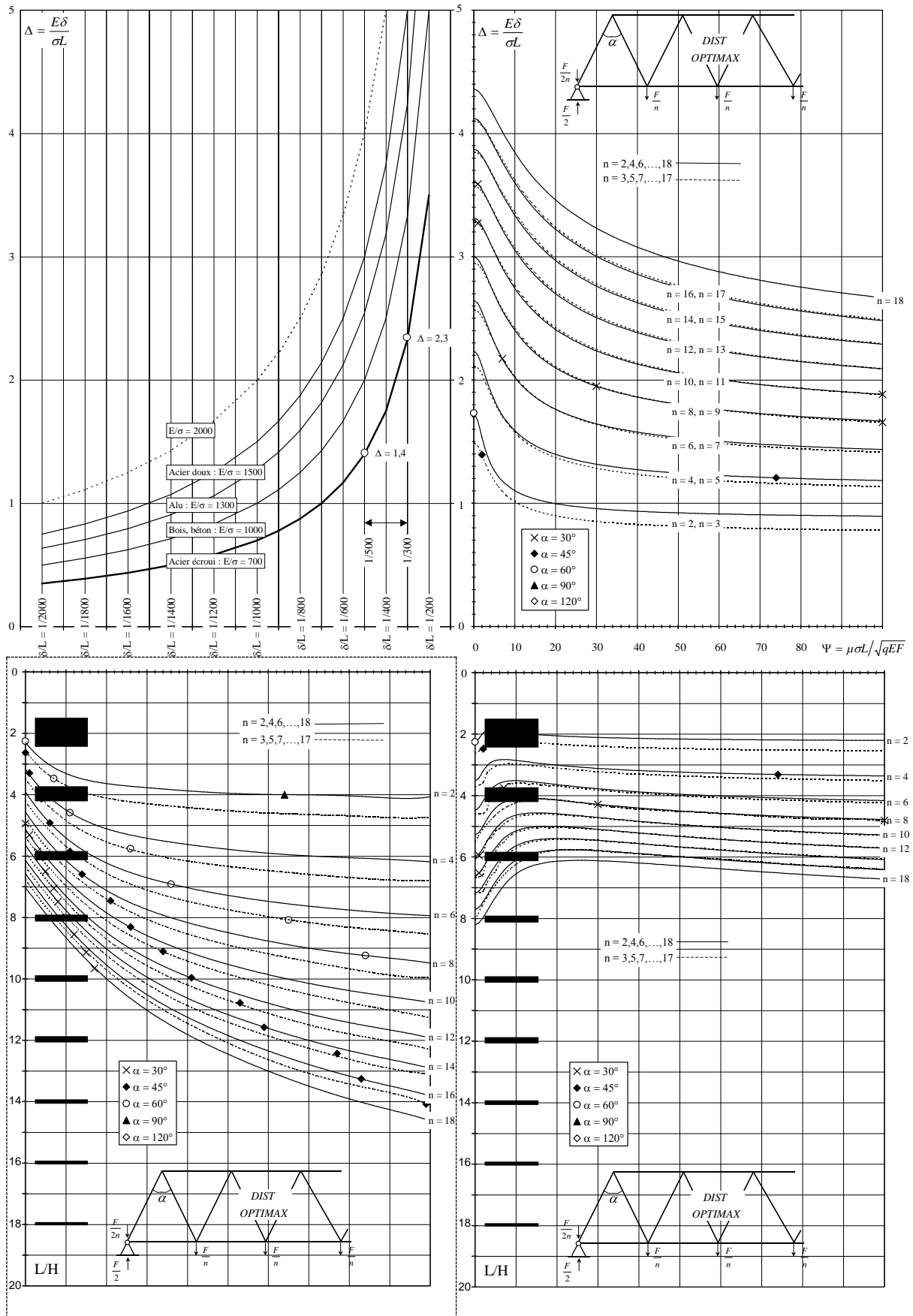


Figure 6 : Courbes d'efficacité au déplacement dans le cas War\_Distr\_Optimax\_Norm.

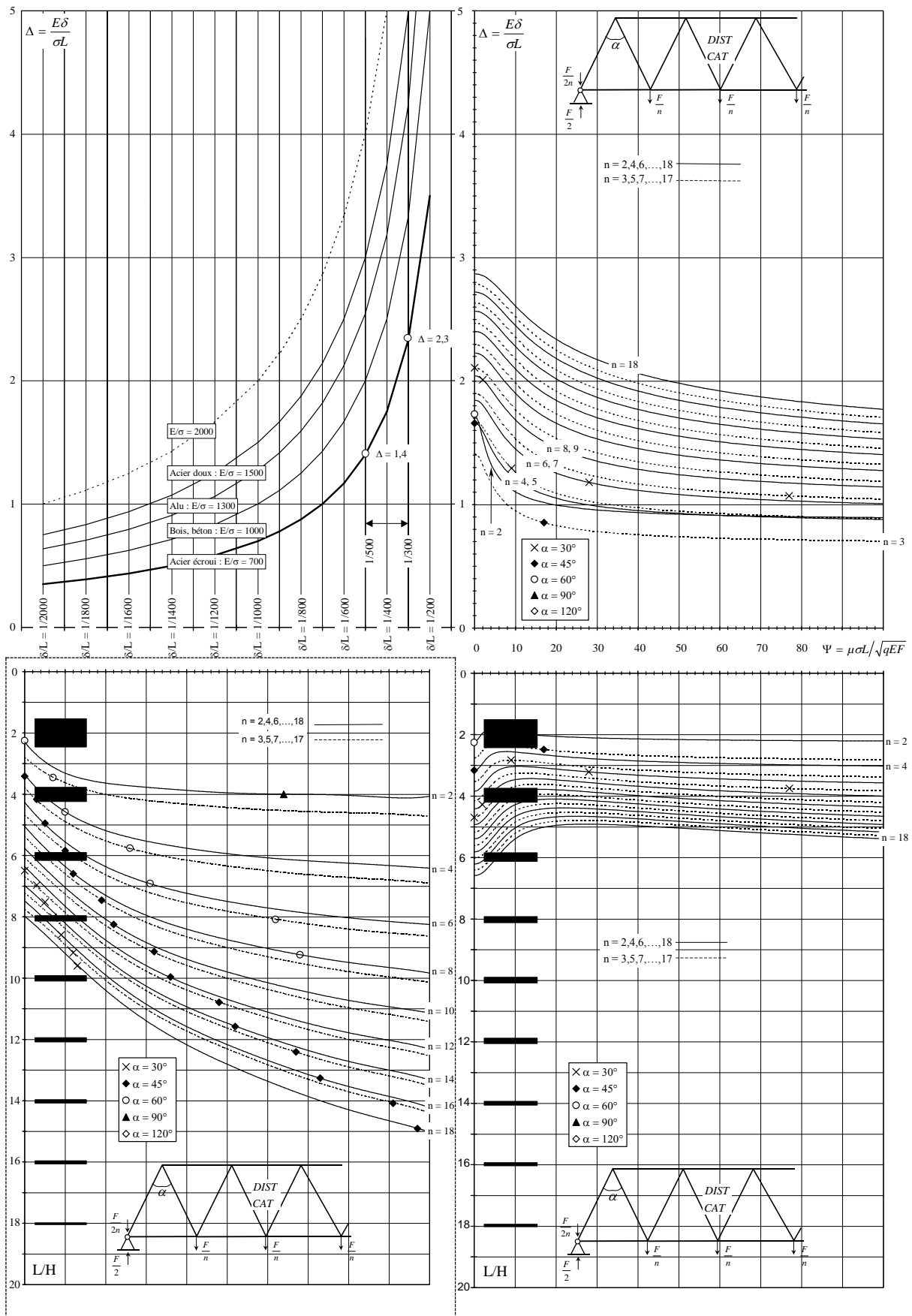


Figure 7 : Courbes d'efficace au déplacement dans le cas War\_Distr\_Cat\_Norm.

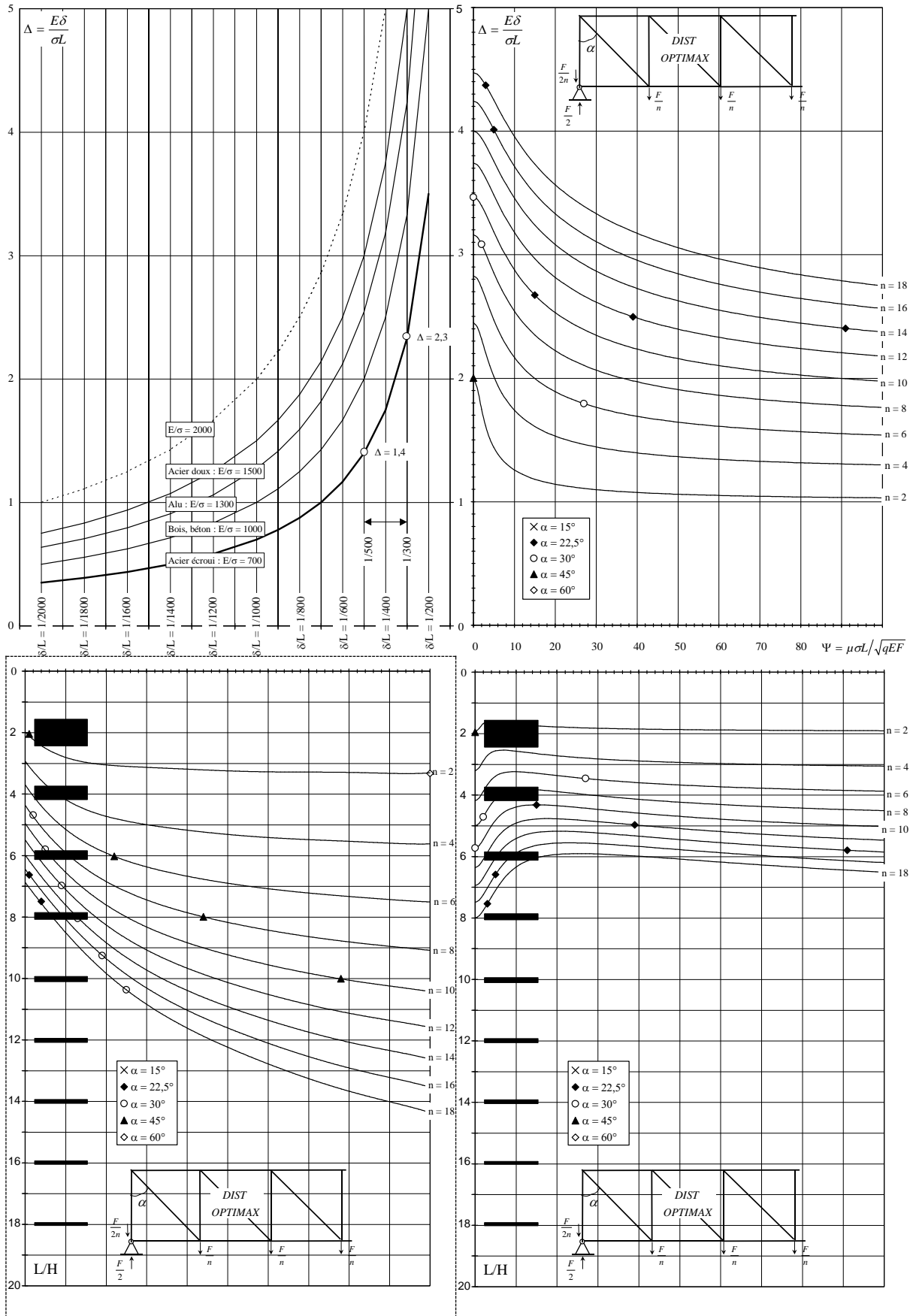


Figure 8 : Courbes d'efficace au déplacement dans le cas Pratt\_Distr\_Optimax\_Norm.

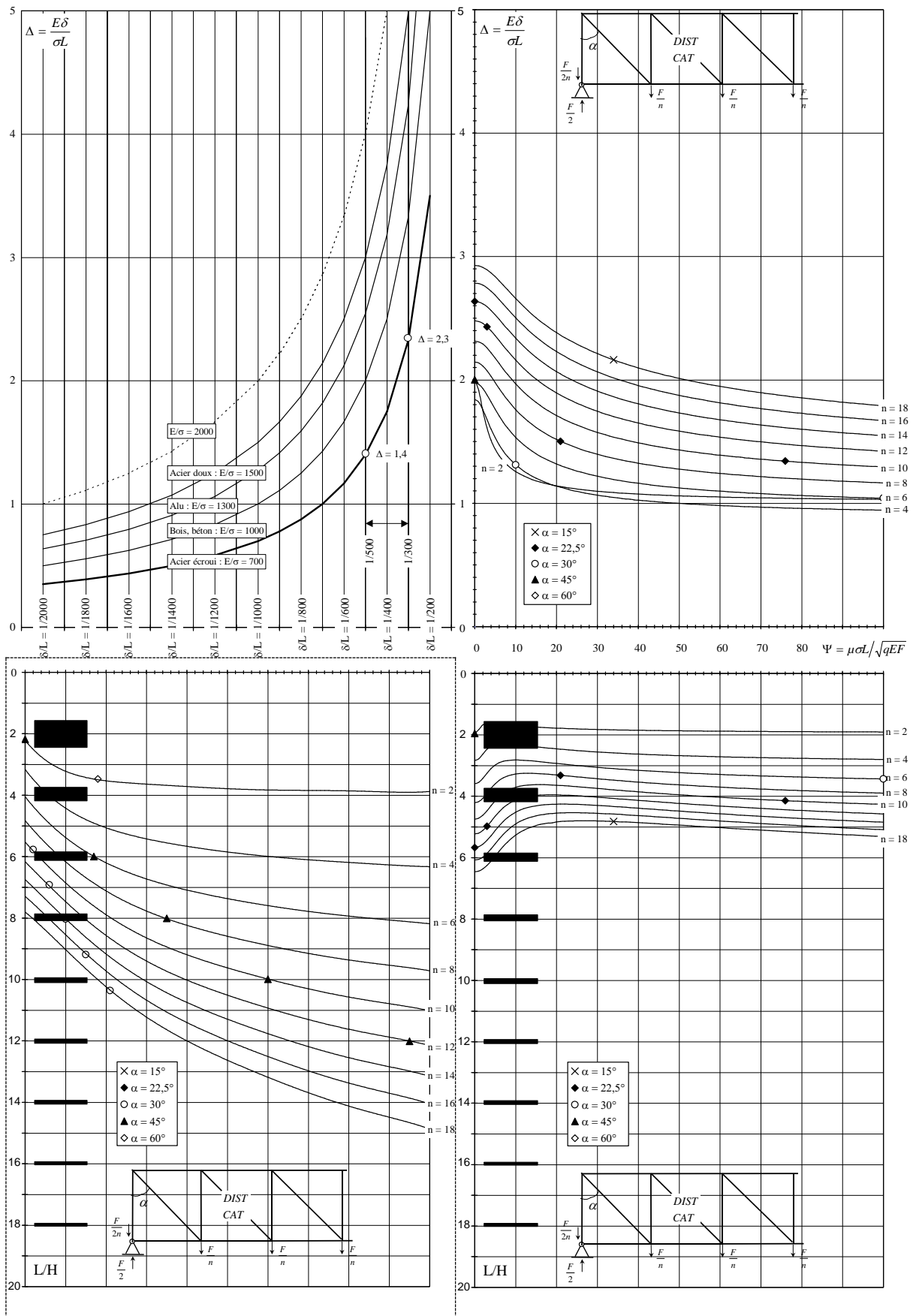


Figure 9 : Courbes d'efficace au déplacement dans le cas Pratt\_Distr\_Cat\_Norm.

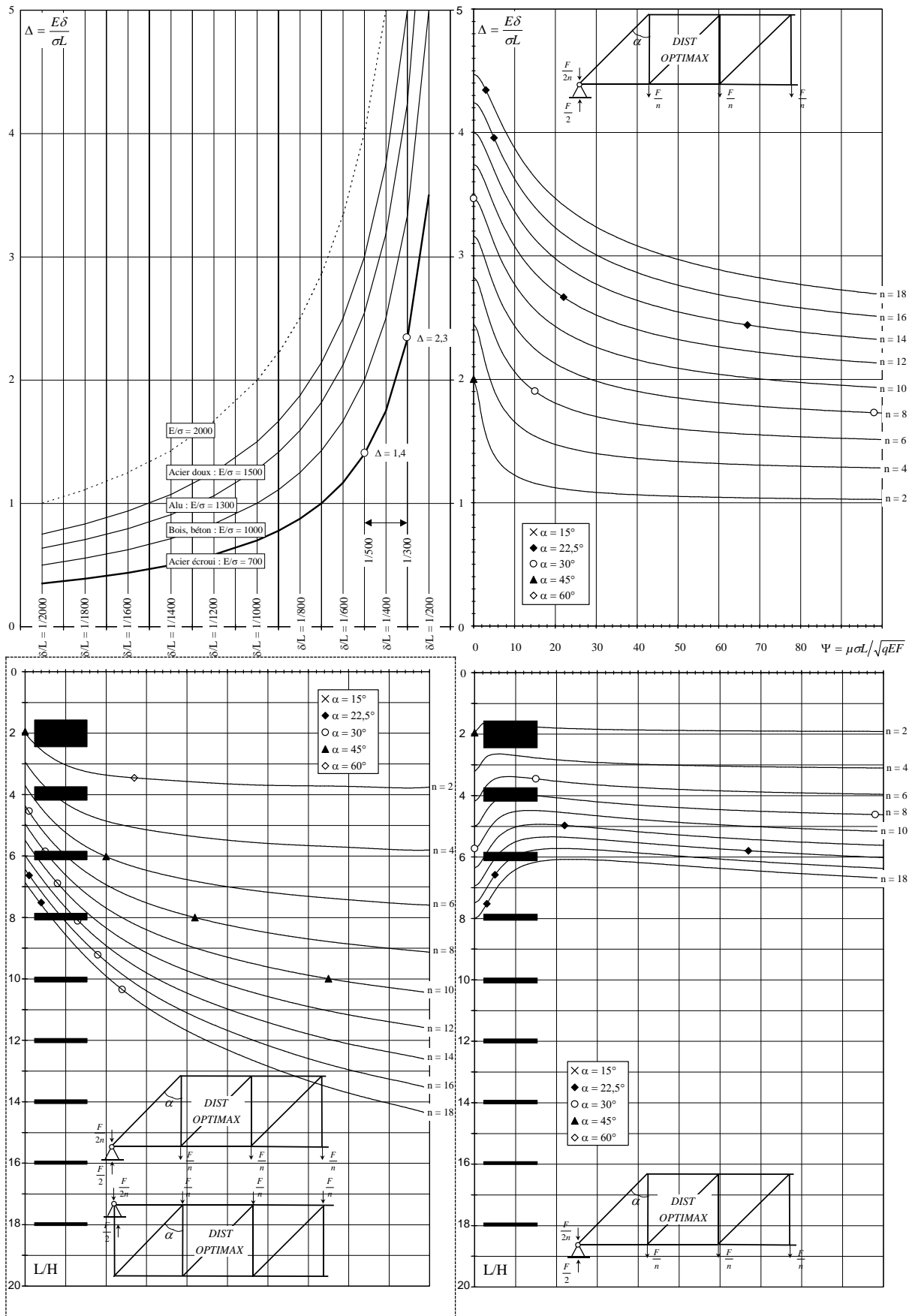


Figure 10 : Courbes d'efficace au déplacement dans le cas Howe\_Distr\_Optimax\_Norm.

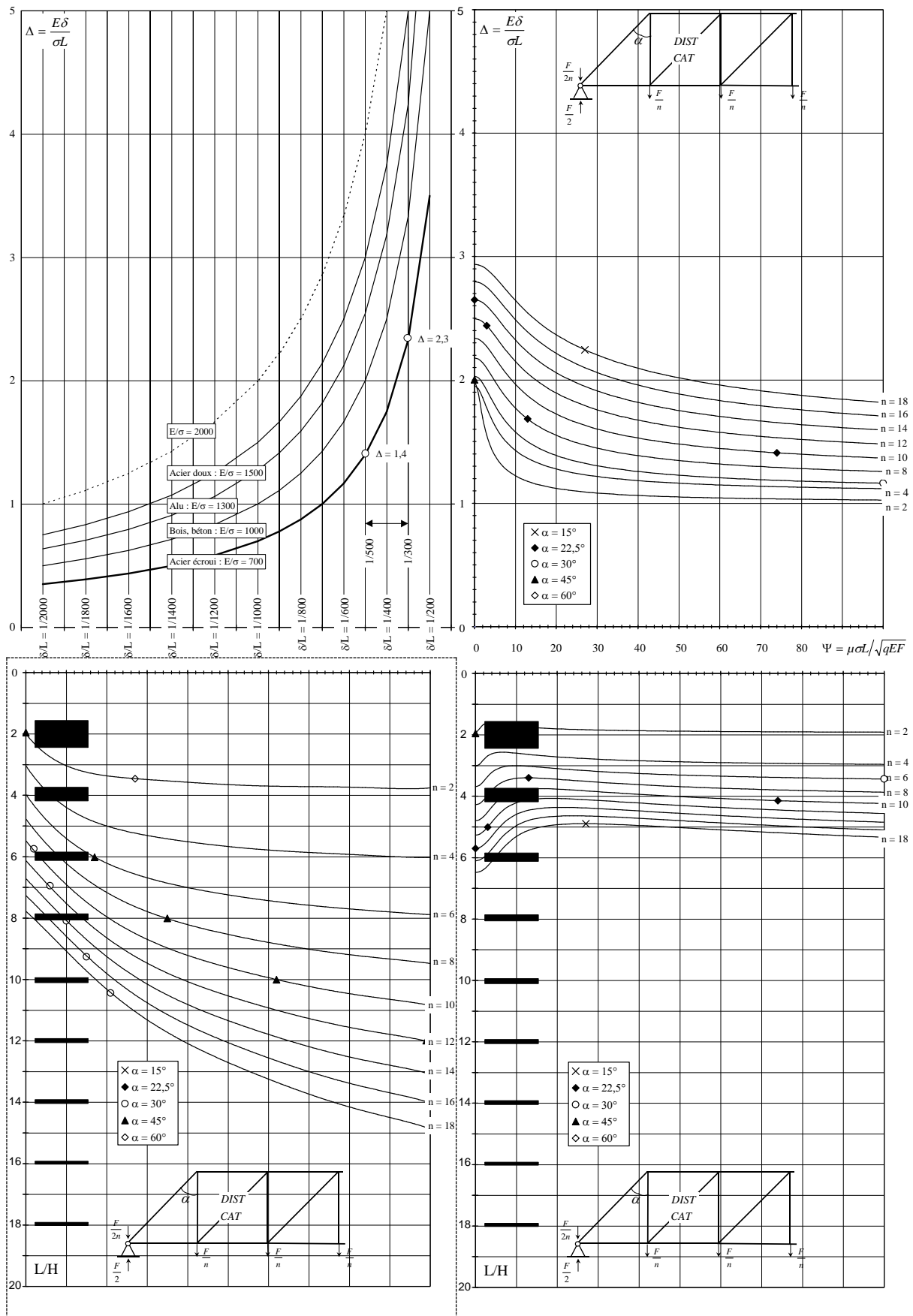
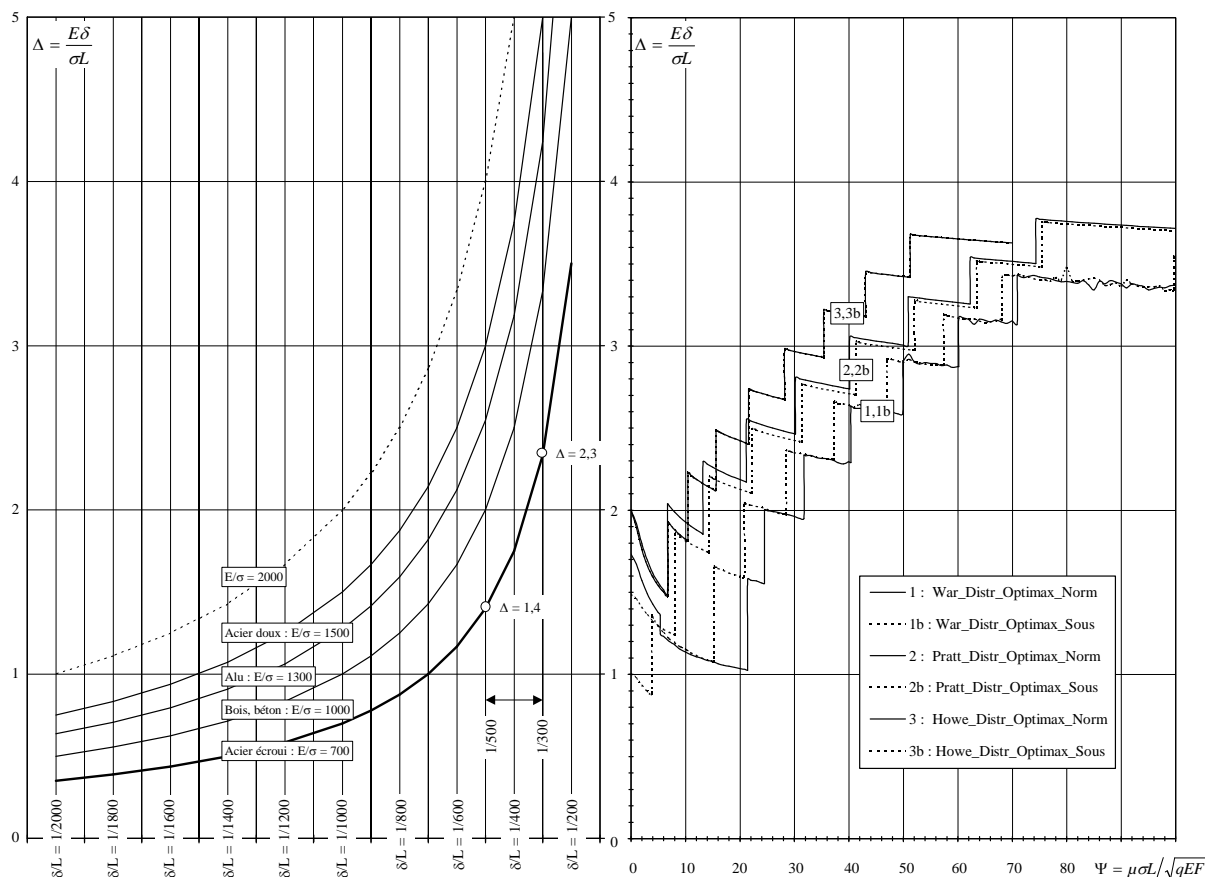


Figure 11 : Courbes d'efficace au déplacement dans le cas Howe\_Distr\_Cat\_Norm.

### 7.2. Indicateur de déplacement des treillis de poids minimum

L'étude précédente a montré que l'élanement  $L/H$  des treillis de poids minimum correspondait rarement au rapport  $L/H$  relatif à la flèche minimale. En pratique, la flèche relative à mi-travée  $\delta/L$  ne peut dépasser des valeurs excessives et il n'est pas certain que les treillis de poids minimum n'ont pas des déformations inacceptables. Il est donc indispensable de valider les enveloppes des courbes d'efficacité en volume des treillis classiques présentées au chapitre 2 en calculant les valeurs d'indicateur de déplacement qui leur sont associées.



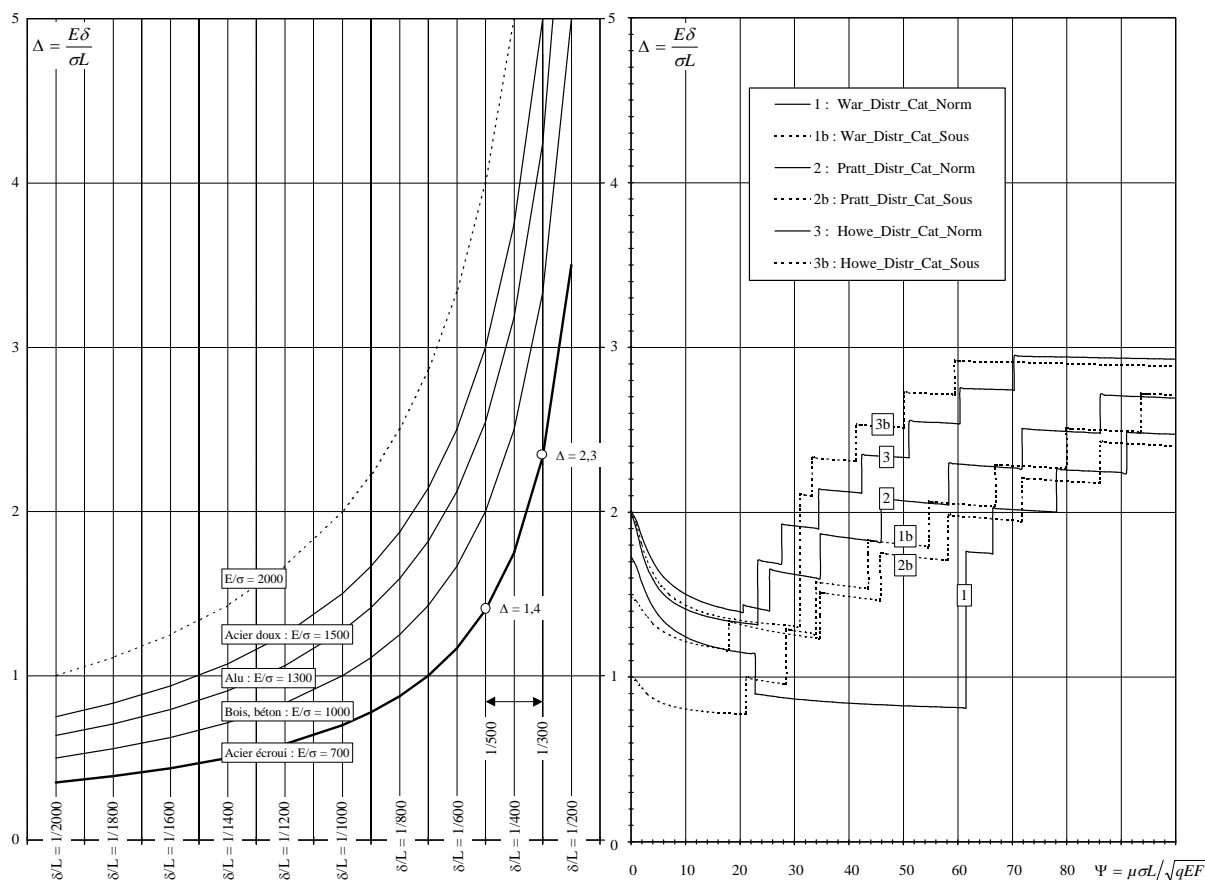
**Figure 12 :** indicateur de déplacement correspondant aux enveloppes des courbes d'efficacité de  $W$ , c'est-à-dire à l'ensemble des treillis de poids minimum. La figure concerne les treillis Warren, Pratt et Howe soumis à une charge distribuée et dont toutes les barres sont **optimisées individuellement**.

La figure 12 (à droite), relative aux treillis dont toutes les barres sont optimisées individuellement, montre l'indicateur de déplacement  $\Delta$  relatif aux treillis de poids minimum (correspondant aux enveloppes des courbes d'efficacité de  $W$  reprise en annexe et au chapitre 2). Cette figure met en évidence quelques propriétés remarquables :

- **Les treillis Warren sont moins déformables que les treillis Pratt, eux-même moins déformables que les treillis Howe.** Cette constatation concorde avec les conclusions du chapitre 2 qui déclassent les treillis Howe par rapport aux deux autres types de treillis.



- Pour des valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  limitées à 100, l'indicateur de déplacement ne prend jamais des valeurs supérieures à 4, **ce qui limite donc la flèche relative à 1/200, dans le pire des cas**. Cette flèche relative s'améliore encore pour les treillis composés de catégories de barres identiques (voir figure 13 et commentaires ci-dessous).
- Enfin, les valeurs de l'indicateur de déplacement  $\Delta$  augmentent avec celles de l'indicateur de flambement  $\Psi$  : la flèche relative augmente donc si la portée  $L$  augmente et/ou si la charge répartie  $F/L$  diminue. Cette variation est globalement linéaire.



**Figure 13 :** indicateur de déplacement correspondant aux enveloppes des courbes d'efficacité de W, c'est-à-dire à l'ensemble des treillis de poids minimum. La figure concerne les treillis Warren, Pratt et Howe soumis à une charge distribuée et **composés de catégories de barres identiques**.

La figure 13 concerne les treillis composés de catégories de barres identiques. Elle montre (figure de droite) que l'indicateur de déplacement relatif aux treillis de poids minimum ne dépasse pas 3 pour des valeurs de l'indicateur de flambement limitées à 100. Dans le pire des cas, cette valeur de 3 limite les flèches relatives à 1/250 pour l'acier HLE et à des valeurs encore plus petites pour les autres matériaux (figure de gauche).

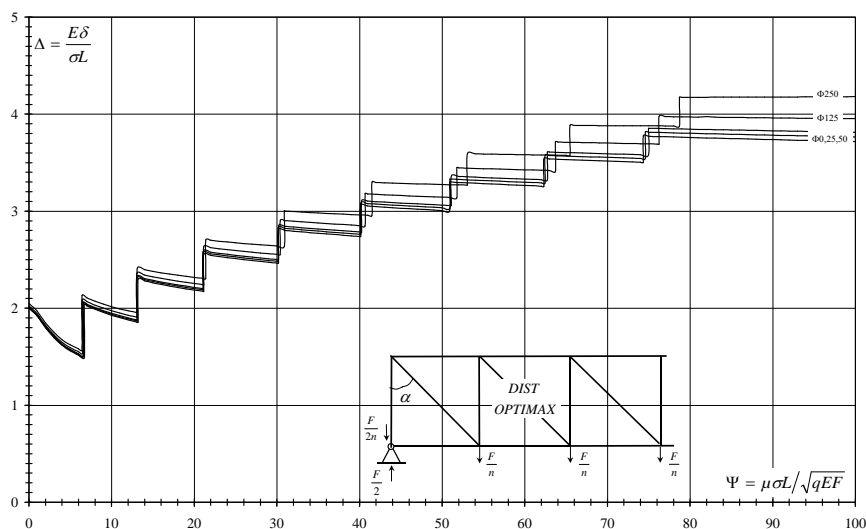
Globalement, on peut donc affirmer que les flèches relatives associées aux treillis de poids minimum ne sont jamais excessives. Si toutefois elles devaient s'avérer trop grandes, alors plusieurs solutions s'offrent au concepteur, bien qu'elles engendrent toutes une perte d'efficacité au niveau du poids :

1. Diminuer le nombre de mailles du treillis;
2. Choisir des profils plus creux pour les barres en compression (qui correspondent à un facteur de forme "q" plus grand);
3. Diminuer l'élanement L/H du treillis;

### 7.3. Influence du poids propre sur la rigidité des treillis

La figure 14 est obtenue à partir de la figure II.17 (B) reprise au chapitre 2 (partie II). Elle donne les valeurs de  $\Delta$  relatives aux treillis Pratt de poids minimum, pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre  $\Phi$ , dans le cas *Distr\_Optimax\_Norm*. Comme on pouvait s'y attendre, cette figure montre que le poids propre a une influence néfaste sur les flèches relatives, qui sont d'autant plus grandes que l'indicateur de poids propre  $\Phi$  est grand.

Remarque :  $\Phi = 25.10^{-4}$  est noté  $\Phi 25$ .

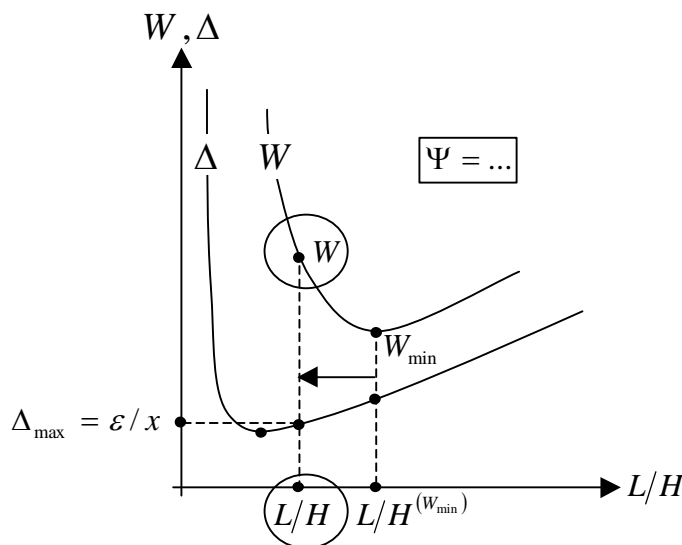


**Figure 14** : valeurs de l'indicateur de déplacement  $\Delta$  relatif aux treillis de poids minimum (les treillis formant la courbe enveloppe des courbe d'efficacité de W) dans le cas *Pratt\_Distr\_Optimax\_Norm*, pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre.

## 8. OPTIMISATION DU POIDS SOUS CONTRAINTE DE DEPLACEMENT

Dans certains cas, la flèche à mi-travée peut être rigoureusement imposée et ne peut dépasser un certain pourcentage de la portée. Dans ce cas, la méthode d'optimisation du poids, telle qu'elle a été décrite au chapitre 1 et mise en pratique au chapitre 2 peut être adaptée. Dans cette optique, considérons une courbe d'efficacité relative à un nombre  $n$  de mailles donné. Soit  $x$  un entier quelconque tel que la flèche doit être limitée à  $L/x$ . Pour un matériau donné de rapport  $\varepsilon = E/\sigma$  connu, le problème d'optimisation sous contrainte s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} W^{(L/H, \Psi, \Phi)} \text{ Min} \\ \Delta^{(L/H, \Psi, \Phi)} \leq \frac{\varepsilon}{x} \end{cases}$$



Pour une valeur de  $\Psi$  donnée, ce problème revient à modifier l'élançement géométrique  $L/H$  qui correspond à l'indicateur de volume  $W$  optimal afin de ramener la valeur de l'indicateur de déplacement  $\Delta$  à la valeur imposée  $\varepsilon/x$ . Ceci est illustré à la figure 15, inspirée de la figure 5. Il faut remarquer que, pour un nombre de mailles donné, il n'existe pas toujours de solution, c'est-à-dire de valeur de  $L/H$  telle que  $\Delta \leq \Delta_{\max}$ .

← Figure 15

La démarche illustrée à la figure 15 permet de reconstruire des courbes d'efficience qui correspondent aux treillis de poids minimum, pour une flèche limitée à  $L/x$ .

Il faut néanmoins noter que cette approche fournit des courbes d'efficience moins générales, puisqu'elles présupposent le rapport  $E/\sigma$  connu, et donc le matériau.

## 9. CONCLUSION

De ce chapitre découlent 4 résultats principaux. Tout d'abord, il a été montré que l'indicateur de déplacement, qui est aussi un indicateur de flèche relative, ne dépend que des mêmes nombres  $L/H$ ,  $\Psi$  et  $\Phi$  que l'indicateur de volume. Il peut s'étudier de la même façon, que les charges soient distribuées ou non ou que les barres soient optimisées individuellement ou par catégories.

Ensuite, la supériorité du treillis Warren et l'infériorité du treillis Howe au point de vue de la rigidité a été établie, déclassant de nouveau le treillis Howe par rapport aux deux autres.

Par la suite, et c'est sans doute le résultat principal puisqu'il valide toute l'étude du chapitre 2, cette analyse a montré que, pour les valeurs usuelles de l'indicateur de flambement, les treillis optimaux au niveau du poids avaient des flèches au plus égales à un 200<sup>ième</sup> de la portée.

Enfin, une méthode d'optimisation du poids sous contrainte de déplacement a été décrite et permet une extension considérable de cette méthode d'optimisation basée sur les indicateurs morphologiques.



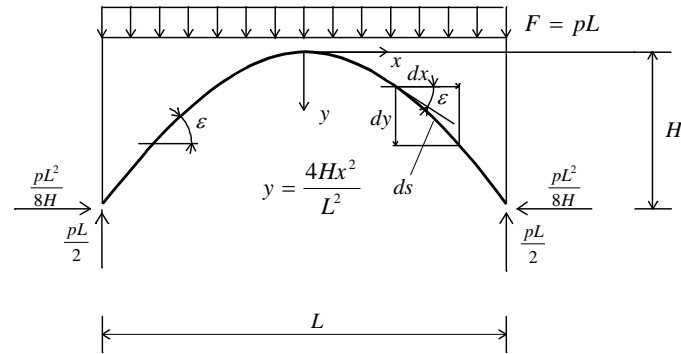
# *Chapitre 4*

*Volume et raideur  
des arcs*

*Photo de première page : Roosevelt Lake Bridge, Gila Country, Arizona, USA.  
Source : Structural Engineering International 1/95.*

## 1. SYNTHÈSE SUR LE FLAMBEMENT DES ARCS

Si les déformations de compression sont ignorées dans le processus de levée d'hyperstaticité des arcs paraboliques soumis à une charge répartie, les efforts internes et les réactions d'appuis sont identiques, que l'arc soit pourvu d'articulations ou non [LAT99]. Quel que soit le degré d'hyperstaticité, les réactions d'appui valent donc, respectivement,  $F/2$  et  $FL/8H$ , comme l'illustre la figure 1.



**Figure 1 :** arc parabolique de degré d'hyperstaticité quelconque soumis à une charge répartie  $p$  [N/m] de valeur totale  $F = pL$  [N]

La littérature est avare en renseignements sur le comportement des arcs au flambement, ce qui semble légitime vu la complexité des équations analytiques qui mènent à la détermination des poussées ou charges critiques. Dans son livre, Timoshenko<sup>1</sup> étudie brièvement les arcs paraboliques soumis à une charge uniformément répartie, de section constante ou variable, et flambant dans leur plan de définition. Ces études font référence aux travaux de Dinnik<sup>2</sup> et ses résultats sont repris par L'Hermitte<sup>3</sup>. Courbon<sup>4</sup> a longuement développé les équations analytiques qui conduisent à la détermination de la poussée critique des arcs funiculaires ou non et flambant dans leur plan (voir figure 4). De façon générale, ces études ne prennent pas en compte les déformations de compression, ce qui mène à des charges critiques légèrement trop sévères comme le confirment les résultats numériques fournis par le programme ISSD (voir figure 2 et les commentaires ci-dessous).

De façon générale, la charge totale distribuée critique  $F_{crit}$  d'un arc de section constante ou variable d'inertie à la clef  $I$  et constitué d'un matériau de module d'élasticité  $E$  peut s'exprimer par la relation suivante :

$$F_{crit.} = \gamma \frac{EI}{L^2} \quad [1]$$

Dans cette expression, **le paramètre  $\gamma$  dépend uniquement de l'élançement géométrique  $L/H$  de l'arc**. Dans tous les cas, on considère que la section transversale est constante et que l'arc ne flambe pas transversalement. Cette dernière hypothèse est souvent légitime car les arcs sont souvent présents par paires et donc contrebutés latéralement (voir photo 1).

Les valeurs du paramètre  $\gamma$  sont reprises aux figures 2 et 3, respectivement pour les arcs de section constante et de section variable selon la loi  $\Omega = \Omega_0/\cos\epsilon$ , où " $\epsilon$ " est l'angle entre la fibre moyenne de l'arc et l'horizontale (voir figure 1). Ces figures comparent les valeurs données par Timoshenko (traits

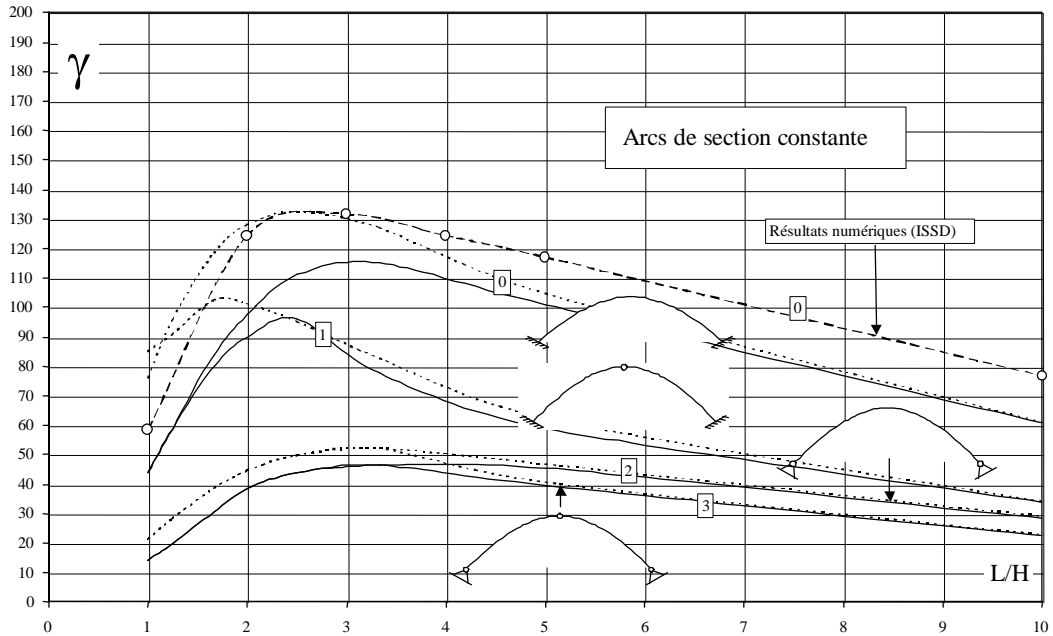
<sup>1</sup> "Théorie de la stabilité élastique", Timoshenko, Dunod, Paris 1966.

<sup>2</sup> "Stabilité des arcs", Dinnik, Kiev 1929 et "Flambage et torsion", Moscou, 1955.

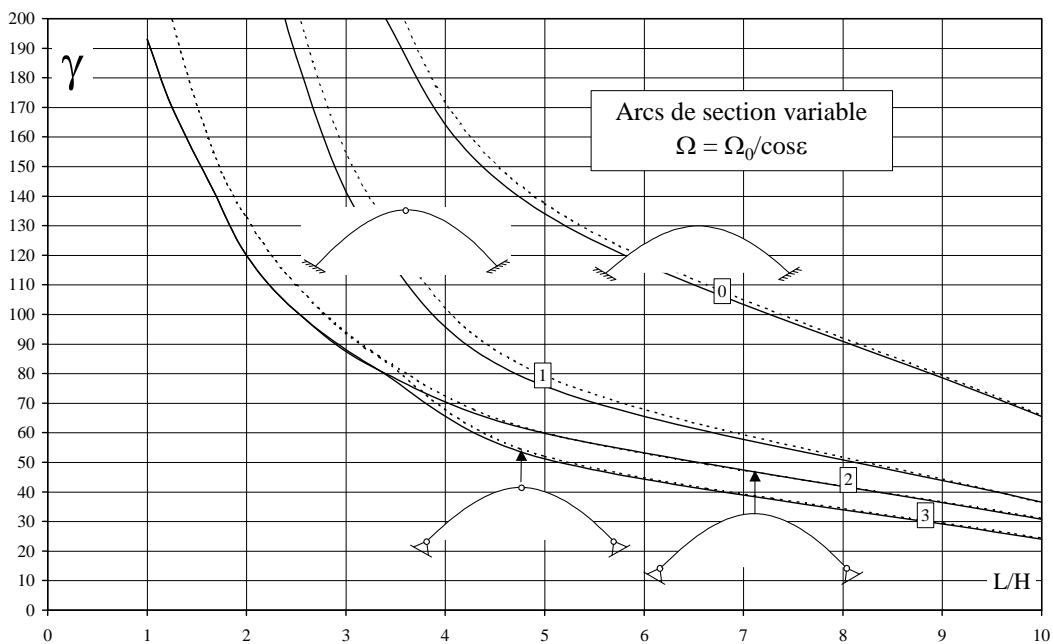
<sup>3</sup> "Le flambage des arcs et des plaques", L'Hermitte, Eyrolles, Paris 1976.

<sup>4</sup> "Flambement des arcs", Courbon, Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, n°235-236, Paris, 1967.

continus) et les valeurs obtenues à partir d'une intégration numérique des équations de Courbon (traits pointillés), données à la figure 4. De façon générale, les valeurs de Courbon sont moins sévères que celles de Timoshenko, surtout pour les arcs de section constante faiblement élancés.



**Figure 2** : valeurs du paramètre  $\gamma$  pour les arcs de **section constante** à 0, 1, 2 et 3 articulations. Les courbes en continu sont les valeurs données par Timoshenko, tandis que les courbes en pointillés courts sont les valeurs obtenues à partir d'une intégration numérique des formules de Courbon.



**Figure 3** : valeurs du paramètre  $\gamma$  pour les arcs de **section variable** à 0, 1, 2 et 3 articulations. Les courbes en continu sont les valeurs données par Timoshenko, tandis que les courbes en pointillés sont les valeurs obtenues à partir d'une intégration numérique des formules de Courbon.

Une procédure de calcul au n<sup>ième</sup> ordre a été ajoutée au programme ISSD. Elle permet d'établir les déformations d'une structure dont la géométrie prend la place des déformées successives. La charge de flambement est alors obtenue lorsque le processus diverge vers des déformées excessives. Cette procédure a permis de tracer la courbe en traits pointillés longs de la figure 2. Elle représente les valeurs numériques du paramètre  $\gamma$  obtenues à partir d'un arc de section constante sans articulations approché par 30 segments de droite. Ce calcul nécessite un nombre élevé d'itérations et le calcul exact de la charge critique est délicat. Par ailleurs, le nombre de segments formant l'arc a une influence non-négligeable sur la précision du résultat. C'est la raison pour laquelle les valeurs de Timoshenko seront adoptées pour la suite de cette étude.

Les modes de flambement des arcs de section constante et variable, calculés à partir du logiciel ISSD, sont représentés aux figures 5 et 6. Elles montrent que, selon l'élanement  $L/H$  ou le nombre d'articulations, le flambement peut se produire de façon symétrique ou antisymétrique, conformément aux constatations de Timoshenko et Courbon. Globalement, les modes de flambement des arcs à section constante ou variable sont assez semblables.

$$Q_{crit} = \frac{4Et_1^2}{L^2} \frac{\int_0^{t_1} I \cos \varepsilon (v_0''(t))^2 dt}{\int_0^{t_1} (v_0'(t))^2 dt + \frac{16}{t_1^2} \left(\frac{H}{L}\right)^2 \int_0^{t_1} t^2 (v_0'(t))^2 dt}$$

Avec :

$$\text{Pour l'arc encastré : } \begin{cases} v_0'(t) = \cos t - \cos t_1 \\ v_0''(t) = -\sin t \\ t_1 = 4,49342 \end{cases}$$

$$\text{Pour l'arc à 1 articulation : } \begin{cases} v_0'(t) = t - \sin t + 3,53953 \cos t \\ v_0''(t) = 1 - \cos t - 3,53953 \sin t \\ t_1 = 3,31458 \end{cases}$$

$$\text{Pour l'arc à 2 articulations : } \begin{cases} v_0'(t) = \cos t \\ v_0''(t) = -\sin t \\ t_1 = 3,14159 \end{cases}$$

$$\text{Pour l'arc à 3 articulation : } \begin{cases} v_0'(t) = t - \sin t + 4,73707 \cos t \\ v_0''(t) = 1 - \cos t - 4,73707 \sin t \\ t_1 = 2,72550 \end{cases}$$

**Figure 4 :** l'équation de Courbon donnant la poussée (réaction horizontale) critique d'un arc parabolique.



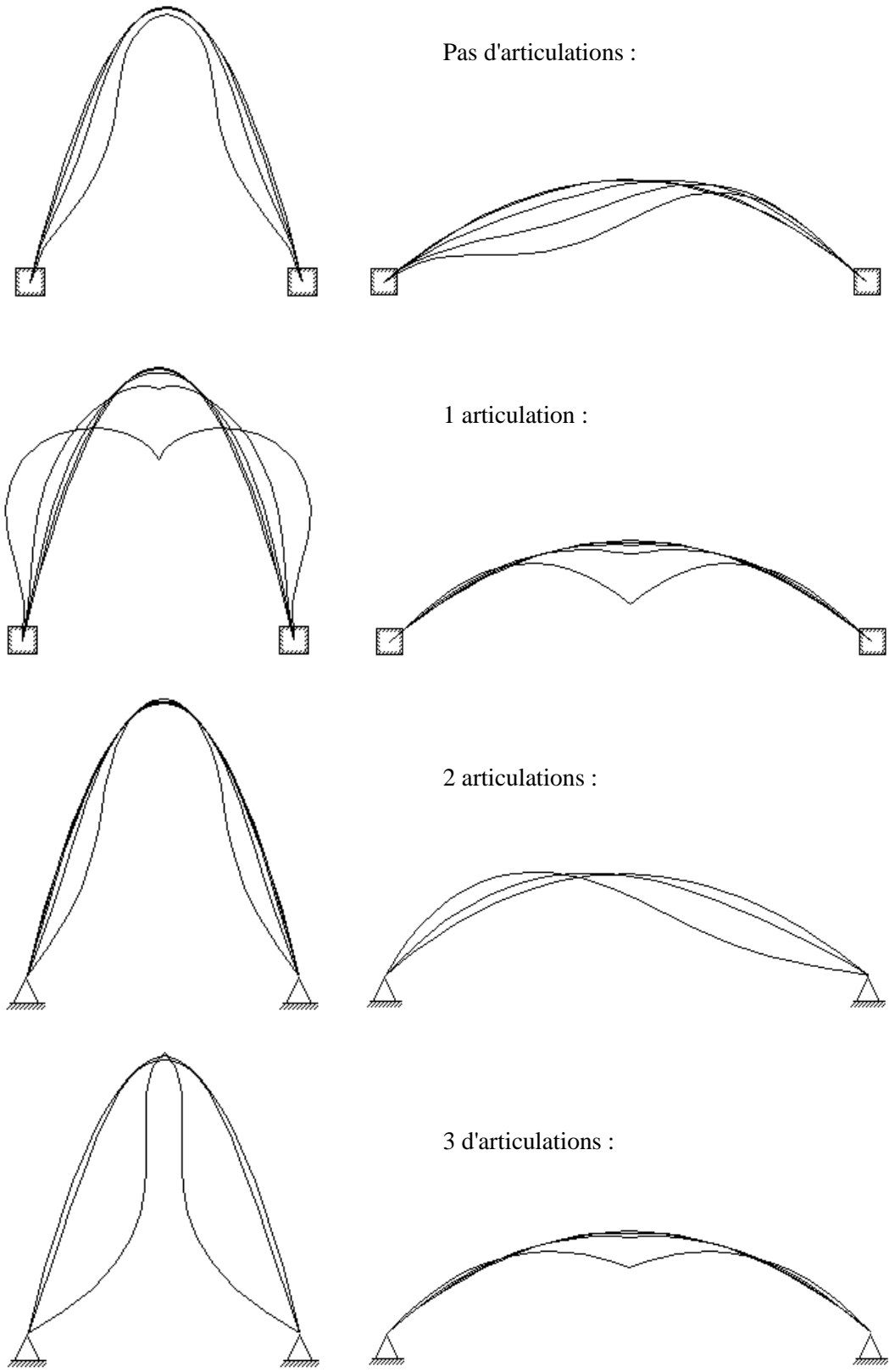
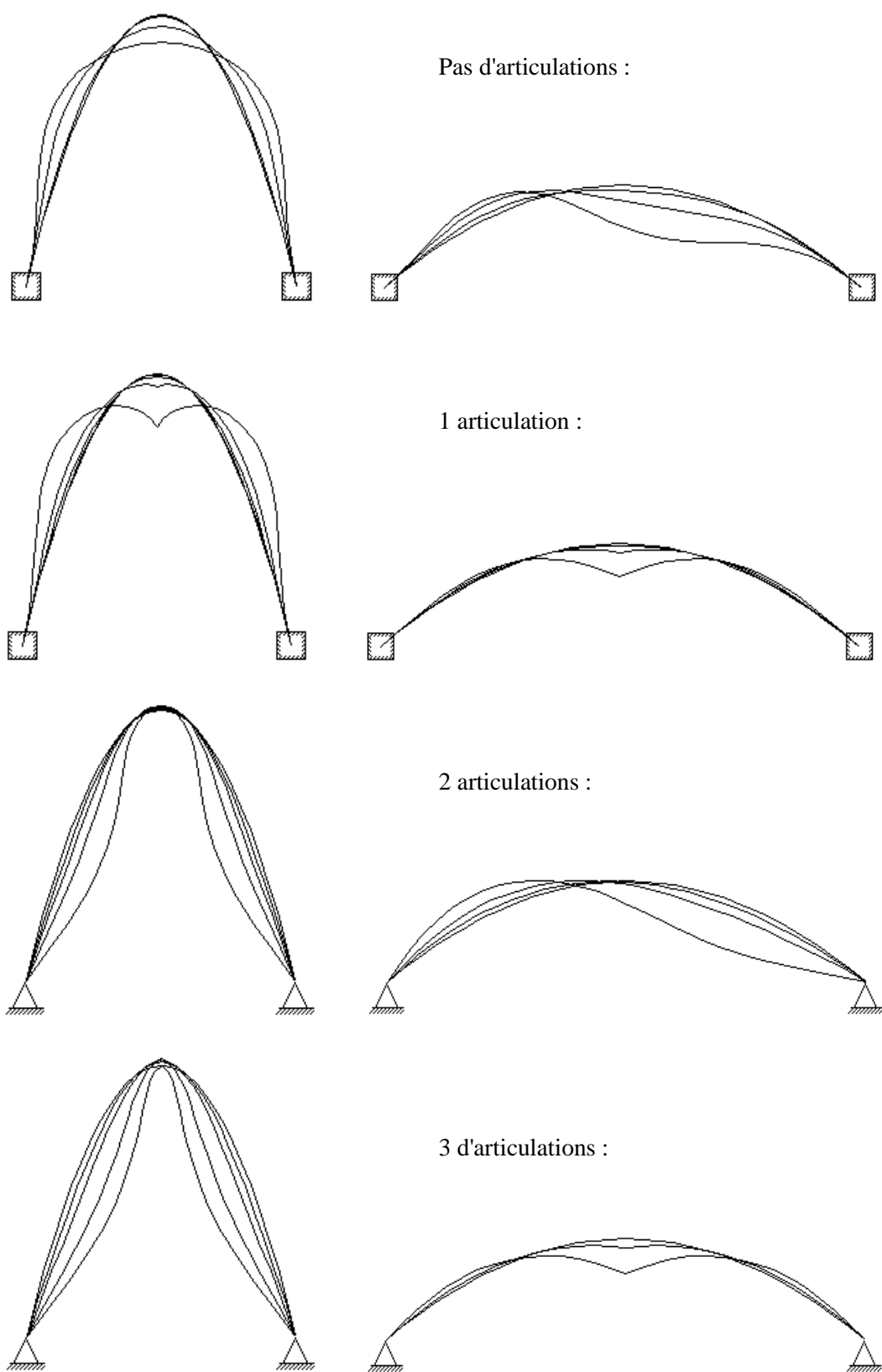


Figure 5 : modes de flambement des arcs de **section constante**, pour  $L/H = 1$  et  $L/H = 5$ , calculés numériquement à partir du logiciel ISSD.



**Figure 6** : modes de flambement des arcs de **section variable**, pour  $L/H = 1$  et  $L/H = 5$ , calculés numériquement à partir du logiciel ISSD.



**Photo 1** : Pont de la Tomoegawa au Japon (portée 171 m) : les montants qui relient les 2 arcs parallèles empêchent leur flambement latéral. Dans ce cas, une disposition des arcs au dessus du tablier semble discutable.

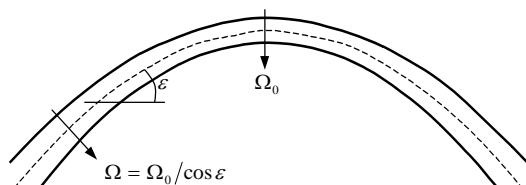
## 2. INDICATEUR DE VOLUME D'UN ARC

La géométrie et l'indicateur de volume des arcs optimaux de section variable ou constante, non soumis au flambement, ont été étudiés par Philippe Samyn (voir bibliographie). Le §2.1 reprend un résumé des principaux résultats :

### 2.1. Flambement négligé

Il peut être possible d'empêcher le flambement des arcs, comme l'illustre la photo 2 qui montre que les arcs successifs du viaduc de l'autoroute Bologne Florence ont été renforcés par une série de montants verticaux et horizontaux qui limitent très fortement les phénomènes de flambement. On constate que ce procédé permet de réduire considérablement la section des arcs qui paraissent alors très minces.

Soit un arc parabolique de section rectangulaire pleine de largeur constante et soumis à une charge uniformément distribuée. Soit  $\Omega_0$  sa section a la clef,  $\Omega$  la section en un autre point de la fibre moyenne et  $\varepsilon$  l'angle de cette fibre moyenne avec l'horizontale. Sous ces hypothèses, la loi  $\Omega = \Omega_0 / \cos \varepsilon$  est la condition pour que chaque section travaille à la même contrainte de compression  $\sigma$ . Le résultat est alors un arc à « pattes d'éléphant » comme illustré à la figure 7 :



**Figure 7** : arc de section variable

En une section quelconque, l'effort de compression vaut  $FL/(8H \cos \varepsilon)$  et la section correspondante vaut  $FL/(8H\sigma \cos \varepsilon)$ . Le volume total de l'arc vaut donc :

$$V = 2 \int_0^{L/2} \Omega ds = \frac{FL}{4H\sigma} \int_0^{L/2} \frac{ds}{\cos \varepsilon} = \frac{FL}{4H\sigma} \int_0^{L/2} \frac{dx}{\cos^2 \varepsilon}$$

$$\text{Et comme } \cos \varepsilon = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64H^2 x^2}{L^4}}},$$

la résolution de l'intégrale donne :

$$V = \frac{FL}{\sigma} \left( \frac{2H}{3L} + \frac{L}{8H} \right),$$

ce qui mène à l'expression suivante de l'indicateur de volume de l'arc de section variable, caractérisée par un minimum de 0,577 pour  $L/H = 2,309$  :

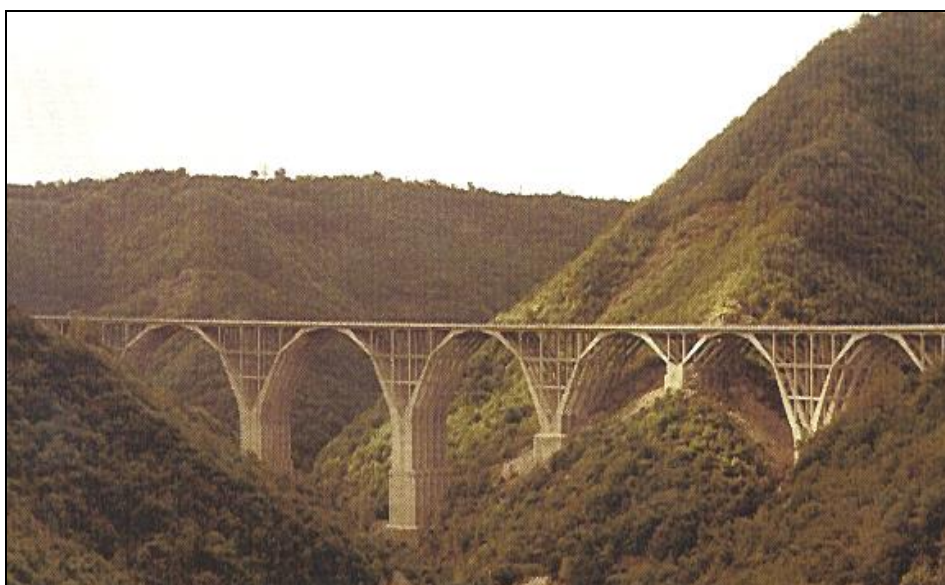
$$W = \left( \frac{2H}{3L} + \frac{L}{8H} \right)$$

Par ailleurs, un calcul semblable, relatif à l'arc de section constante dont les sections d'appuis travaillent à la contrainte  $\sigma$ , mène à l'expression ci-dessous de l'indicateur de volume :

$$W = \frac{L}{16H} \sqrt{1 + \frac{16H^2}{L^2}} \left( \sqrt{1 + \frac{16H^2}{L^2}} + \frac{L}{4H} \ln \left( \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \frac{16H^2}{L^2}} \right) \right)$$

Cette fonction possède un minimum de 0,778 pour  $L/H = 2,926$ .

Comme le flambement n'est pas pris en compte, l'indicateur de volume est indépendant du nombre d'articulations. La figure 8 montre les arcs optimaux relatifs à chacune des deux situations ainsi que les variations de l'indicateur de volume en fonction de  $L/H$ .



**Photo 2 :** Viaduc sur l'autoroute Bologne-Florence dans les Apennins : les contrebutées horizontales et verticales empêchent tout flambement des arcs.

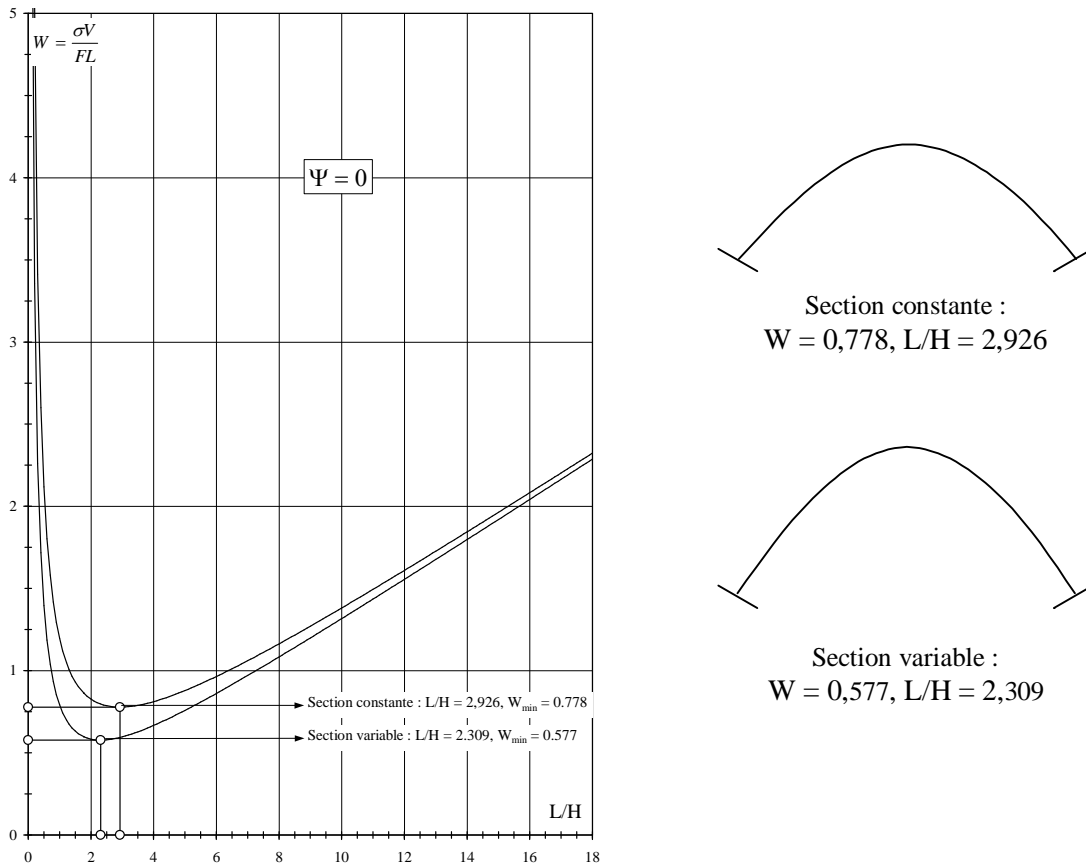


Figure 8 : indicateur de volume  $W$  des arcs optimaux en fonction du rapport  $L/H$  lorsque le flambement est négligé.

## 2.2. Flambement pris en compte, sans correction de la courbe de flambement

A l'image de la loi hyperbolique d'Euler relative aux éléments comprimés, la relation [1] donne la valeur de la charge critique, indépendamment de la résistance limite de compression du matériau. Pour les arcs massifs de faibles élancements  $L\sqrt{\Omega/I}$  (à ne pas confondre avec l'élancement géométrique  $L/H$ ), il en résulte des charges critiques fortement surestimées. Il faut donc en pratique corriger la relation [1], ce qui sera l'objet du §2.3.

### 2.2.1. Arc de section rectangulaire constante

La section  $\Omega$  de l'arc s'obtient à partir de la relation [1] et de l'expression du facteur de forme de la section :

$$\begin{cases} F = \gamma \frac{EI}{L^2} \\ I = q\Omega^2 \end{cases} \Rightarrow \Omega = L\sqrt{\frac{F}{\gamma q E}}$$

Si  $l_{\text{arc}}$  est la longueur totale de la fibre moyenne de l'arc, représentée à la figure 10, le volume total de l'arc vaut :

$$V = \int_S \Omega ds = \int_S \left( L \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}} \right) ds = L \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}} \int_S ds = L \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}} l_{arc}$$

Avec (voir figure 1) :

$$l_{arc} = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{dx^2 + \left( \frac{8H}{L^2} x dx \right)^2} = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \frac{64H^2}{L^4} x^2} dx$$

$$\text{soit : } l_{arc} = \frac{L}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) ;$$

Le volume total de l'arc peut donc se réécrire comme suit :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}} \frac{L^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right)$$

L'indicateur de volume correspondant vaut alors :

$$\begin{aligned} W &= \frac{\sigma}{FL} \left( \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}} \frac{L^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right) \\ &= \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right] \end{aligned}$$

Si  $\Psi = \sigma L / \sqrt{qEF}$  est défini comme étant *l'indicateur de flambement de l'arc*, on retrouve une expression générale de l'indicateur de volume similaire à celle d'un treillis (voir chap. 1, §2.2). L'arc ne comporte en effet aucun élément en traction et le terme  $W^{(T)}$  est absent :

$$\boxed{W = \Psi W^{(C)}} \quad [2]$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} \\ W^{(C)} \cong \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \end{cases}$$

La relation [2] montre que **le volume d'un arc est linéairement proportionnel à son indicateur de flambement**. Quelque soit la valeur de ce dernier, le volume minimal de l'arc est donc obtenu pour la valeur de  $L/H$  qui minimise  $W^{(C)}$ . Les valeurs de  $W^{(C)}$  sont reprises à la figure 9, qui montre que les élancements optimaux des arcs de section constante sont compris entre 3,3 et 5.

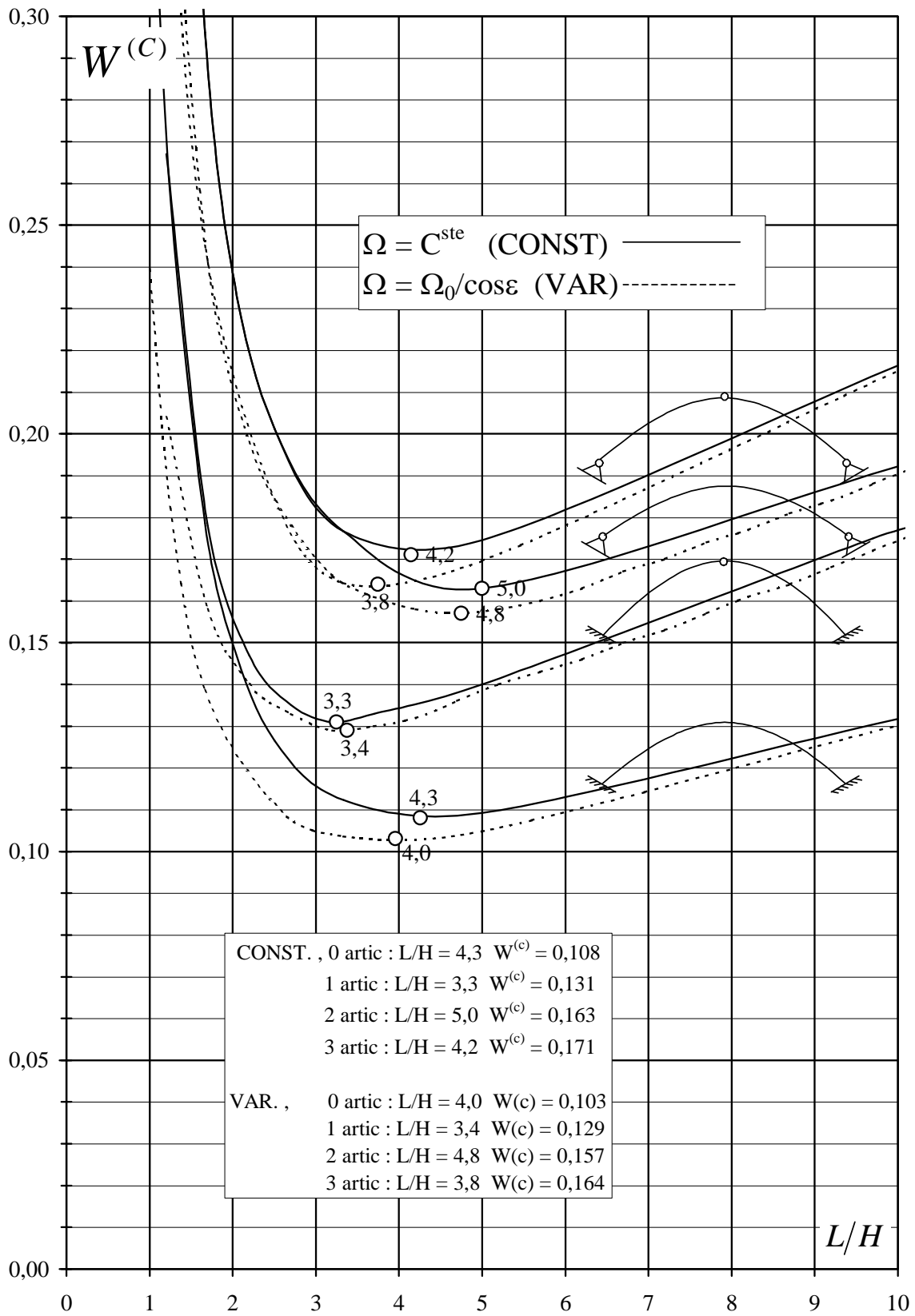


Figure 9 : valeurs de  $W^{(c)}$  pour les 4 types d'arcs de section continue (traits continus) et variable (traits pointillés)

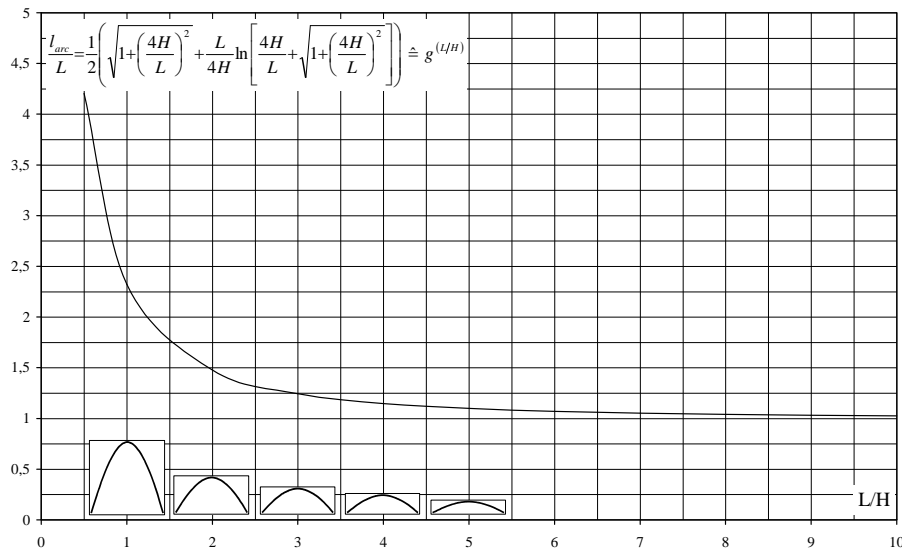


Figure 10 : variation de la longueur de la fibre moyenne d'un arc parabolique

2.2.2. Arc de section variable selon la loi  $\Omega = \Omega_0/\cos \varepsilon$

L'inertie de la section de clef étant notée  $I_0$ , la relation [1] est encore valable et c'est le coefficient  $\gamma$  qui tient compte du type d'arc et du nombre d'articulations :

$$F = \gamma \frac{EI_0}{L^2}$$

Par ailleurs, la dimension transversale de l'arc étant supposée constante, le facteur de forme à la clef vaut :  $q_0 \hat{=} I_0/\Omega_0^2$ . Par ailleurs, comme par hypothèse  $\Omega = \Omega_0/\cos \varepsilon$ , on a :

$$F = \gamma \frac{E}{L^2} q_0 \Omega^2 (\cos \varepsilon)^2 \quad , \quad \text{soit :} \quad \Omega = \frac{L}{\cos \varepsilon} \sqrt{\frac{F}{\gamma q_0 E}}$$

Le volume total de l'arc vaut donc :

$$V = \int_s \Omega ds = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\Omega}{\cos \varepsilon} dx = L \sqrt{\frac{F}{\gamma q_0 E}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(\cos \varepsilon)^2} dx$$

Comme  $\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64H^2 x^2}{L^4}}}$ , on obtient :  $\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(\cos \varepsilon)^2} dx = L + \frac{16H^2}{3L}$ .

Ceci permet de réécrire l'expression du volume total de l'arc, dans laquelle le terme entre parenthèses ne dépend que du rapport L/H :

$$V = L^2 \sqrt{\frac{F}{q_0 E}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right) \right]$$



L'indicateur de volume vaut donc :

$$W = \frac{\sigma}{FL} \left( L^2 \sqrt{\frac{F}{q_0 E}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right) \right] \right) = \frac{\sigma L}{\sqrt{q_0 E F}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right) \right]$$

On obtient alors une relation semblable à celle obtenue pour un arc de section constante :

$$W = \Psi W^{(C)}$$

Avec

$$\begin{cases} \Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{q_0 E F}} \\ W^{(C)} \triangleq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right) \end{cases}$$

La figure 9 montre que les arcs de section variable doivent avoir un élancement L/H compris entre 3,4 et 4,8, selon le nombre d'articulations.

### 2.2.3. Elancements optimaux et courbes d'efficience

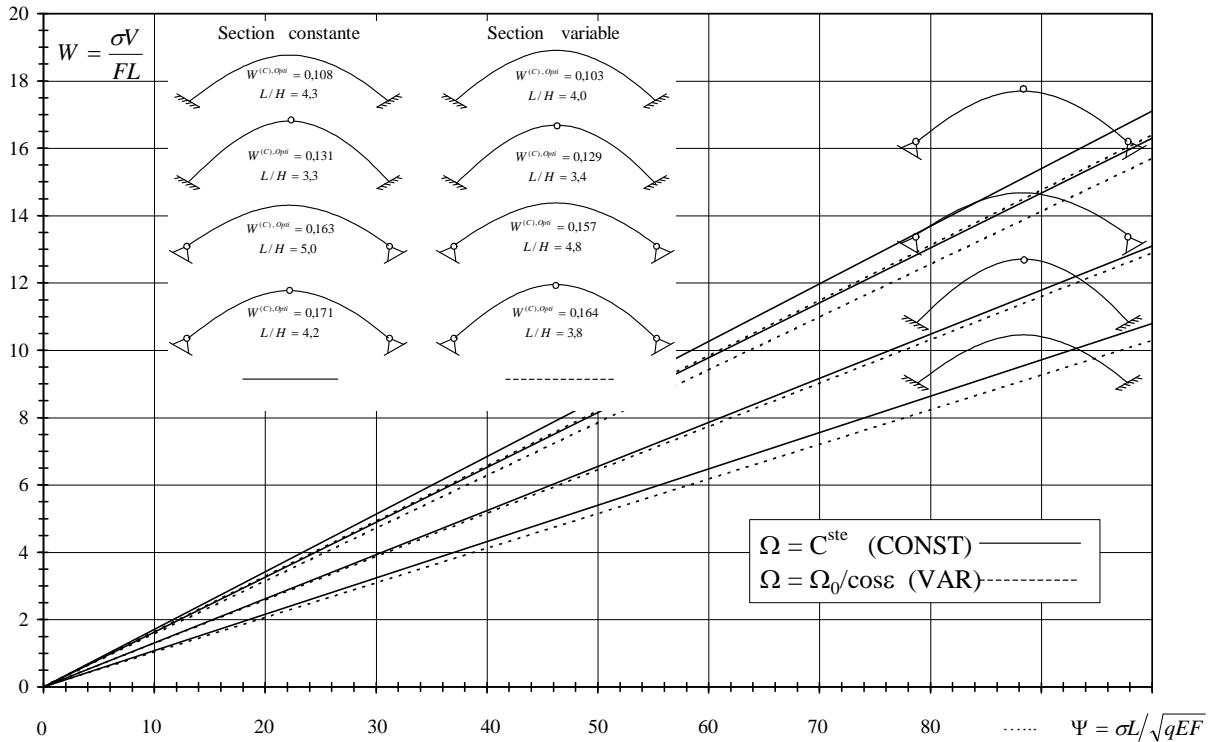
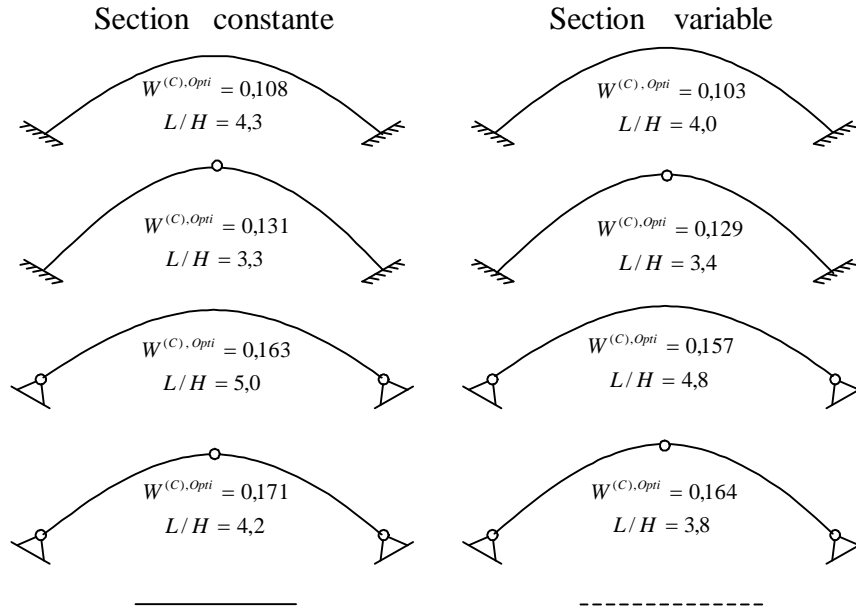


Figure 11 : courbes d'efficience des 4 types d'arcs, de section constante (traits continus) et variables (traits en pointillés).



**Figure 12 :** arcs paraboliques optimaux, valables uniquement lorsque l'indicateur de flambement  $\psi$  est grand (§2.2.).

Les valeurs de  $L/H$  et  $W^{(C)}$  associées aux arcs les plus légers (et notées  $L/H^{opt}$  et  $W^{(C)Opt}$ ) sont obtenues à partir de la figure 9 qui donne les valeurs de  $W^{(C)}$  en fonction du rapport  $L/H$ . Ceci permet de tracer les courbes d'efficacité de la figure 11, qui sont des droites, et dont le coefficient angulaire est égal à  $W^{(C)Opt}$ . Ces courbes d'efficacité montrent que le surplus de volume inhérent à l'introduction d'articulations peut atteindre plusieurs dizaines de pour-cents. A ce sujet, une étude plus détaillée est reprise au §2.3.4. ci-après.

La figure 12 montre les 8 types d'arcs dans leur configuration optimale.

### 2.2.4. Imperfection des courbes d'efficacité

L'étude qui précède n'est plus valable lorsque les arcs sont peu sensibles au phénomène du flambement, c'est à dire pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\psi$ , ou encore lorsque l'arc a un faible élanement géométrique. En effet, on obtient dans ce cas :

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} W = \lim_{\psi \rightarrow 0} (\Psi W^{(C)}) = 0$$

Or, pour  $\Psi = 0$ , l'indicateur de flambement vaut 0,778 ou 0,557, selon que la section soit constante ou variable, comme démontré au §2.1. Pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ , **les courbes d'efficacité de la figure 11 doivent donc comporter un palier horizontal** qui correspond soit à  $W = 0,778$  (et  $L/H = 2,926$ ) soit à  $W = 0,577$  (et  $L/H = 2,309$ ) selon que la section de l'arc est constante ou variable.

La figure 13 montre une telle correction des courbes d'efficacité des arcs à 0 et 3 articulations, mais en toute logique, **les courbes d'efficacité idéales devraient assurer une transition continue** vers ce palier horizontal. C'est l'objet du §2.3. qui apporte un ultime raffinement à la présente analyse.

Finalement, les arcs optimaux présentés à la figure 12 sont donc uniquement valables pour les grandes valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Pour les valeurs intermédiaires de  $\Psi$ , l'indicateur de volume

optimal et le rapport L/H qui lui correspond ont des valeurs comprises entre les extrêmes relatifs à, respectivement,  $\Psi = 0$  et  $\Psi = \infty$ .

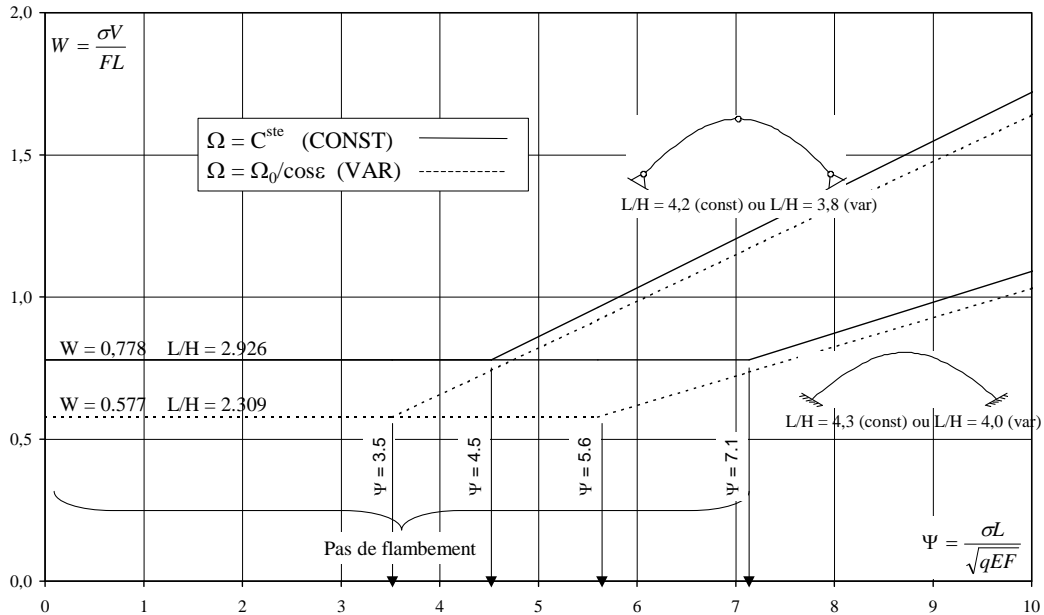


Figure 13 : correction des courbes d'efficace pour les faibles valeurs de l'indicateur de flambement.

2.2.5. Réduction de volume obtenue grâce à l'introduction d'appuis intermédiaires

Supposons une portée L à franchir, avec une charge uniformément répartie totale F. Il est intéressant de déterminer le volume total de matière gagné lorsque l'on décide de placer des appuis intermédiaires de telle sorte que la charge totale F soit reprise par "n" arcs homothétiques par rapport à l'arc de base.

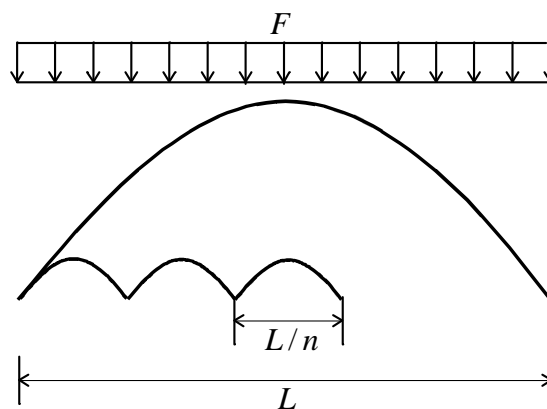
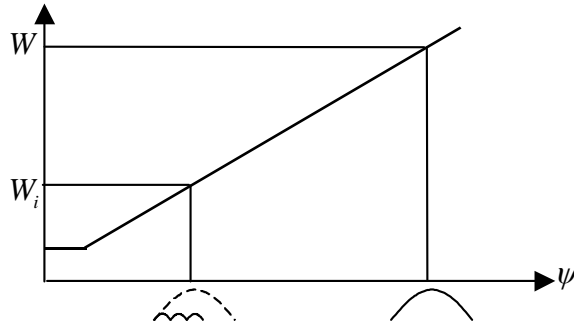


Figure 14

Pour un arc donné, la réalité se situe toujours entre les 2 extrêmes étudiés précédemment : soit une absence totale de tendance au flambement (§2.1.), soit une forte tendance au flambement, caractérisée par la loi  $W = \Psi W^{(C)}$ .

**Cas 1 : forte tendance au flambement**

Les arcs correspondent à la partie oblique de la courbe d'efficacité.



Le volume de l'arc de base, de portée L et soumis à la charge totale F vaut :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} W^{(C)} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{FL}{\sigma} \left( \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} \right) W^{(C)}$$

Le volume  $V_i$  d'un arc intermédiaire homothétique (et donc de même valeur  $W^{(C)}$ ), de portée  $L/n$  et soumis à une charge totale  $F/n$  vaut :

$$V_i = \frac{(F/n)(L/n)}{\sigma} \left( \frac{\sigma(L/n)}{\sqrt{qE(F/n)}} \right) W^{(C)} = \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \frac{FL}{\sigma} \left( \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} \right) W^{(C)}$$

Le rapport entre le volume total des "n" arcs intermédiaires et le volume de l'arc de base vaut donc :

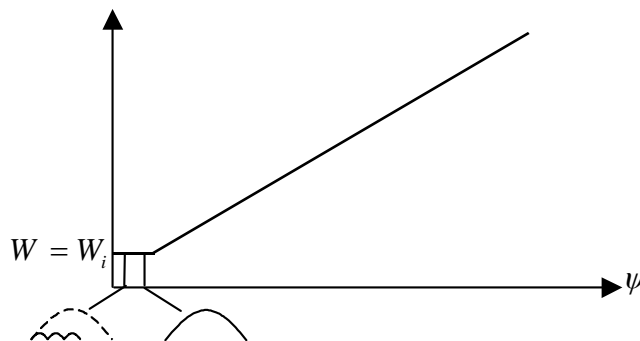
$$\boxed{\frac{nV_i}{V} = \frac{1}{n\sqrt{n}}}$$

Le gain en volume vaut alors :

- avec 2 arcs intermédiaires (n = 2) : 65%
- avec 3 arcs intermédiaires (n = 3) : 81%
- avec 4 arcs intermédiaires (n = 4) : 88%

**Cas 2 : aucune tendance au flambement**

Chaque arc correspond à la partie horizontale de la courbe d'efficacité.



Le volume de l'arc de base, de portée L et de charge totale F vaut :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = W^{(L/H)} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{FL}{\sigma} W^{(L/H)}$$

Le volume d'un arc intermédiaire homothétique (et donc d'indicateur de volume identique à l'arc de base), de portée L/n et de charge totale F/n vaut :

$$V_i = \frac{(F/n)(L/n)}{\sigma} W^{(L/H)} = \frac{FL}{\sigma n^2} W^{(L/H)}$$

Le rapport entre le volume total des "n" arcs intermédiaires et le volume de l'arc de base vaut donc :

$$\boxed{\frac{nV_i}{V} = \frac{1}{n}}$$

Le gain de volume vaut alors :

- avec 2 arcs intermédiaire (n = 2) : 50%
- avec 3 arcs intermédiaires (n = 3) : 67%
- avec 4 arcs intermédiaires (n = 4) : 75%

La figure 15 illustre le gain en volume obtenu dans chacune des deux situations, en fonction du nombre d'arcs intermédiaires. Un cas réel se situera entre ces deux courbes extrêmes.

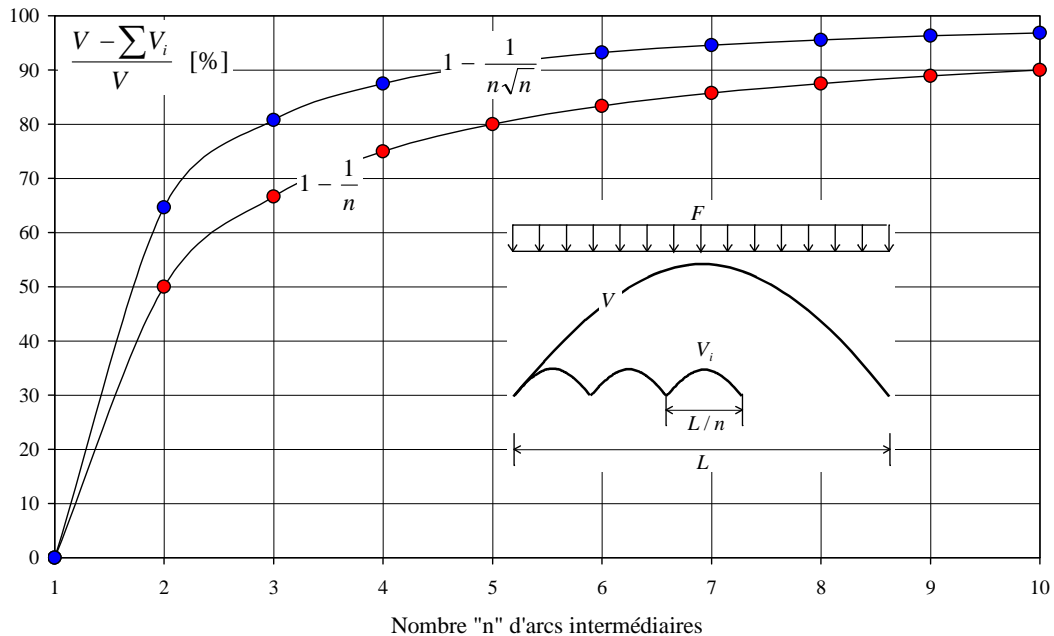
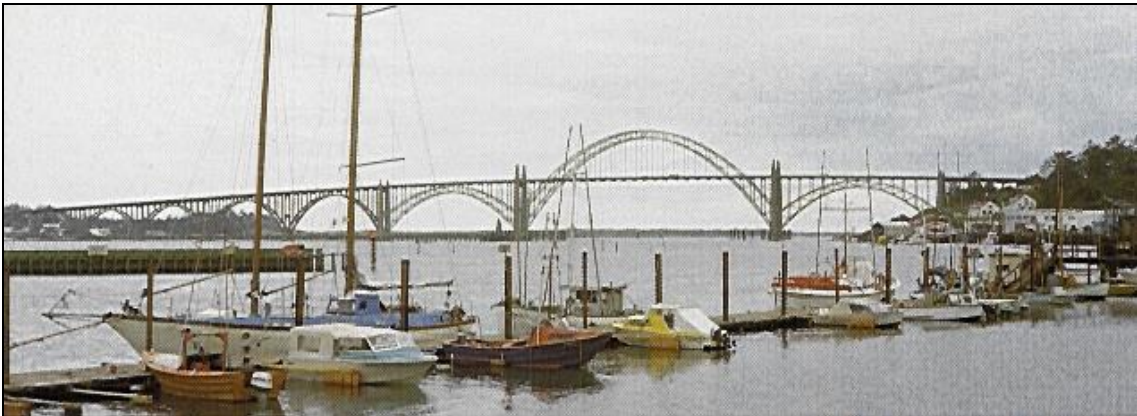


Figure 15 : gain en volume inhérent à l'introduction d'appuis intermédiaires



*Photo 3* : succession de bow-strings : les arcs paraissent bien inutiles face au gabarit du tablier qui aurait à lui seul probablement suffit.



*Photo 4* : pont de la Rogue Riviera, Gold Beach, USA.

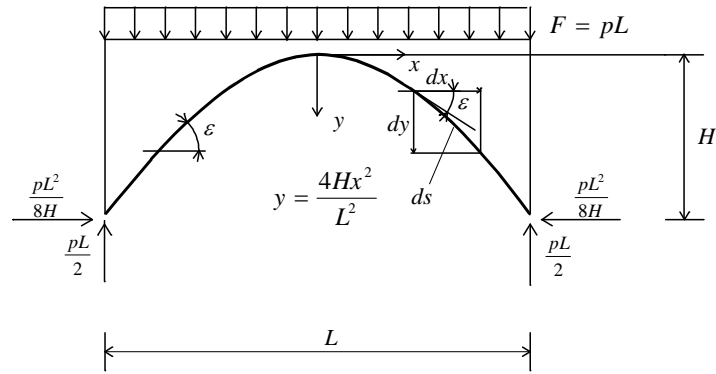
## 2.3. Flambement pris en compte, avec correction de la courbe de flambement

### 2.3.1. Correction de la loi de flambement

La charge distribuée totale critique est donnée par la relation [1] :

$$F_{crit} = \gamma \frac{EI}{L^2} \quad [1]$$

Lorsque l'indicateur de flambement  $\psi$  de l'arc est petit, c'est-à-dire lorsque l'arc est peu soumis au flambement, cette relation devient incorrecte car elle attribue des valeurs infinies à la contrainte maximale de compression. Il convient donc de modifier cette loi de comportement.



Si la charge est distribuée, l'effort normal maximal  $N_{crit}$  se produit aux appuis et vaut  $N_{crit} = (FL/8H)/\cos \varepsilon$ .

Comme  $(\cos \varepsilon)_{x=L/2} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8Hx}{L^2}\right)^2}} \right)_{x=L/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2}}$ , on obtient :

$$N_{crit} = \frac{FL}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2}.$$

La relation [1] peut alors se réécrire en fonction de l'effort  $N_{crit}$  :

$$N_{crit} = \left[ \gamma \frac{L}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} \right] \frac{EI}{L^2}$$

Si  $\Omega_s$  est, par définition, la section efficace aux appuis, on a  $N_{crit} = \sigma_{crit} \Omega_s$  et la contrainte critique qui y règne vaut donc :

$$\sigma_{crit} = \gamma_{cor} \frac{EI}{\Omega_s L^2} \quad \text{avec} \quad \gamma_{cor} \hat{=} \left[ \gamma \frac{L}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} \right] = \text{Fonction}(L/H).$$

Par analogie avec la théorie du flambement des éléments droits comprimés, on peut définir un élancement réduit  $\Lambda$  tel que la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \gamma_{cor} \frac{1}{\Lambda^2} \quad \text{avec} \quad \Lambda \hat{=} \frac{L\sqrt{\Omega_s/I}}{\sqrt{E/\sigma}}$$

L'expression précédente montre bien que la contrainte critique  $\sigma_{crit}$  prend des valeurs infinies lorsque l'élancement réduit tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque l'arc est peu sujet au flambement. Il convient donc de modifier cette relation afin de satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \frac{\sigma_{crit}}{\sigma} \hat{=} 1 \\ \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{crit}}{\sigma} \hat{=} \frac{\gamma_{cor}}{\Lambda^2} \end{array} \right.$$

Ces conditions sont satisfaites par la relation suivante :

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Lambda^2/\gamma_{cor}}$$

La relation [1] devient alors :

$$\boxed{F_{crit} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma_{cor}}{\sigma\Omega_s} + \frac{L^2}{EI}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F_{crit} = \frac{\gamma}{\gamma_{cor}} \frac{\sigma\Omega_s}{1 + \frac{\sigma\Omega_s L^2}{\gamma_{cor} EI}}} \quad [3]$$

### 2.3.2. Calcul de l'indicateur volume corrigé de l'arc de section constante

Si on définit de nouveau un *facteur de forme*  $q = 1/\Omega^2$ , la relation [3] peut se réécrire :

$$F_{crit} = \left( \frac{\gamma}{\gamma_{cor}} \right) \frac{\sigma\Omega_s}{1 + \frac{\sigma L^2}{q\gamma_{cor} E\Omega_s}}$$

Cette relation est semblable à celle qui correspond à un élément droit comprimé (Chap 1, §2.3.2). Elle mène à une équation du second degré en  $\Omega_s$  dont l'unique solution est :

$$\Omega_s = \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right)$$

Par ailleurs, la longueur  $l_{arc}$  de la fibre moyenne d'un arc parabolique a été établie au §2.2.1. :

$$l_{arc} = \frac{L}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right)$$

Si la section est uniforme et vaut partout  $\Omega_s$ , le volume de l'arc est égal à :

$$V = \Omega_s l_{arc} = \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot l_{arc}$$

Les nombres  $\gamma$  et  $\gamma_{cor}$  ne dépendant que du rapport  $L/H$ , l'indicateur de volume vaut finalement :

$$\boxed{W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right)}$$

$$\Rightarrow W = \text{Fonction}(L/H, \Psi) \quad [4]$$



**Remarque :**

Les valeurs de l'indicateur de volume pour les valeurs extrêmes de l'indicateur de flambement sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\Psi \rightarrow 0} W &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \end{aligned}$$

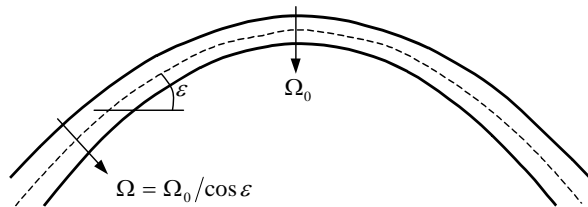
Et on retrouve la relation obtenue en §2.1. possédant un minimum  $W_{min} = 0,778$  pour  $L/H = 2,926$ , et ceci quel que soit le type d'arc (arc sans articulations, arc avec 1, 2 ou 3 articulations).

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} W = \Psi \cdot \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right], \text{ et on retrouve l'expression de}$$

W obtenue au §2.2.1..

Les deux relations précédentes montrent que le paramètre  $\gamma$ , dont la valeur est variable selon le degré d'hyperstaticité de l'arc, n'intervient que lorsque l'indicateur de flambement  $\psi$  est non nul.

**2.3.3. Calcul de l'indicateur volume corrigé de l'arc de section variable**



Cette fois le terme d'inertie  $I$  de la relation [3] correspond à l'inertie de la section située à la clé de l'arc, soit donc  $I = q_0 \Omega_0$ .

Par ailleurs, la section aux appuis vaut :  $\Omega_s \hat{=} \Omega_0 / (\cos \epsilon)_{x=L/2} = \Omega_0 \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \frac{8H}{L}$ .

La relation [3] peut alors se réécrire :

$$F_{crit} = \frac{8H}{L} \frac{\sigma \Omega_0}{1 + \frac{\sigma L^2}{q \left( \gamma \frac{L}{8H} \right) E \Omega_0}}$$

Ce qui mène de nouveau à une équation du second degré en  $\Omega_0$ , dont l'unique solution est :

$$\Omega_0 = \frac{L}{8H} \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)$$

Par ailleurs, le volume total de l'arc vaut :

$$V = \int_S \Omega dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\Omega_0}{\cos \varepsilon} \right) \left( \frac{dx}{\cos \varepsilon} \right) = \Omega_0 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\cos^2 \varepsilon} = \Omega_0 L \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right)$$

L'indicateur de volume de l'arc de section variable vaut donc :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \left( \frac{L}{16H} + \frac{H}{3L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)$$

$$\Rightarrow W = \text{Fonction} (L/H, \Psi)$$

[5]

**Remarque :**

Les valeurs de l'indicateur de volume pour les valeurs extrêmes de l'indicateur de flambement sont les suivantes :

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} W = \left( \frac{L}{8H} + \frac{2H}{3L} \right)$$

Et on retrouve l'expression obtenue en §2.1. et possédant un minimum  $W_{\min} = 0,577$  pour  $L/H = 2,309$ , et ceci quel que soit le type d'arc (arc sans articulations, arc avec 1, 2 ou 3 articulations).

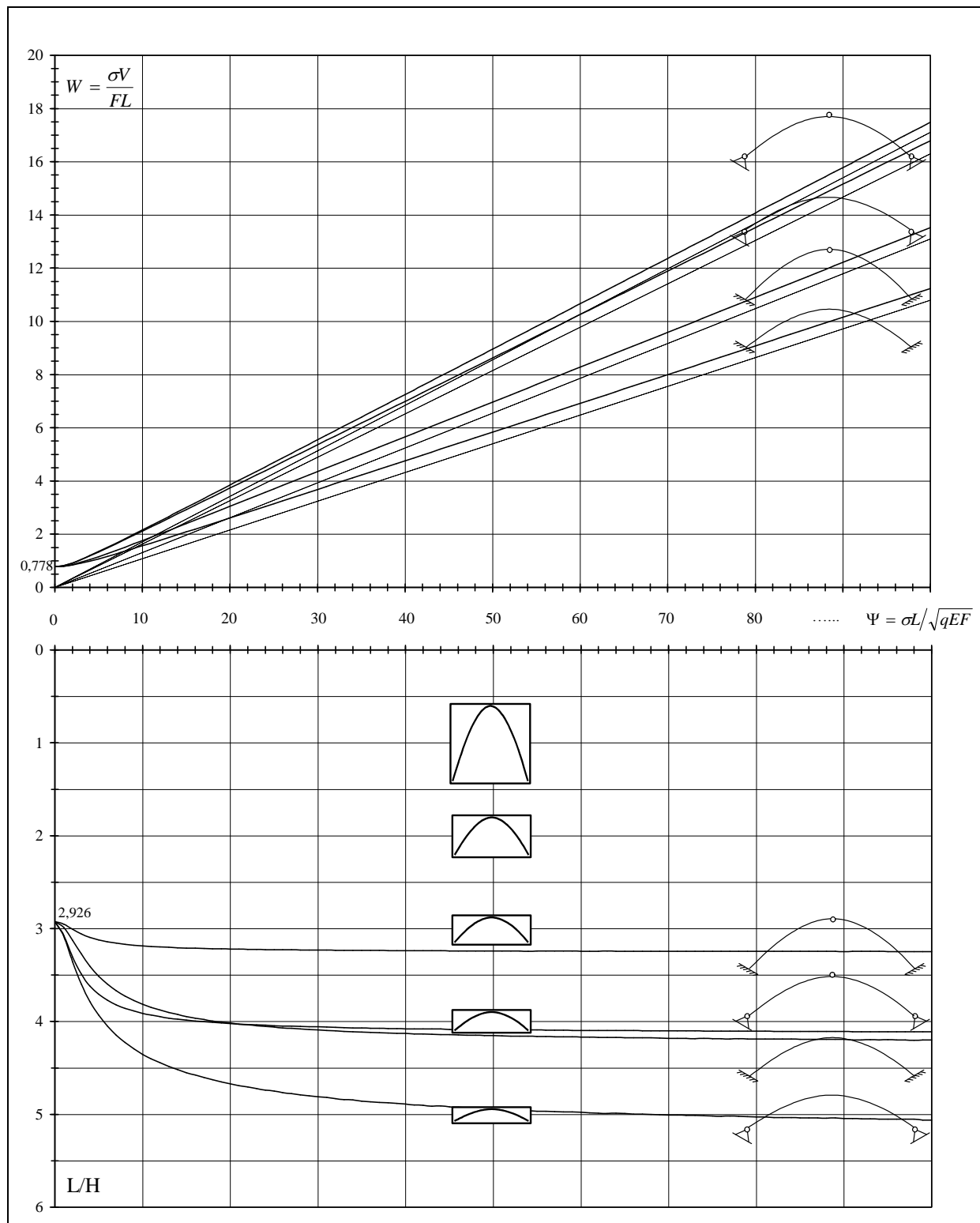
$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} W = \Psi \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right), \text{ et on retrouve l'expression de } W \text{ obtenue au §2.2.2..}$$

De nouveau, les deux relations précédentes montrent que le paramètre  $\gamma$ , dont la valeur est variable selon le degré d'hyperstaticité de l'arc, n'intervient que lorsque l'indicateur de flambement  $\psi$  est non nul.

**2.3.4. Courbes d'efficience corrigées**

Les figures 16 et 17 représentent respectivement les courbes d'efficience corrigées selon les relations [4] et [5] pour les arcs de section constante et variable. Les traits pointillés qui leurs sont associés sont les courbes d'efficience linéaires obtenues à partir de la relation [1] et répondant à la loi  $W = \psi W^{(C)}$ . Chacune de ces figures comprend deux sous-figures ayant un axe des abscisses en commun. La figure du bas donne les valeurs de l'élancement  $L/H$  associé à chacun des arcs optimaux.

Enfin, la figure 18 compare les courbes d'efficience des figures 16 et 17.



**Figure 16 :** courbes d'efficace des 4 types d'arcs de section **constante**. Les droites en pointillés correspondent aux courbes d'efficace calculées sans correction de la courbe de flambement.

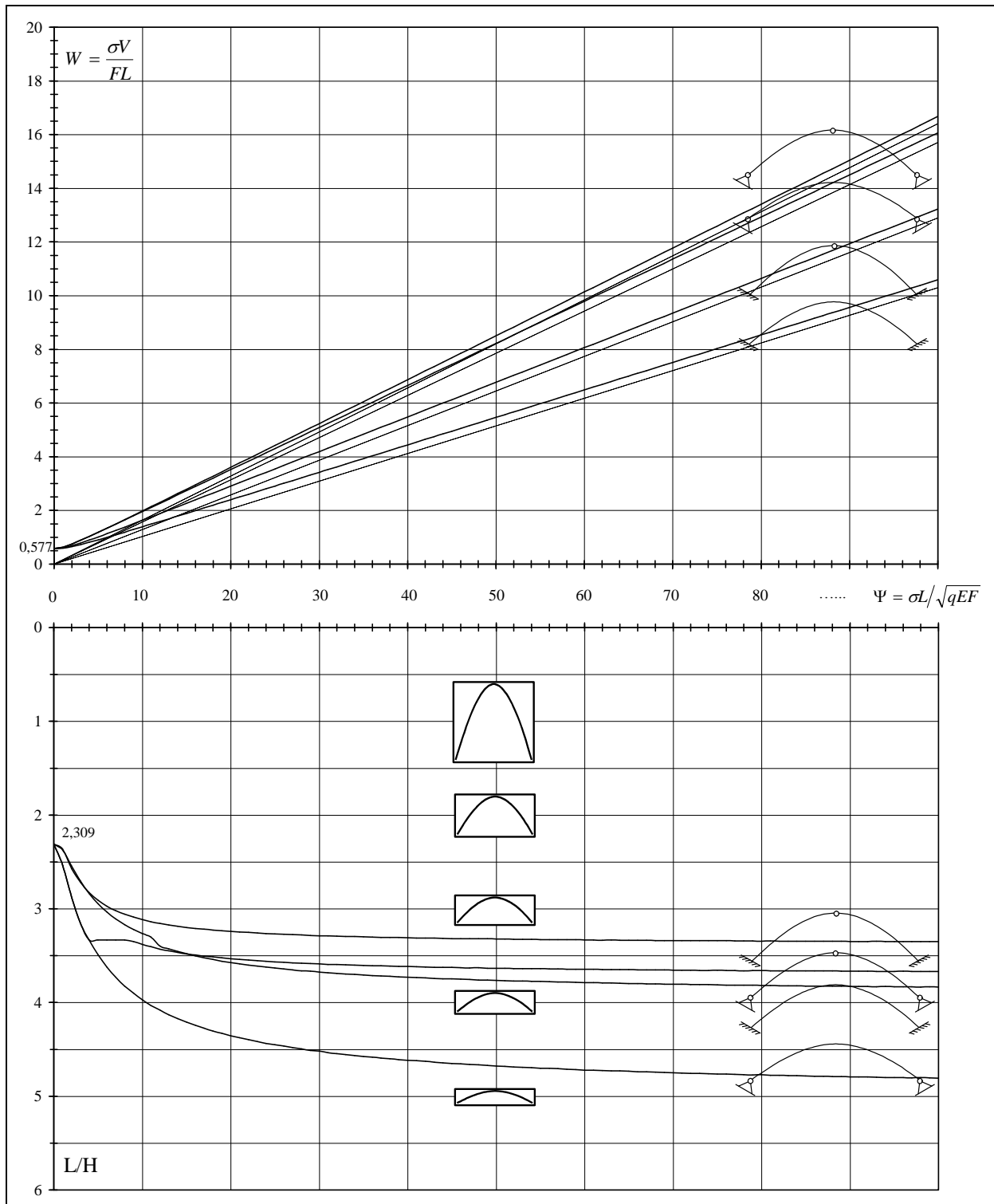


Figure 17 : courbes d'efficace des 4 types d'arcs de section **variable**. Les droites en pointillés correspondent aux courbes d'efficace calculées sans correction de la courbe de flambement.

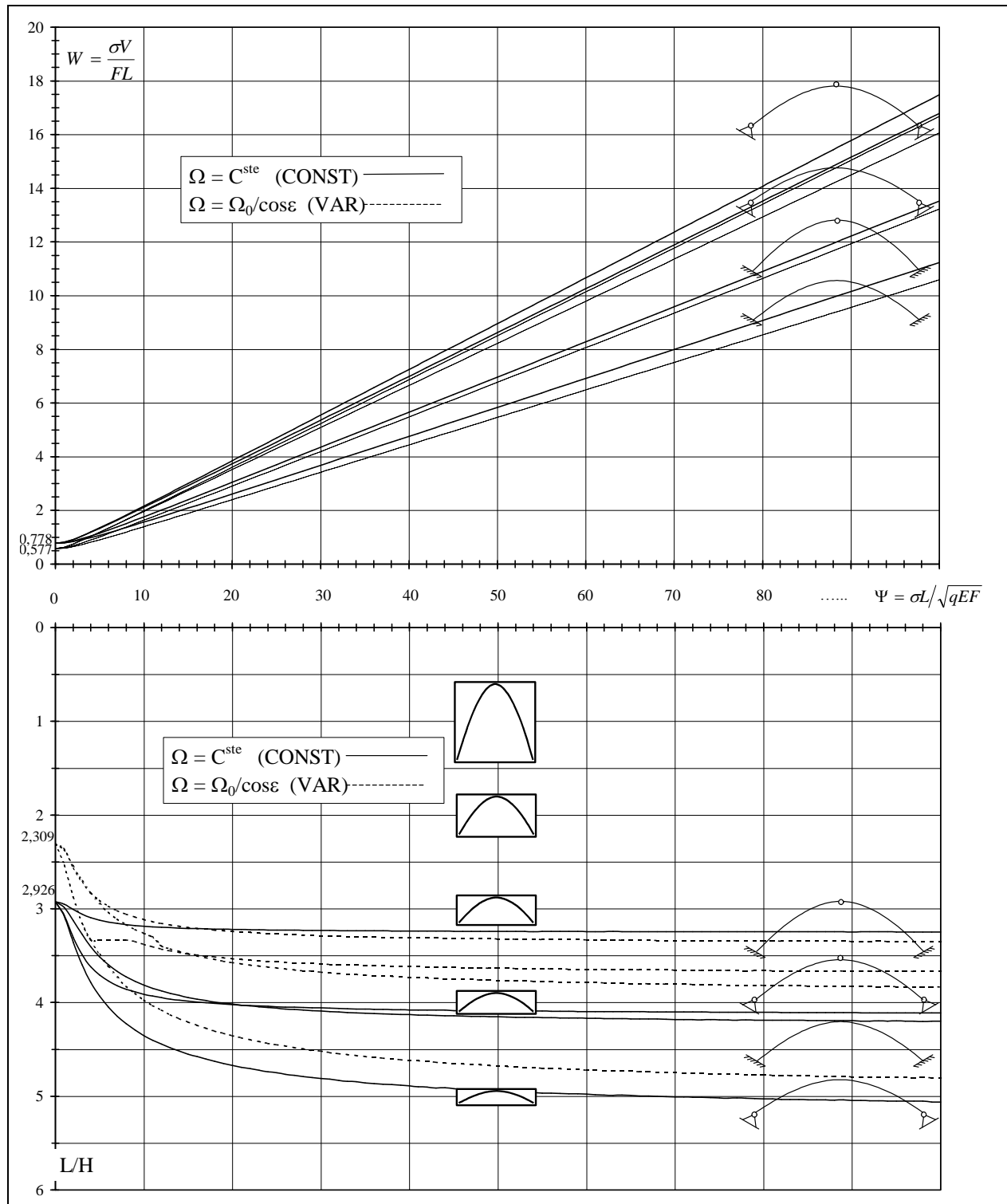


Figure 18 : courbes d'efficace des 4 types d'arcs de section **constante** (traits continus) et **variable** (traits pointillés).

### 2.3.5. Intérêt de la section variable

Comme le montre la figure 19, la section variable selon la loi  $\Omega = \Omega_0/\cos\epsilon$  apporte un gain en volume qui peut être non négligeable, mais d'autant plus petit que l'indicateur de flambement est grand.

**La limite supérieure** de ce gain en volume, indépendante du nombre d'articulations de l'arc, s'obtient pour  $\Psi = 0$  à partir des équations [4] et [5] et vaut :

$$\begin{aligned} & \lim_{\Psi \rightarrow 0} \left( \frac{W_{Const} - W_{Var}}{W_{Const}} \right) \\ &= \frac{\left[ \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right]_{L/H = 2,926} - \left[ \frac{L}{8H} + \frac{2H}{3L} \right]_{L/H = 2,309}}{\left[ \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right]_{L/H = 2,926}} \\ &= \frac{0,778 - 0,577}{0,778} = 25,8 \text{ [\%]} \end{aligned}$$

**La limite inférieure** de ce gain en volume, qui dépend cette fois du nombre d'articulations de l'arc, s'obtient pour  $\Psi \rightarrow \infty$  à partir des équations [4] et [5] et vaut :

$$\begin{aligned} & \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const} - W_{Var}}{W_{Const}} \right) \\ &= \frac{\left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right]_{Min(Const)} - \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right) \right]_{Min(Var)}}{\left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) \right]_{Min(Const)}} \end{aligned}$$

Ces termes entre parenthèses ayant été notés  $W^{(C)}$  au §2.2., l'expression ci-dessus peut se réécrire :

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const}^{(C)} - W_{Var}^{(C)}}{W_{Const}^{(C)}} \right)$$

Or, les valeurs optimales de  $W^{(C)}$  dans chacun des cas de figure sont reprises à la figure 12. On obtient :

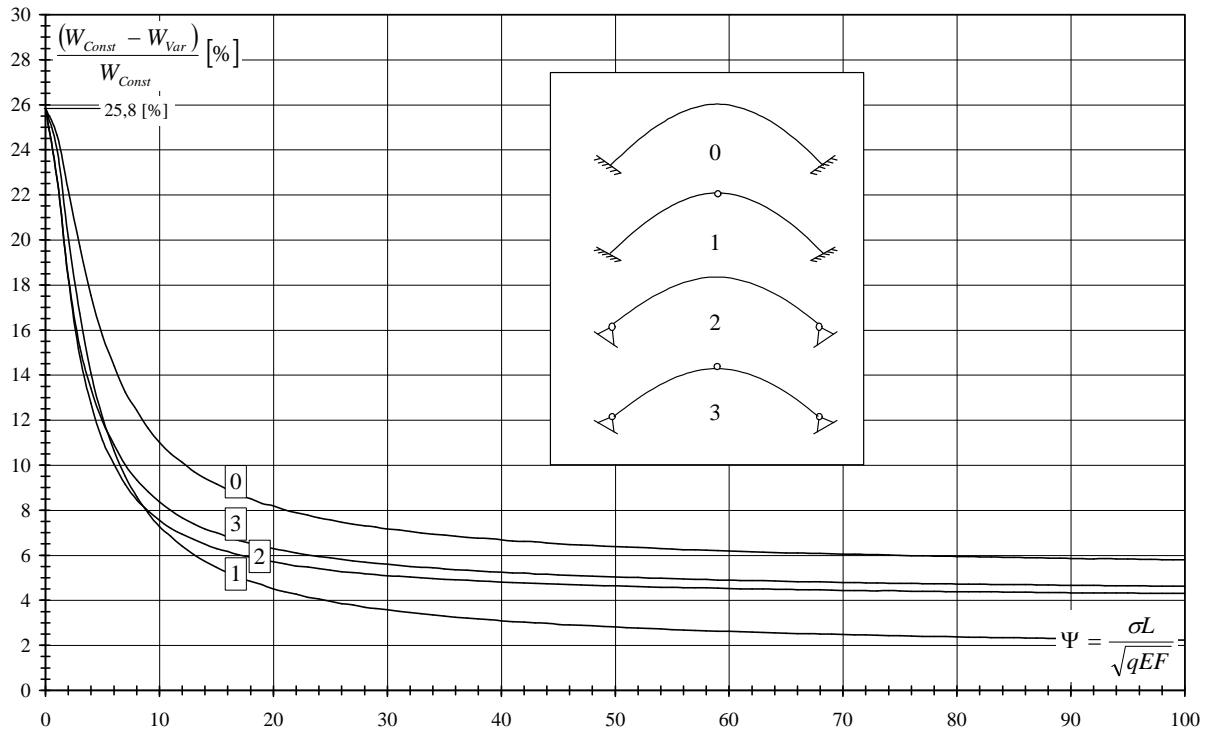
$$\text{Arc sans articulations : } \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const}^{(C)} - W_{Var}^{(C)}}{W_{Const}^{(C)}} \right) = \frac{0,108 - 0,103}{0,108} = 4,63 \text{ [\%]}$$

$$\text{Arc avec 1 articulation : } \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const}^{(C)} - W_{Var}^{(C)}}{W_{Const}^{(C)}} \right) = \frac{0,131 - 0,129}{0,131} = 1,53 \text{ [\%]}$$

$$\text{Arc avec 2 articulations : } \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const}^{(C)} - W_{Var}^{(C)}}{W_{Const}^{(C)}} \right) = \frac{0,163 - 0,157}{0,163} = 3,68 \text{ [\%]}$$

$$\text{Arc avec 3 articulations : } \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \left( \frac{W_{Const}^{(C)} - W_{Var}^{(C)}}{W_{Const}^{(C)}} \right) = \frac{0,171 - 0,164}{0,171} = 4,09 \text{ [\%]}$$

La figure 19 donne les valeurs du gain en volume pour les valeurs intermédiaires de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .



**Figure 19** : gain en volume, en pourcents, apporté par la section variable par rapport à la section constante, toutes autres choses restant égales.

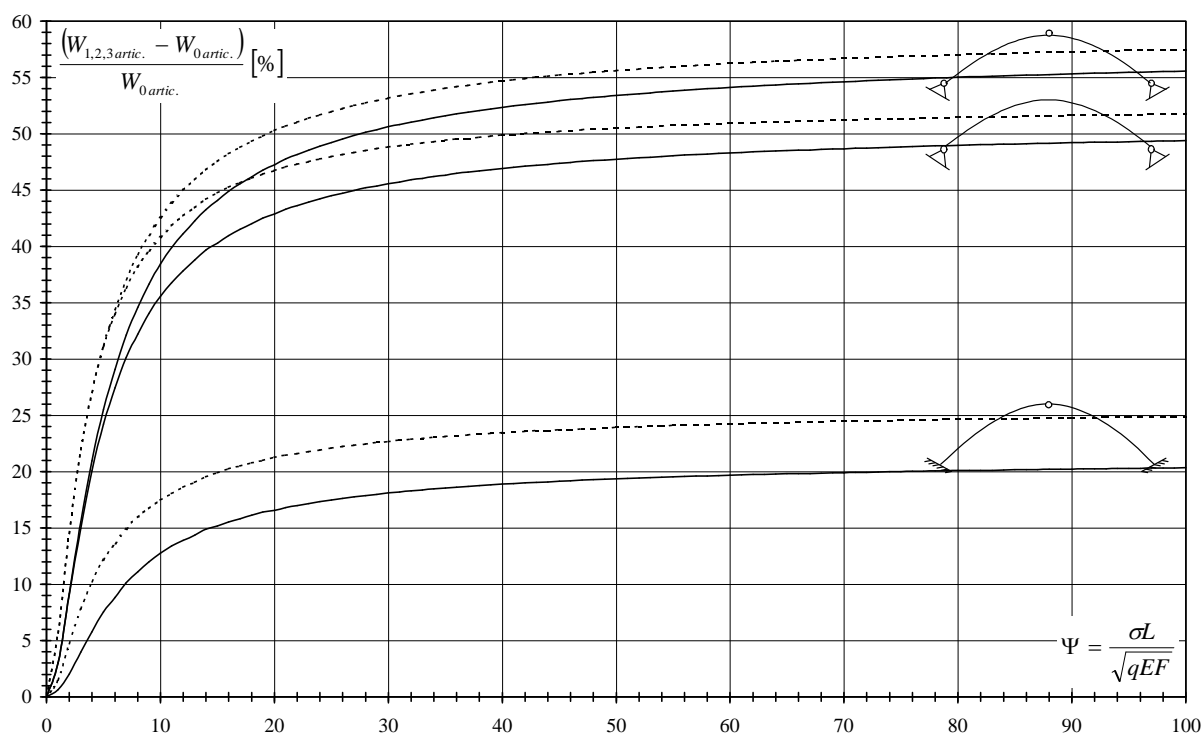
### 2.3.6. Influence du nombre d'articulations sur le volume d'un arc

Comme l'illustrent les figures 16 et 17, les arcs sont d'autant plus lourds qu'ils possèdent des articulations. L'arc sans articulations, de degré hyperstatique 3, est donc le plus léger des 4 familles d'arcs. La figure 20 montre le surplus de volume de matière à considérer pour 1, 2 et 3 articulations par rapport à l'arc sans articulations, respectivement pour l'arc de section constante et variable.

Elle montre que ce surplus de matière dû par la présence d'articulations croît très vite vers une valeur constante égale à :

- 20-25% pour l'arc à une seule articulation;
- 50 % pour l'arc à 2 articulations;
- 55-60 % pour l'arc à trois articulations.

L'introduction d'articulations dans un arc est donc un facteur important puisque leur présence peut plus que doubler le volume de matériaux à mettre en œuvre.



**Figure 20** : surplus de volume consécutif à l'introduction d'articulations (traits continus : section constante, traits pointillés : section variable).

### 3. COMPARAISON DES ARCS ET DES TREILLIS CLASSIQUES

Cette analyse est un avant-goût d'une étude plus rigoureuse présentée dans l'épilogue de cette thèse. Le chapitre 2 a montré la supériorité du treillis Warren, que ce soit au niveau du volume ou des raideurs. Comme l'indicateur de volume de l'arc ne dépend lui aussi que des deux paramètres  $\Psi$  et  $L/H$ , il est possible de comparer les courbes respectives de l'arc et du treillis. Il faut toutefois noter que, dans le cas d'un treillis, l'expression de l'indicateur de flambement  $\Psi$  comprend le terme  $\mu$  qui détermine la longueur de flambement des barres en compression. Dans le cas de barres complètement articulées,  $\mu = 1$  et l'arc et le treillis sont rigoureusement comparables. Dans le cas où les barres sont soudées ou boulonnées, on admet communément que  $\mu = 0,8$  à  $\mu = 1$  et il faut tenir compte de cette différence lors de la comparaison des deux types de structures.

Par ailleurs, les études précédentes relatives à l'arc considèrent celui-ci dans le cas d'une charge distribuée uniforme, comme c'est le cas lorsque le poids propre du tablier qu'il supporte est important par rapport aux charges variables, ou que ces charges variables sont distribuées uniformément. Si ce n'est pas le cas, l'arc parabolique n'est plus funiculaire et son utilisation se justifie moins. La comparaison s'effectuera donc avec les treillis relatifs au cas notés *Distr* (voir chap 2), c'est-à-dire soumis à des charges distribuées.

Le facteur de forme "q", intervenant dans l'expression de l'indicateur de flambement  $\Psi$ , est aussi à prendre en compte lors d'une comparaison rigoureuse. Lorsque le matériau constitutif est du béton ou du bois, la section de l'arc est généralement carrée ou rectangulaire pleine, ce qui correspond à un facteur de forme égal à  $q = (12t)^{-1}$ , où "t" est le rapport  $b/h$  entre la largeur et la hauteur du profil. C'est aussi le cas pour les barres d'un treillis en bois ou en béton et les courbes d'efficacité de l'arc et du treillis sont alors comparables. Lorsque le matériau est l'acier, les barres comprimées des treillis sont souvent creuses (ou alors des cornières ou autres sections composées), de même que l'arc qui se compose d'un caisson. Dans ce dernier cas les facteurs de forme peuvent être très différents et doivent intervenir dans le processus comparaison.



Par ailleurs, les courbes d'efficacité reprises aux figures 16 à 18 ne tiennent pas compte du volume de matière nécessaire au transfert des charges sur l'arc. Si celui-ci est pourvu de suspentes, leur volume est très faible puisqu'elles sont en traction. Si l'arc est pourvu de colonnettes, le volume peut augmenter considérablement car elles sont en compression, et donc soumises au flambement. Finalement, l'arc ne sera donc rigoureusement comparable au treillis à "n" mailles que si le nombre de suspentes ou de colonnettes découpe la portée en "n" divisions.

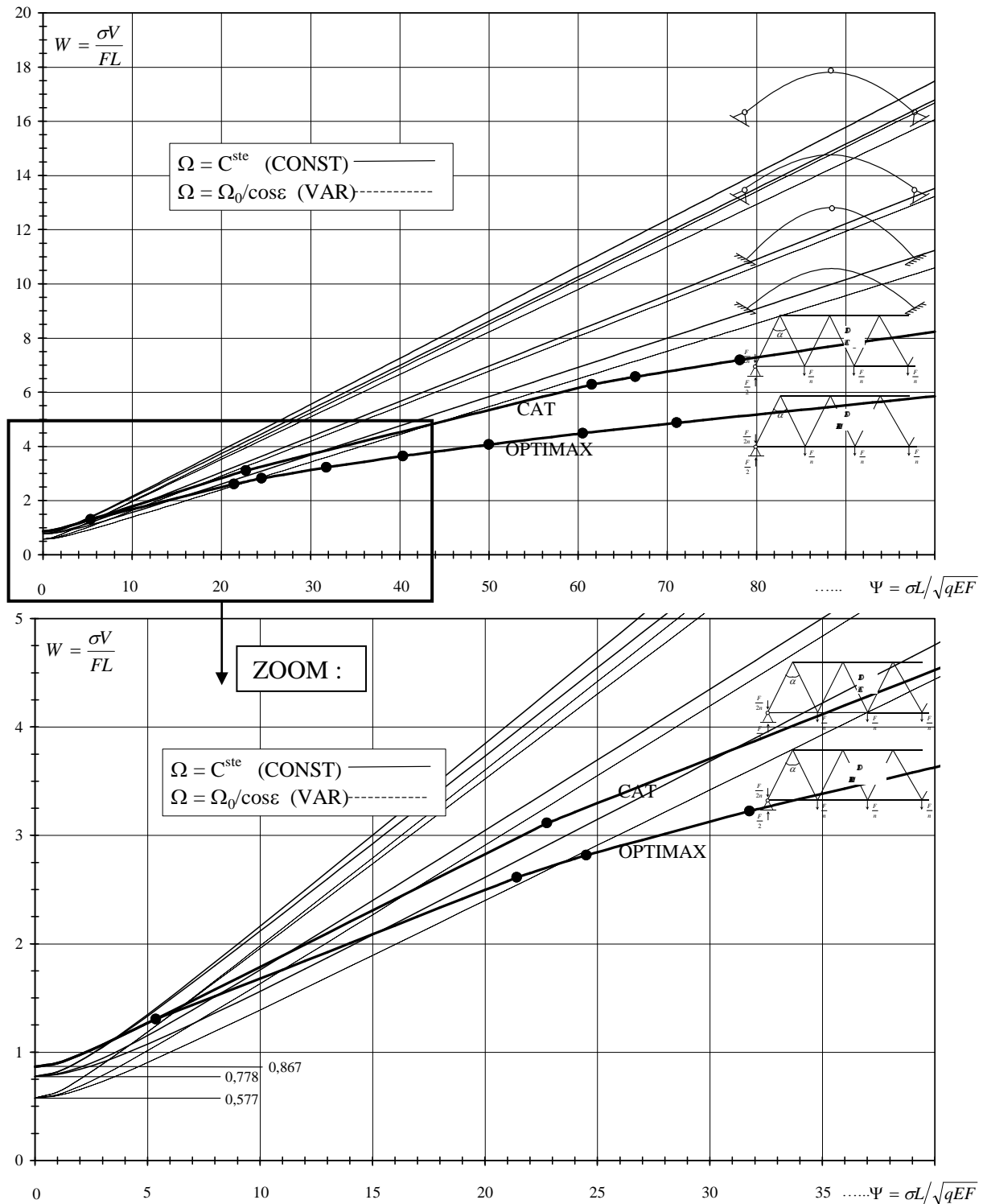


Figure 21 : comparaison des 8 types d'arcs avec le treillis Warren (courbes en gras).

La figure 21 compare les 8 types d'arcs avec le treillis Warren composé respectivement de barres optimisées individuellement (*Optimax*) ou de catégories de barres (*Cat*). Vu les commentaires ci-dessus, ces courbes sont à comparer avec attention et les commentaires qu'elles suggèrent sont à modérer en fonction :

- du coefficient  $\mu$  relatif aux barres comprimées du treillis;
- du facteur de forme "q";
- de la longueur des mailles et donc de la longueur des éléments du treillis chargés de reporter les charges sur les nœuds;
- de la présence de suspentes ou de colonnettes et du volume supplémentaire qu'elles induisent.

Globalement, on constate que les treillis deviennent vite plus efficaces lorsque l'indicateur de flambement  $\Psi$  augmente. Cet écart s'accroît davantage lorsque l'arc est équipé de suspentes ou de colonnettes.

## 4. INFLUENCE DU POIDS PROPRE DE L'ARC ET DES CHARGES VARIABLES

### 4.1. Répartition du poids propre dans un arc

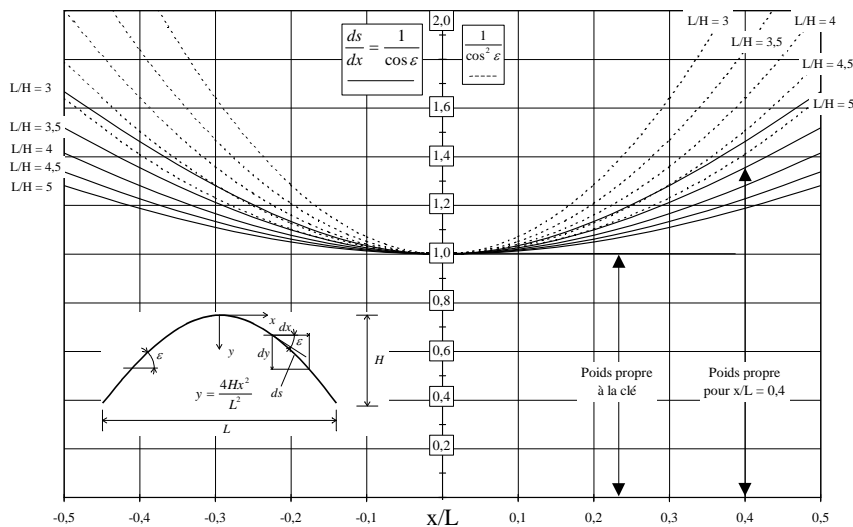


Figure 22 : répartition du poids propre pour divers élancements L/H.

Si l'arc est peu surbaissé, la densité de poids propre n'est pas distribuée de façon uniforme sur toute la portée. Soit  $p$  la densité de poids propre à la clé. Pour un arc de section constante et en une section définie par une abscisse  $x/L$  (voir schéma sur figure 22), la densité de poids propre vaut  $p/\cos \varepsilon$ . Si en plus l'arc possède une section rectangulaire pleine variable le long de la fibre moyenne selon la loi  $\Omega = \Omega_0/\cos \varepsilon$ , la densité de poids propre devient égale à  $p/(\cos \varepsilon)^2$ . La figure 22 illustre cette répartition de poids propre pour les élancements  $L/H$  compris entre 3 et 5. Les traits continus et en pointillés correspondent respectivement aux arcs de section constante et variable.

Cette figure montre que lorsque le poids propre de l'arc important, la charge totale n'est plus distribuée de façon uniforme et la géométrie parabolique n'est plus idéale. Il se crée alors des moments de flexion qui modifient la valeur des contraintes dues à l'effort principal de compression. Il faut donc en tenir compte pour les arcs de grande portée dont le poids propre est important par rapport à celui des charges du tablier combinées aux charges variables. Dans ce cas, une solution constructive

abordable est de prévoir un arc dont la géométrie est celle de la chaînette, qui est le funiculaire exact d'un arc soumis uniquement à son poids propre. Les 2 types de géométries étant très proches, il est légitime de penser que les résultats de toute l'analyse présente sont encore valables pour les arcs en chaînette de poids propre important. Timoshenko le confirme en montrant que les valeurs des charges critiques relatives aux arcs en chaînette sont très peu différentes de celles des arcs paraboliques de mêmes élancements.

#### 4.2. Prise en compte du poids propre dans l'expression de l'indicateur de volume

La prise en compte du poids propre dans l'expression de l'indicateur de volume d'un treillis est détaillée au chapitre 1 (§4). Cette prise en compte s'effectue à l'aide d'un indicateur de poids propre dont l'expression générale est la suivante :  $\Phi = \rho L / \sigma$ .

Si on considère que le poids propre est uniformément réparti, et en notant que :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{\sigma V}{FL} \frac{L}{(\sigma/\rho)} = W\Phi, \quad [6]$$

les expressions de l'indicateur de volume d'un arc deviennent :

**Pour l'arc de section constante :**

F étant la charge extérieure, la charge totale vaut (F + ρV) et le volume de l'arc est égal à (voir §2.3.1.) :

$$V = \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \frac{(F + \rho V)}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\gamma}{qE(F + \rho V)} \left( \frac{\sigma L}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot l_{arc}$$

$$W = \frac{(1 + W\Phi)}{4} \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma_4} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\gamma}{(1 + W\Phi)} \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right)$$

Cette équation est implicite en W et permet de tracer les courbes d'efficience de la figure 23 (à droite).

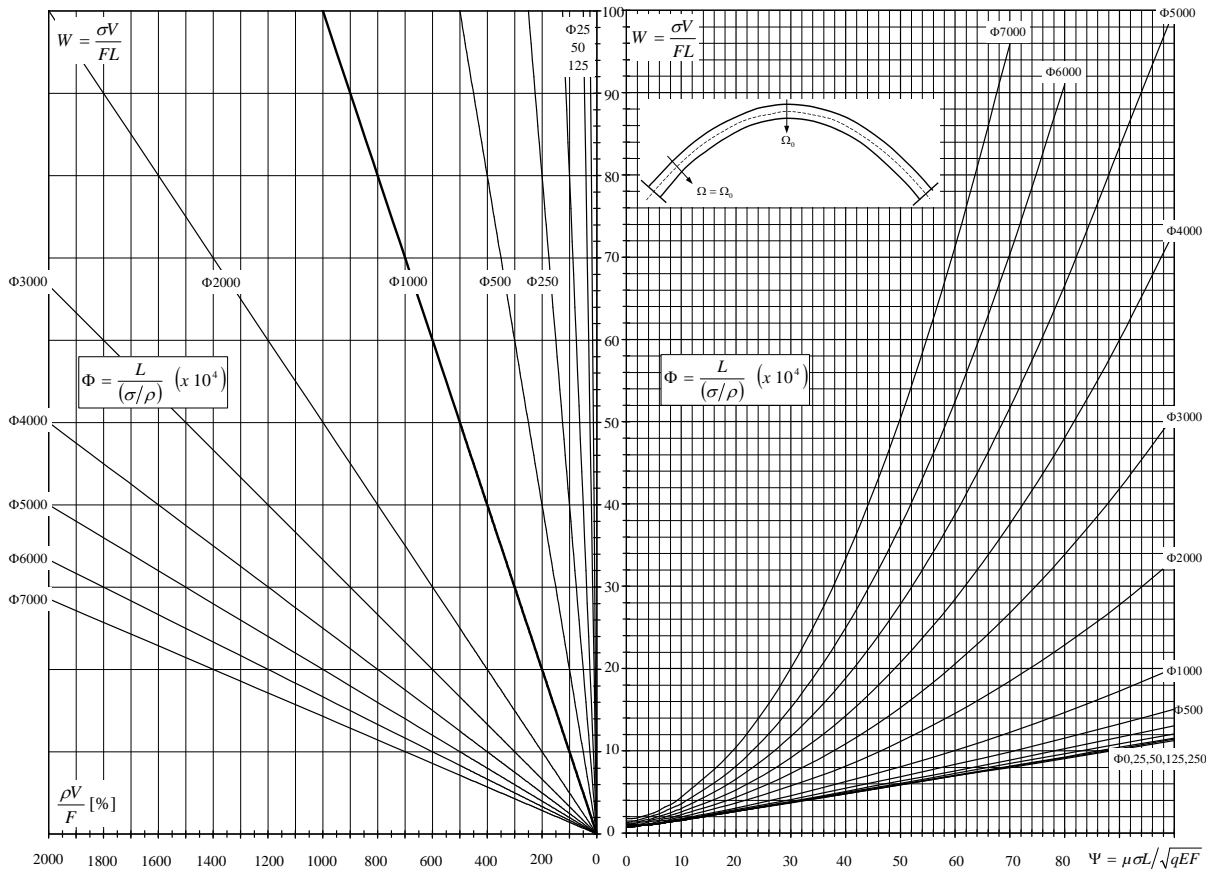
**Pour l'arc de section variable :**

Un calcul semblable fournit le résultat suivant :

$$W = (1 + W\Phi) \left( \frac{L}{16H} + \frac{H}{3L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma(1 + W\Phi)} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)$$

Les 2 expressions précédentes ne peuvent se résoudre que par un processus numérique adéquat.

Les deux sous-figures de la figure 23, relatives à l'arc de section constante et dépourvu d'articulations, ont un même axe des ordonnées. Celle de droite représente les courbes d'efficience pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre (obtenues à partir des équations ci-dessus). Celle de gauche permet de déduire le pourcentage de poids propre ρV/F de la valeur de W lue en ordonnée, en vertu de la relation [6].



**Figure 23** : courbes d'efficience relatives à l'arc de section constante sans articulations, pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre (à droite) et rapport entre le poids propre  $\rho V$  et la charge totale extérieure  $F$  (à gauche), donné en abscisse pour chaque valeur de  $W$  lue sur l'axe des ordonnées commun.

### 4.3. Argumentation sur les charges variables : l'arc est-il légitime ?

Il est évident qu'un arc ne peut se justifier que si son poids propre et/ou celui du tablier est grand par rapport aux charges extérieures variables qui s'appliquent sur le tablier. Si ce n'est pas le cas, sa géométrie n'est plus funiculaire et son mode de fonctionnement se rapproche de celui d'une poutre, alors plus simple à mettre en œuvre.

Dans cette analyse, les caractéristiques suivantes sont adoptées pour, respectivement, le béton armé :  $E = 20000 \text{ Mpa}$ ,  $\sigma = 15 \text{ Mpa}$ ,  $\rho = 25 \text{ kN/m}^3$ , l'acier doux :  $E = 210000 \text{ Mpa}$ ,  $\sigma = 140 \text{ Mpa}$ ,  $\rho = 77 \text{ kN/m}^3$ , l'acier HLE :  $E = 210000 \text{ Mpa}$ ,  $\sigma = 300 \text{ Mpa}$ ,  $\rho = 77 \text{ kN/m}^3$  et le bois :  $E = 10000 \text{ Mpa}$ ,  $\sigma = 10 \text{ Mpa}$ ,  $\rho = 6 \text{ kN/m}^3$ .

Le pourcentage de poids propre est égal à  $\Phi W$  (selon [6]) et est donc globalement proportionnel à  $\Psi$ . Pour un matériau donné, il est donc d'autant plus grand que :

- la charge extérieure répartie  $F/L$  est petite;
- le facteur de forme "q" de la section de l'arc est petit.

$$\Psi = \frac{\sigma \sqrt{L}}{\sqrt{qE(F/L)}}$$

Au niveau des charges, il semble peu raisonnable de descendre en dessous d'une valeur de 10 kN/m par arc, ce qui pourrait correspondre à une passerelle de faible largeur et de tablier léger. A l'opposé, une charge de 300 kN/m par arc semble déjà très importante pour un pont routier, en gardant à l'esprit que le tablier est alors responsable d'une bonne partie de cette charge.

Au niveau des sections, celle d'un arc en béton ou en bois sera pleine ou en caisson, et celle d'un arc en acier sera la plupart du temps en caisson. Une valeur de 0,083 correspond à une section carrée pleine, alors qu'une section carrée en caisson dont le rapport entre l'épaisseur et le coté vaut 0,1, correspond à un facteur de forme  $q = 0,38$ .

L'indicateur de flambement vaut :

$$\text{- pour } F/L = 10 \text{ kN/m : } \Psi = \sigma \sqrt{L} / \sqrt{qE(F/L)} = \begin{cases} 0,0335 \sqrt{L/q} & \text{pour le béton armé} \\ 0,0316 \sqrt{L/q} & \text{pour le bois} \\ 0,0966 \sqrt{L/q} & \text{pour l'acier doux} \\ 0,2070 \sqrt{L/q} & \text{pour l'acier écroui} \end{cases}$$

$$\text{- pour } F/L = 300 \text{ kN/m : } \Psi = \sigma \sqrt{L} / \sqrt{qE(F/L)} = \begin{cases} 0,0061 \sqrt{L/q} & \text{pour le béton armé} \\ 0,0058 \sqrt{L/q} & \text{pour le bois} \\ 0,0176 \sqrt{L/q} & \text{pour l'acier doux} \\ 0,0378 \sqrt{L/q} & \text{pour l'acier écroui} \end{cases}$$

Si la portée  $L$  et la section sont connus, l'indicateur de flambement est donc déterminé (et donc aussi la valeur de l'indicateur de volume  $W$  si on se base sur les courbes d'efficience), de même que l'indicateur de poids propre  $\Phi$ . On peut alors calculer le rapport suivant :

$$\frac{F}{(F + \rho V)} = \frac{1}{1 + \frac{\rho V}{F}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{W\Phi}}$$

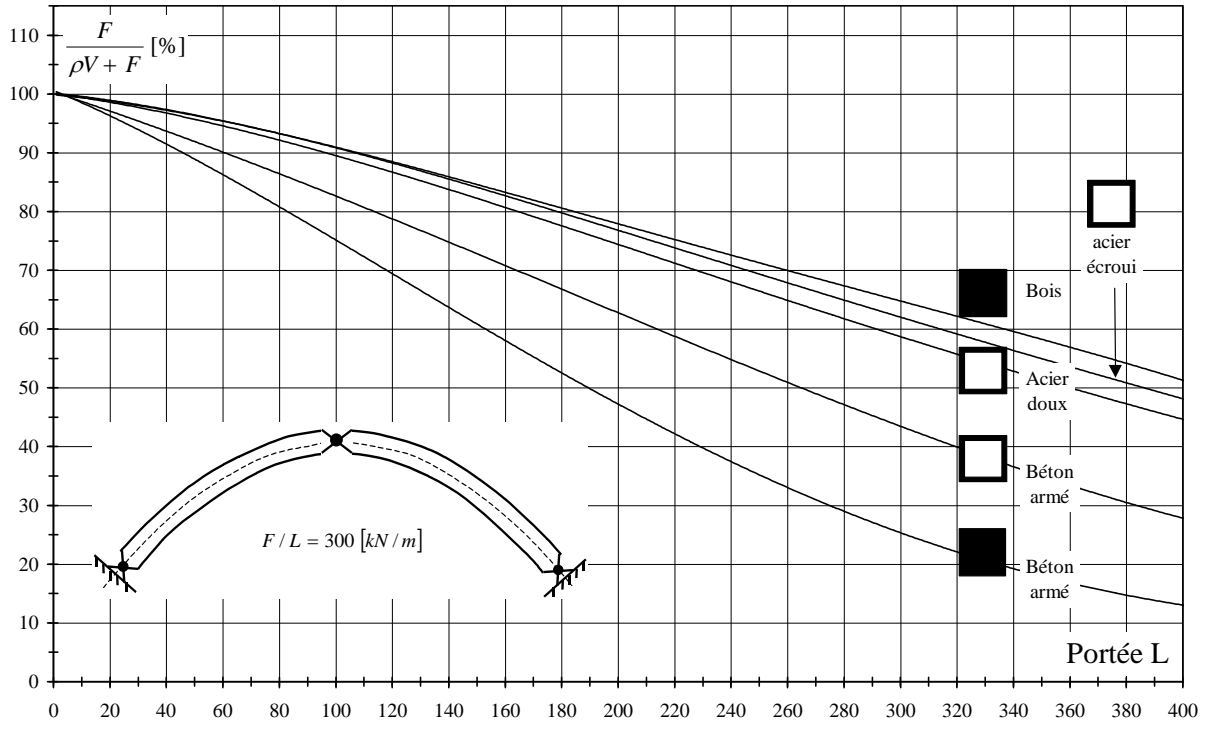
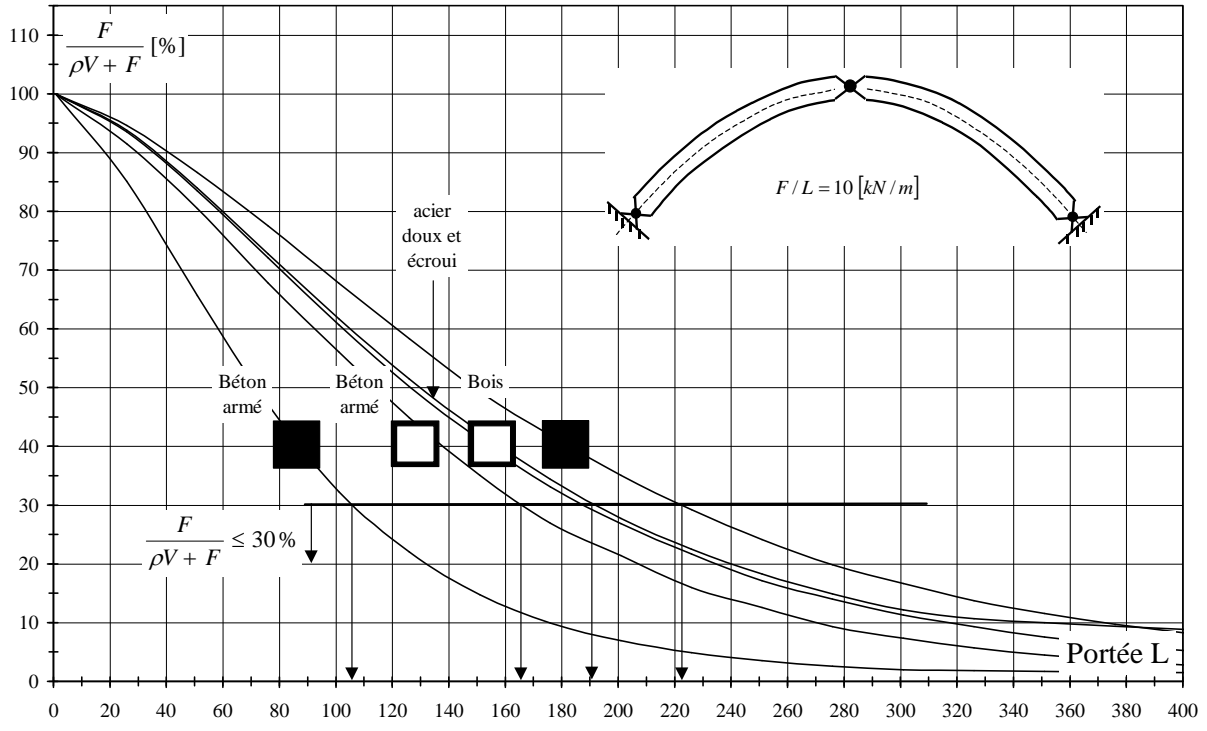
Cette relation exprime le rapport entre la charge extérieure  $F$  pouvant s'exercer sur l'arc (y compris tablier) et la charge totale qu'il peut reprendre, c'est-à-dire celle qui comprend le poids propre. Ce rapport est illustré aux figures 24 et 25 pour, respectivement, les arcs optimaux à 3 articulations et sans articulations.

Les courbes d'efficience des figures 16 à 18 ont montré que l'arc à 3 articulations de section constante est le plus lourd de tous les arcs, et donc le moins sensible aux charges variables. La figure 24A, relative aux arcs à 3 articulations peu chargés, suggère les commentaires suivants :

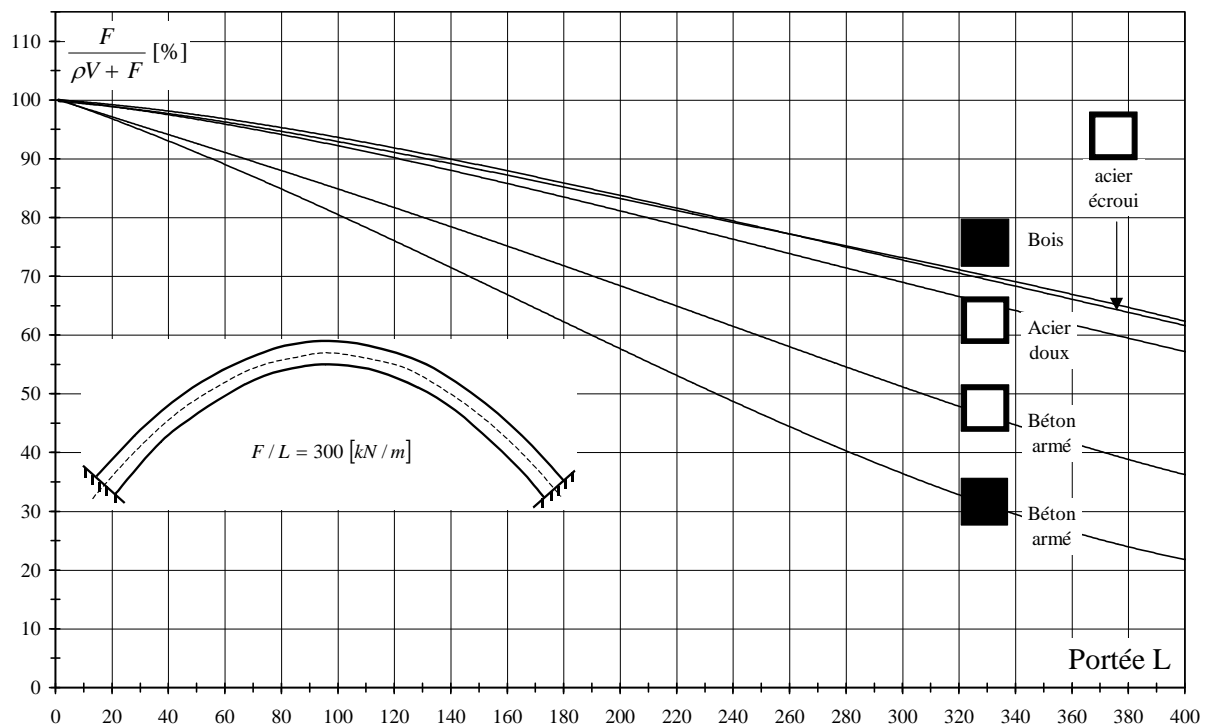
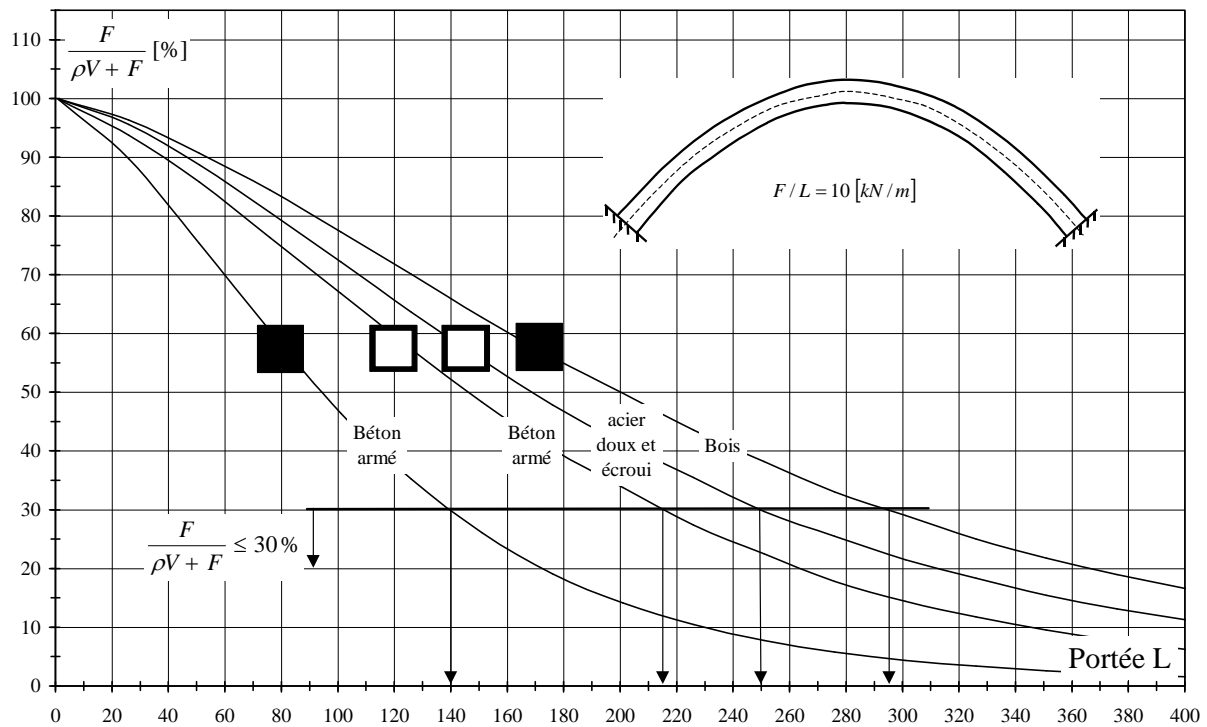
Pour les passerelles légères, la charge extérieure  $F$  (charges variables + tablier) vaut plus de 30% de la charge totale si :

- Pour un arc en béton armé de section pleine :  $L < 105$  m;
- Pour un arc en béton armé de section creuse :  $L < 165$  m;
- Pour un arc en bois de section pleine :  $L < 220$  m;
- Pour un arc en acier de section creuse :  $L < 190$  m;

On voit donc que **l'arc ne peut se justifier que si les portées sont très importantes**. Ces portées s'aggravent encore pour les arcs encastres (figure 25A) ou lorsque les sections sont plus creuses ou plus hautes que larges, rendant alors les arcs encore plus légers.



**Figures 24A (au dessus) et 24B (en dessous) :** pourcentage de charge extérieure par rapport à la charge totale pour une faible charge de 10 kN/m (24A) et une forte charge de 300 kN/m (24B). Les sections sont carrées pleines ( $q=0,083$ ) ou creuses ( $q = 0,38$ ) et l'arc considéré possède **3 articulations**.



**Figures 25A (au dessus) et 25B (en dessous) :** pourcentage de charge extérieure par rapport à la charge totale pour une faible charge de 10 kN/m (24A) et une forte charge de 300 kN/m (24B). Les sections sont carrées pleines ( $q=0,083$ ) ou creuses ( $q = 0,38$ ) et l'arc considéré est **encastré**.

Si les charges variables augmentent, l'indicateur de flambement diminue, ce qui permet d'obtenir des arcs dont l'indicateur de volume est faible et qui correspondent donc, selon [6], à des arcs de poids propre faible par rapport aux charges qu'ils peuvent reprendre. La figure 24B, relative aux arcs à 3 articulations très chargés (ponts routiers), suggère le commentaire suivant : les arcs ne sont justifiables pour un pont routier que lorsqu'ils comportent un tablier très lourd, ce qui peut être contradictoire avec la notion même d'arc qui, selon l'espacement des colonnettes ou des suspentes, permet d'obtenir des portées libres de tablier réduites et donc légères.

Finalement, on constate que les arcs utilisés pour les ponts ou les passerelles doivent en général avoir de grandes portées pour être justifiables, ou alors comporter un tablier très lourd. Il est évident que les sections peuvent être choisies de manière à diminuer le facteur de forme "q", ce qui donne lieu à des arcs moins efficaces, plus lourds, mais qui peuvent alors leur donner un sens. C'est le cas des arcs illustrés aux photos 6, 7 et 8 qui ont une section rectangulaire aplatie de faible facteur de forme "q" et donc de poids propre plus important par rapport aux charges extérieures.



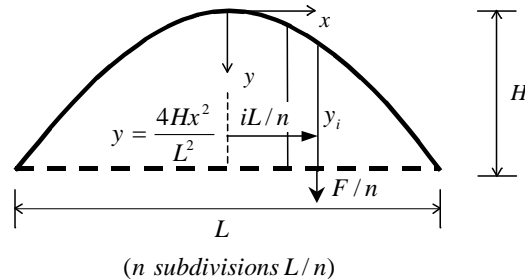
**Photo 5** : passerelle en arc à *Schröken* (Autriche). Dans cette situation où la portée est très faible, le choix des arcs semble ne se justifier que pour des raisons architecturales. Ils pourraient avantageusement être remplacés par deux simples poutres droites servant de support au tablier, éventuellement dotées d'une contre-flèche.



## 5. INDICATEUR DE VOLUME DES SUSPENTES ET COLONNETTES

### 5.1. Suspentes

Les suspentes étant en traction, leur indicateur de volume ne dépend évidemment que du rapport L/H.



Si la travée comporte n subdivisions et (n - 1) suspentes (dont une suspente centrale), toute suspente d'indice "i" est soumise à une charge F/n et sa longueur est égale à :

$$y_i = H \left( 1 - 4 \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

Chaque suspente étant en traction, sa section vaut :  $\Omega_i = \frac{F}{n\sigma}$  .

Le volume de la suspente d'indice "i" s'obtient à partir des 2 équations précédentes et vaut :

$$V_i = \Omega_i y_i = \frac{FL}{n\sigma} \frac{H}{L} \left( 1 - 4 \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

On peut alors en déduire l'indicateur de volume correspondant :

$$W_i = \frac{\sigma V_i}{FL} = \frac{1}{n} \left( \frac{H}{L} \right) \left( 1 - 4 \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

L'indicateur de volume de l'ensemble des suspentes vaut alors :

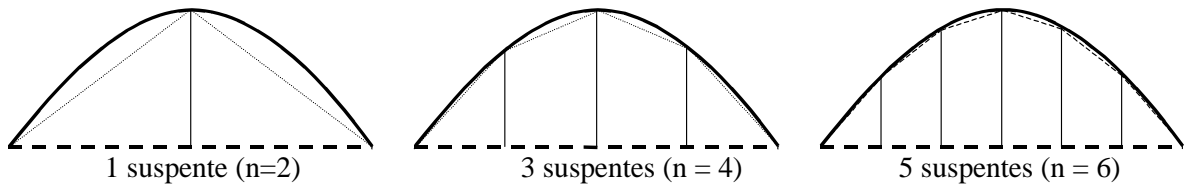
$$W_s = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{1}{n} \left( \frac{H}{L} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{H}{L} \right) \sum_{i=1}^{n/2-1} \left( 1 - 4 \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

Le terme de gauche correspond à la suspente centrale.

Comme  $\sum_{i=1}^{i=n/2-1} i^2 = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)$  , on obtient :  $W_s = \frac{2}{3n^2} (n^2 - 1) \left( \frac{H}{L} \right)$

Lorsque le nombre de suspentes croît, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} W_s = \frac{2}{3} \left( \frac{H}{L} \right)}$$



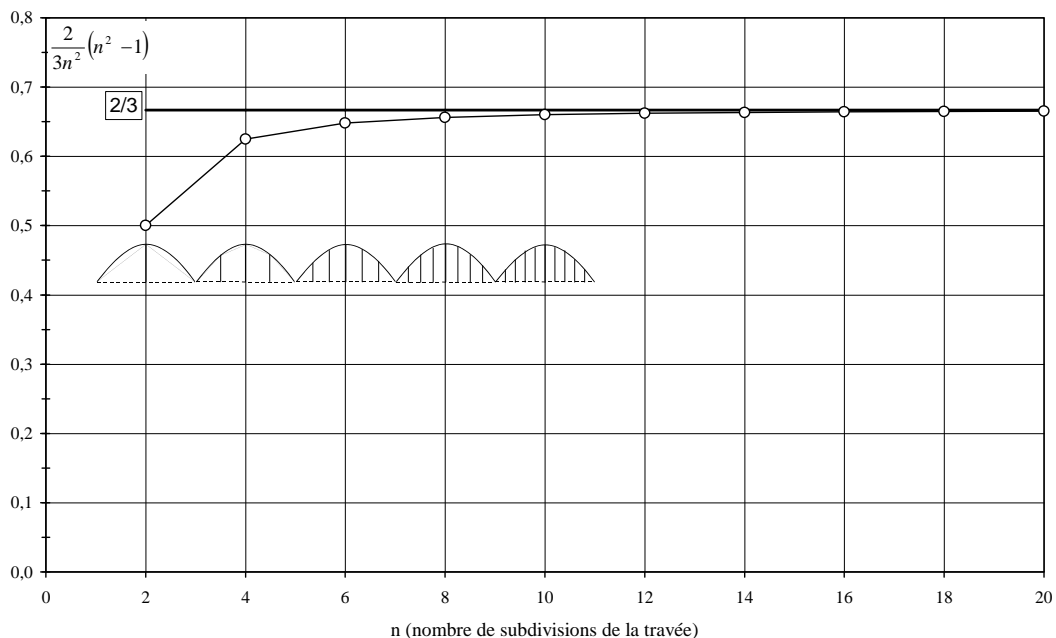
**Figure 26 :** évolution du funiculaire des charges (en traits fins) en fonction du nombre de suspentes

Pour que l'arc parabolique soit funiculaire, le nombre de suspentes doit évidemment être suffisant. Comme le montre la figure 26, la géométrie parabolique est déjà presque funiculaire lorsque le nombre de suspentes dépasse 5. Dans ce cas, l'indicateur de volume  $W_s$  de l'ensemble des suspentes est déjà presque égal à  $2/3(H/L)$  comme le montre la convergence rapide du terme  $\frac{2}{3n^2}(n^2 - 1)$  illustrée à la figure 27. La valeur de cette limite pour chacun des arcs optimaux très élancés est reprise au tableau 1.

En pratique,  $L/H$  est toujours compris entre 2,309 et 5 pour les arcs optimaux, ce qui limite les valeurs de l'indicateur de volume total des suspentes entre les bornes suivantes :

$$0,13 (L/H = 5) < W_{s,\infty} < 0,29 (L/H = 2,309)$$

Cette valeur corrective permet de corriger les courbes d'efficacité des figures 16 à 18, en gardant à l'esprit que les suspentes peuvent être constituées d'un matériau différent, correspondant à une contrainte  $\sigma$  différente de celle du matériau constitutif de l'arc.



**Figure 27 :** indicateur de volume de l'ensemble des suspentes en fonction du nombre de subdivisions "n" de la travée (pour n pair et suspente centrale).

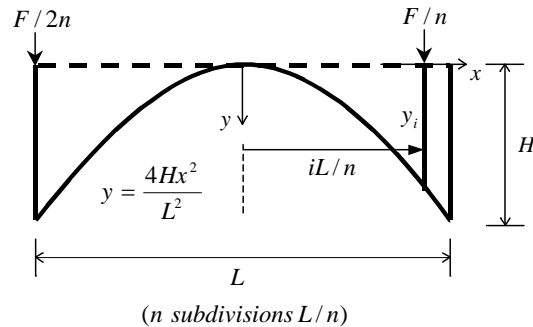
Section constante				Section variable $W = W_0/\cos\theta$			
0 artic. (L/H = 4,3)	1 artic. (L/H = 3,3)	2 artic. (L/H = 5)	3 artic. (L/H = 4,2)	0 artic. (L/H = 4)	1 artic. (L/H = 3,4)	2 artic. (L/H = 4,8)	3 artic. (L/H = 3,8)
0,155	0,202	0,133	0,159	0,167	0,196	0,139	0,175

**Tableau 1** : indicateur de volume de l'ensemble des suspentes pour les arcs optimaux

En conclusion, la présence de suspentes a peu d'influence sur le volume total de l'arc, sauf si celui-ci correspond à une faible valeur de l'indicateur de flambement. Remarquons que la présence de suspentes peut modifier l'élanement optimal de l'arc, mais la différence de volume qui y correspond est insignifiante.

## 5.2. Colonnettes

Soit un arc comportant au moins une colonnette au niveau de chaque appui :



Si "n" est le nombre de colonnettes ou de subdivisions de la travée, chaque colonnette d'indice "i" est soumise à une charge  $F/n$  (et  $F/2n$  aux appuis). De manière générale, la charge par colonnette est égale à  $F/(\beta n)$  ( $\beta = 1$  ou  $2$  aux appuis) et sa longueur vaut :

$$y_i = \frac{4H}{n^2} i^2 \quad [7]$$

La section d'un élément en compression dimensionné selon la courbe de flambement "en cloche" a été établie au chapitre 1 :

$$\Omega_i = \frac{(F/\beta n)}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu\sigma y_i)^2}{\pi^2 q E (F/\beta n)}} \right) \quad [8]$$

En considérant que les colonnettes sont encastées à leurs extrémités ( $\mu=0,5$ ) et en combinant [7] et [8], on obtient :

$$\Omega_i = \frac{F}{2\sigma\beta n} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{16\beta i^4}{\pi^2 n^3} \right) \left( \frac{H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)$$

Le volume de la colonnette d'indice "i" vaut alors :

$$V_i = \Omega_i y_i = \frac{FL}{2\sigma\beta n} \left( 4 \left( \frac{i}{n} \right)^2 \frac{H}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{16\beta i^4}{\pi^2 n^3} \right) \left( \frac{H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)$$

On peut alors en déduire l'indicateur de volume de la colonnette d'indice "i" :

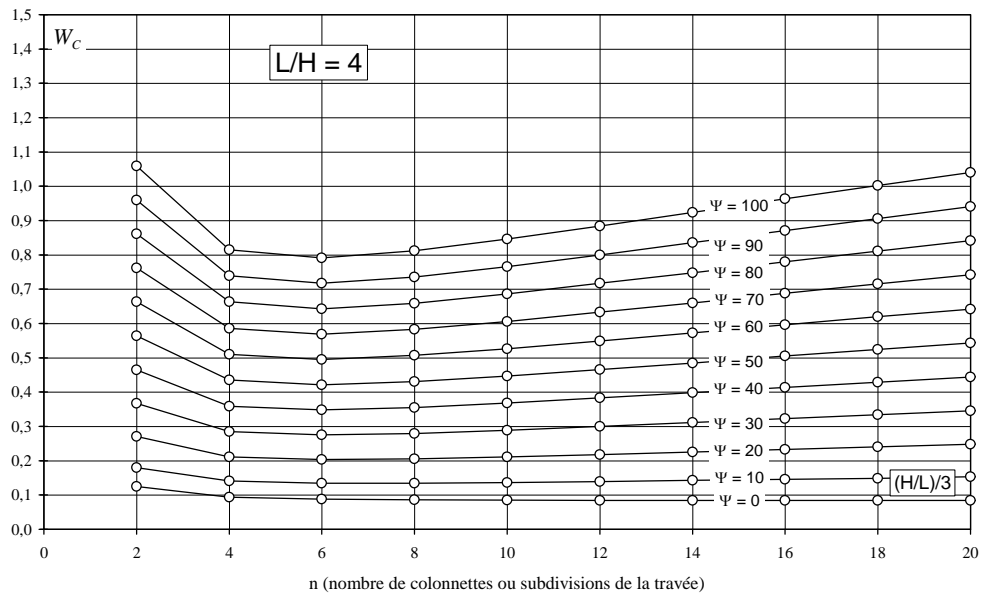
$$W_i = \frac{\sigma V_i}{FL} = \frac{2}{\beta n^3} \left( \frac{H}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{16\beta i^4}{\pi^2 n^3} \right) \left( \frac{H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right) i^2$$

L'indicateur de volume de l'ensemble des colonnettes vaut donc :

$$W_c = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{4}{n^3} \left( \frac{H}{L} \right) \sum_{i=1}^{i=n/2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{16\beta i^4}{\pi^2 n^3} \right) \left( \frac{H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right) \frac{i^2}{\beta} = \text{fonction}(L/H, \Psi) \quad [9]$$

Avec  $\beta = 2$  si  $i = n/2$  et  $\beta = 1$  sinon .

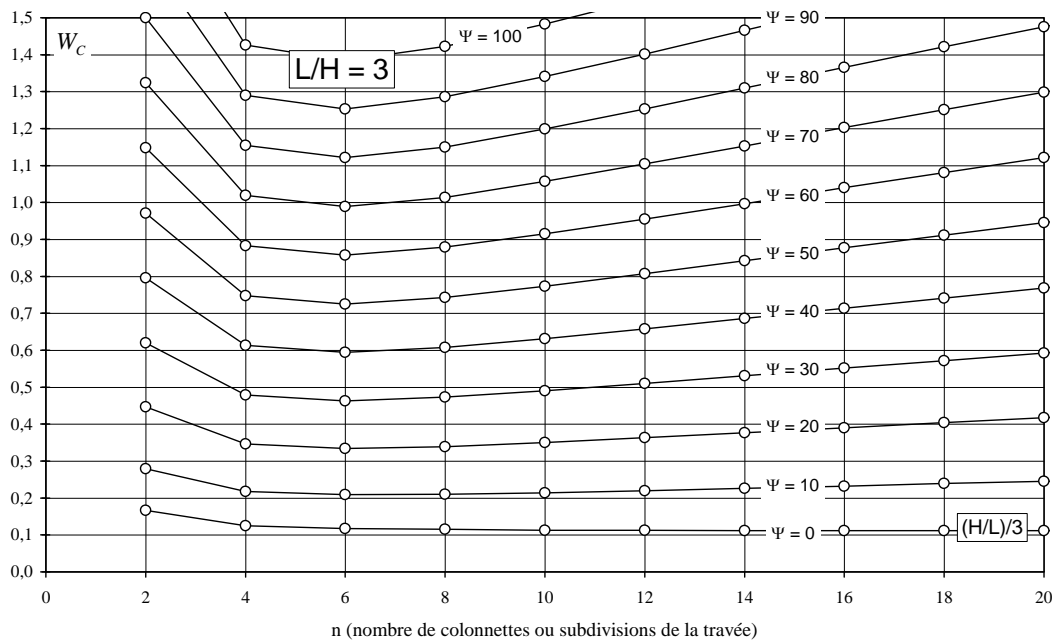
Pour  $\psi = 0$  et lorsque le nombre de colonnettes croît, il est aisé de montrer que :  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Psi = 0}} W_c = \frac{1}{3} \left( \frac{H}{L} \right)$ .



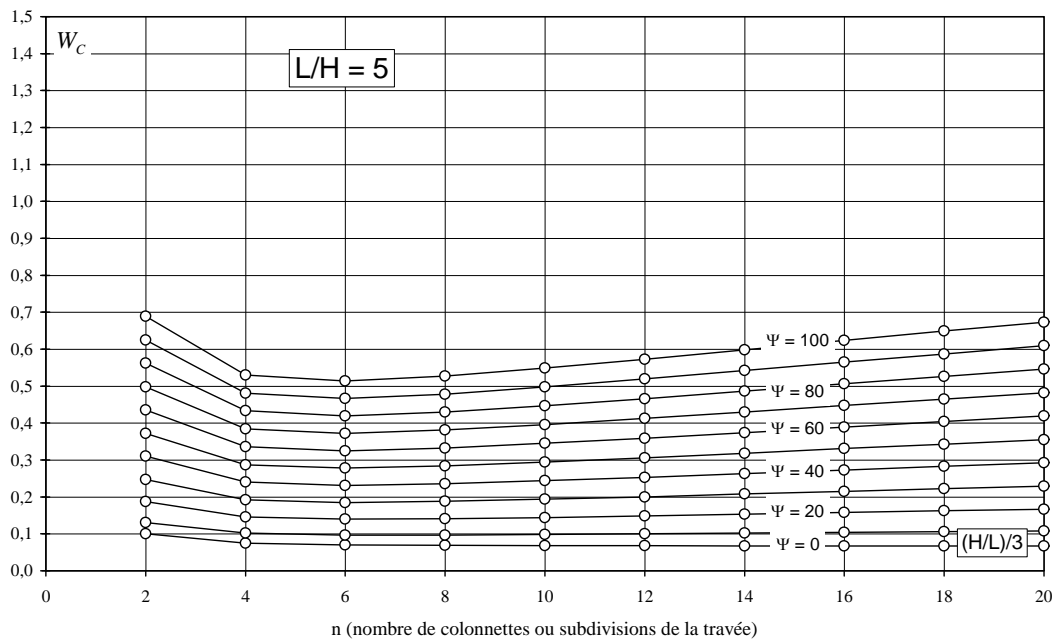
**Figure 28 :** Valeurs de  $W_c$  en fonction du nombre de subdivisions de la travée, pour  $\psi = 0 \dots 100$  et pour  $L/H=4$ .

La figure 28 correspond à un élancement moyen  $L/H = 4$ . Elle est obtenue numériquement à partir de l'équation [9] et montre que l'indicateur de volume de l'ensemble des colonnettes croît avec les valeurs de leur indicateur de flambement. Cette figure, ainsi que les figures 29 et 30 relatives à  $L/H = 3$  et  $L/H = 5$ , montrent que :

Excepté pour les très petites valeurs de l'indicateur de flambement  $\psi$ , **le volume minimum de l'ensemble des colonnettes est toujours obtenu pour un nombre de colonnettes égal à 6.**



**Figure 29 :** Valeurs de  $W_c$  en fonction du nombre de subdivisions de la travée, pour  $\psi = 0 \dots 100$  et pour  $L/H = 3$ .



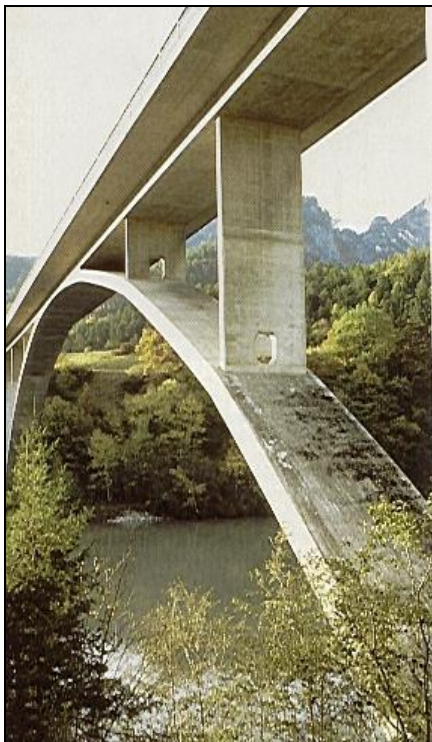
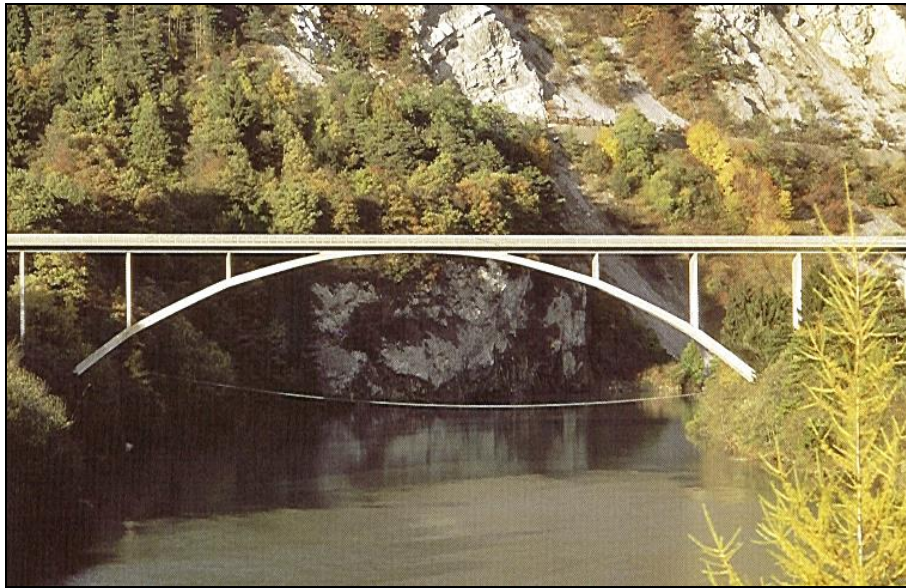
**Figure 30 :** Valeurs de  $W_c$  en fonction du nombre de subdivisions de la travée, pour  $\psi = 0 \dots 100$  et pour  $L/H = 5$ .

Pratiquement, le nombre de colonnettes est limité et une valeur de 10 semble être une valeur moyenne raisonnable. La figure 31 donne les valeurs de l'indicateur de volume de l'ensemble des colonnettes pour  $L/H=3, 4$  et  $5$  et pour 10 colonnettes. Elle montre que  $W_c$  décroît fortement pour les valeurs croissantes de  $L/H$ .

Par ailleurs, la figure 32, obtenue numériquement à partir des valeurs de l'indicateur de volume et des élancements  $L/H$  des arcs optimaux pour chaque valeur de  $\psi$  (figure 18), exprime le rapport entre le volume total des colonnettes et le volume total de l'arc, en supposant qu'ils sont constitués du même

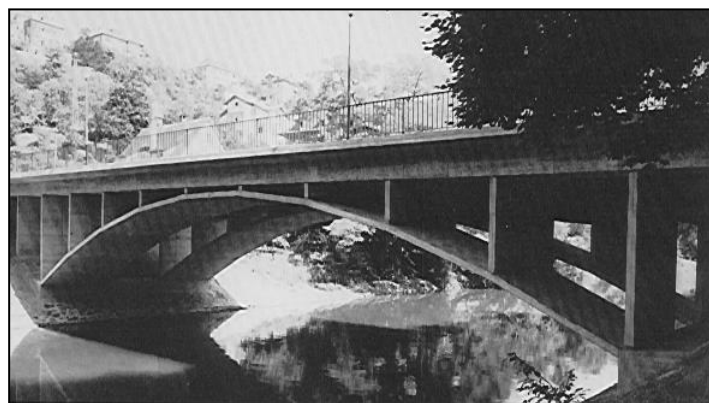
matériau et de sections ayant un même facteur de forme (voir photo 8), ce qui peut constituer une hypothèse plus contestable dans certains cas. Cette figure suggère les commentaires suivant :

- le volume des colonnettes est toujours limité à 15% du volume total de l'arc de section constante et 25% du volume total de l'arc de section variable.
- Pour les valeurs de l'indicateur de flambement  $\psi$  supérieures à 20, ces pourcentages se stabilisent vers des valeurs de l'ordre de 5% à 10%, quelque soit le type d'arc.



← ↑ *Photos 6 et 7* : Pont de la Viamala en Suisse (portée 86 m) : l'arc est constitué de segments rectilignes en béton, sur lesquels sont transmises les charges par l'intermédiaire de 6 colonnettes.

*Photo 8* : Pont sur le Neckar en Allemagne : l'arc et les colonnettes ont un même facteur de forme. ↓



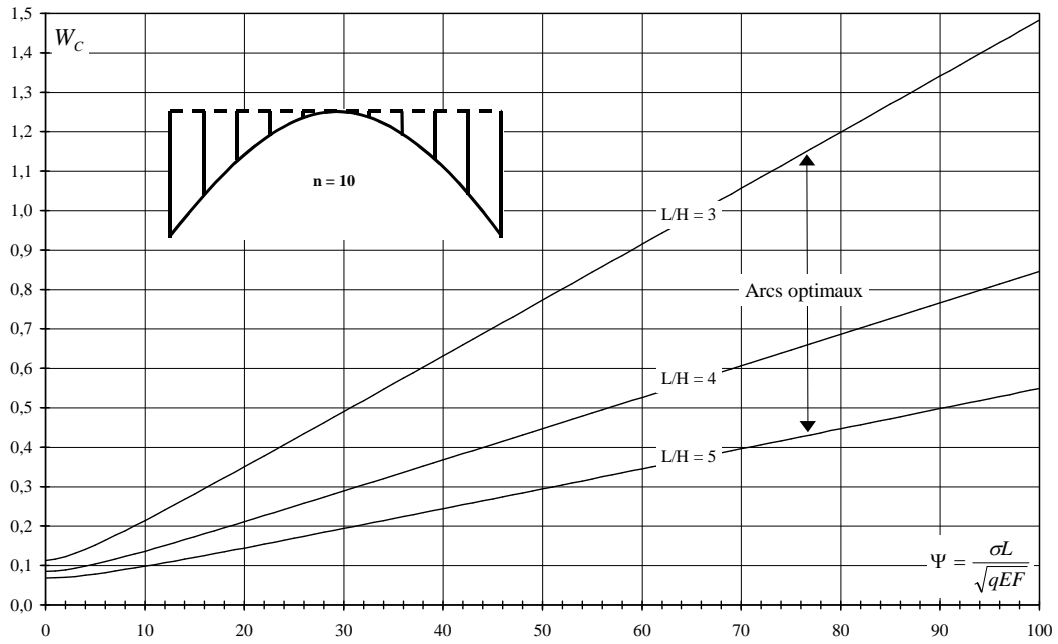


Figure 31 : valeurs de  $W_c$  en fonction de  $\psi$ , pour  $L/H = 3, 4$  et  $5$  (10 colonnettes).

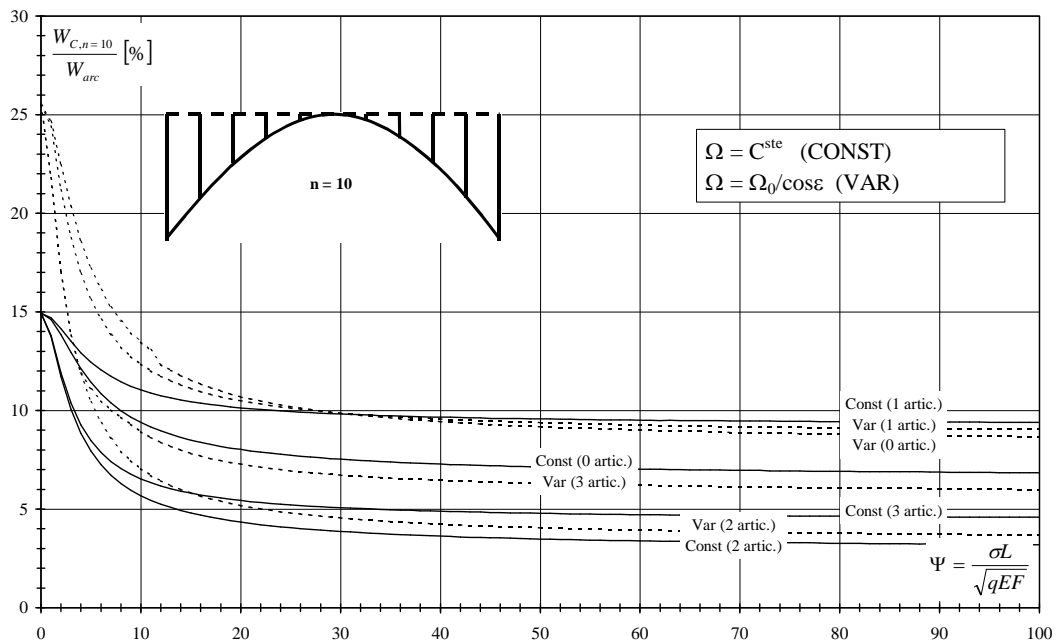


Figure 32 : surplus d'indicateur de volume dû à la présence de 10 colonnettes, pour chacun des arcs optimaux pris avec les élancements  $L/H$  qui leurs sont relatifs, pour chaque valeur de  $\psi$  (voir figure 18)

## 6. INDICATEUR DE DEPLACEMENT DES ARCS

Le déplacement vertical à la clef d'un arc hyperstatique soumis en chaque section  $\Omega$  à un effort normal  $N$  et un moment fléchissant  $M$  est égal à :

$$\delta = \int \frac{Nn_1}{E\Omega} ds + \int \frac{Mm_1}{E\Omega} ds$$

Dans cette expression,  $n_1$  et  $m_1$  sont, respectivement, les efforts de compression et moments fléchissants qui naissent dans la structure rendue isostatique de façon quelconque (Théorème de *Pasternak*) et soumise à un effort ponctuel unitaire dirigé selon le déplacement à déterminer. Cette structure isostatique peut être l'arc à 3 rotules, comme l'illustre la figure 33.

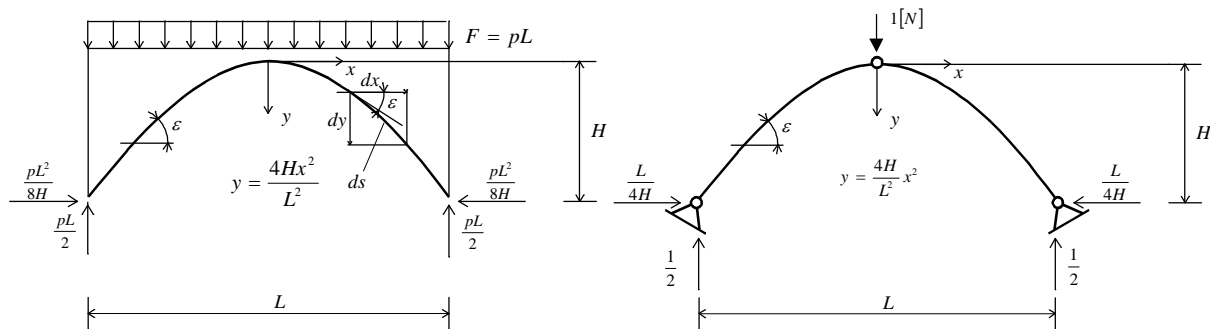


Figure 33

Si les charges sont funiculaires, ce qui est le cas lorsque l'arc est parabolique et qu'il est soumis à une charge uniformément distribuée, les moments fléchissants ne sont non-négligeables que lorsque l'arc est très surbaissé. Si ces moments fléchissants sont négligés, le déplacement vertical à la clef vaut :

$$\delta = \int \frac{Nn_1}{E\Omega} ds \tag{10}$$

Et comme 
$$\begin{cases} N = \frac{FL}{8H \cos \varepsilon} \\ n_1 = \frac{L}{4H} \cos \varepsilon + \frac{1}{2} \sin \varepsilon \end{cases}, \text{ on obtient : } \delta = \frac{FL}{16EH} \int \frac{1}{\Omega} \left( \frac{L}{2H} + \text{tg} \varepsilon \right) ds$$

Cette dernière relation permet d'établir l'expression générale de l'indicateur de déplacement d'un arc parabolique :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \left( \frac{F}{16\sigma L} \right) \frac{L}{H} \int \frac{1}{\Omega} \left( \frac{L}{2H} + \text{tg} \varepsilon \right) ds \tag{11}$$

Cette expression a priori anodine ne dépend que de l'élanement géométrique  $L/H$  de l'arc et de son indicateur de flambement  $\Psi$ . Cette propriété remarquable est démontrée ci-dessous en §6.2.

L'indicateur de déplacement des arcs de section variable ou constante, non soumis au flambement, a été étudié par Philippe Samyn (voir bibliographie). Le §6.1 reprend un résumé de ses principaux résultats.



### 6.1. Flambement négligé

#### *Arc de section constante :*

C'est la section d'appui qui conditionne toutes les autres, d'autant plus surdimensionnées qu'elles sont proches de la clef.

$$\Omega = \frac{N_{appuis}}{\sigma} = \frac{FL}{8H\sigma(\cos \varepsilon)_{appui}} \text{ , ce qui permet de transformer [11] :}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(\cos \varepsilon)_{appui} \int \left( \frac{L}{2H} + tg \varepsilon \right) \frac{ds}{L}$$

Comme  $\cos \varepsilon$ ,  $tg \varepsilon$  et  $ds/L$  ne dépendent que du rapport  $L/H$ , l'indicateur de déplacement ne dépend lui aussi que du rapport  $L/H$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{E\delta}{\sigma L} = \int n_1 \frac{ds}{L} \\ &= \frac{1}{2\beta_1} \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \beta_1 = \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \\ \beta_2 = \sqrt{1 + \left( \frac{L}{4H} \right)^2} \end{cases}$$

Cette expression possède un minimum de  $\Delta = 0,703$  pour  $L/H = 1,770$ .

#### *Arc de section variable :*

$$\Omega = \frac{N}{\sigma} \text{ , ce qui permet de transformer [10] : } \delta = \frac{\sigma L}{E} \int n_1 \frac{ds}{L}$$

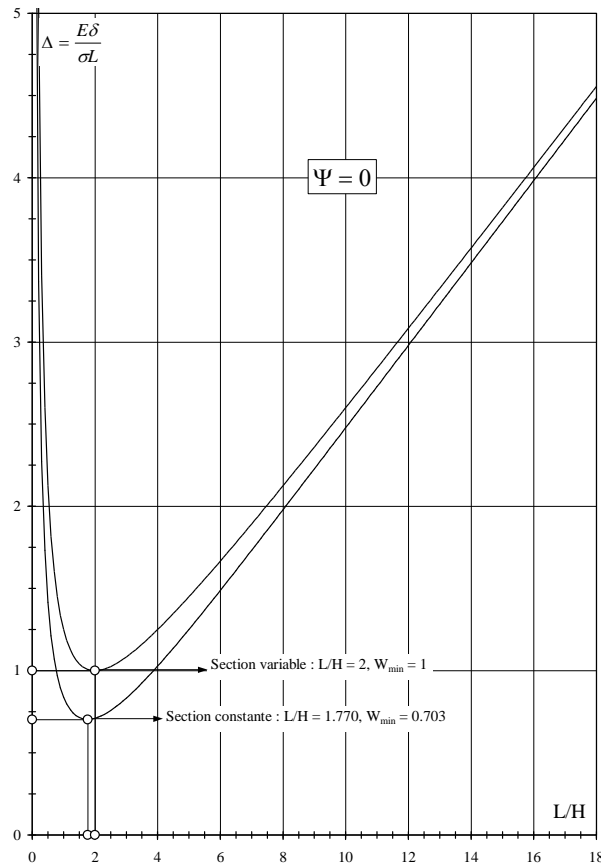
Comme  $n_1$  et  $ds/L$  ne dépendent que du rapport  $L/H$ , l'indicateur de déplacement ne dépend lui aussi que du rapport  $L/H$  :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \int n_1 \frac{ds}{L} = \frac{L}{4H} + \frac{H}{L}$$

Cette expression possède un minimum de  $\Delta = 1$  pour  $L/H = 2$ .

La figure 34 donne les valeurs de l'indicateur de déplacement des deux types d'arcs en fonction du rapport  $L/H$ .

**Figure 34 :** indicateur de déplacement des arcs de section constante et variable lorsque le flambement n'est pas pris en compte, ( $\Psi = 0$ ).



## 6.2. Prise en compte du flambement selon la loi de flambement non corrigée

### 6.2.1. Arc de section constante

La section  $\Omega$  de l'arc s'obtient à partir de la relation [1] et de l'expression du facteur de forme "q" :

$$\begin{cases} F = \gamma \frac{EI}{L^2} \\ I = q\Omega^2 \end{cases} \Rightarrow \Omega = L \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}}$$

Cette dernière expression, combinée à [11], mène à :

$$\Delta = \frac{1}{\Psi} \left[ \left( \frac{\sqrt{\gamma} L}{16 H} \right) \int \left( \frac{L}{2H} + tg \varepsilon \right) \frac{ds}{L} \right] \quad \text{avec} \quad \Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} .$$

Le terme entre parenthèses ne dépend que du rapport L/H. En effet :

- $\int \frac{ds}{L} = \frac{l_{arc}}{L}$  , où  $l_{arc}$  est la longueur de la fibre moyenne de l'arc, représentée à la figure 9 :

$$l_{arc} = \frac{L}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right)$$

$$\bullet \int \operatorname{tg} \varepsilon \frac{ds}{L} = \frac{1}{L} \int \frac{dy}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{L} \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy$$

$$\text{Or, } y = \frac{4H}{L^2} x^2 \Rightarrow \begin{cases} dy = \frac{8H}{L^2} x dx \\ \frac{dy}{dx} = \frac{8H}{L^2} x \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } \int \operatorname{tg} \varepsilon \frac{ds}{L} = \frac{16H}{L} \int_{x=0}^{x=L/2} \frac{x}{L} \sqrt{1 + \left(8 \frac{H}{L} \frac{x}{L}\right)^2} \frac{dx}{L}$$

Finalement, la solution analytique de l'intégrale est égale à :

$$\int \left( \frac{L}{2H} + \operatorname{tg} \varepsilon \right) \frac{ds}{L} = \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right] \quad [12]$$

$$\text{Avec } \beta_1 = \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \sqrt{1 + \left( \frac{L}{4H} \right)^2} .$$

De façon générale, l'indicateur de déplacement peut donc s'exprimer par la relation suivante, dans laquelle le terme  $\Delta^{(c)}$  ne dépend que du rapport L/H :

$$\Delta = \frac{1}{\Psi} \Delta^{(c)}$$

$$\text{Avec } \Delta^{(c)} = \frac{\sqrt{\gamma} L}{16 H} \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right]$$

Cette expression est **similaire à celle obtenue pour les treillis**, à la nuance près qu'elle ne contient cette fois pas le terme  $\Delta^{(T)}$  relatif aux éléments en traction.

### 6.2.2. Arc de section variable

Cette fois, le facteur de forme q est relatif à la section de clef qui vaut, par [1] :

$$\Omega_0 = L \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}}$$

La section  $\Omega$  en un point quelconque de la fibre moyenne vaut alors :

$$\Omega = \Omega_0 / \cos \varepsilon = \frac{L}{\cos \varepsilon} \sqrt{\frac{F}{\gamma q E}}$$

L'équation [11] devient alors (les intégrales portent sur toute la longueur de la fibre moyenne) :

$$\Delta = \left( \frac{\sqrt{\gamma} L}{16 H} \right) \frac{\sqrt{qEF}}{\sigma L} \frac{1}{L} \left( \frac{L}{2H} \int \cos \varepsilon ds + \int \sin \varepsilon ds \right)$$

Comme  $\begin{cases} \int \cos \varepsilon ds = \int \frac{dx}{ds} ds = \int dy = L \\ \int \sin \varepsilon ds = \int \frac{dy}{ds} ds = \int dx = 2H \end{cases}$ , on obtient :

$$\Delta = \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{8} \right) \frac{\sqrt{qEF}}{\sigma L} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L}{H} \right)^2 + 1 \right)$$

Et on retrouve la relation générale déjà obtenue pour l'arc de section constante :

$$\Delta = \frac{1}{\Psi} \Delta^{(c)}$$

Avec  $\Delta^{(c)} \triangleq \left[ \sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L}{H} \right)^2 + 1 \right) \right]$

### 6.3. Prise en compte du flambement selon la loi de flambement corrigée

L'indicateur de déplacement est cette fois calculé en fonction de l'équation [3] établie au §2.3.1. :

$$F_{crit} = \frac{\gamma}{\gamma_{cor}} \frac{\sigma \Omega_s}{1 + \frac{\sigma \Omega_s L^2}{\gamma_{cor} EI}} \quad [3]$$

#### 6.3.1. Arc de section constante

L'expression de la section de l'arc a été établie au §2.3.1. :

$$\Omega = \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right)$$

Combinée à la relation [11], elle permet de réécrire :

$$\Delta = \left( \frac{\gamma}{8\gamma_{cor}} \frac{L}{H} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right)^{-1} \frac{1}{L} \int \left( \frac{L}{2H} + tg \varepsilon \right) ds$$

La solution de l'intégrale est donnée par l'équation [12]. Finalement, on retrouve une expression de l'indicateur de déplacement globalement inversement proportionnelle à  $\Psi$  et qui ne dépend, de nouveau, que des deux nombres  $L/H$  et  $\Psi$  :

$$\Delta = \frac{1}{\beta_1} \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right] \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right)^{-1}$$

$$\Delta = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

Pour  $\Psi \rightarrow 0$  et  $\Psi \rightarrow \infty$ , cette expression permet de retrouver les relations obtenues lorsque, respectivement, le flambement n'est pas pris en compte (§5.1.) ou pris en compte selon la loi hyperbolique d'Euler non corrigée (§5.2.).

### 6.3.2. Arc de section variable

L'expression de la section de l'arc a la clef a été établie au §2.3.2. :

$$\Omega_0 = \frac{L}{8H} \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \Omega_0 / \cos \varepsilon$$

Combinée à la relation [11], elle permet de réécrire :

$$\Delta = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right)^{-1} \left( \frac{L}{2H} + \frac{2H}{L} \right) \quad [13]$$

$$\Delta = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

Et on obtient à nouveau une expression de l'indicateur de volume qui ne dépend que des paramètres L/H et  $\Psi$ .

Pour  $\Psi \rightarrow 0$  et  $\Psi \rightarrow \infty$ , l'expression [13] permet de retrouver les relations obtenues lorsque, respectivement, le flambement n'est pas pris en compte (§5.1.) ou pris en compte selon la loi hyperbolique non corrigée (§5.2.).

La figure 35 donne les valeurs de l'indicateur de déplacement correspondant aux arcs de volume minimum, caractérisés par les courbes d'efficacité des figures 16 à 18. Elle montre que les arcs sont toujours, comme attendu, très peu déformables. En effet :

- L'indicateur de déplacement des arcs optimaux vaut 1 au maximum, ce qui limite les flèches relatives à 1/700 dans le pire des cas, c'est-à-dire pour  $\Psi = 0$  et pour l'acier à haute limite élastique.

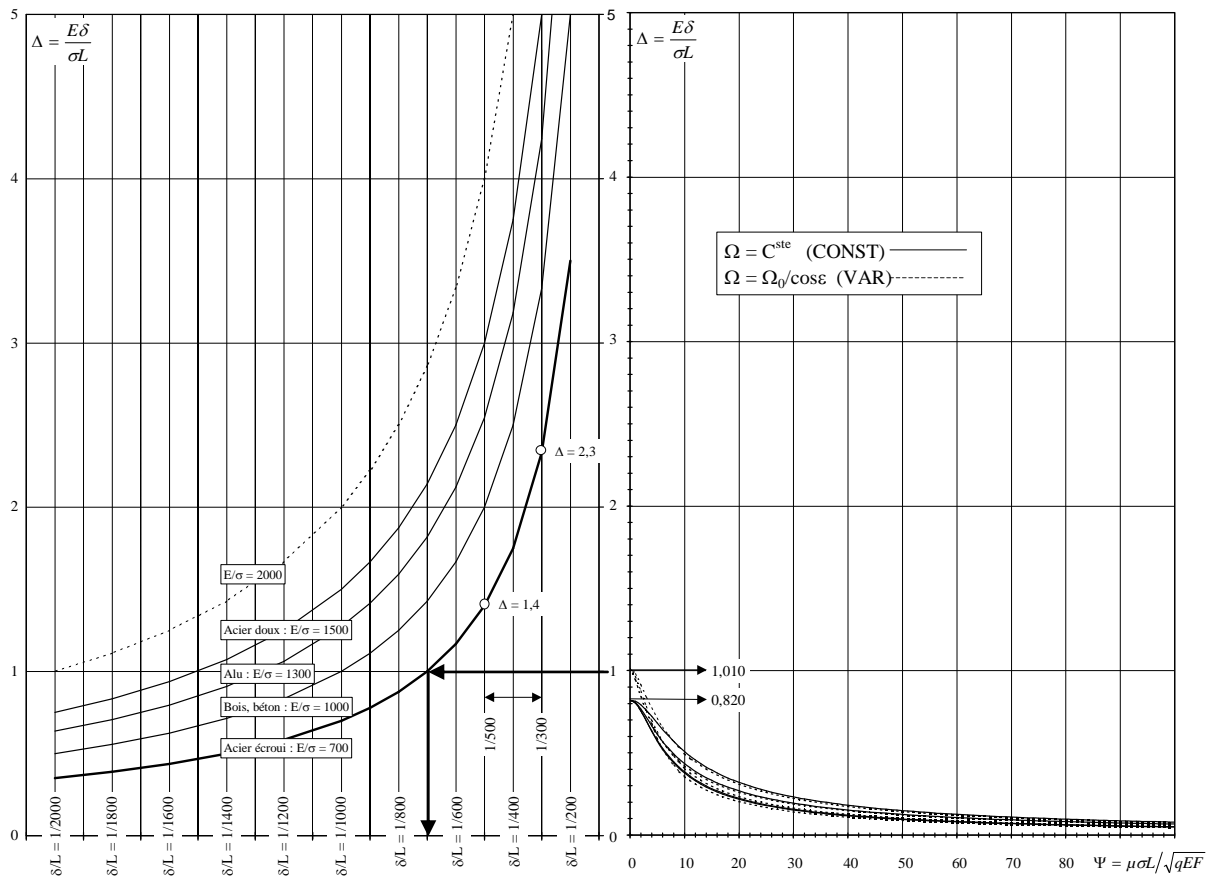


Figure 35 : indicateur de déplacement des arcs de volume minimum (à droite) et valeur des flèches relatives (à gauche).

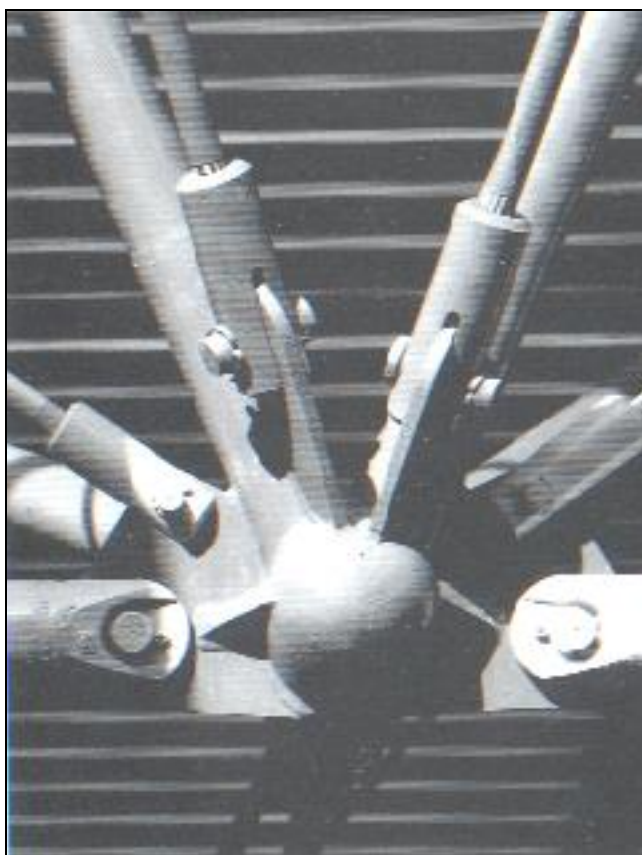
## 7. CONCLUSION

Cette étude montre que les expressions des indicateurs de volume et de déplacement d'un arc sont similaires à celles des treillis et ne dépendent que des deux paramètres  $L/H$  et  $\Psi$ . Globalement, le volume d'un arc (ou d'un treillis) est proportionnel à l'indicateur de flambement et ses déplacements lui sont inversement proportionnels. Les courbes d'efficacité montrent que le surplus de matière nécessaire à la reprise du flambement est considérable et pénalise fortement les arcs par rapport aux treillis lorsque les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  augmentent. Cette pénalité peut être réduite fortement par divers procédés qui ont aussi leur prix : colonnettes ou suspentes rigides associées à un tablier suffisamment rigide ou multi-contrebutage (photo 2), ces solutions apportant elles aussi une certaine pénalité dont il faut tenir compte, sans parler de l'aspect esthétique. Il faut aussi tenir compte de l'éventuelle nécessité d'un système de retenue des poussées lorsque les fondations des appuis sont insuffisantes, comme c'est le cas des bow-string (photo 3). Par ailleurs, cette étude montre que l'arc n'est justifiable pour les passerelles ou les ponts que pour les très grandes portées, car si ce n'est pas le cas, les charges variables sont très importantes par rapport au poids propre de l'arc et de son tablier, ce qui a pour conséquence que l'arc n'est plus funiculaire. Il est alors soumis à des moments de flexion importants, ce qui le déclassé par rapport à la poutre, par exemple en caisson.

Par ailleurs, les autres résultats principaux de cette étude peuvent être synthétisés en 5 points :

1. Les élancements optimaux des différents types d'arcs optimaux sont toujours compris entre 2,3 et 5, quelles que soient les valeurs de l'indicateur de flambement ou le nombre d'articulations.

2. La section variable apporte un gain en volume maximal de 26% pour  $\Psi = 0$  et décroît très vite et fortement pour les valeurs croissantes de  $\Psi$ , pour tendre vers des valeurs limites de 2,3% à 4,6% selon le nombre d'articulations.
3. Dès que l'indicateur de flambement  $\Psi$  devient non-nul, la présence d'articulations pénalise fortement le volume d'un arc. Cette surplus de volume peut atteindre 50% à 60% de celui de l'arc sans articulations.
4. Le nombre optimal de colonnettes est égal à 6. Cette constatation est à moduler en fonction de la longueur que le nombre de colonnettes impose aux éléments du tablier chargés d'y reporter les charges.
5. Les déplacements à la clef des arcs optimaux sont extrêmement faibles, et en tous les cas inférieurs au 700<sup>ième</sup> de la portée, sauf pour les aciers à très haute limite élastique.



# *Chapitre 5*

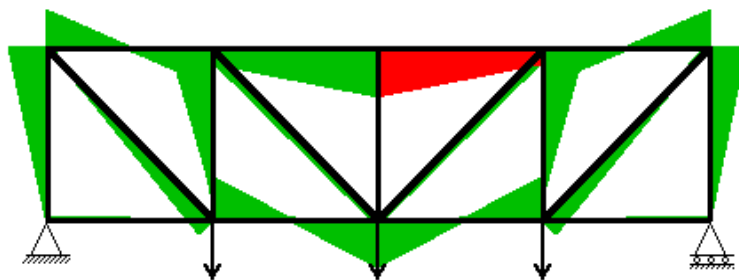
*Contraintes  
parasitaires dans les  
treillis et dans les arcs*



*Source de la photo de première page : The Art of the Structural Engineer, Bill Addis, Artemis, Londres, 1994.*

# Partie I

## Contraintes parasitaires dans les treillis





## I.1. INTRODUCTION

La méthode de calcul des treillis la plus connue et probablement la plus ancienne est la méthode de Crémone, qui considère que les barres sont reliées entre elles par des nœuds parfaitement articulés, excluant ainsi tout autre effort que l'effort normal. Si les barres sont rigidifiées à leurs extrémités, par exemple par soudage dans le cas de structures métalliques, elles ne peuvent plus tourner librement autour de ces extrémités. Il se crée alors des contraintes de flexion, dont l'ordre de grandeur est souvent méconnu des ingénieurs. Bien qu'il existe actuellement des systèmes de nœuds physiquement articulés, leur pertinence doit être définie car ils peuvent engendrer des coûts de fabrication, de mise en place et d'entretien supplémentaires.

Même si les programmes de calcul actuels permettent de déterminer la valeur exacte de ces contraintes parasites pour une structure de caractéristiques connues, il semble intéressant de mettre en évidence les différents paramètres qui influencent leur valeur et qui déterminent leurs règles générales de comportement. C'est l'objectif de la présente étude.

La figure ci-dessous correspond à un treillis Howe d'une portée de 20 mètres, soumis à une charge totale distribuée sur la membrure inférieure de 50 kN. Il est composé de barres en acier ( $\sigma=300$  Mpa,  $E=210000$  Mpa) de section carrée creuse (épaisseur/côté=0,15) soudées aux extrémités ( $\mu=0,9$ ). Chaque barre en traction travaille à une même contrainte  $\sigma$  et les barres en compression sont dimensionnées selon la courbe "en cloche" d'Euler (voir chapitre 1, figure 8).

Les contraintes maximales se produisent aux extrémités des barres centrales comprimées de la membrure supérieure et valent 20,34 Mpa, ce qui correspond à 6,8 % de la contrainte  $\sigma$  et à 29% de la contrainte critique relative à ces barres comprimées.

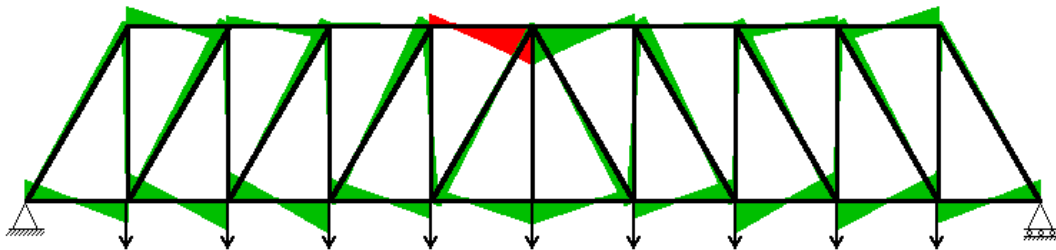
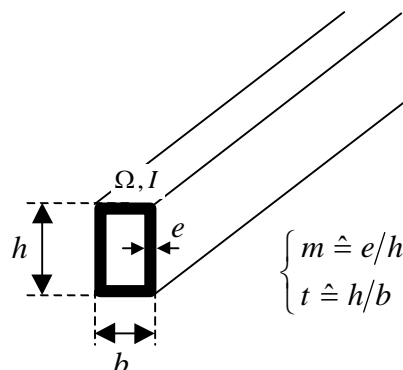


Figure I.1. : contraintes parasites dans un treillis Howe.

Figure I.2

$$s \hat{=} \frac{\Omega}{h^2}$$



Le facteur de forme "q" présent dans l'expression de l'indicateur de flambement  $\Psi = \mu\sigma L / \sqrt{qEF}$  est un nombre sans dimensions égal au rapport entre l'inertie d'une section et le carré de son aire efficace. Ses valeurs pour différentes sections classiques sont représentées à la figure 3 du chapitre 1.

Afin de décrire les contraintes parasites, il est indispensable de définir un nouveau facteur de forme, noté "s" et égal au rapport entre l'aire efficace d'une section et le carré de sa hauteur dans le plan de flexion comme illustré à la figure 1.2.

Les valeurs du facteur "s" sont reprises à la figure I.3, pour les sections creuses et pleines.

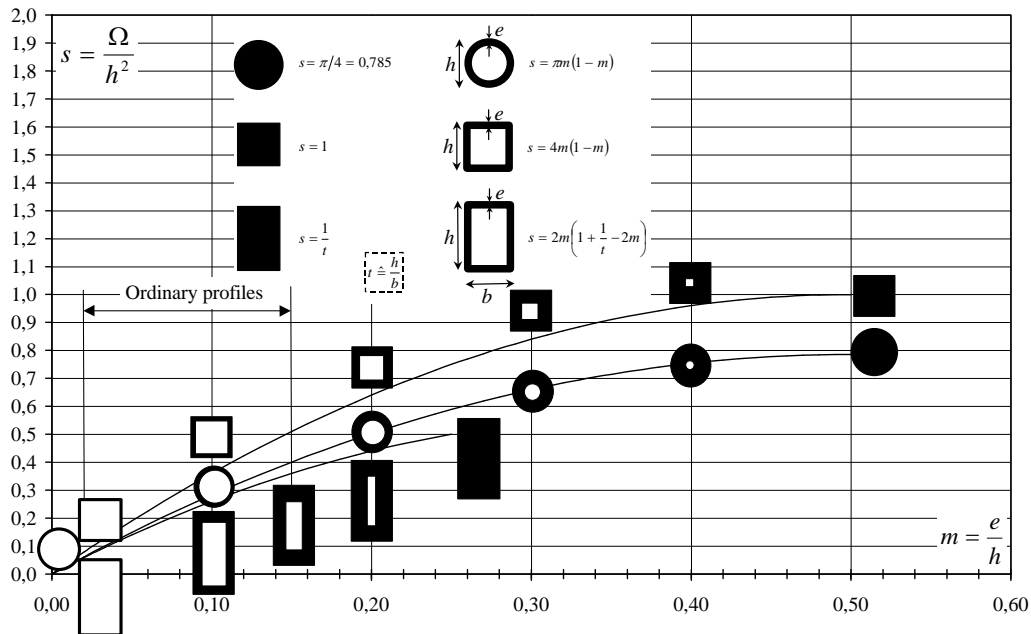


Figure I.3 : valeurs du facteur de forme "s" pour les sections classiques.

## I.2. L'INDICATEUR DE ROTATION

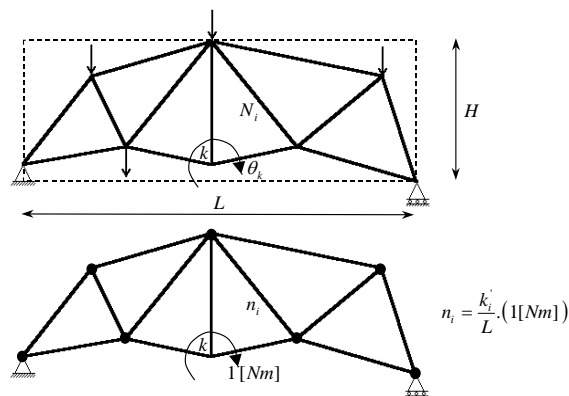


Figure I.4

Soit un treillis à nœuds rigides soumis à une charge totale extérieure  $F$  s'appliquant aux nœuds, inscrit dans un rectangle de dimensions  $L$  et  $H$ , et dont chaque barre d'indice "i", caractérisée par une section  $\Omega_i$ , une inertie  $I_i$  et une longueur  $l_i$ , est soumise à un effort normal  $N_i$ .

Soit ce même treillis dont tous les nœuds sont articulés sauf celui d'indice "k", et soumis en ce nœud d'indice "k" à un couple unitaire de 1 [Nm] créant dans chaque barre d'indice "i" un effort normal  $n_i$ .

Chaque barre du treillis initial dont les nœuds sont rigides est soumise aux efforts suivants :

- un effort normal ( $N_i + dN_i$ ) où  $N_i$  est l'effort normal qui existerait dans la barre si les nœuds étaient articulés et  $dN_i$  est l'effort normal supplémentaire provenant du fait que les nœuds sont rigides. Ces quantités doivent être considérées avec leurs signes;
- un moment fléchissant "secondaire"  $M_{sec}$  provenant du fait que les nœuds sont rigides.

Chaque barre du second treillis est soumise aux efforts suivants :

- un effort normal  $n_i$ ; Il est à noter que cet effort normal peut toujours s'exprimer par une relation du type  $n_i = (k'_i/L) \cdot (1[Nm])$ , où  $k'_i$  **ne dépend que du rapport L/H et de l'indicateur de flambement  $\Psi$** . En effet, de façon générale, une levée d'hyperstaticité mène à des expressions du type  $k'_i = f(\dots I_i / I_k, \dots, I_i / I_j, \dots, \Omega_i / I_j, \dots, \Omega_i / I_k)$ . Si on y introduit le facteur de forme  $q = I/\Omega^2$ , on obtient :

$$k'_i = f(\dots \Omega_i / \Omega_k, \dots, \Omega_i / \Omega_j, \dots, \Omega_i / \Omega_j^2, \dots, \Omega_i / \Omega_k^2) \approx f(\dots \Omega_i / \Omega_k, \dots, \Omega_i / \Omega_j)$$

Or, les équations [2] et [3] (voir ci-dessous) montrent que le rapport  $\Omega_i/\Omega_j$  est toujours une fonction de L/H et  $\Psi$  :

$$\Omega_i/\Omega_j = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

- un moment fléchissant "m" dans les barres ayant le nœud "k" comme extrémité commune.

Selon les théorèmes de *Maxwell* et de *Pasternak*, la rotation angulaire  $\theta_k$  du nœud "k" dans le treillis initial vaut (l est une coordonnée courante sur les barres) :

$$\theta = \int_s \frac{M_{sec} m}{EI_i} dl + \sum_i \frac{(N_i + dN_i) n_i l_i}{E \Omega_i}$$

Il est à noter que de terme  $dN_i$  est inférieur à  $N_i$  de plusieurs ordres de grandeur. Par ailleurs, sachant que  $I_i = q \Omega_i^2$ , on obtient :

$$\theta = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{q} \int_s \left( \frac{M_{sec}}{\Omega_i^2} \right) m dl + \sum_i \frac{N_i n_i l_i}{\Omega_i} \right]$$

De plus, comme l'intégrale ne porte que sur les barres ayant le nœud "k" comme extrémité d'une part, et que le terme  $M_{sec}/\Omega_i^2$  est un terme du second ordre d'autre part, le déplacement angulaire du nœud "k" devient :

$$\theta = \frac{1}{E} \sum_i \frac{N_i n_i l_i}{\Omega_i} \quad [1]$$

Sachant que l'effort  $N_i$  est une fraction  $k_i F$  de la charge totale extérieure  $F$ , la section efficace des barres en traction, dimensionnées à la contrainte  $\sigma$ , et des barres en compression, dimensionnées selon la loi d'Euler "en cloche" vaut, respectivement (voir chapitre 1) :

$$\Omega_i = \frac{N_i}{\sigma} \quad \text{et} \quad \Omega_i = \frac{N_i}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right), \quad \text{avec} \quad N_i = k_i F \quad [2], [3]$$

la relation [1] peut alors se réécrire comme suit :

$$\theta = \frac{\sigma}{E} \left( \sum_{(T)} (Ln_i) \frac{l_i}{L} + 2 \sum_{(C)} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)^{-1} (Ln_i) \frac{l_i}{L} \right)$$

Or, il a été montré au chapitre 1 que les facteurs  $l_i/L$  et  $k_i$  ne dépendent que du rapport  $L/H$  et de  $\Psi$ . De même, sachant que  $n_i = (k_i'/L) \cdot (1[Nm])$  et que  $k_i'$  ne dépend lui aussi que de  $L/H$  et de  $\Psi$ , on obtient :

$$\theta = \frac{\sigma}{E} \underbrace{\left( \sum_{(T)} k_i' \frac{l_i}{L} + 2 \sum_{(C)} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \Psi^2} \right)^{-1} k_i' \frac{l_i}{L} \right)}_{= \Theta}$$

Le terme entre parenthèses ne dépendant que des facteurs  $L/H$  et  $\Psi$ , on peut définir un nouvel indicateur, baptisé *indicateur de rotation*, égal à :

$$\Theta = \frac{E\theta}{\sigma} = \text{fonction} \left( \frac{L}{H}, \Psi \right)$$

**Pour**  $\Psi \rightarrow 0$  , c'est à dire lorsque les barres en compression n'ont pas tendance à flamber ou que l'on peut éviter ou négliger le flambement, on trouve l'expression de l'indicateur de rotation obtenue lorsque toutes les barres sont dimensionnées à la contrainte "admissible" :

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} \Theta = \sum_{(T) + (C)} k_i' \left( \frac{l_i}{L} \right) = \text{Fonction}(L/H)$$

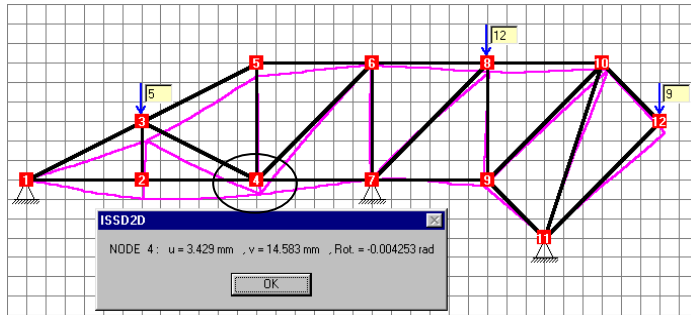
**Pour**  $\Psi \rightarrow \infty$  , c'est à dire lorsque les barres en compression ont fortement tendance à flamber, on trouve l'expression de l'indicateur de rotation obtenue lorsque celles-ci sont dimensionnées selon la loi d'Euler théorique  $\sigma_{crit.} = \pi^2 E / \lambda^2$  :

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} \Theta = \sum_{(T)} k_i' \left( \frac{l_i}{L} \right) + \frac{\pi}{\Psi} \sum_{(C)} k_i' \sqrt{k_i} \stackrel{\Psi \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi}{\Psi} \sum_{(C)} k_i' \sqrt{k_i}$$

**Exemple 1 : flambement négligé**

Les deux treillis hyperstatiques ci-dessous ont des nœuds rigides et n'ont en commun que l'élanement géométrique L/H égal à 3,667. Leurs barres ont été dimensionnées, respectivement, aux contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , et on constate que l'indicateur de rotation au nœud 4 (et aux autres nœuds aussi) est identique dans les deux cas.

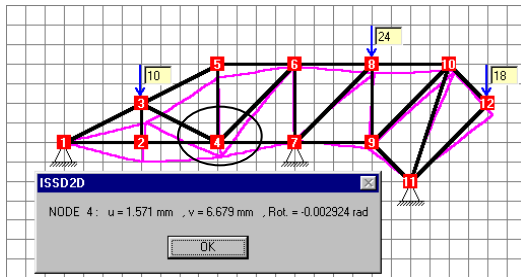
- **Treillis 1** : acier ( $E = 210000$  MPa,  $\sigma_1 = 240$  MPa), portée  $L = 16,5$  m, hauteur  $H = 4,5$  m, charge totale de 26 kN sur les noeuds 3, 8 et 12, et composé de sections circulaires pleines (●).



$$\Theta = \frac{E_{acier} \theta_4}{\sigma_{acier}}$$

$$\Rightarrow \frac{210000 \times 0,004253}{240} = 3,721$$

- **Treillis 2** : aluminium ( $E = 70000$  MPa,  $\sigma_2 = 55$  MPa), portée  $L = 11$  m, hauteur  $H = 3$  m, charge totale 52 kN sur les mêmes noeuds 3, 8 and 12, et composé de sections circulaires creuses (○  $m=e/h=0,08$ ).



$$\Theta = \frac{E_{alu} \theta_4}{\sigma_{alu}}$$

$$\Rightarrow \frac{70000 \times 0,002924}{55} = 3,721$$

On constate que l'indicateur de rotation est identique dans les 2 cas : ceci montre donc que, lorsque le flambement des barres en compression est négligé, l'indicateur de rotation ne dépend que du rapport L/H.

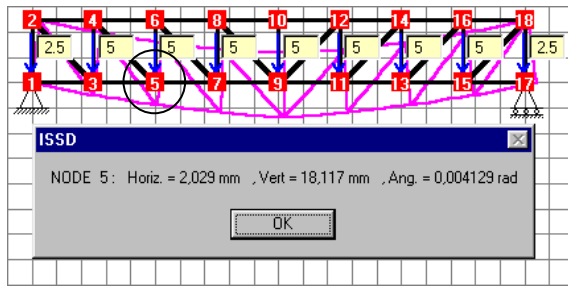
**Exemple 2 : flambement pris en compte**

Les deux treillis Pratt ci-dessous ont des nœuds rigides ( $\mu=0,9$ ) et ont en commun l'élanement géométrique L/H d'une part (égal à 8) et l'indicateur de flambement  $\Psi$  d'autre part (égal à 39,14). Les barres en traction sont dimensionnées à la contrainte "admissible" tandis que celles en compression sont dimensionnées selon la loi d'Euler (courbe "en cloche", voir chapitre 1, figure I.8).

- **Treillis 1** : acier ( $E = 210000$  MPa,  $\sigma = 240$  MPa), portée  $L = 10$  m, hauteur  $H = 1,25$  m, charge totale de 40 kN sur la membrure inférieure, et composé de sections circulaires creuses (○  $m=e/h=0,1 \Rightarrow q=I/\Omega^2=0,3625$ ).

$$\Psi = \frac{0,9 \cdot 240 \cdot 10000}{\sqrt{0,3625 \cdot 210000 \cdot 40000}} = 39,14$$





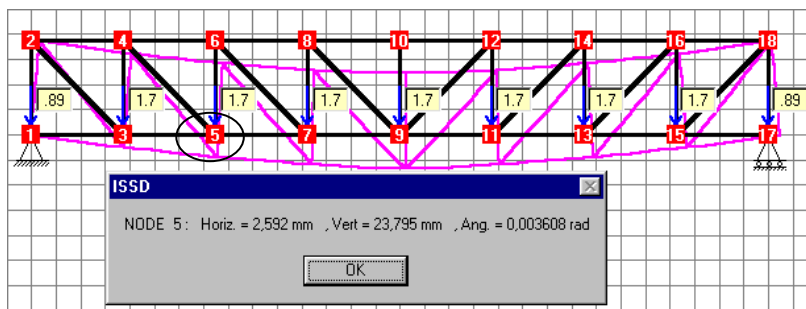
$$\Theta = \frac{E_{acier} \theta_3}{\sigma_{acier}}$$

$$\Rightarrow \frac{210000 \times 0,004129}{240}$$

$$= 3,613$$

- **Treillis 2** : bois ( $E = 10000$  MPa,  $\sigma = 10$  MPa), portée  $L = 15$  m, hauteur  $H = 1,875$  m, charge totale  $14,276$  kN sur la membrure inférieure, et composé de sections carrées pleines ( $q=1/12$ ).

$$\Psi = \frac{0,9 \cdot 10 \cdot 15000}{\sqrt{0,083 \cdot 10000 \cdot 14276}} = 39,14$$



$$\Theta = \frac{E_{bois} \theta_3}{\sigma_{bois}}$$

$$\Rightarrow \frac{10000 \times 0,003608}{10}$$

$$= 3,608$$

A nouveau, on constate que l'indicateur de rotation est identique dans les deux cas, ce qui montre qu'il ne dépend que des deux paramètres  $L/H$  et  $\Psi$ . La légère différence entre les deux valeurs provient du terme d'intégrale négligé (voir ci-dessus) qui peut avoir une influence considérable si le nombre de mailles diminue.

### I.3. L'INDICATEUR DE CONTRAINTES PARASITAIRES

#### I.3.1. Expression générale de l'indicateur

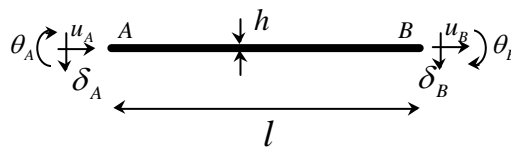


Figure I.5

Supposons une barre d'un treillis à nœuds rigides chargé en ses nœuds. Cette barre de longueur  $l$  et d'extrémités A et B possède une hauteur de profil "h" dans le plan du treillis. Chacune des extrémités A et B est le siège de 3 déplacements : un déplacement "u" dans l'axe de la barre, un déplacement transversal "delta" et un déplacement angulaire  $\theta$ . Ces déplacements créent des contraintes dites "parasitaires" qui leur sont directement proportionnelles. En effet, si l'on s'intéresse à l'extrémité A par exemple, la contrainte parasitaire de flexion qui y règne vaut :

$$\sigma_{par} = \frac{3Eh}{l^2}(\delta_A - \delta_B) + \frac{2Eh}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

Par ailleurs, les déplacements rectilignes  $\delta_A$  et  $\delta_B$  et angulaires  $\theta_A$  et  $\theta_B$  peuvent s'exprimer en fonction de l'indicateur de déplacement ou de rotation qui leur est relatif :

$$\delta_A = \frac{\sigma L \Delta_A^{(L/H, \Psi)}}{E}, \quad \delta_B = \frac{\sigma L \Delta_B^{(L/H, \Psi)}}{E}, \quad \theta_A = \frac{\sigma \Theta_A^{(L/H, \Psi)}}{E}, \quad \theta_B = \frac{\sigma \Theta_B^{(L/H, \Psi)}}{E}$$

Ceci permet de réécrire l'expression de la contrainte parasite en A :

$$\frac{\sigma_{par}}{\sigma} = \frac{3hL}{l^2}(\Delta_A - \Delta_B) + \frac{2h}{l}(2\Theta_A + \Theta_B)$$

D'autre part, si  $\gamma \equiv \sigma_{par}/\sigma$  représente la **contrainte parasite relative** et sachant que la hauteur "h" est liée à la section "Ω" par le facteur de forme "s" ( $\Omega = sh^2$ , voir figures I.2 et I.3), on obtient :

$$\gamma = \frac{3\sqrt{\Omega}L}{\sqrt{s}l^2}(\Delta_A - \Delta_B) + \frac{2\sqrt{\Omega}}{\sqrt{s}l}(2\Theta_A + \Theta_B)$$

De plus, le rapport  $l/L$  ne dépend que de  $L/H$  (voir chapitre 1, §2). Si  $g^{(L/H)}$  est une fonction de  $L/H$  telle que  $l/L = g^{(L/H)}$ , la relation ci-dessus devient :

$$\gamma = \frac{\sqrt{\Omega}}{L\sqrt{s}} \left( \frac{3(\Delta_A - \Delta_B)}{(g^{(L/H)})^2} + \frac{2(2\Theta_A + \Theta_B)}{g^{(L/H)}} \right)$$

Si la barre est soumise à un effort normal  $N_i = k_i F$ , sa section est donnée aux relations [2] et [3] selon qu'elle est en traction ou en compression. Quelque soit le cas, il existe une fonction  $f^{(L/H, \Psi)}$ , dépendant uniquement de  $L/H$  et de  $\Psi$ , telle que :

$$\Omega = \frac{F}{\sigma} f^{(L/H, \Psi)}$$

L'expression de la contrainte parasite relative devient alors :

$$\gamma = \frac{\sqrt{F}}{L\sqrt{\sigma s}} \underbrace{\left( \frac{3f^{(L/H, \Psi)}(\Delta_A - \Delta_B)}{(g^{(L/H)})^2} + \frac{2f^{(L/H, \Psi)}(2\Theta_A + \Theta_B)}{g^{(L/H)}} \right)}_{= \text{fonction}(L/H, \Psi)}$$

Le terme entre parenthèses de droite ne dépend que des nombres  $L/H$  et  $\Psi$ , et seulement de  $L/H$  lorsque le flambement n'est pas pris en compte. Ce terme peut donc légitimement être baptisé **indicateur de contrainte parasite relative** et sera noté  $\Gamma$ . On obtient donc, finalement :

$$\Gamma = \gamma L \sqrt{\frac{\sigma s}{F}} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

L'expression précédente permet donc d'affirmer que, pour une valeur donnée de l'indicateur de flambement  $\Psi$  et du rapport  $L/H$ , les contraintes parasites relatives, données par

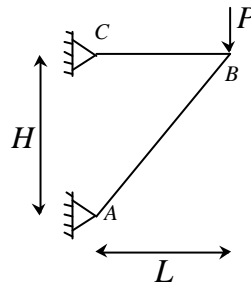
l'expression  $\gamma = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \Gamma$ , sont d'autant plus grandes que :

- la charge totale est grande;
- la contrainte "admissible" du matériau est petite;
- la portée est petite;
- la section est creuse;

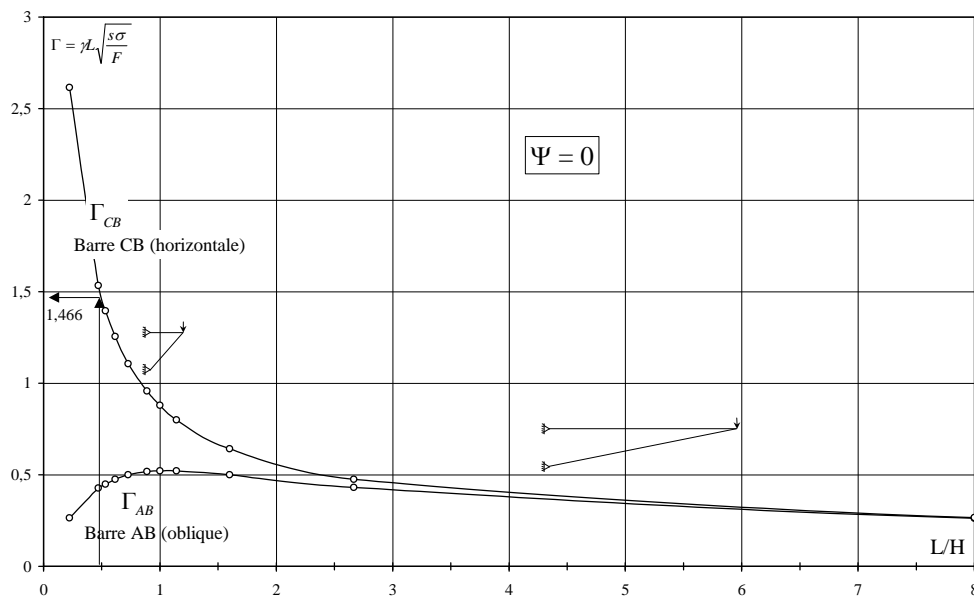
Par ailleurs, la figure I.3 montre que le profil circulaire est toujours plus défavorable que le profil carré. Elle montre aussi que les profils plus hauts que larges peuvent être encore plus défavorables.

**Exemple 1 : flambement négligé**

**Figure I.6**



Si le flambement n'est pas pris en compte, l'indicateur de contraintes parasites  $\Gamma$  ne dépend que du rapport  $L/H$ .



**Figure I.7 :** indicateur de contrainte parasite relative à l'extrémité B des 2 barres.

On considère la structure schématisée à la figure I.6, dont les barres travaillent à la même contrainte  $\sigma$ . Les nœuds A et C sont articulés, tandis que le nœud B est rigide. La figure I.7 reprend les valeurs des

indicateurs  $\Gamma_{AB}$  et  $\Gamma_{CB}$  relatifs à l'extrémité B des 2 barres, calculées à partir des contraintes parasites au nœud B obtenues pour différentes valeurs du rapport L/H. Ces contraintes parasites ont été calculées par le programme ISSD en choisissant arbitrairement des sections carrées pleines en acier ( $E = 210000 \text{ Mpa}$  et  $\sigma_{adm} = 240 \text{ MPa}$ ), une longueur de base  $L=5\text{m}$  et un effort de  $5 \text{ kN}$ , **mais tout autre choix aurait fourni exactement les mêmes courbes.**

On constate que, dans ce cas, les contraintes parasites sont d'autant plus faibles que la structure est élancée. Par ailleurs, la contrainte parasite dans la barre CB est toujours supérieure à la contrainte parasite dans la barre AB. Ces constatations sont évidemment valables pour cette structure composée d'un matériau quelconque, chargée par un effort P quelconque, et dont les barres ont une section de forme quelconque.

Pour compléter cet exemple, on peut calculer, à partir de la figure I.7, la contrainte parasite maximale pour une structure en aluminium ( $\sigma_{adm}=55 \text{ MPa}$ ) chargée par un effort  $P=100 \text{ kN}$ , dont la longueur de base vaut  $1 \text{ m}$ , d'élancement  $L/H=0,5$  et dont les sections sont carrées creuses ( $m=e/h=0,05 \Rightarrow s=0,19$ ).

Pour un élancement  $L/H=0,5$ , la figure I.7 fournit, pour la barre CB, une valeur de  $\Gamma_{BC}$  égale à  $1,466$ . La contrainte parasite relative  $\gamma$  vaut donc :

$$\gamma_{BC} = \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \frac{\Gamma_{BC}}{L} = \sqrt{\frac{100000}{0,19 \cdot 55}} \frac{1,466}{1000} = 0,143.$$

La contrainte parasite absolue vaut alors :  $\sigma_{par,BC} = 0,143 \cdot 55 = 7,89 \text{ MPa}$  , soit  $14,3 \%$  de la contrainte "admissible" de l'aluminium.

### **Exemple 2 : flambement pris en compte**

On reprend l'exemple précédent, mais la barre en compression est cette fois dimensionnée selon la courbe d'Euler (courbe "en cloche" , voir chapitre 1, figure 8). On prendra  $\mu=0,9$  bien que cette valeur soit discutable suite à la présence des appuis à rotule.

- **Treillis 1** : acier ( $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 240 \text{ MPa}$ ), portée  $L = 4 \text{ m}$ , hauteur  $H = 4 \text{ m}$ , charge totale de  $1 \text{ kN}$ , et composé de sections circulaires creuses (○  $m=e/h=0,1 \Rightarrow q=0,3625$ ,  $s=0,2827$ )

On obtient :

$$\Psi = \frac{0,9 \cdot 240 \cdot 4000}{\sqrt{0,3625 \cdot 210000 \cdot 1000}} = 99 \quad , \quad \sigma_{CB} = 0,0091 \quad , \quad \Gamma = \frac{0,0091}{240} \cdot 4000 \cdot \sqrt{\frac{0,2827 \cdot 240}{1000}} = 0,0395$$

- **Treillis 2** : bois ( $E = 10000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 10 \text{ MPa}$ ), portée  $L = 6 \text{ m}$ , hauteur  $H = 6 \text{ m}$ , charge totale  $0,357 \text{ kN}$ , et composé de sections carrées pleines ( $q=1/12$ ,  $s=1$ ).

On obtient :

$$\Psi = \frac{0,9 \cdot 10 \cdot 6000}{\sqrt{0,0833 \cdot 10000 \cdot 357}} = 99 \quad , \quad \sigma_{CB} = 0,000393 \quad , \quad \Gamma = \frac{0,000393}{10} \cdot 6000 \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 10}{357}} = 0,0395$$

A nouveau, on constate que l'indicateur de contraintes parasites est identique dans ces deux cas qui ont en commun un même rapport L/H (=1) et une même valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  (=99).

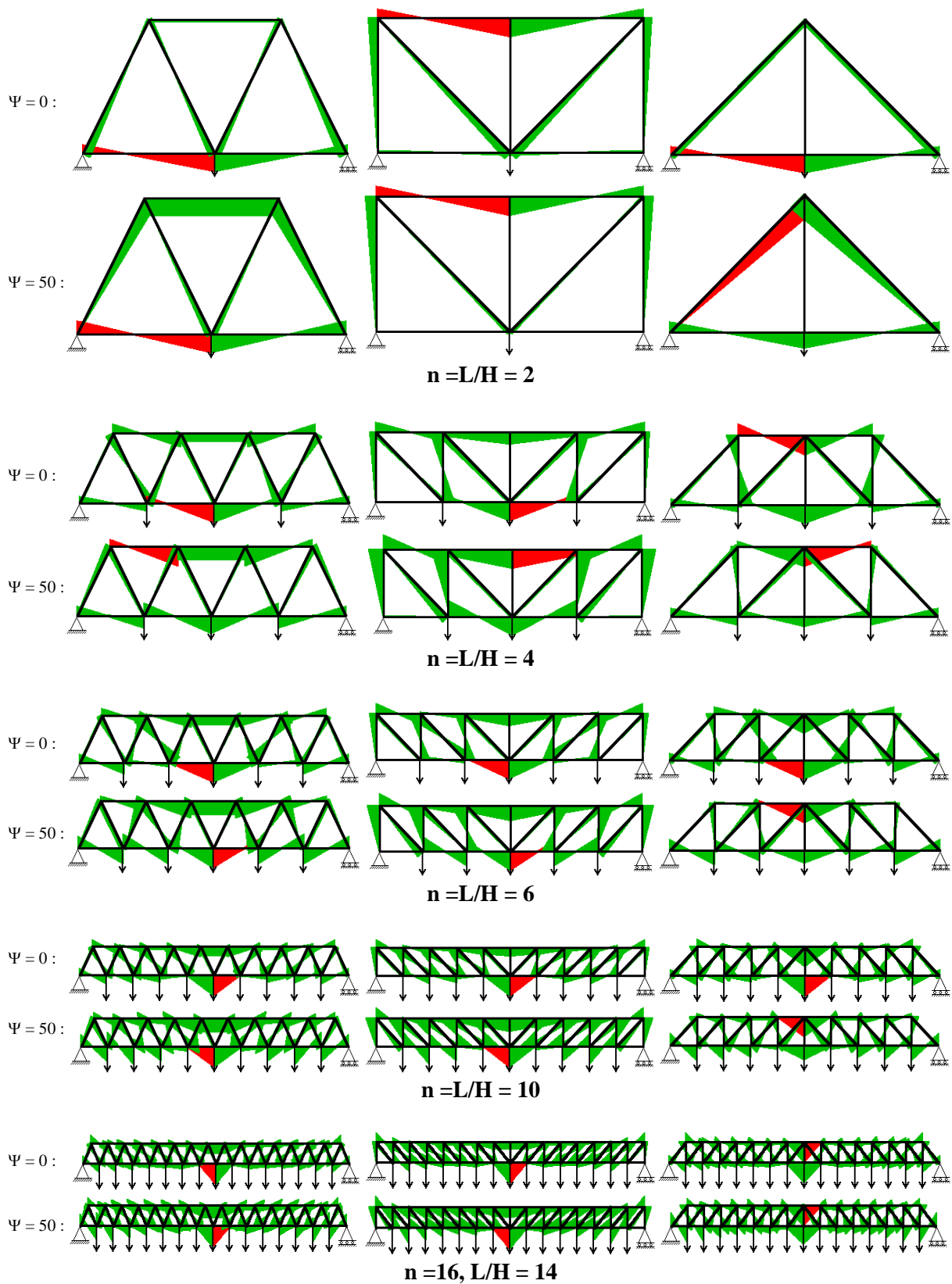
### I.3.2. Contraintes parasites dans les treillis classiques

La figure I.8 montre la répartition des contraintes parasites dans les treillis classiques de type Warren, Pratt et Howe pour, respectivement, une valeur nulle de l'indicateur de flambement  $\Psi$  et une valeur  $\Psi = 50$ , et dans le cas d'une optimisation individuelle des barres. Selon l'élanement  $L/H$  du treillis, la valeur de l'indicateur de flambement ou le type d'optimisation (individuelle ou par catégories), la barre soumise aux contraintes maximales peut appartenir à la membrure inférieure, supérieure, aux diagonales ou aux verticales. Une comparaison rigoureuse des différents treillis ne pourra donc se faire que si l'on étudie l'effet global des contraintes parasites, c'est à dire leur influence sur le volume total des structures. Ceci sera fait au point 4, par l'intermédiaire d'un indicateur de "delta-volume" permettant d'étudier le surplus de volume total dû aux contraintes parasites.

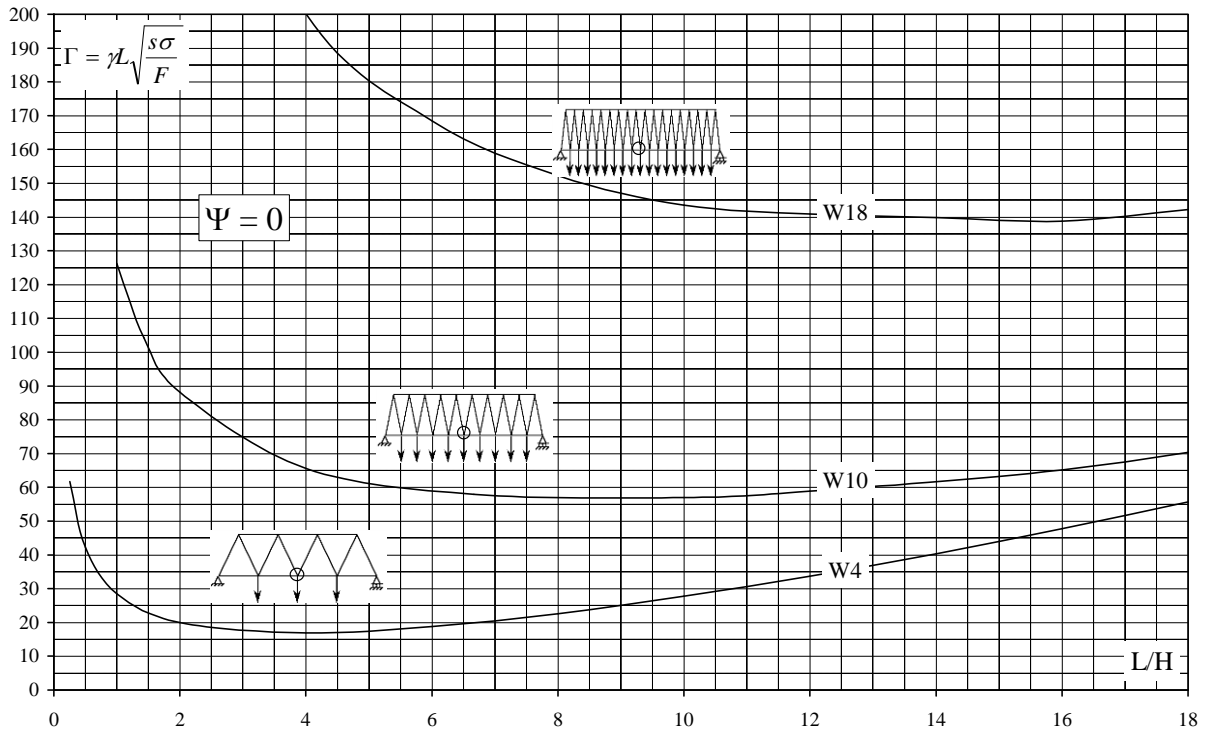
Les figures 9, 10 et 11 illustrent, pour les 3 types de treillis classiques, les valeurs de l'indicateur de contraintes parasites relatif aux extrémités des deux barres centrales de la membrure inférieure, dans le cas d'une optimisation individuelle des barres avec  $\Psi=0$  (flambement négligé). La figure I.12 récapitule les résultats des figures I.9 à I.11.

Ces figures suggèrent les commentaires suivants :

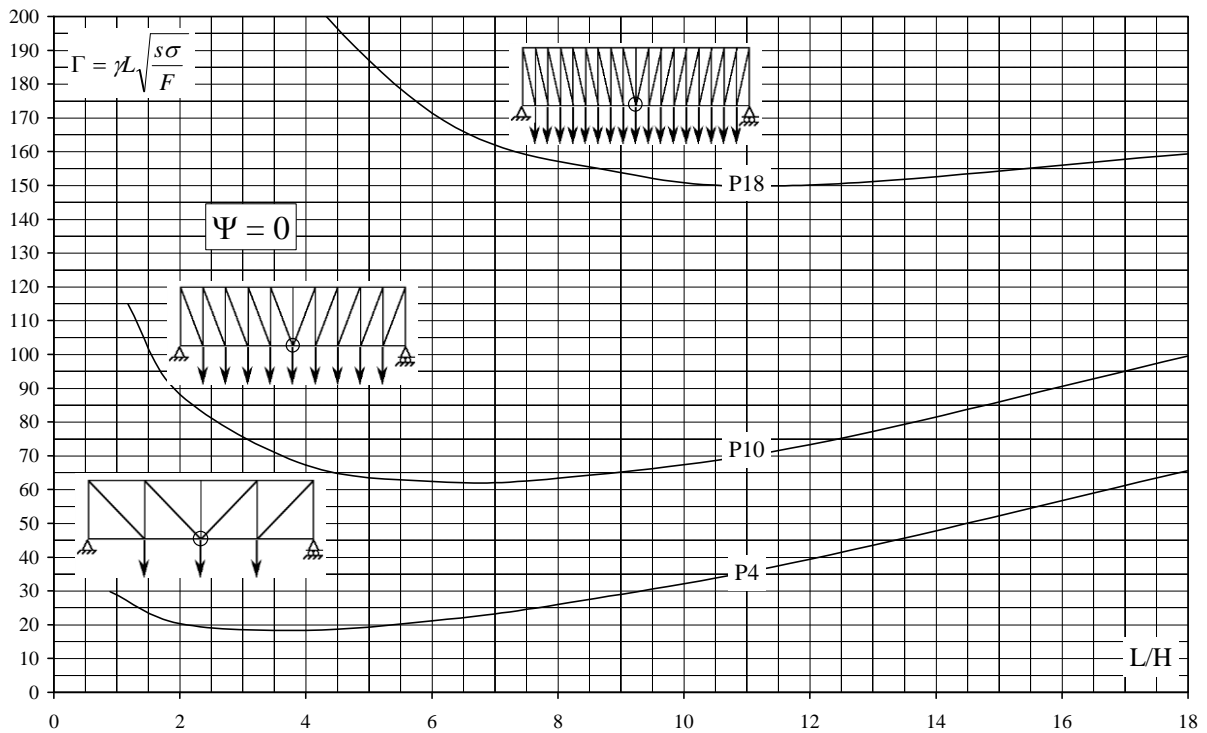
- Les contraintes parasites relatives sont plus importantes si le nombre de mailles est élevé;
- les contraintes parasites sont plus importantes dans les treillis Howe que dans les treillis Pratt, elles mêmes plus importantes que dans les treillis Warren. La supériorité des treillis Warren est donc de nouveau établie.



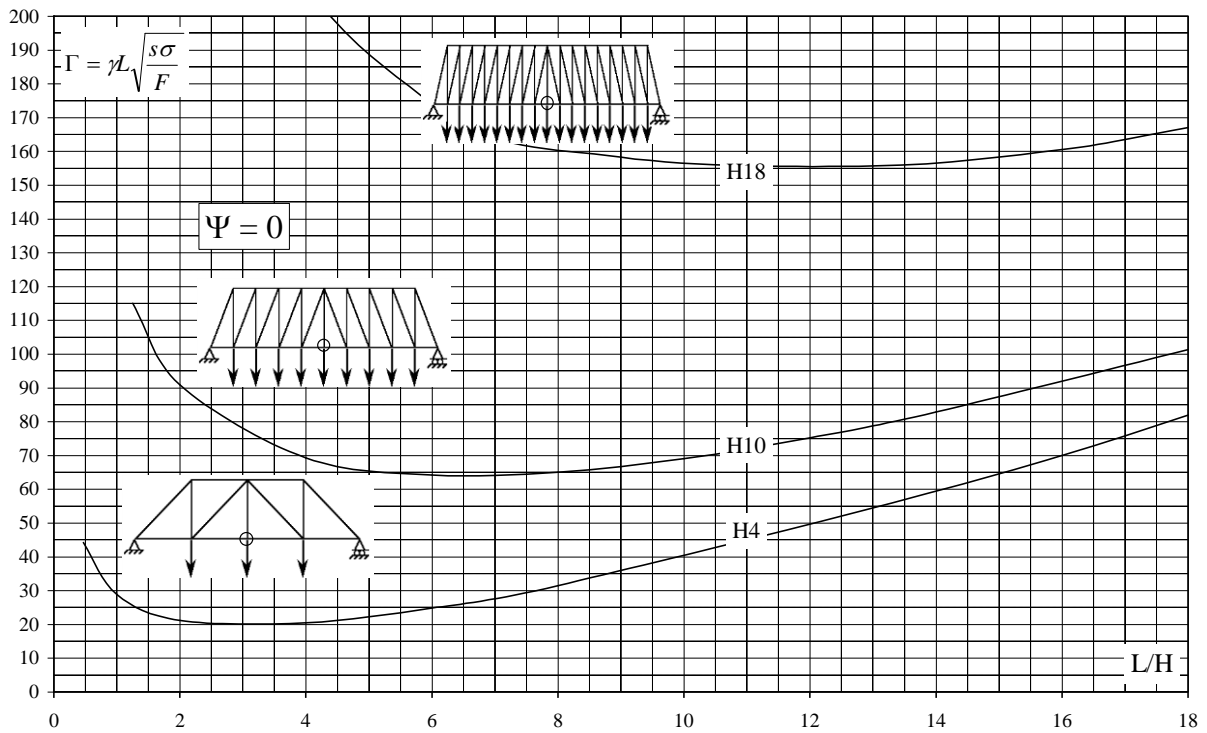
**Figure I.8 :** contraintes parasites dans les treillis classiques (optimisation individuelle des barres) pour, respectivement,  $\Psi = 0$  (flambement négligé) et  $\Psi = 50$ . La couleur rouge correspond aux contraintes maximales.



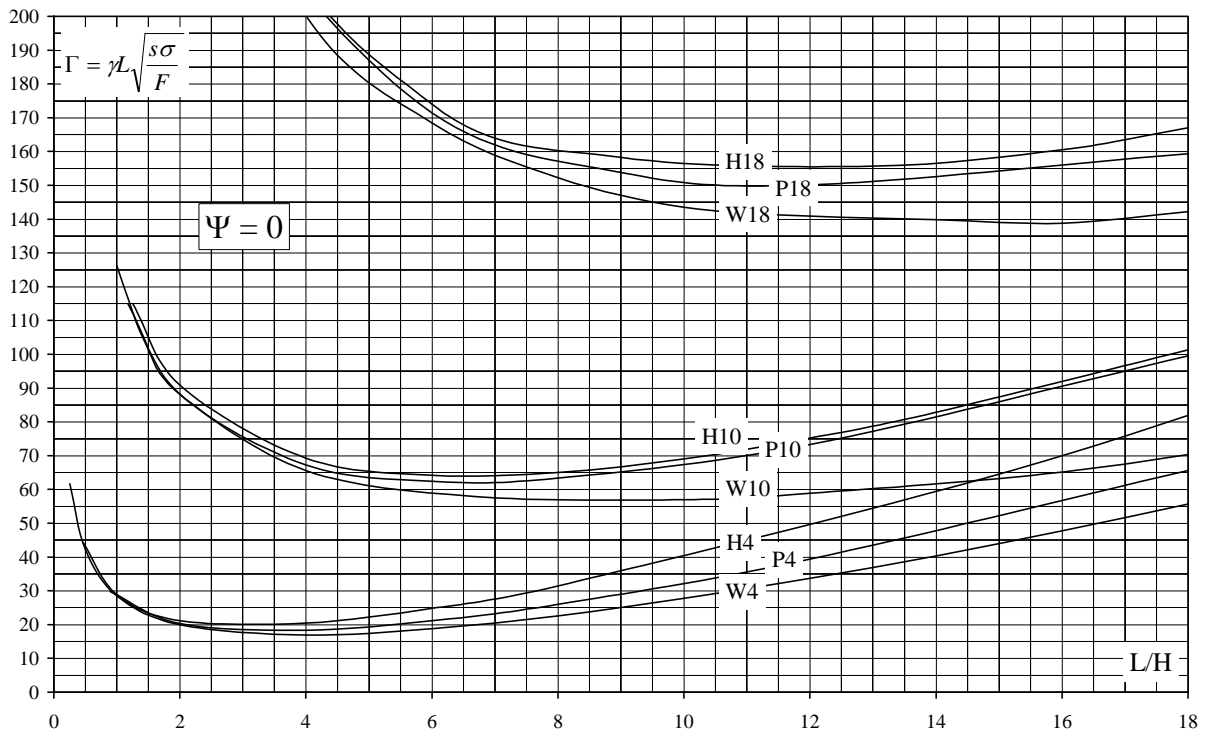
**Figure I.9 :** indicateur de contrainte parasite relative correspondant au nœud central de la membrure inférieure du treillis Warren. Le flambement n'est pas pris en compte et l'optimisation des barres est individuelle. Les 3 courbes correspondent à 4, 10 et 18 mailles respectivement.



**Figure I.10 :** indicateur de contrainte parasite relative correspondant au nœud central de la membrure inférieure du treillis Pratt. Le flambement n'est pas pris en compte et l'optimisation des barres est individuelle. Les 3 courbes correspondent à 4, 10 et 18 mailles respectivement.



**Figure I.11** : indicateur de contrainte parasite relative correspondant au nœud central de la membrure inférieure du treillis Howe. Le flambement n'est pas pris en compte et l'optimisation des barres est individuelle. Les 3 courbes correspondent à 4, 10 et 18 mailles respectivement.



**Figure I.12** : superposition des figures 9, 10 et 11.



## I.4. L'INDICATEUR DE DELTA-VOLUME

### I.4.1. Expression de l'indicateur

Comme le montre la figure I.13, les contraintes parasites qui naissent dans un treillis ont une distribution linéaire le long de chaque barre. Elles augmentent donc les contraintes locales et les sections initiales prévues pour résister aux contraintes d'effort normal doivent donc être modifiées, ce qui augmente le volume total du treillis. Il semble donc légitime d'étudier le surplus de volume de matière à mettre en œuvre pour tenir compte de ces contraintes parasites.

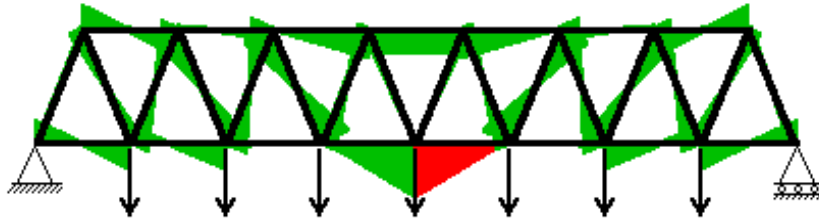


Figure I.13 : contraintes parasites dans les barres d'un treillis Warren.

- Soit :
- $V$  le volume total du treillis, dimensionné sans tenir compte des contraintes parasites;
  - $\Omega_i$  et  $V_i$  la section et le volume d'une barre d'indice "i", dimensionnée en ignorant les contraintes parasites;
  - $d\Omega_i$  et  $dV_i$  le surplus de section et de volume d'une barre d'indice "i" induit par les contraintes parasites qui y naissent.

Il convient donc maintenant d'évaluer le rapport  $(\sum dV_i)/V$ , qui représente le pourcentage de volume supplémentaire à considérer lorsqu'on tient compte des contraintes parasites.

Afin que la superposition des contraintes d'effort normal et des contraintes parasites ne pas dépasse pas la contrainte autorisée, il convient d'augmenter la valeur initiale de la section efficace  $\Omega_i$  d'une valeur  $d\Omega_i$ . Si " $\sigma$ " est la contrainte "admissible" du matériau, et si  $\sigma_j$  et  $\sigma_k$  sont, respectivement, les contraintes parasites aux extrémités j et k de la barre d'indice i, on doit avoir, si l'on pose  $\sigma_i = \max(|\sigma_j|, |\sigma_k|)$  :

- pour une barre en traction :  $d\Omega_i = \frac{\sigma_i}{\sigma} \Omega_i = \gamma_i \Omega_i$
- pour une barre en compression :  $d\Omega_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{crit}} \Omega_i = \frac{\sigma_i}{\sigma} \frac{\sigma}{\sigma_{crit}} \Omega_i = \gamma_i \frac{\sigma}{\sigma_{crit}} \Omega_i$

Or, il a été montré au chapitre 1 (§6) que pour une barre en compression, le rapport entre la contrainte critique et la contrainte "admissible"  $\sigma$  peut s'exprimer en fonction de l'indicateur d'élanement  $\Lambda$  de la barre :

$$\sigma/\sigma_{crit} = 1 + \Lambda^2 = \text{fonction}(L/H, \Psi) \text{ notée } f_i^{(L/H, \Psi)}$$

De manière générale, le surplus de volume  $dV_i$  relatif à une barre quelconque vaut donc :

$$dV_i = \gamma_i f_i^{(L/H, \Psi)} V_i \text{ avec } f_i^{(L/H, \Psi)} = 1 \text{ si la barre est en traction}$$

Cette dernière expression peut encore être transformée. En effet, sachant que :

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \frac{\Gamma_i}{L}, \text{ on obtient : } dV_i = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} (\Gamma_i f_i^{(L/H, \Psi)} V_i)$$

Par ailleurs, comme 
$$\begin{cases} W_i = \frac{\sigma V_i}{FL} \\ W = \frac{\sigma V}{FL} \end{cases} \Rightarrow V_i = \frac{W_i}{W} V, \text{ on a : } \frac{dV_i}{V} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \frac{(\Gamma_i f_i^{(L/H, \Psi)} W_i)}{W}$$

Le surplus total de volume vaut alors : 
$$\frac{\sum_i dV_i}{V} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \left( \frac{\sum_i \Gamma_i f_i^{(L/H, \Psi)} W_i}{W} \right)$$

Le terme entre parenthèse de droite ne dépend que de L/H et de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Si la structure est dimensionnée sans tenir compte du flambement, ce terme ne dépend que du rapport L/H. Il peut légitimement être baptisé *indicateur de delta-volume* et sera noté K :

$$K = \kappa L \sqrt{\frac{\sigma s}{F}} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

L'expression précédente permet d'affirmer que, pour une valeur donnée de l'indicateur de flambement  $\Psi$  et du rapport L/H, le surplus de volume de matière dû aux contraintes parasites, donné par

l'expression  $\kappa = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} K$ , est d'autant plus grand que :

- la charge totale est grande;
- la contrainte "admissible" du matériau est petite;
- la portée est petite;
- les sections sont creuses;

Par ailleurs, la figure I.3 montre que le profil circulaire est plus défavorable que le profil carré. Elle montre aussi que les profils plus hauts que larges sont encore plus défavorables.

La figure I.14 représente l'indicateur K relatif à une poutre WARREN à 16 mailles, lorsque le flambement est négligé et que toutes les barres sont dimensionnées à la même contrainte  $\sigma$ . L'axe des ordonnées de droite représente le pourcentage de volume supplémentaire lorsque la poutre est chargée par 16 efforts de 5kN chacun et est formée de barres en acier de contrainte "admissible" 240 MPa et dont les sections sont circulaires creuses ( $m=e/h=0.15$ ). Ceci revient à multiplier l'indicateur de delta-volume par un facteur  $\sqrt{F/s\sigma}/L = 0,1803$  [%] .

#### I.4.2. Comparaison des treillis classiques

Les courbes des figures I.15, I.16 et I.17 sont composées de 20 points (L/H, K) calculés numériquement à partir du programme ISSD. Elles correspondent respectivement au treillis Warren,

Pratt et Howe et sont composées de 4 sous-figures notées A, B, C et D comme illustré sur le schéma ci-dessous :

A	B
C	D

Les figures A et C correspondent aux treillis dont toutes les barres sont optimisées de façon individuelle, pour  $\Psi = 0$  et  $\Psi = 100$ .

Les figures B et D correspondent aux treillis composés de (4) catégories de barres, pour  $\Psi = 0$  et  $\Psi = 100$ .

Il est important de remarquer que les figures A et B n'ont pas la même échelle que les figures C et D (respectivement 50 et 1000).

Ces figures montrent que les treillis composés de catégories de barres sont moins sujets à l'effet des contraintes parasites. Par ailleurs, cet effet s'amplifie pour les grandes valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$ .

Les figures I.4, II.3 et III.3 du chapitre 2 correspondent aux enveloppes des courbes d'efficacité des treillis classiques, c'est-à-dire à l'ensemble des treillis les plus légers. Il est intéressant d'associer chacun de ces treillis à l'indicateur de delta-volume qui lui correspond, comme illustré à la figure I.18 (relative au cas *Optimax*, correspondant à une optimisation individuelle des barres) et I.19 (relative au cas *Cat*, correspondant à une optimisation des barres par catégories).

Ces figures confirment les observations précédentes et suggèrent les commentaires suivants :

- le surplus de volume dû aux contraintes parasites est plus faible pour les treillis Warren que pour les deux autres types de treillis;
- le surplus de volume dû aux contraintes parasites est d'autant plus important que l'indicateur de flambement  $\Psi$  est grand et que le nombre de mailles est élevé;
- le surplus de volume dû aux contraintes parasites est plus important lorsque les barres sont optimisées individuellement.

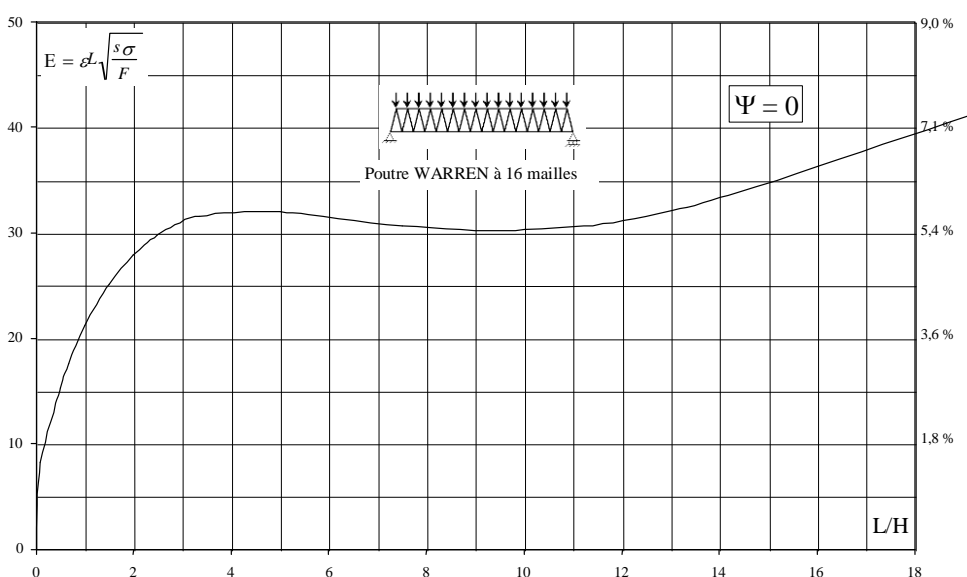


Figure I.14 : Indicateur de "delta-volume" d'une poutre Warren à 16 mailles

chargée sur sa membrure supérieure.

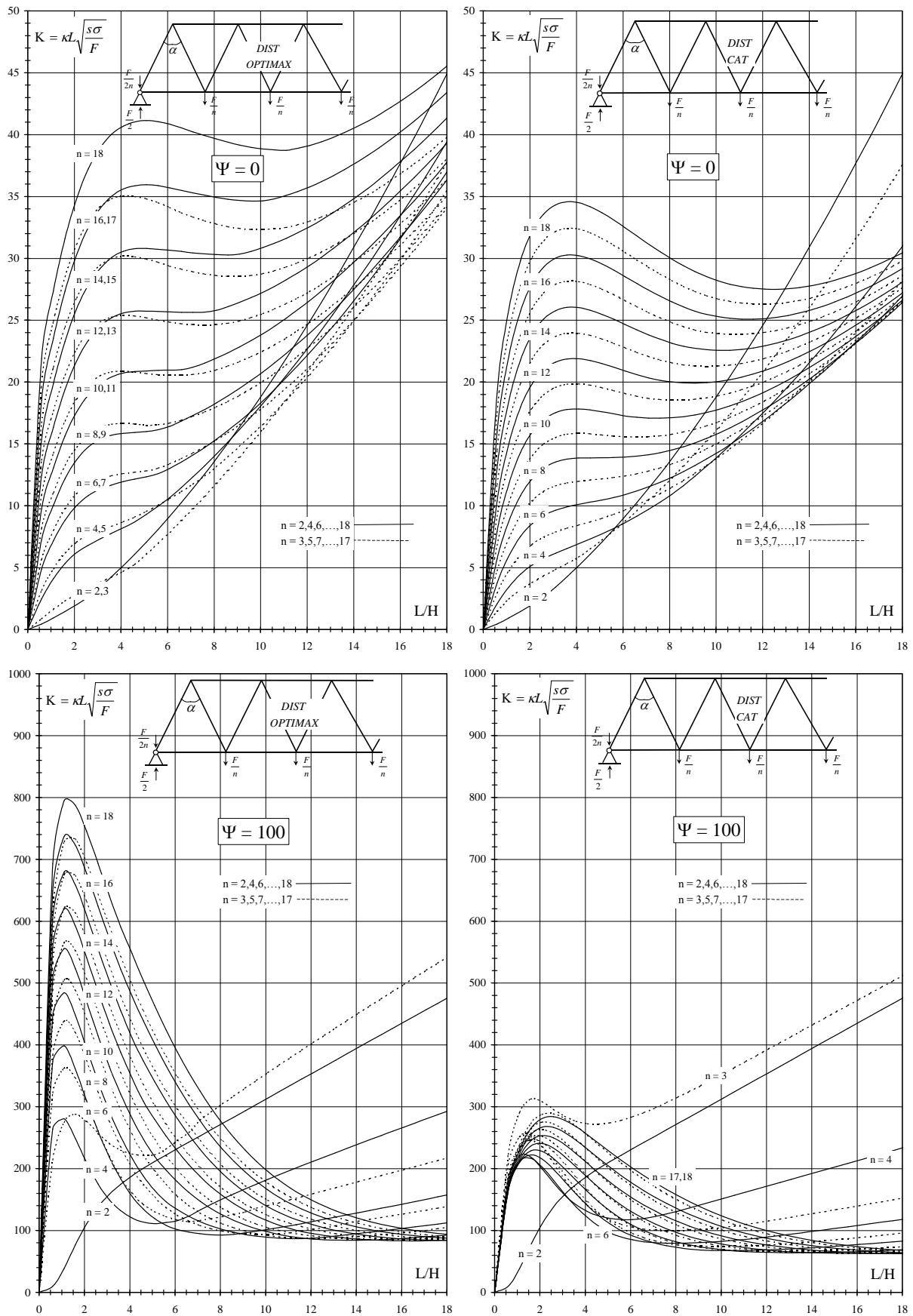


Figure I.15 : valeurs de l'indicateur de delta-volume relatives au treillis Warren chargé sur sa membrure inférieure.

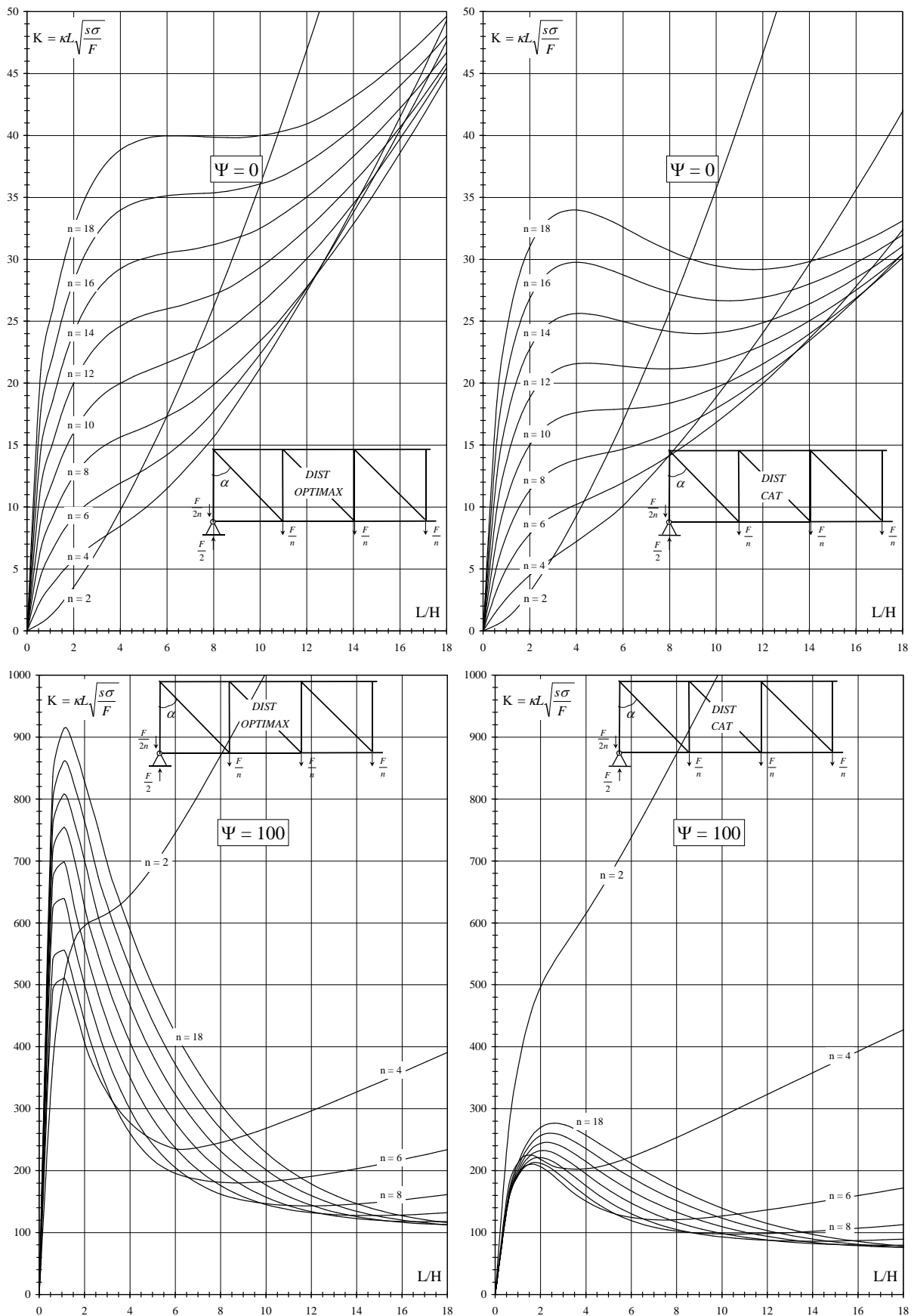


Figure I.16 : valeurs de l'indicateur de delta-volume relatives au treillis Pratt chargé sur sa membrure inférieure.

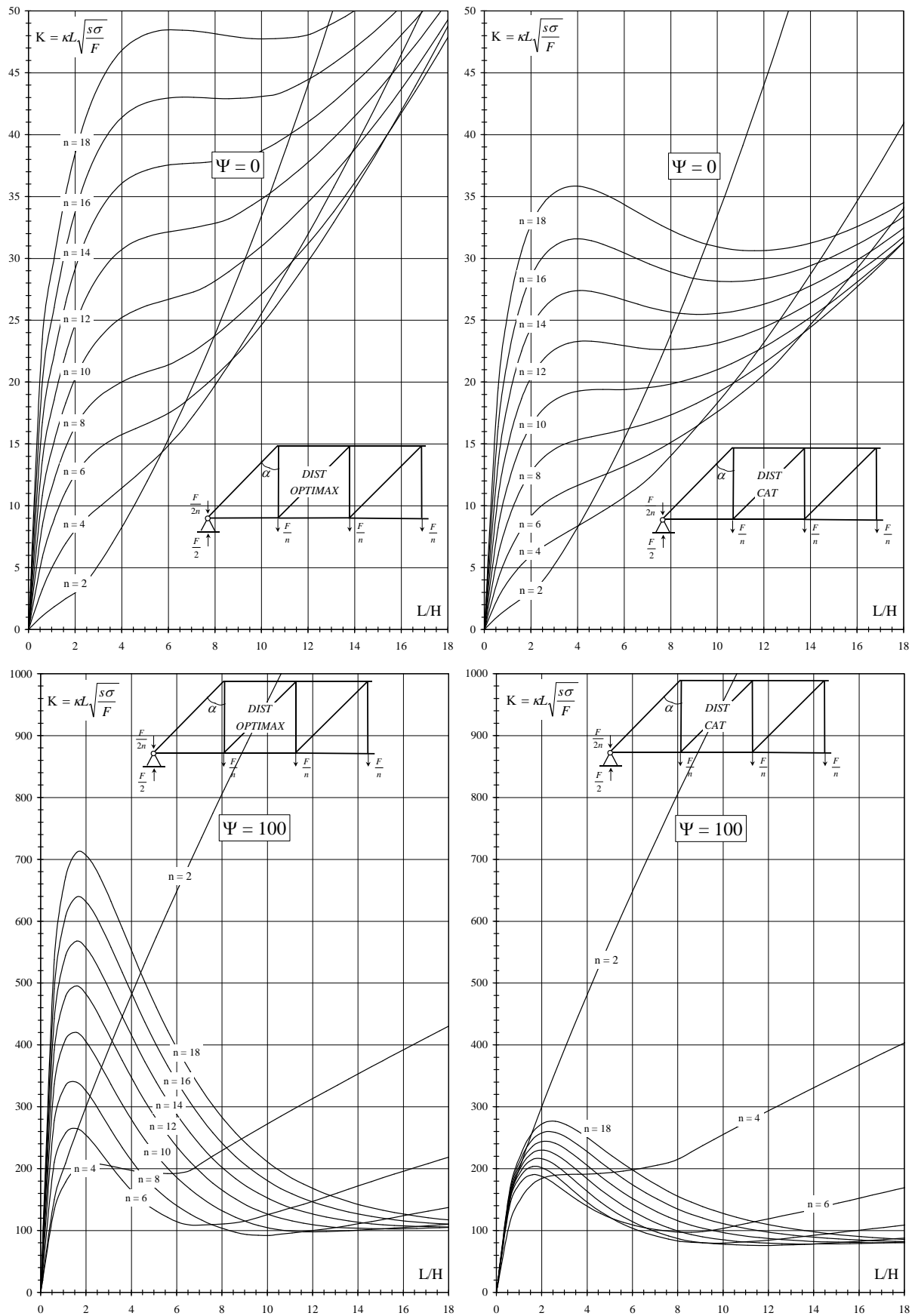
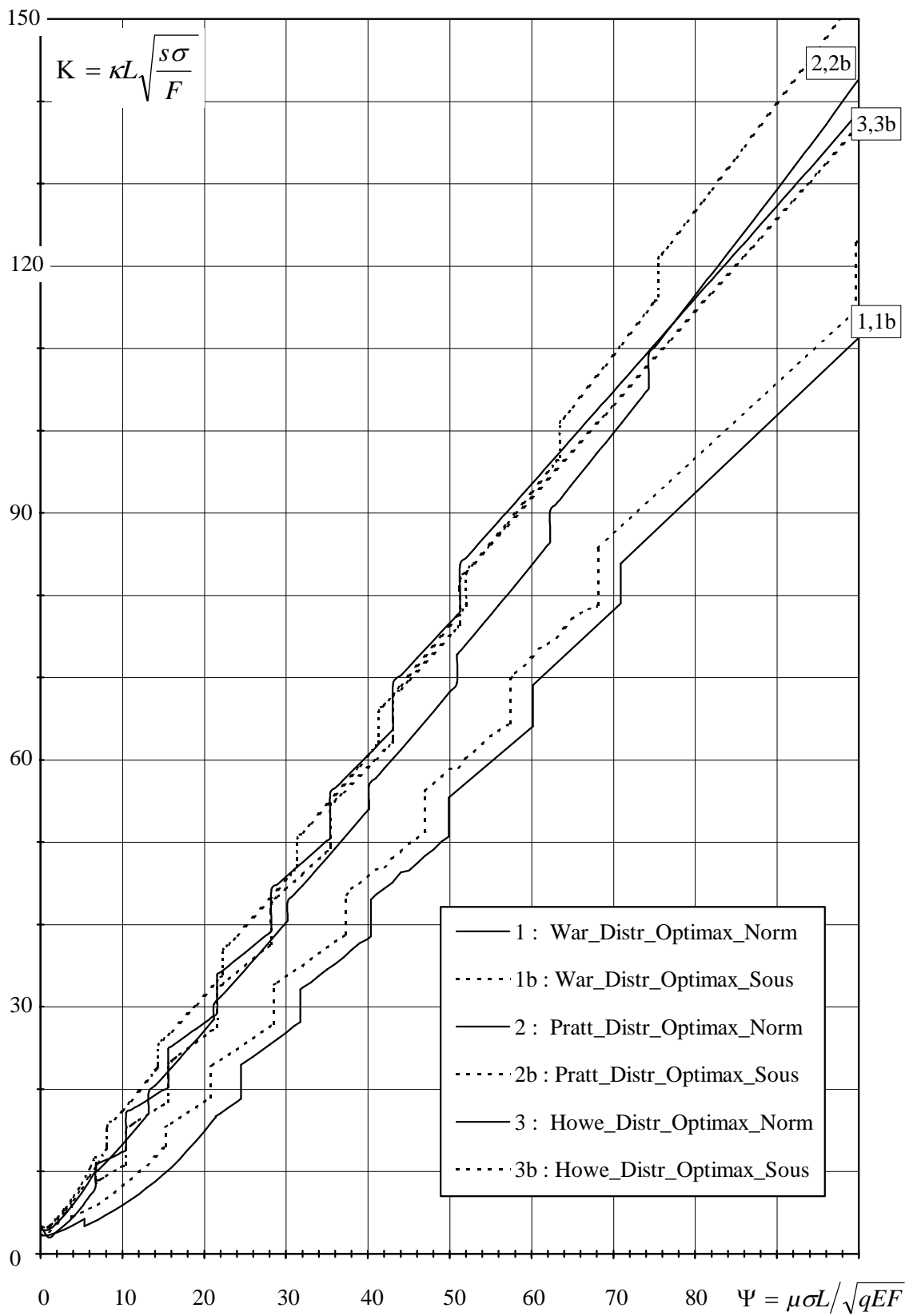
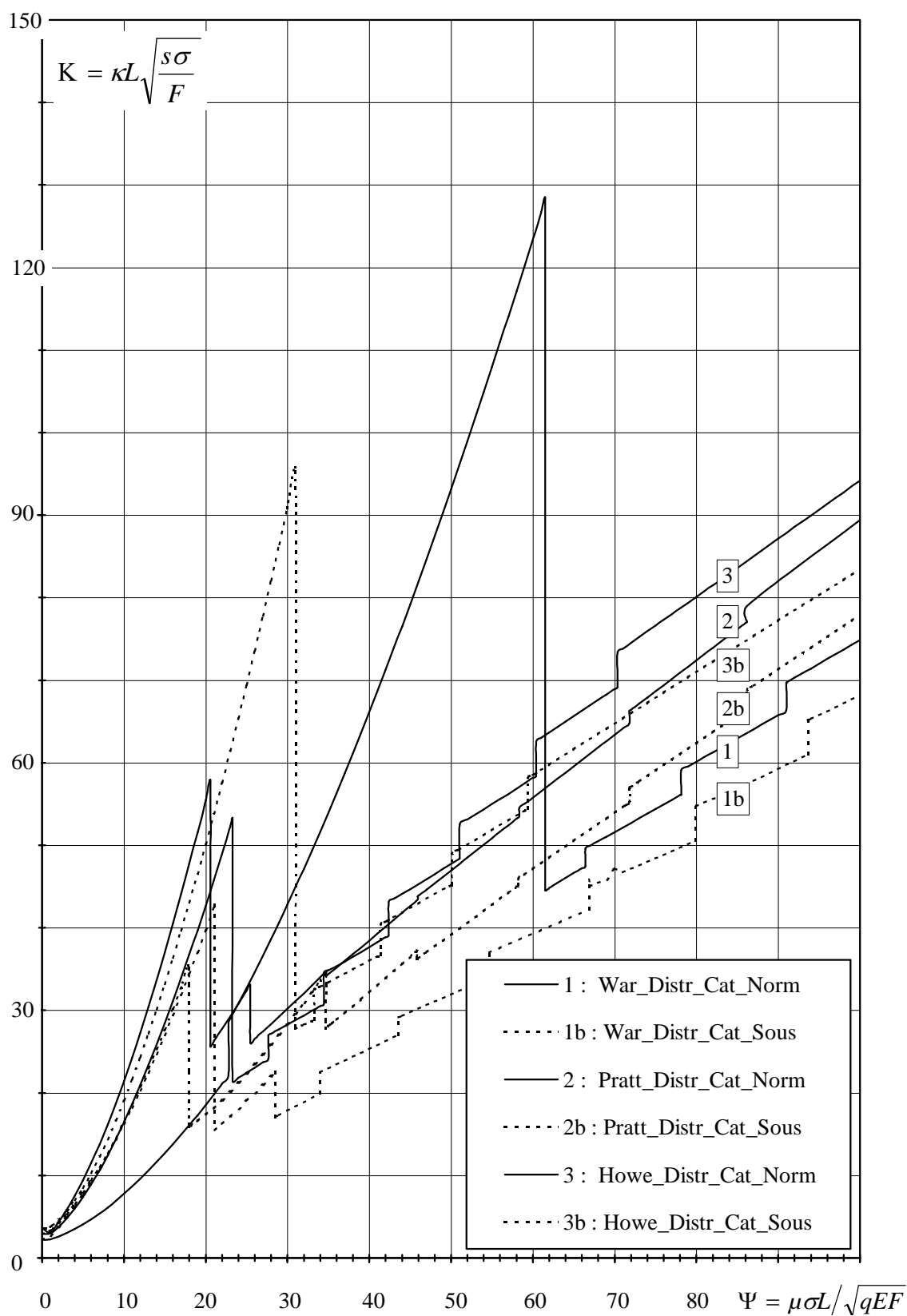


Figure I.17 : valeurs de l'indicateur de delta-volume relatives au treillis Howe chargé sur sa membrure inférieure.



**Figure I.18 :** indicateur de delta-volume correspondant aux enveloppes des courbes d'efficace de W, c'est-à-dire aux treillis les plus légers. Cette figure concerne les treillis Warren, Pratt et Howe soumis à une charge distribuée et dont les barres sont optimisées individuellement.





**Figure I.19** : indicateur de delta-volume correspondant aux enveloppes des courbes d'efficience de W, c'est-à-dire aux treillis les plus légers. Cette figure concerne les treillis Warren, Pratt et Howe soumis à une charge distribuée et composés de (4) catégories de barres identiques.

### I.4.3. Récapitulation des facteurs influençant l'ordre de grandeur du "delta-volume"

Globalement, on constate que le delta-volume  $\kappa$  des treillis les plus légers est proportionnel :

- au nombre de mailles, lui même proportionnel à l'indicateur de flambement  $\Psi = \mu\sigma L / \sqrt{qEF}$  ;
- au facteur  $\frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}}$ .

On peut donc écrire :  $\kappa \propto \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}} \propto \frac{1}{\sqrt{sq}} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}$ .

En remarquant que le produit "s.q" est égal, au facteur 16 près, au facteur de forme  $Z = \Omega h^2 / 16I = (16sq)^{-1}$  défini au chapitre 1 (§10) et repris ci-dessous à la figure I.20, on peut finalement établir que le surplus de volume à mettre en œuvre lorsqu'on considère les contraintes parasites est donc proportionnel au rapport  $\sigma/E$  et au facteur de forme Z;

$$\kappa = (\dots) \cdot Z(\sigma/E) \quad [4]$$

Les valeurs de  $\sigma/E$  relatives aux différents matériaux sont les suivantes :

- pour l'acier écroui :  $\sigma/E = 1429 \cdot 10^{-6}$ , ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);
- pour l'acier doux :  $\sigma/E = 667 \cdot 10^{-6}$ , ( $\sigma = 140$  Mpa,  $E = 210000$  MPa);
- pour l'aluminium :  $\sigma/E = 786 \cdot 10^{-6}$ , ( $\sigma = 55$  Mpa,  $E = 70000$  MPa);
- pour le bois :  $\sigma/E = 1000 \cdot 10^{-6}$ , ( $\sigma = 10$  Mpa,  $E = 10000$  MPa);
- pour le béton :  $\sigma/E = 500 \cdot 10^{-6}$ , ( $\sigma = 15$  Mpa,  $E = 30000$  MPa);

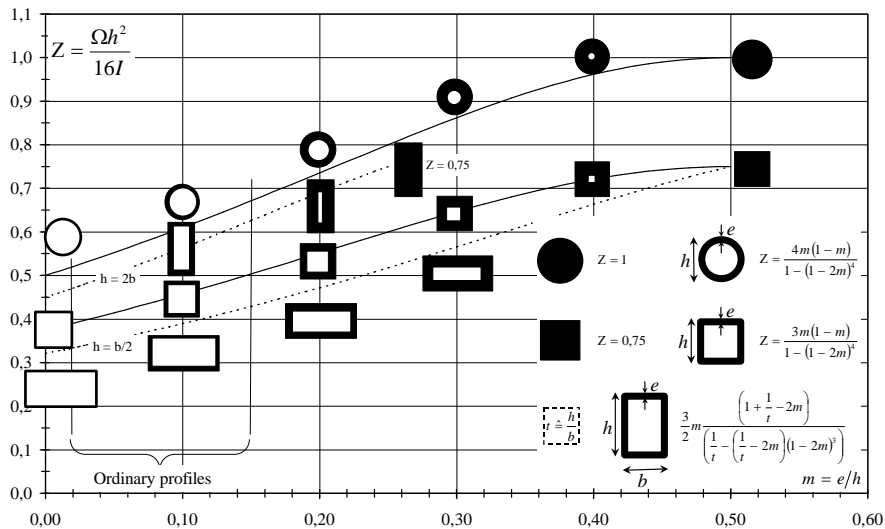


Figure I.20 : valeurs du facteur de forme Z pour les sections classiques.

Finalement, on constate que ce sont les structures en acier à haute limite élastique qui sont les plus sujettes à l'effet des contraintes parasites.

La figure I.18 montre que l'indicateur de contraintes parasites des treillis les plus légers est, globalement, linéairement proportionnel à l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Pour les treillis composés de barres optimisées de façon individuelle, cette relation linéaire peut s'écrire :

$\kappa \approx \beta\Psi = \beta \mu \sigma L / \sqrt{qEF}$  , avec  $1,1 \leq \beta \leq 1,5$ , selon le type de treillis. Pour des barres rigides, le facteur  $\mu$  déterminant la longueur de flambement est en moyenne pris égal à 0,9, ce qui permet de réécrire l'expression [4] ci-dessus :

$$\kappa = 3,6\beta \cdot \sqrt{Z(\sigma/E)}$$

Or, le facteur de forme  $Z$  est au plus égal à 1, ce qui se produit dans le cas d'une section circulaire pleine. Par ailleurs, le terme  $\sigma/E$  est maximal pour les aciers à haute limite élastique. **La borne supérieure du pourcentage de volume supplémentaire induit par les contraintes parasites vaut donc :**

$$\kappa_{\max} = 3,6 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{1(1429 \cdot 10^{-6})} = 20 \%$$

Ce chiffre correspond à une borne supérieure. En pratique, les sections des barres en acier ou en aluminium sont creuses ( $Z_{\text{moyen}} = 0,5$  pour les profils usuels) ou sont des profilés composés ( $Z_{\text{moyen}} = 0,4$  pour les profils usuels). Pour le bois ou l'acier, les sections seront le plus souvent carrées ou rectangulaires pleines ( $Z = 0,75$ ). Si l'on choisi une valeur "moyenne"  $\beta = 1$  (ce qui correspond au treillis Warren dont les barres sont optimisées individuellement), les valeurs pratiques courantes de  $\kappa$  sont les suivantes :

- pour l'acier écroui : 9,1 %
- pour l'acier doux : 6,2 %
- pour l'aluminium : 6,8 %
- pour le bois : 9,9 %
- pour le béton : 7,0 %

Si les treillis sont composés de catégories de barres identiques, ces valeurs diminuent encore.

Remarque importante : les commentaires qui précèdent présupposent que les treillis appartiennent aux courbes enveloppes des courbes d'efficacité, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à l'ensemble des treillis les plus légers. Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si les treillis ont des élancements  $L/H$  ou des nombres de mailles qui ne correspondent pas à ces optimums, les valeurs du pourcentage de volume  $\kappa$  peuvent dépasser la borne de 20 % calculée ci-dessus.

## I.5. CONCLUSION

Cette étude fournit trois résultats principaux. Tout d'abord, elle met en évidence les divers paramètres qui influencent l'ordre de grandeur des contraintes parasites dans un treillis quelconque et qui n'est pas nécessairement optimal au niveau du volume : la portée, la charge totale, le type des sections, la contrainte "admissible" et le nombre de mailles. Dans ce contexte, et toutes autres choses restant égales, les sections pleines sont plus favorables que les sections creuses. Ensuite, elle montre, une fois de plus, la supériorité du treillis Warren par rapport aux deux autres types de treillis classiques. Enfin,

L'analyse montre que le surplus de volume total dû aux contraintes parasite peut atteindre jusqu'à 20% lorsque l'on combine les paramètres de façon défavorable. Cette conclusion est déduite de l'expression finale approchée de l'indicateur de delta-volume obtenue en considérant implicitement que les treillis considérés appartiennent aux courbes enveloppes des courbes d'efficience :

$\kappa = 3,6\beta \cdot \sqrt{Z(\sigma/E)}$  . Cette dernière relation permet d'affirmer que le surplus de volume dû aux contraintes parasites est globalement proportionnel à la racine du rapport  $\sigma/E$  d'une part et à la racine du facteur de forme  $Z$  d'autre part. Dans ce contexte relatif ou l'on considère des treillis dimensionnés "correctement", les sections creuses sont plus favorables que les sections pleines.

# **Partie II**

## **Contraintes parasitaires dans les arcs**

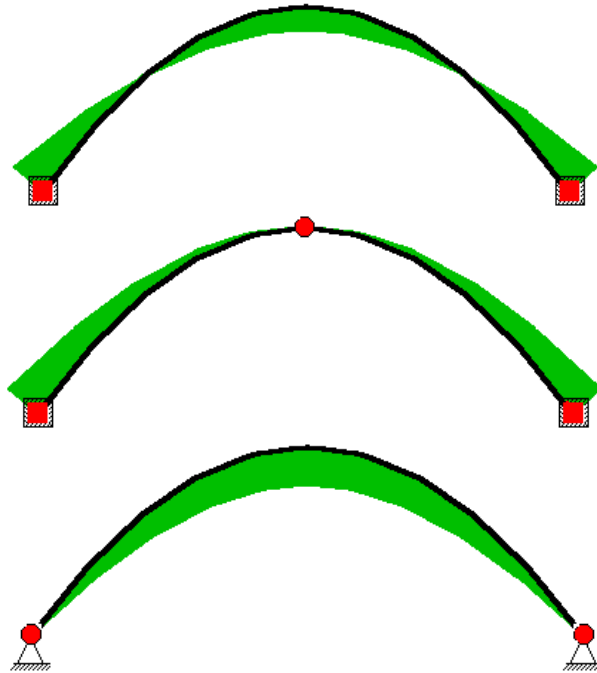




## II.1. INTRODUCTION

Le chapitre 4, consacré à l'étude du volume et de la raideur des arcs isostatiques et hyperstatiques, se base sur l'hypothèse fondamentale suivante, qui n'est valable que dans certaines limites : *les efforts internes et réactions d'appui d'un arc parabolique soumis à une charge uniformément distribuée sont indépendants de son degré d'hyperstaticité*<sup>1</sup>. En pratique, la présence d'appuis encastrés, par exemple, empêche les extrémités de l'arc de tourner librement et il en résulte alors des contraintes parasites, qui peuvent être non-négligeables dans certaines situations. Il est important de ne pas confondre ces contraintes avec les contraintes du second ordre qui ne sont pas étudiées dans ce contexte. Pour rappel, les contraintes du second ordre sont dues au fait que les efforts normaux engendrent des déformations de la fibre moyenne, qui s'écarte donc de la géométrie parabolique initiale, et qui n'est donc plus le funiculaire exact des charges. Il se crée alors des contraintes de flexion dont la répartition dépend du type d'arc.

Si on se limite aux contraintes parasites du premier ordre dues à l'hyperstaticité de l'arc, on obtient la figure II.1 qui illustre leur répartition dans les différents types d'arcs. L'arc à 3 articulations n'est pas sensible à ce phénomène puisqu'il est isostatique.



**Figure II.1** : répartition des contraintes parasites dans les arcs à 0, 1 et 2 articulations.

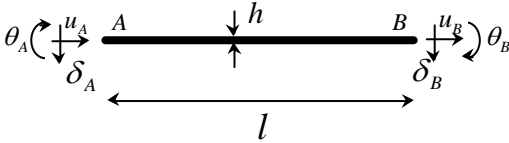
Il semble intéressant d'établir les règles de comportement de ces contraintes parasites et de déterminer leur influence sur le volume total des arcs.

Enfin, il est utile de remarquer que les notions d'indicateur de déplacement ou d'indicateur de rotation restent valables pour les arcs funiculaires qui sont, tout comme les treillis, le siège d'effort principaux de compression.

<sup>1</sup> Cette propriété est démontrée dans "Le calcul des structures", Pierre Lateur, éditions Académia Bruylant, Louvain-la-Neuve, 1997 (deuxième édition 1999).

## II.2. L'INDICATEUR DE CONTRAINTES PARASITAIRES

Un morceau d'arc quelconque pris n'importe où sur la fibre moyenne possède des extrémités qui sont soumises, tout comme celles d'une barre d'un treillis à nœuds rigides, à des déplacements  $u$  (horizontal),  $v$  (vertical) et  $\theta$  (rotation). Si ce morceau d'arc a une longueur suffisamment petite pour pouvoir être approximé par un morceau de droite, l'expression de la contrainte parasite à chaque extrémité reste identique à celle établie pour une barre d'un treillis :



$$\sigma_{par} = \frac{3Eh}{l^2}(\delta_A - \delta_B) + \frac{2Eh}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

Il en résulte donc une expression de l'indicateur de contraintes parasites relatives identique à celle qui a été démontrée pour les treillis :

$$\Gamma = \gamma L \sqrt{\frac{\sigma_S}{F}} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

On peut donc en tirer les mêmes conclusions :

Pour une valeur donnée de l'indicateur de flambement  $\Psi$  et du rapport  $L/H$ , Les contraintes parasites relatives, données par l'expression  $\gamma = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\sigma_S}} \Gamma$ , sont d'autant plus grandes que :

- la charge totale est grande;
- la contrainte "admissible" du matériau est petite;
- la portée est petite;
- la section est creuse;

Par ailleurs, le profil circulaire est plus défavorable que le profil carré et les profils plus hauts que larges sont encore plus défavorables.

Les figure II.2 et II.3 illustrent les valeurs de l'indicateur de contraintes parasites pour les 3 types d'arcs, de section constante et variable, respectivement pour  $\psi = 0$  et  $\psi = 100$ . Ces valeurs ont été calculées numériquement à l'aide du programme ISSD.

Pour l'arc sans articulations, les contraintes parasites maximales se situent toujours aux appuis, sauf lorsque la section est variable et pour les faibles élancements. Dans l'arc à 2 articulations, les contraintes parasites sont toujours maximales à la clef, tandis qu'elles sont maximales aux appuis pour l'arc à une articulation.

Ces figures montrent que les contraintes parasites relatives  $\sigma_{par}/\sigma$  sont d'autant plus petites que l'arc possède des articulations et que l'indicateur de flambement est grand.



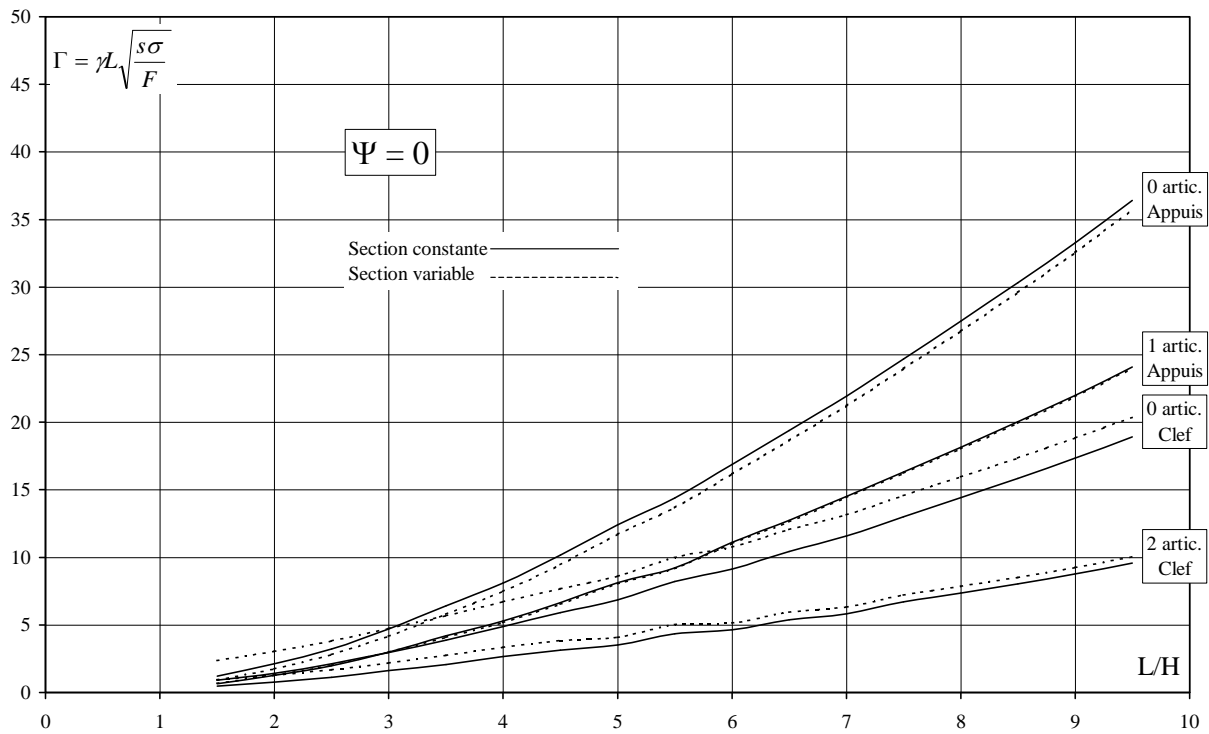


Figure II.2 : indicateur de contraintes parasites aux appuis et à la clef pour  $\psi = 0$ , relatif aux arcs de section constante (traits continus) et variable (traits pointillés).

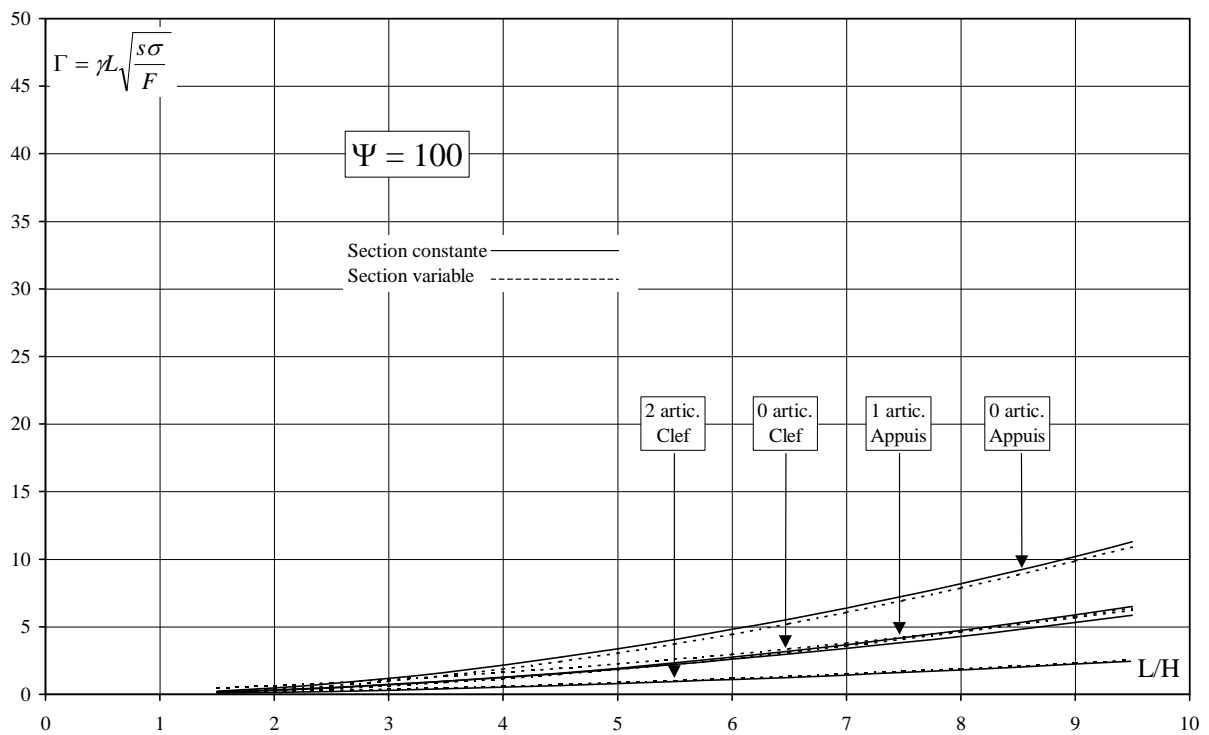
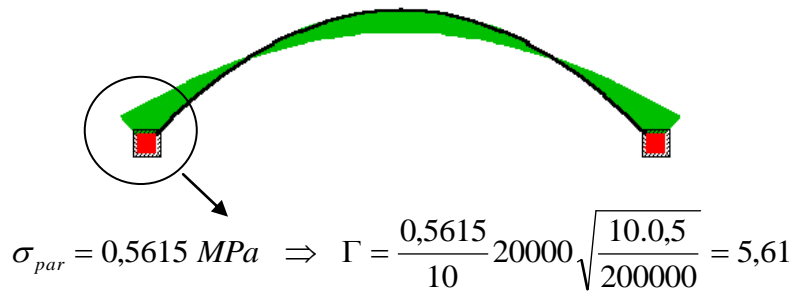


Figure II.3 : indicateur de contraintes parasites aux appuis et à la clef pour  $\psi = 100$ , relatif aux arcs de section constante (traits continus) et variable (traits pointillés).

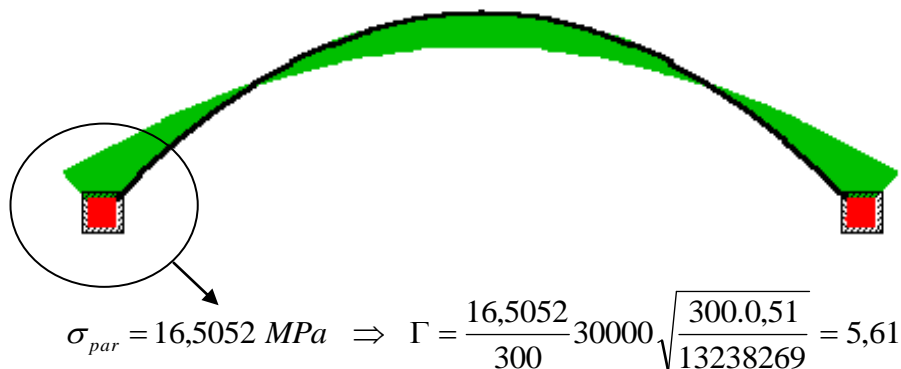
**Exemple :**

On considère deux arcs encastrés ayant en commun un même élanement géométrique ( $L/H=4$ ) et un même indicateur de flambement ( $\Psi=10,95$ ).

**Arc1 :** portée  $L=20$  m, bois ( $\sigma = 10$  Mpa,  $E = 10000$  Mpa), charge répartie  $10$  kN/m, section rectangulaire pleine deux fois plus haute que large ( $t=h/b=2$ ,  $q=I/\Omega^2=1/6$ ,  $s=\Omega/h^2=0,5$ );  $\Psi = \sigma L / \sqrt{qEF} = 10,95$ .



**Arc2 :** portée  $L=30$  m, acier ( $\sigma = 300$  Mpa,  $E = 210000$  Mpa), charge répartie  $441,275$  kN/m, section carrée creuse ( $m=e/h=0,15$ ,  $q=I/\Omega^2=0,243$ ,  $s=\Omega/h^2=0,51$ );  $\Psi = \sigma L / \sqrt{qEF} = 10,95$ .



On constate que l'indicateur de contrainte parasite relative est identique dans les deux cas.

### II.3. L'INDICATEUR DE DELTA-VOLUME

Il semble légitime de considérer que la contrainte parasite maximale  $\sigma_{max}$  qui naît soit aux appuis soit à la clef est responsable d'une augmentation de section que l'on applique sur toute la longueur de l'arc.

#### II.3.1. Arc de section constante

Pour l'arc à 2 articulations, la contrainte parasite maximale se produit à la clef et est bien souvent compensée par le surplus de matière inutile que l'on trouve dès que l'on s'écarte des appuis. On ne considère donc ici que les arcs à 0 et 1 articulation caractérisés par une contrainte parasite maximale aux appuis. Si  $\Omega$  est la section constante de l'arc calculée sans tenir compte des contraintes parasites, le supplément  $d\Omega$  de section est égal à :

- Si l'arc n'est pas soumis au flambement ou si celui-ci est négligé :  $d\Omega = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \Omega = \gamma_{\max} \Omega$
- Si le flambement est pris en compte :  $d\Omega = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{crit}} \Omega = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \frac{\sigma}{\sigma_{crit}} \Omega = \gamma_{\max} \frac{\sigma}{\sigma_{crit}} \Omega$

Dans cette dernière expression,  $\sigma_{crit}$  est la contrainte de travail aux appuis. Son expression a été établie au chapitre 4 (§2.3.1.) :

$$\frac{\sigma_{crit}}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Lambda^2/\gamma_{cor}} \quad \text{avec} \quad \Lambda \hat{=} \frac{L\sqrt{\Omega_s/I}}{\sqrt{E/\sigma}} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

De façon générale, si V est le volume total de l'arc calculé sans tenir compte des contraintes parasites, le surplus de volume dV vaut :

$$dV = \gamma_{\max} f^{(L/H, \Psi)} V \quad \text{avec}$$

$$f_i^{(L/H, \Psi)} = \begin{cases} 1 & \text{si le flambement est négligé} \\ 1 + \Lambda^2/\gamma_{cor} & \text{si le flambement est pris en compte} \end{cases}$$

Sachant que :

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{F}{s\sigma}} \frac{\Gamma_{\max}}{L} \quad , \quad \text{on obtient :}$$

$$\kappa = \frac{dV}{V} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\sigma s}} \left[ \Gamma_{\max} f^{(L/H, \Psi)} \right]$$

Le terme entre parenthèse de droite ne dépend que de L/H et de l'indicateur de flambement  $\Psi$ . Il est intéressant de noter que, pour  $\psi=0$ , l'indicateur de contrainte parasite relative est égal à l'indicateur de delta-volume. Si la structure est dimensionnée sans tenir compte du flambement, ce terme ne dépend que du rapport L/H. On retrouve alors l'expression de l'indicateur de delta-volume obtenue pour les treillis :

$$K = \kappa L \sqrt{\frac{\sigma s}{F}} = \text{fonction}(L/H, \Psi)$$

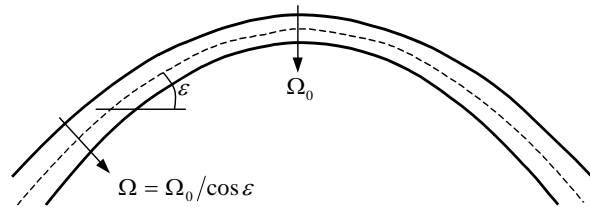
L'expression précédente est identique à celle obtenue pour les treillis. On peut donc en tirer les mêmes conclusions :

Pour une valeur donnée de l'indicateur de flambement  $\Psi$  et de L/H, le surplus de volume de matière dû

aux contraintes parasites, donné par l'expression  $\kappa = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\sigma s}} K$  , est d'autant plus grand que :

- la charge totale est grande;
- la contrainte "admissible" du matériau est petite;
- la portée est petite;
- la section est creuse;

### II.3.2. Arc de section variable



Dans le cas des arcs à 0 et 1 articulations, la démonstration est identique à celle qui correspond à l'arc de section constante. Dans le cas d'un arc à 2 articulations, la contrainte parasite est maximale à la clef. Dans ce cas la variation de section efficace vaut  $d\Omega = \gamma_{\max} \Omega_0$  ou  $d\Omega = \gamma_{\max} f^{(L/H, \Psi)} \Omega_0$  selon que le flambement est pris en compte ou non. On obtient alors :

$$dV = d\Omega l_{arc} = \gamma_{\max} \left[ f^{(L/H, \Psi)} \Omega_0 l_{arc} \right]$$

Comme (Chap 4, §2.3.3.) :

$$\Omega_0 = \frac{L}{8H} \frac{F}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right) = \frac{V}{WL} \frac{L}{16H} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\gamma} \left( \frac{8H}{L} \right)^2 \Psi^2} \right) = \frac{V}{L} g^{(L/H, \Psi)} \quad , \text{on}$$

obtient :

$$\frac{dV}{V} = \gamma_{\max} \left[ f^{(L/H, \Psi)} g^{(L/H, \Psi)} \frac{l_{arc}}{L} \right]$$

Comme le terme entre parenthèses de droite ne dépend que de L/H et  $\psi$ , la démonstration rejoint, à ce stade, celle qui correspond au cas de section constante.

### II.3.3. Discussion sur l'ordre de grandeur du surplus de volume

Les figures II.4 et II.5 montrent que le surplus de volume dû aux contraintes parasites est d'autant plus petit que l'arc possède des articulations et que l'indicateur de flambement est petit. Les 2 courbes relatives à l'arc sans articulations représentent les valeurs de l'indicateur de delta-volume calculées respectivement à partir de la contrainte parasite aux appuis et à la clef. L'indicateur de delta-volume à considérer se situe donc sur l'enveloppe supérieure de ces deux courbes.

La figure II.6 reprend les valeurs de l'indicateur de delta-volume associées aux arcs les plus légers, c'est-à-dire aux arcs appartenant aux courbes d'efficacité établies au chapitre 4 et illustrés à la figure 18 de ce même chapitre. Pour ces arcs, la présence de deux articulations est moins défavorable que celle d'une seule articulation, mais il ne faut pas oublier que ces courbes d'efficacité sont relatives à des arcs d'élancements différents.

De façon générale, le pourcentage de volume supplémentaire  $\kappa$  relatifs aux arcs optimaux vaut :

$$\kappa = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\sigma s}} K$$

Comme l'arc sans articulation est le plus sujet à l'effet des contraintes parasites et en approximant la courbe qui lui est relative (voir figure II.4) par une droite dans la gamme des valeurs de  $\Psi$  limitée à 100, on peut écrire :

$$\kappa \approx \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\sigma s}} \left( 0,265 \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} + 8,85 \right) \approx \sqrt{Z \frac{\sigma}{E}} + 8,85 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{s\sigma}}$$

On peut donc dire que le surplus de volume sera d'autant plus grand que la portée  $L$  est petite et que la charge totale  $F$  est grande. L'influence du type de section ou du matériau est variable selon l'ordre de grandeur des autres paramètres.

**Exemple :**

Un arc en acier ( $\sigma=300$  Mpa,  $E=210000$  Mpa) d'une portée de 10 mètres est soumis à une charge répartie totale de 200 kN. Il possède une section constante carrée creuse ( $m=0.1 \Rightarrow s=0.36$ ,  $q=0.380$ ,  $Z=0.457$ ).

Son indicateur de flambement vaut :  $\Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} = 23,75$ .

Pour qu'il soit optimum, son élancement géométrique  $L/H$ , donné par la figure II.6 (en bas) , doit valoir 4.

Pour cet élancement, la figure II.6 (en haut) fournit une valeur de l'indicateur de delta-volume égal à 16,2.

Le pourcentage de volume supplémentaire à considérer dans ce cas vaut donc :

$$\kappa = \frac{1}{10000} \sqrt{\frac{200000}{0,36 \cdot 300}} 16,2 = 0,07 \quad \text{soit } 7 \% \text{ du volume total de l'arc.}$$

## II.4. CONCLUSION

Cette étude met en évidence les divers paramètres qui influencent l'ordre de grandeur des contraintes parasites du premier ordre dans les arcs : type de section, contrainte "admissible", charge totale, portée, degré d'hyperstaticité, indicateur de flambement. Le surplus de volume qui en découle peut atteindre plusieurs pourcents, comme le montre l'exemple ci-dessus. Il est donc important de considérer l'effet de ces contraintes parasites lors d'un prédimensionnement effectué à partir des courbes d'efficacité établies au chapitre 4.

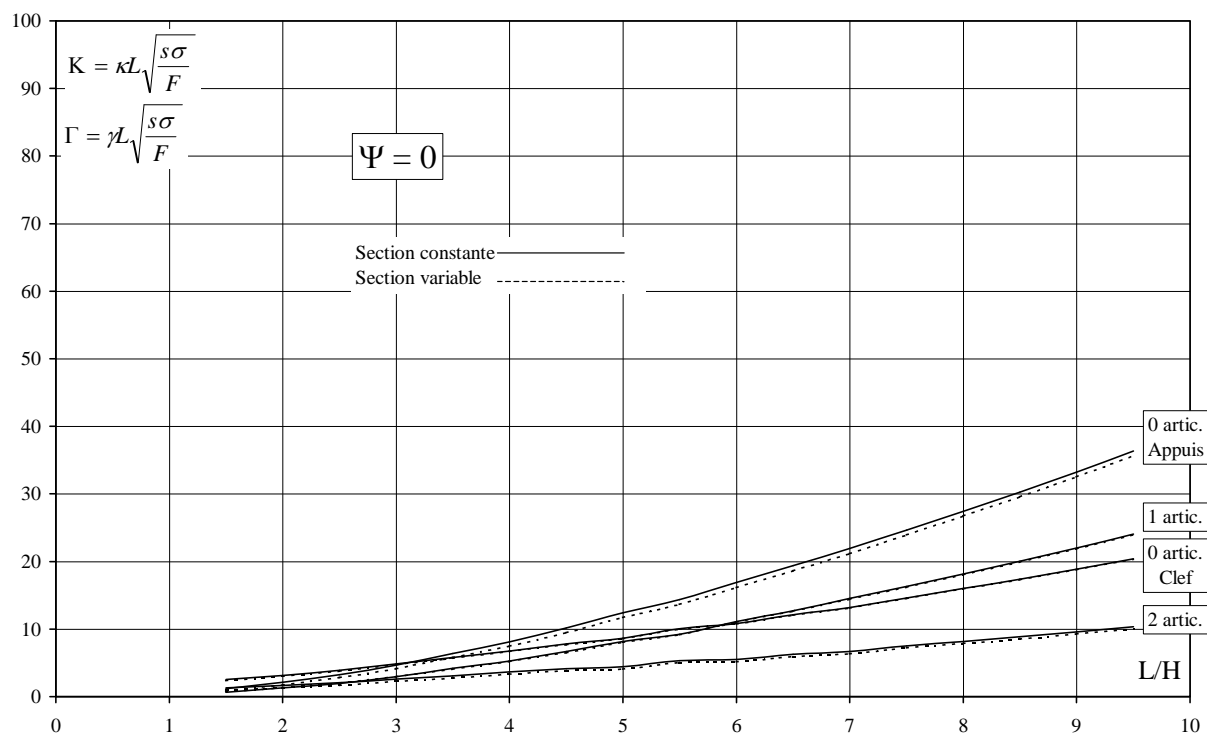


Figure II.4 : indicateur de delta-volume aux appuis et à la clef pour  $\psi = 0$ , relatif aux arcs de section constante (traits continus) et variable (traits pointillés).

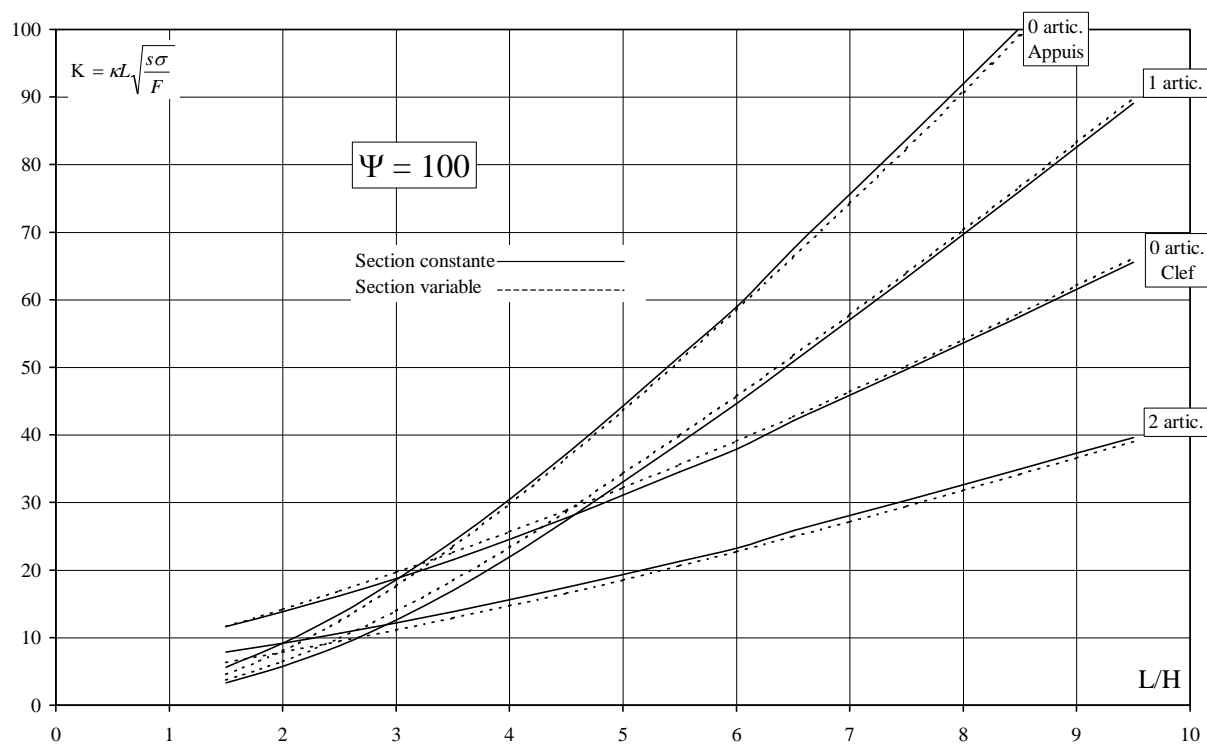
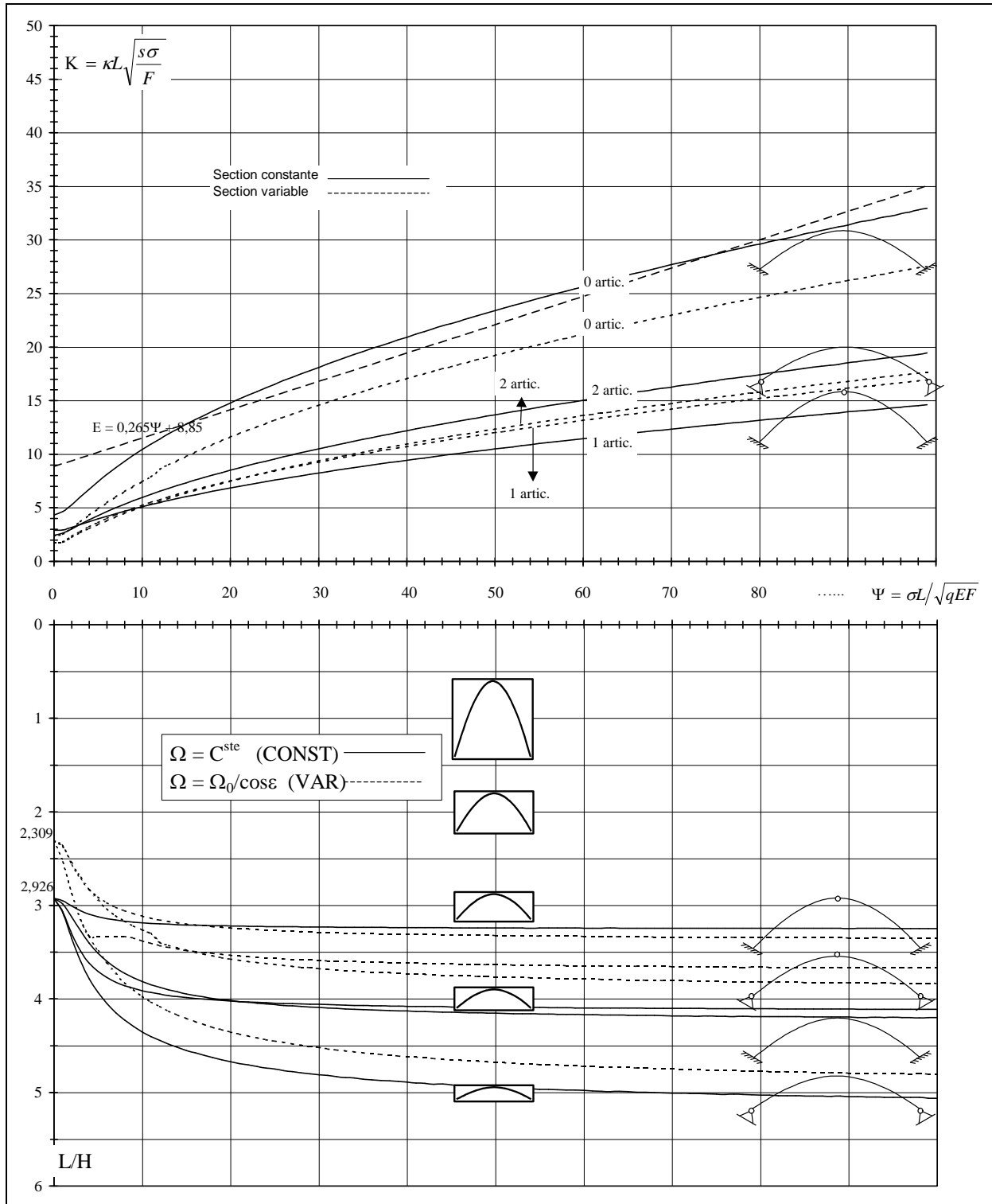


Figure II.5 : indicateur de delta-volume aux appuis et à la clef pour  $\psi = 100$ , relatif aux arcs de section constante (traits continus) et variable (traits pointillés).



**Figure II.6 :** indicateur de delta-volume relatif aux arcs les plus légers, appartenant aux courbes d'efficiences de la figure 18 du chapitre 4. La figure du dessous, reprise du chapitre 4, correspond aux valeurs de  $L/H$  associées à ces treillis.







# *Chapitre 6*

*Portée limite des  
structures*

*Photo de première page : passerelle au Népal.*

*Photo de Valérie Mahaut.*

## 1. INTRODUCTION

Les indicateurs de volume  $W$  et de déplacement  $\Delta$  permettant de déterminer les structures les plus légères ou les moins déformables, il est légitime de penser qu'ils peuvent être à la base d'une approche générale de détermination de la portée limite des structures.

L'approche dépendra du type de structure : une poutre fonctionne en flexion, un arc en compression, un câble en traction et un treillis est une combinaison d'éléments en traction et en compression. Dans chaque cas, on tentera d'obtenir une expression de la portée limite la plus simple et la plus générale qui soit afin de pouvoir comparer les différents types de structures.

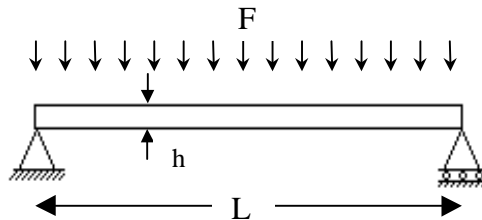
La portée limite peut se définir de deux manières. On distingue en effet :

- **la portée limite de résistance**, atteinte lorsque la résistance du matériau constitutif est dépassée alors que la structure n'est plus soumise qu'à son poids propre;
- **la portée limite de déformation**, atteinte lorsque la flèche relative  $\delta/L$  à mi-travée dépasse un certain pourcentage de la portée, alors que la structure n'est plus soumise qu'à son poids propre.

Cette étude concerne les poutres droites isostatiques sur deux appuis, les arcs isostatiques et hyperstatiques, les câbles et les treillis.

## 2. PORTEE LIMITE DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES

### 2.1. Portée limite sur base de la résistance



Pour une poutre droite isostatique de portée  $L$ , de section symétrique et constante de hauteur  $h$ , d'aire efficace  $\Omega$  et d'inertie  $I$ , de volume  $V$ , soumise à son poids propre  $\rho V$  ainsi qu'à une charge uniformément répartie  $F$ , on a :

$$\sigma = \frac{Mh}{2I} = \frac{\left(\frac{F}{L} + \frac{\rho V}{L}\right) \frac{L^2}{8} h}{2I} = \frac{(F + \rho V)Lh}{16I}$$

En posant  $Z = \Omega h^2 / 16I$  (Voir figure 1 ci-dessous) et en multipliant numérateur et dénominateur par  $\Omega h$ , on obtient :

$$\sigma = (F + \rho V)Z \frac{L}{\Omega h} = (F + \rho V)Z \frac{L}{(V/L)h} = \frac{FL}{V} \left(1 + \frac{\rho V}{F}\right) Z \frac{L}{h}$$

Cette relation fait apparaître l'indicateur de poids propre  $\Phi = \rho L / \sigma$  et l'indicateur de volume  $W = \sigma V / FL$  définis au chapitre 1, à condition de remarquer que :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{\sigma V}{FL} \frac{\rho L}{\sigma} = W\Phi.$$

On obtient alors :  $W = (1 + W\Phi)Z \frac{L}{h}$

La mise en évidence de  $W$  fournit l'expression finale ci-dessous de l'indicateur de volume d'une poutre, prenant en compte son poids propre :

$$W = \frac{1}{\frac{1}{Z} \left( \frac{h}{L} \right) - \Phi}$$

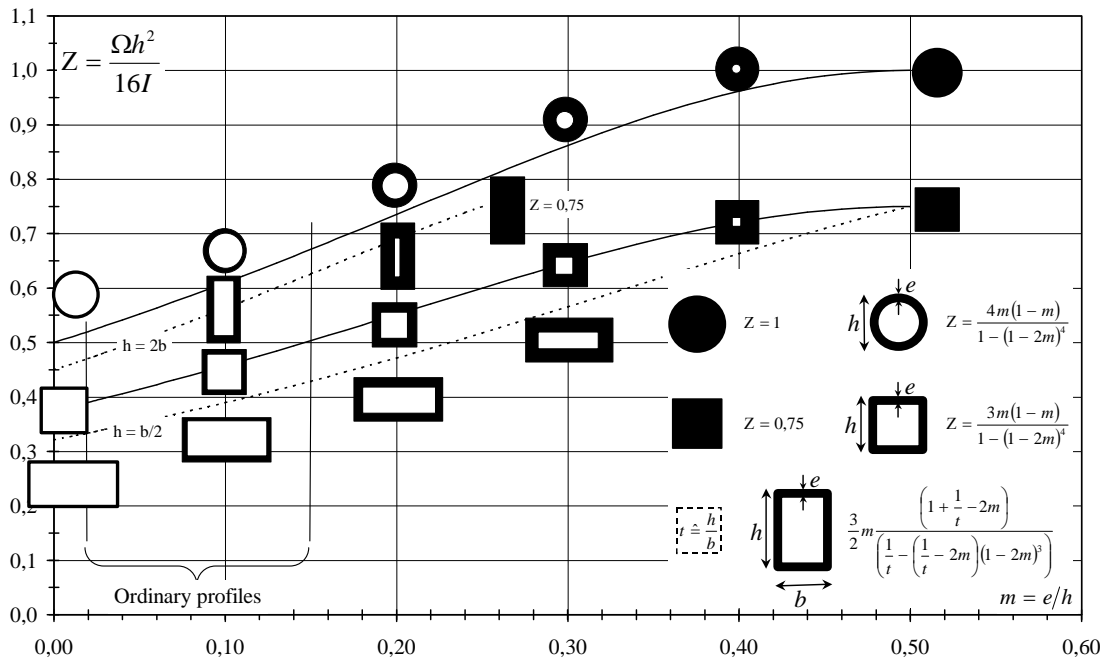


Figure 1 : valeur du facteur de forme  $Z = \Omega h^2 / 16I$ .

**Pour  $\Phi \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque l'on néglige le poids propre de la poutre, on retrouve la relation obtenue par Philippe Samyn dans sa thèse de doctorat (références en bibliographie) :

$$W = Z(L/h)$$

**Pour  $F/\rho V \rightarrow 0$** , c'est à dire lorsque la structure est essentiellement soumise à son poids propre, l'indicateur de volume tend vers une valeur infinie et n'a plus de sens physique. Cette situation se produit pour la **condition de portée limite** suivante :

$$\frac{L}{h} = \frac{1}{Z\Phi} \Leftrightarrow L_{\text{lim}} = \sqrt{\left(\frac{1}{Z}\right)\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)h} \quad \text{ou} \quad L_{\text{lim}} = \left(\frac{1}{Z}\right)\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)\left(\frac{h}{L}\right) \quad [1]$$

Les rapports  $\sigma/\rho$  respectifs moyens des matériaux usuels sont les suivants :

- pour l'acier HLE :  $\sigma/\rho = 3900.10^3$  [mm], ( $\sigma = 300$  Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour l'acier doux :  $\sigma/\rho = 1820.10^3$  [mm], ( $\sigma = 140$  Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour l'aluminium :  $\sigma/\rho = 2040.10^3$  [mm], ( $\sigma = 55$  Mpa,  $\rho = 27$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour le bois :  $\sigma/\rho = 1670.10^3$  [mm], ( $\sigma = 10$  Mpa,  $\rho = 6$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour le béton armé ou précontraint :  
 $\sigma/\rho = 600.10^3$  [mm], ( $\sigma = 15$  Mpa,  $\rho = 25$  kN/m<sup>3</sup>);

Pour une section carrée en caisson, le facteur de forme  $Z$  peut descendre jusqu'à des valeurs de l'ordre de 0,35 **ce qui permet de multiplier les portées limites relatives à la section carrée ou rectangulaire pleine, pour une hauteur de poutre "h" donnée, par un facteur au plus égal à 1,5** ( $\sqrt{0,75/0,35}=1,46$ ). Les caissons encore lus creux sont plus efficaces mais génèrent des phénomènes de flambement local dont il faut tenir compte. Par ailleurs, La portée limite peut être légèrement augmentée si le caisson est plus large que haut (voir figure 1).

La figure 2 représente les portées limites des poutres isostatiques sur deux appuis de section carrée ou rectangulaire pleine en fonction de  $h$  pour divers matériaux. La figure 3 concerne les sections en caisson de facteur de forme  $Z=0,35$ , ce qui est une valeur extrême. Les courbes en pointillés permettent d'évaluer directement l'élançement géométrique  $L/h$ . Les figures 2 et 3 suggèrent les commentaires suivants :

- Une augmentation de portée limite ne peut s'obtenir qu'au prix d'une diminution de l'élançement géométrique  $L/h$  de la poutre : pour un matériau donné, une portée limite infiniment grande s'obtient théoriquement pour une poutre infiniment plus haute que longue. Dans ce cas la poutre ne mérite plus son nom et les lois de comportement doivent être modifiées;
- Les matériaux bois, aluminium et acier doux sont relativement équivalents. Le matériau béton est très pénalisé, tandis que l'acier à haute limite élastique permet le franchissement des plus grandes portées;
- Si on limite la hauteur  $h$  du caisson à 10 mètres, ce qui constitue déjà une valeur extrême, on constate que la portée maximale des poutres en caisson est égale :
  - à 130 mètres pour un caisson en béton;
  - à une moyenne de 230 mètres pour un caisson en bois, acier doux ou aluminium;
  - à 330 mètres pour un caisson en acier HLE;

Ces valeurs sont fortement réduites si l'on tient compte des limitations sur les déformations (voir ci-dessous) ou si la hauteur de section "h" diminue.

Les constatations précédentes ne tiennent compte ni des déformations, ni des effets dynamiques, ni des effets pervers du vent (torsion, oscillations) et sont effectuées sur base de caissons performants ( $Z=0,35$ ) de hauteur 10 mètres, ce qui est un extrême. Les portées limites données par les figures 2 et 3 et commentées ci-dessus sont donc des valeurs extrêmes indicatives.

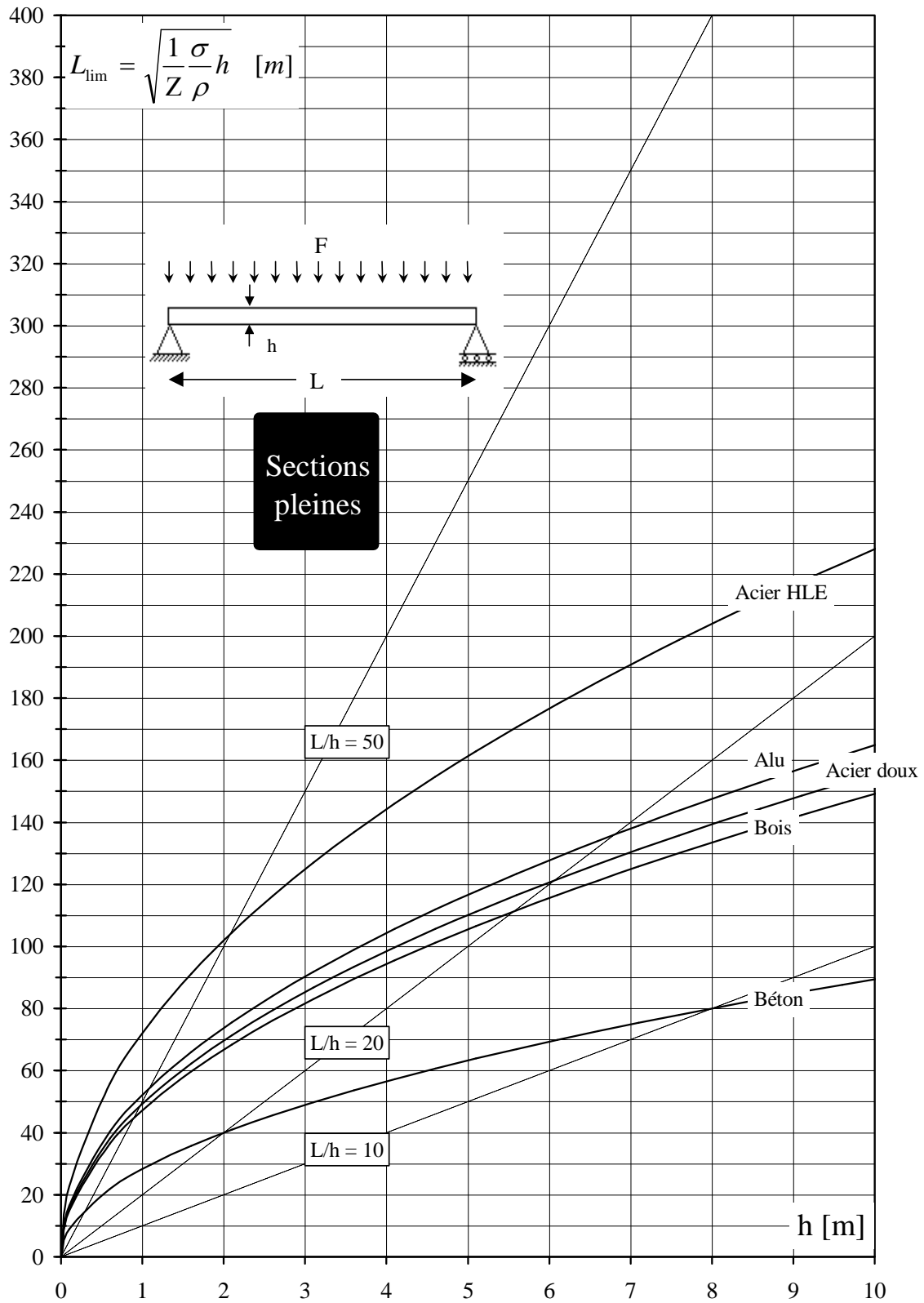


Figure 2 : portée limite des poutres droites isostatiques de section constante rectangulaire ou carrée pleine ( $Z = 0,75$ ), sur base de la résistance.

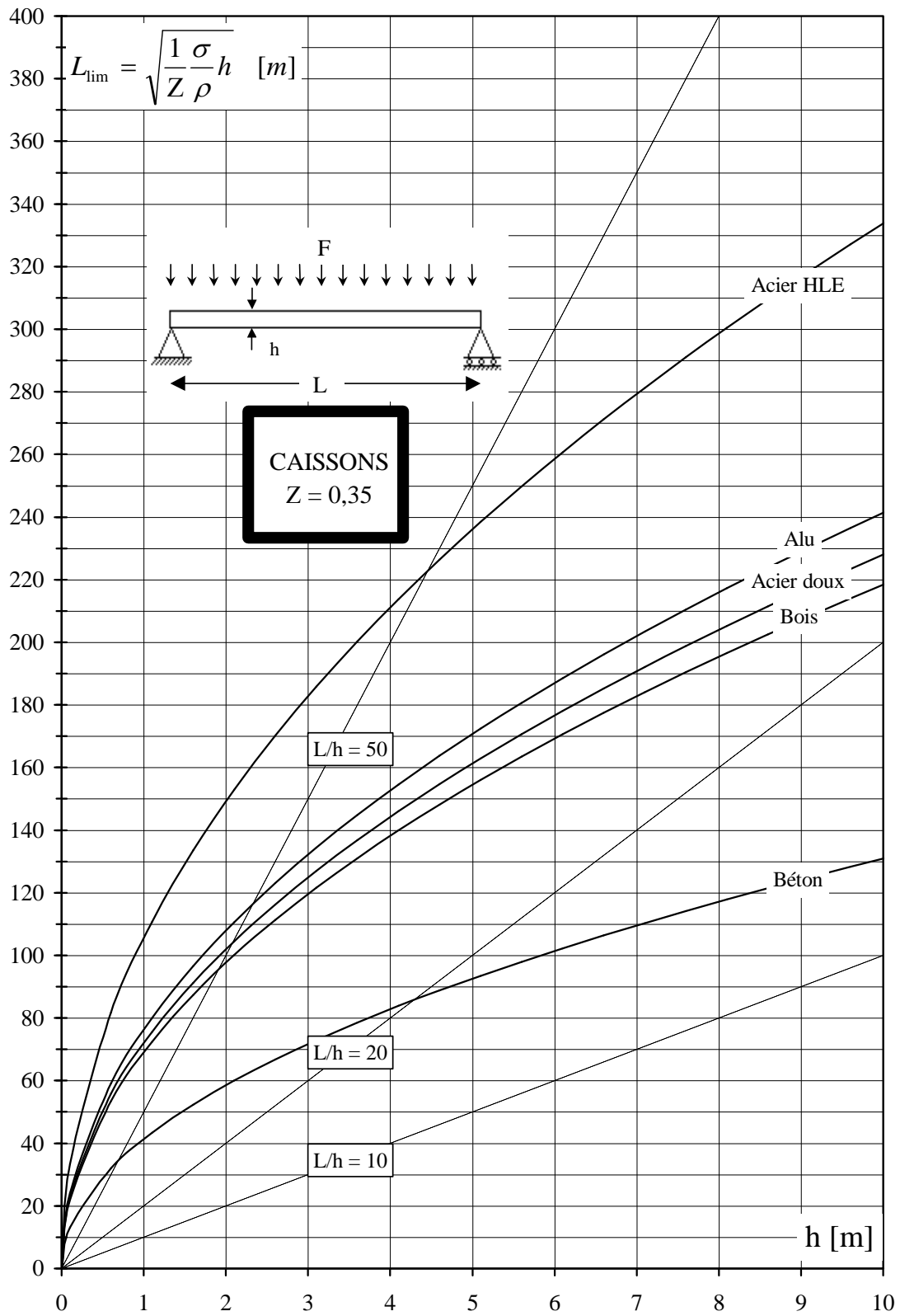
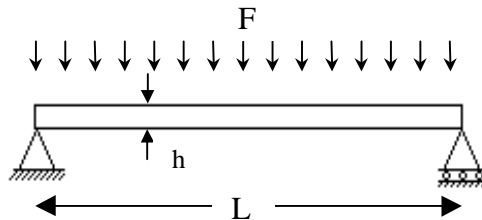


Figure 3 : portée limite des poutres droites isostatiques de section constante en caisson ( $Z=0,35$ ), sur base de la résistance.

## 2.2. Portée limite sur base des déformations

### 2.2.1. Indicateur de déplacement à mi-travée d'une poutre isostatique sur deux appuis, avec prise en compte du poids propre



La flèche verticale à mi-travée vaut :  $\delta = \int \frac{Mm}{EI} ds$  .

Dans cette expression, M est le moment fléchissant dans la poutre de charge totale  $F + \rho V$  (allure parabolique, de valeur maximale au centre  $(F + \rho V)L/8$ ) et m est le moment fléchissant dans la poutre de même caractéristique, chargée par un effort ponctuel unitaire vertical à mi-travée (allure linéaire, de valeur maximale au centre  $L/4$ ). Une intégration donne le résultat suivant :

$$\delta = \frac{5L^2}{24E} \frac{(F + \rho V)L}{16I} \quad [2]$$

Par ailleurs, si on impose que la contrainte maximale à mi-travée soit égale à la contrainte "admissible"  $\sigma$ , ce qui veut dire que le matériau est utilisé convenablement, on a :

$$\sigma = \frac{((F + \rho V)L/8)h}{2I} = \frac{(F + \rho V)Lh}{16I} \Rightarrow \frac{(F + \rho V)L}{16I} = \frac{\sigma}{h} \quad [3]$$

La combinaison des relations [2] et [3] fournit le résultat suivant :

$$\delta = \frac{5L^2}{24E} \frac{\sigma}{h}$$

Cette dernière relation permet de mettre en évidence *l'indicateur de déplacement* de la poutre (démontrée par Philippe Samyn dans sa thèse de doctorat), qui est indépendant de la valeur des charges, du poids propre et du type de section d'une part et linéairement proportionnel à  $L/h$  d'autre part :

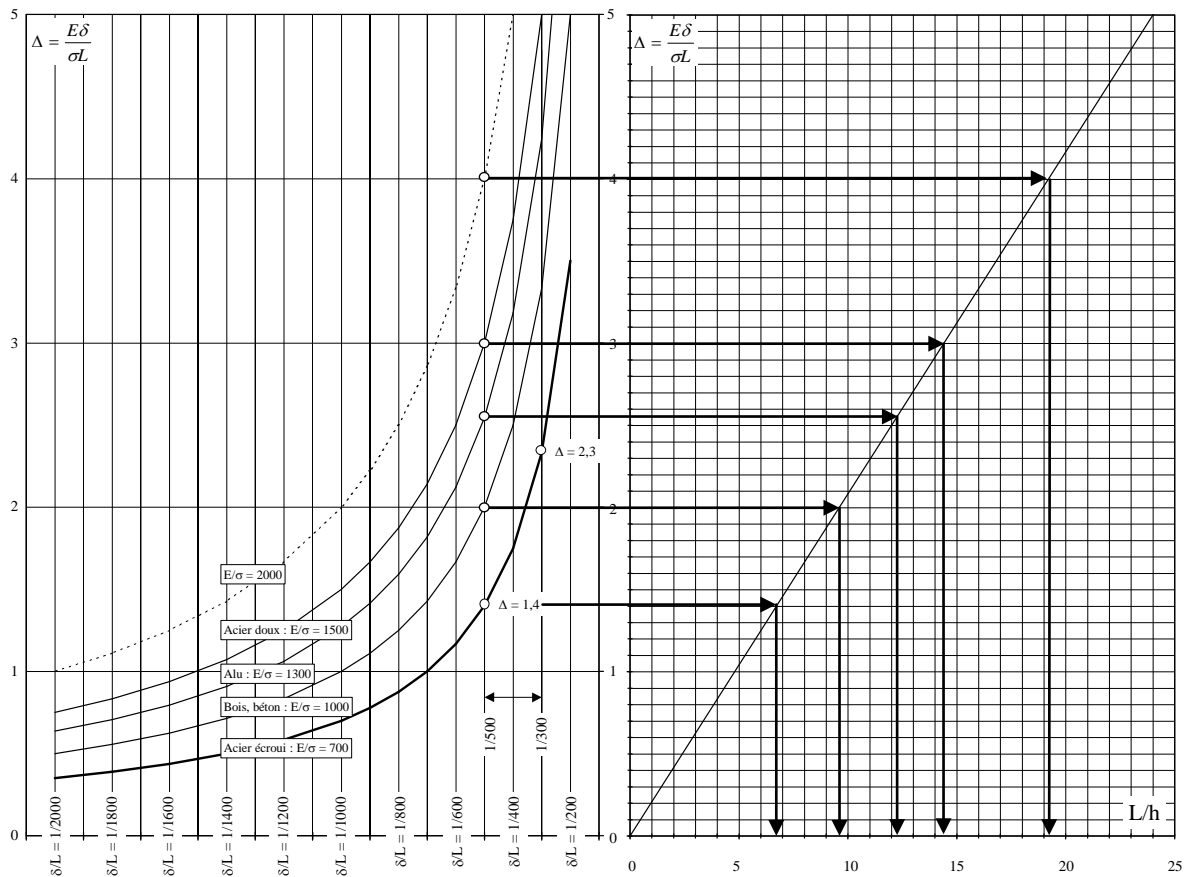
$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \frac{5}{24} \frac{L}{h} \quad [4]$$

La figure 4 (à droite) illustre la relation [4], en vis-à-vis avec la figure de gauche (établie au chapitre 3, §6) qui permet de déduire immédiatement les flèches relatives  $\delta/L$  en fonction du matériau.

Les limitations suivantes sur la flèche à mi-travée sont généralement acceptées :

- Eléments de bâtiment :  $L/300..L/350$
- Passerelles :  $L/500$
- Ponts routiers :  $L/600$
- Ponts ferroviaires :  $L/800$





**Figure 4 :** indicateur de déplacement d'une poutre droite isostatique de section constante soumise à une charge totale uniformément distribuée, et dont la contrainte maximale à mi-travée est égale à la contrainte "admissible".

Si on prend une flèche relative maximale de, respectivement, 1/500 et 1/300 comme référence, on peut calculer les valeurs maximales de l'indicateur de déplacement pour chaque matériau, et donc les valeurs maximales de l'élancement géométrique L/h qui leur correspondent :

- Acier à haute limite élastique :	$L/h \leq 6,7 \rightarrow 11,2$	
- Acier doux :	$L/h \leq 14,4 \rightarrow 24,0$	
- Aluminium :	$L/h \leq 12,5 \rightarrow 20,3$	
- Bois :	$L/h \leq 9,6 \rightarrow 16,0$	
- Béton :	$L/h \leq 9,6 \dots 15 \dots 24$	

Pour le matériau béton (armé ou précontraint), les caractéristiques peuvent varier d'une situation à l'autre, de telle sorte que le rapport E/σ peut atteindre 1500, voire plus. Pour l'acier à haute limite élastique (HLE), on voit que l'utilisation du matériau à son maximum de résistance σ implique des poutres "épaisses" dans le plan de flexion (L/h petit), même lorsque la flèche relative n'est limitée qu'à 1/300. Pour une même charge F, une même portée L et une même contrainte de flèche relative δ/L, une poutre en acier HLE sera plus fine et plus légère, mais donc aussi plus haute qu'une poutre en acier doux (les deux poutres travaillant à leur contrainte "admissible").

### 2.2.2. Calcul des portées limites

Comme on recherche la portée limite sur base des déformations, aucune imposition ne peut être faite sur la contrainte maximale à mi-travée. Si on pose  $F = \varepsilon \rho V$ , la relation [2] devient :

$$\delta = \frac{5L^2}{24E} \frac{(1 + \varepsilon) \rho \Omega L^2}{16I}$$

Cette relation fait apparaître le facteur de forme  $Z$  de la section :

$$\delta = \frac{5\rho}{24E} (1 + \varepsilon) \frac{Z L^4}{h^2} \quad \text{avec} \quad Z = \Omega H^2 / 16I$$

Cette dernière expression permet de mettre en évidence la limite d'une poutre, calculée sur base des déformations :

$$L_{\text{lim}} = \sqrt[3]{\frac{24}{5} \left( \frac{\delta}{L} \right) \left( \frac{E}{\rho} \right) \frac{1}{Z} h^2}$$

rapports  $E/\rho$  respectifs moyens des matériaux usuels sont les suivants :

- pour les aciers :  $E/\rho = 2727.10^6$  [mm], (E= 210000 Mpa,  $\rho = 77$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour l'aluminium :  $E/\rho = 2592.10^6$  [mm], (E = 70000 Mpa,  $\rho = 27$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour le bois :  $E/\rho = 1670.10^6$  [mm], (E = 10000 Mpa,  $\rho = 6$  kN/m<sup>3</sup>);
- pour le béton armé ou précontraint :  
 $E/\rho = 600.10^6$  à  $1200.10^6$  [mm], (E = 15000...30000 Mpa,  $\rho = 25$  kN/m<sup>3</sup>).

La relation ci-dessus permet d'établir :

- la figure 5, correspondant à une flèche relative de 1/500 et aux sections pleines;
- la figure 6, correspondant à une flèche relative de 1/500 et aux sections en caisson;
- la figure 7, correspondant à une flèche relative de 1/300 et aux sections pleines;
- la figure 8, correspondant à une flèche relative de 1/300 et aux sections en caisson;

Ces figures suggèrent les commentaires suivants :

Pour  $\delta/L=1/500$ , Les portées limites calculées sur base des déformations sont **toujours plus sévères** que les portées limites calculées sur base de la résistance, exception faite des poutres en béton ayant une section de grande hauteur. La contrainte maximale à mi-travée est donc toujours inférieure à la contrainte "admissible" du matériau.

Pour  $\delta/L=1/300$ , on peut tirer la même conclusion, qui n'est plus valable pour les sections pleines de grande hauteur, ce qui constitue un cas marginal et non relevant.

Si on limite l'analyse aux caissons dont la hauteur ne dépasse pas 10 mètres, ce qui constitue un extrême difficilement réalisable en pratique, les portées limites pour les différents matériaux sont les suivantes, **la flèche relative étant fixée à 1/500** :

- 200 mètres pour les aciers et l'aluminium;
- 170 mètres pour le bois;
- 130 mètres pour le béton;

### 2.3. Conclusion

De façon générale, la portée limite d'une poutre est déterminée par la hauteur maximale "h" qu'on lui donne : plus cette hauteur est grande, plus la portée peut être importante. Par ailleurs, les contraintes de flèche relative sont plus sévères que les contraintes de résistance, sauf pour des cas non-relevant combinant des sections pleines et des hauteurs de section importantes. Les portées limites, basées sur les déformations, correspondent donc à des poutres dont la contrainte maximale à mi-travée n'atteint pas la contrainte "admissible" et qui n'exploitent donc pas le matériau à son maximum de résistance. L'étude montre aussi que le matériau permettant d'atteindre les plus grandes portées est l'acier, tandis que celui qui correspond aux plus petites portées est le béton. Cette constatation est valable quel que soit le critère de portée limite considéré (résistance ou déformation).

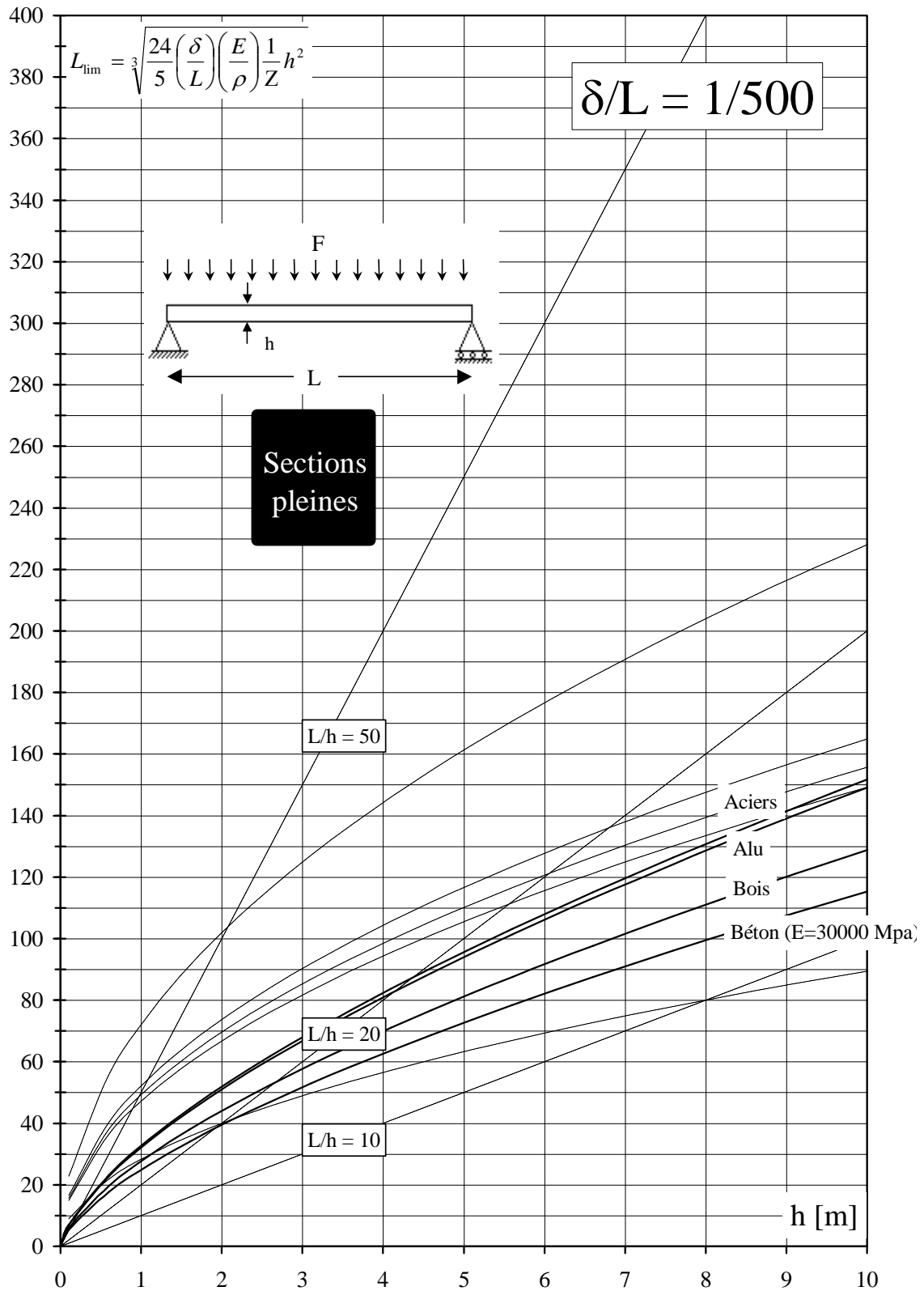


Figure 5 : portée limite des poutres droites isostatiques de section pleine carrée ou rectangulaire, sur base des déformations ( $\delta/L = 1/500$ ). Les traits pointillés longs correspondent aux portées limites sur base de la résistance.

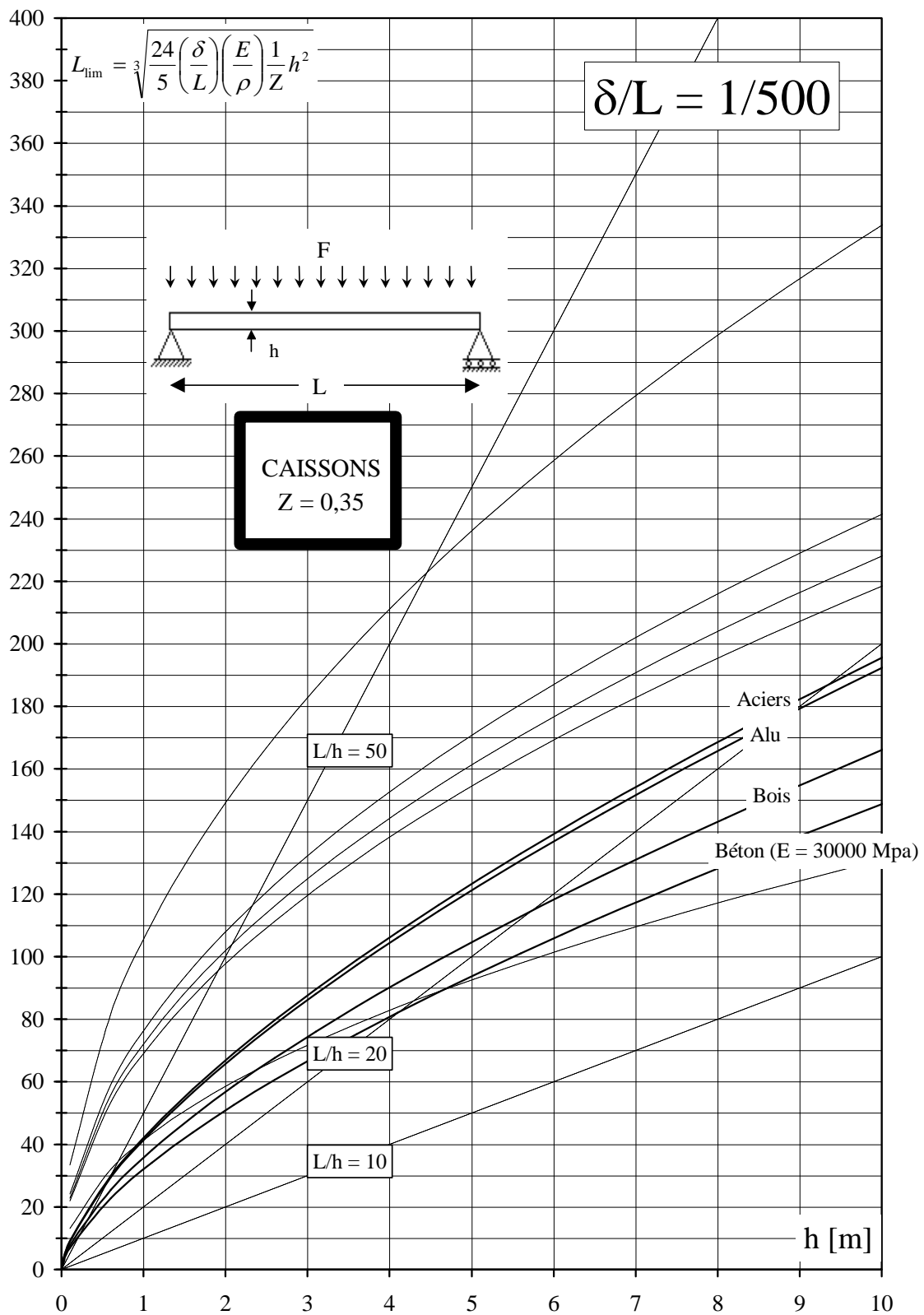
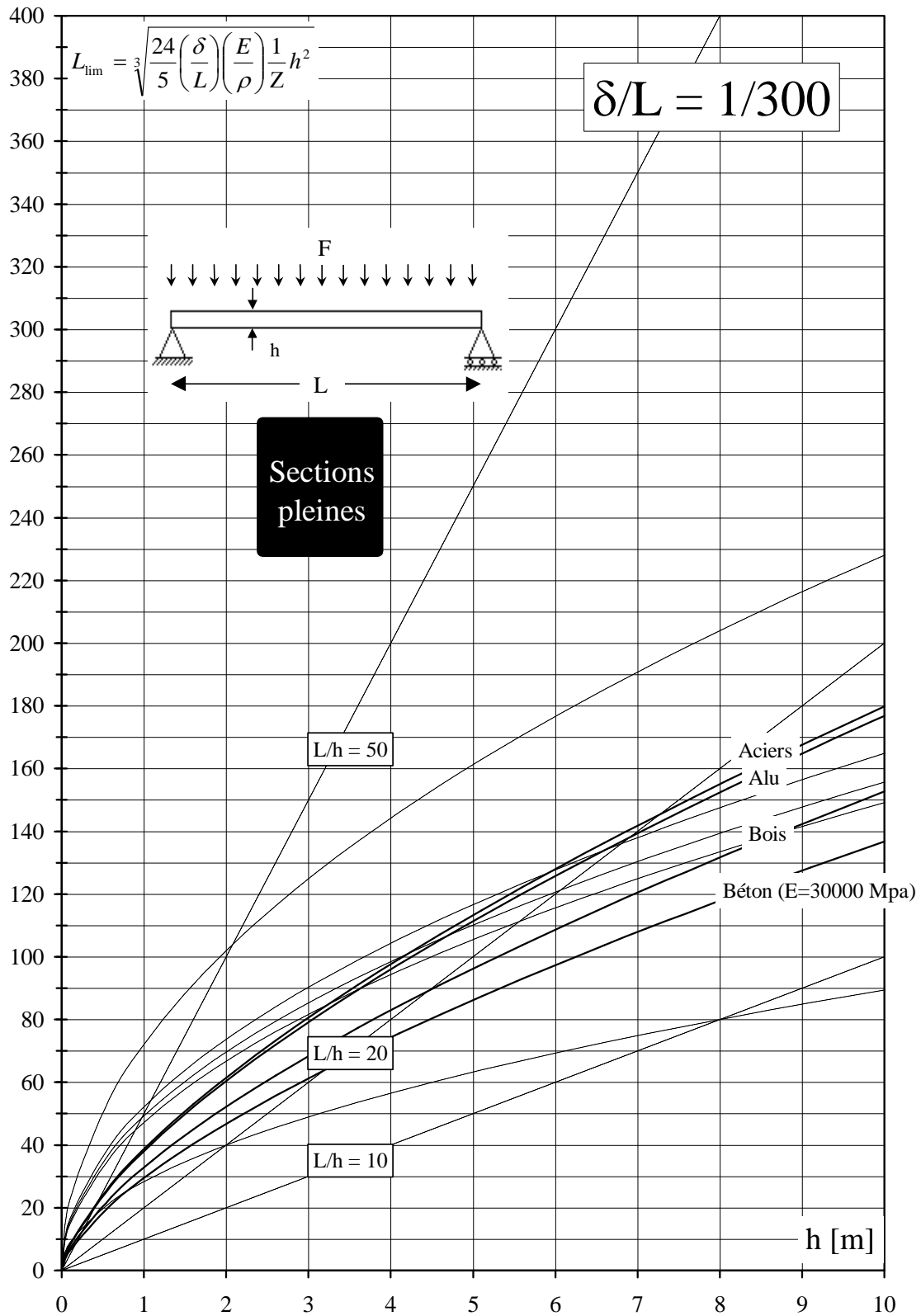


Figure 6 : portée limite des poutres droites isostatiques en caisson, sur base des déformations ( $\delta/L = 1/500$ ). Les traits pointillés longs correspondent aux portées limites sur base de la résistance.



**Figure 7** : portée limite des poutres droites isostatiques de section pleine carrée ou rectangulaire, sur base des déformations ( $\delta/L = 1/300$ ). Les traits pointillés longs correspondent aux portées limites sur base de la résistance.

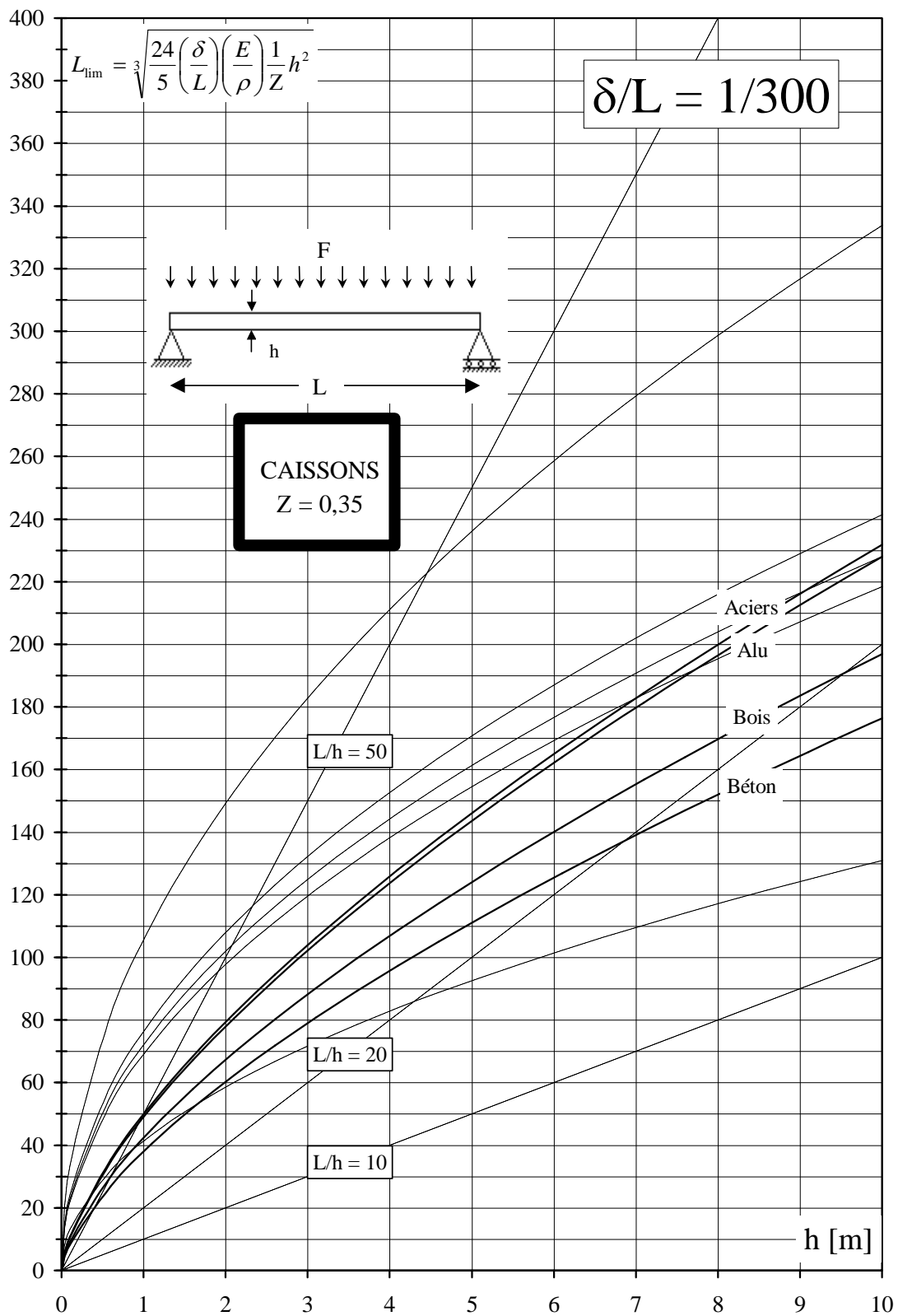


Figure 8 : portée limite des poutres droites isostatiques en caisson, sur base des déformations ( $\delta/L = 1/300$ ). Les traits pointillés longs correspondent aux portées limites sur base de la résistance.

### 3. PORTEE LIMITE DES ARCS

#### 3.1. Portée limite sur base de la résistance

Par soucis de simplification, on ne considère ici que les arcs de section constante, dont l'indicateur de volume a été démontré au chapitre 4 (§2.3.2.) :

$$W = \frac{\sigma V}{F_{tot} L} = \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot W^{(C)}$$

$$\text{Avec : } W^{(C)} = \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[ \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \right] \right) = \text{Fonction } (L/H)$$

Si la portée L augmente, la charge F devient une fraction  $F = \varepsilon(\rho V)$  du poids propre total et on obtient, en supposant que le poids propre est uniformément distribué :

$$\frac{\sigma}{(1 + \varepsilon)\rho L} = \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\sigma L}{\gamma_{cor} \sqrt{qE(1 + \varepsilon)\rho V}} \right)^2} \right) \cdot W^{(C)}$$

$$\text{Par ailleurs, le volume total V vaut : } V = \Omega l_{arc} = \Omega L g^{(L/H)} = s h^2 L g^{(L/H)} .$$

Dans cette expression, "s" est le facteur de forme de la section de l'arc, défini au chapitre 5 (§I.1, figures I.2 et I.3) et  $g^{(L/H)}$  est une fonction qui ne dépend que du rapport L/H et qui a été définie au chapitre 4 (§2.2.1. et figure 10). Il est important de ne pas confondre H (hauteur totale de l'arc à la clef) avec h (hauteur de la section de l'arc). On obtient :

$$\frac{\sigma}{(1 + \varepsilon)\rho L} = \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\sigma \sqrt{L}}{\gamma_{cor} h \sqrt{qsE(1 + \varepsilon)\rho g^{(L/H)}}} \right)^2} \right) \cdot W^{(C)}$$

Comme le produit des deux facteurs de formes "qs" peut s'exprimer en fonction du troisième facteur de forme Z comme suit (Z a été défini au chapitre 1, §10, figure 23) :

$$qs = \frac{I}{\Omega^2} \frac{\Omega}{h^2} = \left( \frac{\Omega h^2}{I} \right)^{-1} = \frac{1}{16Z} \text{ avec } Z \hat{=} \frac{\Omega h^2}{16I}, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\sigma}{(1 + \varepsilon)\rho L} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{64}{(1 + \varepsilon)} Z L \frac{\gamma}{\gamma_{cor}^2 g^{(L/H)}} \frac{\sigma^2}{E \rho} \frac{1}{h^2}} \right) \cdot W^{(C)} \quad [5]$$

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la portée limite est donc une fonction implicite des paramètres suivants :

$$L_{lim} = \text{fonction implicite} \left( \text{matériau} \left( \frac{\sigma}{\rho}, \frac{\sigma}{E} \right), Z, \frac{L}{H}, h \text{ ou } \frac{L}{h} \right)$$



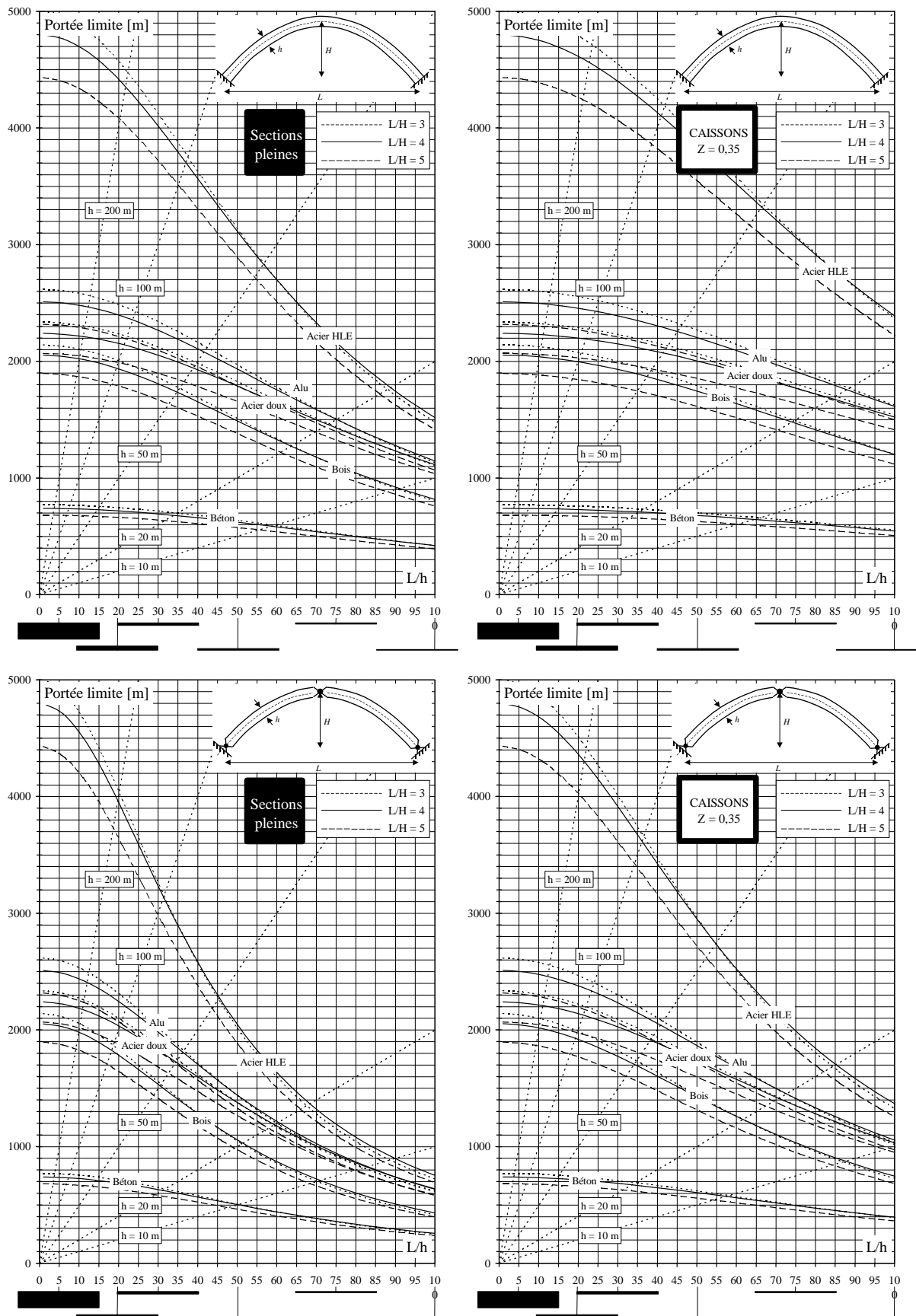


Figure 9 : portées limites des arcs paraboliques en fonction de l'élançement géométrique  $L/h$  ( $\neq L/H!$ ).

Une résolution numérique de l'équation 5 fournit la figure 9 qui donne les valeurs de la portée limite en fonction du rapport  $L/h$  (Figures du dessus : relatives aux arcs sans articulation, figures du dessous : relatives aux arcs à 3 articulations).

Celle-ci suggère les commentaires suivants :

- le rapport  $L/H$  a peu d'influence sur les valeurs de la portée limite, du moins pour les valeurs classiques comprises entre 3 et 5;
- l'augmentation de portée limite inhérente à l'absence d'articulations ou à la présence d'un caisson se fait d'autant plus sentir que le rapport  $L/h$  (et pas  $L/H$  !) est grand.
- la borne supérieure des portées limites s'obtient dans tous les cas pour  $L/h = 0$  (à ne pas confondre avec  $L/H$ ) et correspond à des hauteurs "h" démesurées. Dans ce cas, la condition de portée limite devient :

$$L_{\lim_{L/h \rightarrow 0}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{2W^{(c)}}$$

Or,  $2W^{(c)}$  est précisément l'indicateur de volume d'un arc qui est dimensionné sans tenir compte du flambement (voir chapitre 4, §2.1.). Cette constatation rejoint la remarque qui sera effectuée plus loin au §5 concernant la portée limite des treillis : la borne supérieure absolue de la portée limite s'obtient en considérant un treillis dimensionné sans tenir compte du flambement.

Une résolution numérique de l'équation 5 fournit la figure 10 qui donne cette fois les valeurs de la portée limite en fonction de la hauteur  $h$  de la section (Sous-figures du dessus : relatives aux arcs sans articulation, sous-figures du dessous : relative aux arcs à 3 articulations). Pour cette figure, on a choisi  $L/H = 4$ , ce qui représente une moyenne convenable.

La figure 10 montre que, dans le meilleur des cas relatif à l'arc sans articulations dont la section est un caisson, les portées limites valent, si on limite légitimement la hauteur  $h$  de la section à 10 mètres, ce qui constitue un extrême :

- 1500 mètres pour un arc en acier HLE;
- 1300 mètres pour un arc en aluminium ou acier doux;
- 1100 mètres pour un arc en bois;
- 650 mètres pour un arc en béton;

Dans le pire des cas relatif à l'arc à 3 articulations de section pleine, on obtient les portées limites suivantes :

- 900 mètres pour un arc en acier HLE;
- 830 mètres pour un arc en aluminium ou acier doux;
- 700 mètres pour un arc en bois;
- 500 mètres pour un arc en béton;

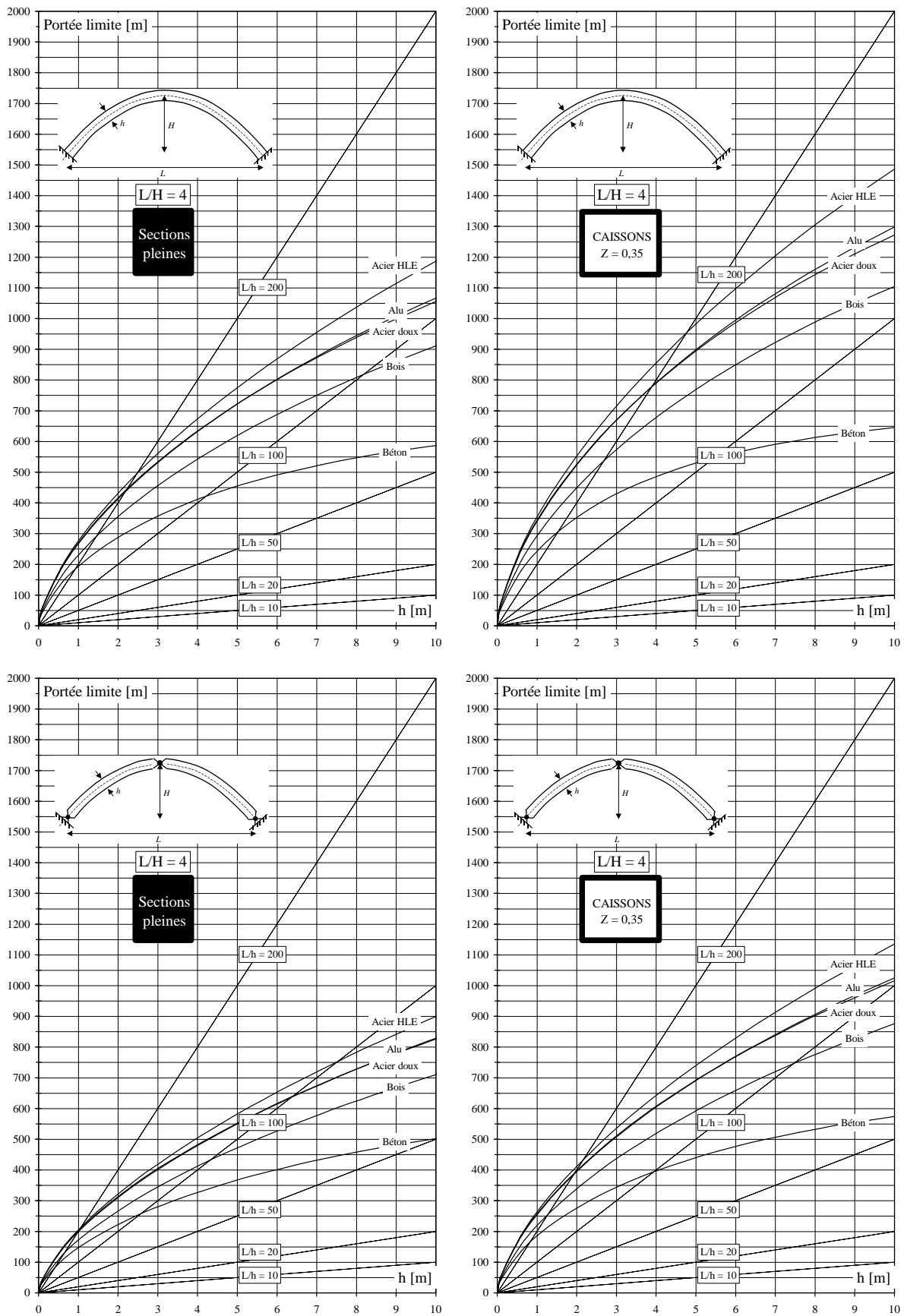


Figure 10 : portées limites des arcs paraboliques d'élanement  $L/H = 4$  en fonction de la hauteur  $h$  de la section de l'arc.

### 3.2. Portée limite sur base des déformations à la clef

Le déplacement à la clef d'un arc de section constante a été démontré au chapitre 4 (§6, équation [10] et vaut :

$$\delta = \frac{(F + \rho V)L}{16EH} \frac{L}{\Omega} \int \left( \frac{L}{2H} + tg\varepsilon \right) \frac{ds}{L}$$

Le terme d'intégrale ne dépend que du rapport L/H et sera noté J. Par ailleurs, si la charge extérieure F est une fraction  $\varepsilon(\rho V)$  du poids propre total supposé uniformément réparti, on obtient :

$$\delta = \frac{(1 + \varepsilon)\rho VL}{16EH} \frac{L}{\Omega} J$$

Comme  $V = \Omega l_{arc}$  et que la longueur de l'arc  $l_{arc}$  est égale à  $g^{(L/H)}L$  ( $g^{(L/H)}$  est une fonction qui a été définie au chapitre 4, §2.2.1., figure 10), on obtient finalement l'expression de la portée limite d'un arc sur base des déformations, en posant  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$L_{lim} = 16 \left( \frac{\delta}{L} \right) \left( \frac{E}{\rho} \right) \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \left[ \frac{H/L}{Jg^{(L/H)}} \right]$$

Le terme entre parenthèses de droite ne dépend que du rapport L/H et vaut 0,075 pour L/H = 4.

Pour cette valeur de L/H = 4 et en imposant  $\delta/L = 1/500$ , la portée limite vaut, respectivement :

- pour les arcs en acier : 6545 [m]
- pour les arcs en alu : 6221 [m]
- pour les arcs en bois : 4008 [m]
- pour les arcs en béton : 1440...2880 [m]

On constate que ces valeurs sont de loin supérieures aux portées limites obtenues sur base de la résistance et illustrées à la figure 10. On en conclut donc que **la portée limite des arcs est essentiellement dictée par des considérations de résistance, contrairement à celle des poutres.**

Pour compléter et confirmer cette analyse, il est intéressant de calculer les valeurs de la flèche relative  $\delta/L$  correspondant aux arcs dont la portée est égale à la portée limite de résistance, en l'occurrence les arcs illustrés à la figure 10. Puisque les indicateurs de déplacement sont calculés sur l'hypothèse que la structure est à la limite de sa résistance, le calcul s'effectue comme suit :

L'indicateur de déplacement d'un arc de section constante a été établi au chapitre 4 (§6.3.1) et vaut :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right)^{-1} \cdot \Delta^{(c)} \quad [6]$$

$$\text{Avec} \quad \Delta^{(c)} = \frac{1}{\beta_1} \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right]$$

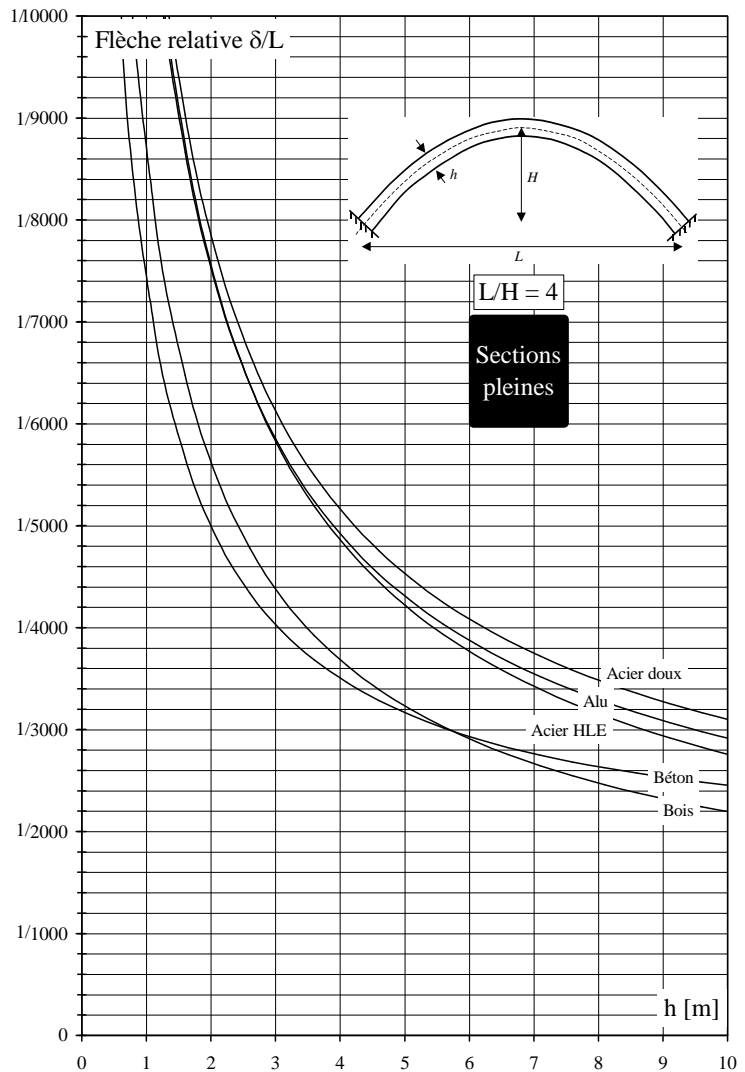
$$\text{Et } \beta_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} \quad , \quad \beta_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{4H}\right)^2} \quad .$$

Comme cela a été fait au §3.1., la relation [6] peut se transformer pour obtenir, finalement :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{64}{(1 + \varepsilon)} Z \frac{1}{L} \frac{\gamma}{\gamma_{cor}^2 g^{(L/H)}} \frac{\sigma^2}{E \rho} \left(\frac{L}{h}\right)^2} \right)^{-1} \cdot \Delta^{(C)} \quad [7]$$

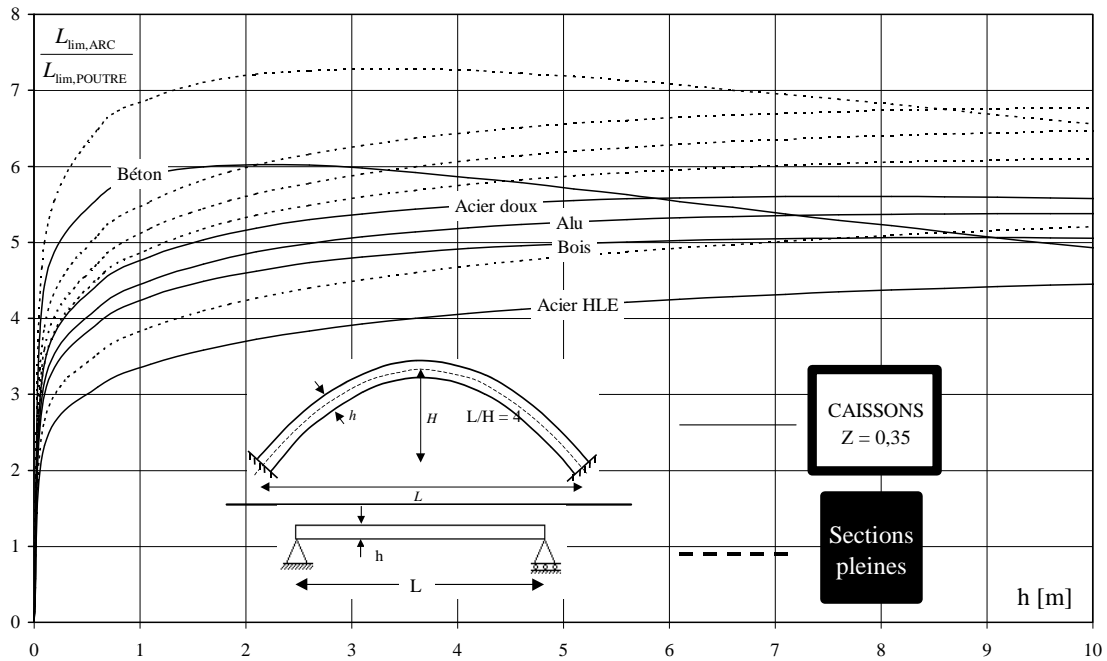
L'équation [7] permet donc de calculer les flèches relatives des arcs relatifs à la figure 10. La figure 11 illustre le résultat de ce calcul pour les arcs sans articulations de section pleine. Cette figure confirme que les flèches relatives sont extrêmement faibles.

**Figure 11** : flèches relatives correspondant aux arcs de portée limite illustrés à la figure 10 (en haut à gauche)



### 3.3. Conclusion

Pour l'arc, c'est la résistance du matériau qui détermine les portées limites, contrairement à la poutre droite pour laquelle ce sont les impositions sur la flèche relative à mi-travée. On remarque aussi que les arcs autorisent des portées limites bien supérieures aux poutres droites, comme l'illustre la figure 12 qui représente le rapport entre la portée limite d'un arc sans articulations et celle d'une poutre isostatique sur deux appuis.



**Figure 12 :** rapport entre la portée limite des arcs ( $L/H=4$ , pas d'articulations) et celle des poutres droites, pour les sections en caisson (traits continus) et les sections pleines (traits pointillés)

## 4. PORTEE LIMITE DES CABLES

### 4.1. Calcul selon l'hypothèse "câble parabolique"

L'indicateur de volume d'un câble de géométrie parabolique est identique à celui de l'arc de section constante (voir chapitre 4, §2.1.) :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \left( \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left( \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \right) \right)$$

Si on tient compte du poids propre total  $\rho V$  que l'on suppose uniformément réparti, cette relation devient :

$$\frac{\sigma V}{(F + \rho V)L} = \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \left( \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left( \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \right) \right)$$

Si la portée augmente, la charge  $F$  devient une fraction  $F = \varepsilon (\rho V)$  du poids propre total et on obtient :

$$\frac{\sigma}{(1 + \varepsilon)\rho L} = \frac{1}{16} \frac{L}{H} \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \left( \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left( \frac{4H}{L} + \sqrt{1 + 16 \left( \frac{H}{L} \right)^2} \right) \right)$$

Si on appelle  $W^{(T)}$  le terme de droite qui ne dépend que du rapport  $L/H$  et qui possède un minimum pour  $L/H = 2,926$ , la relation précédente met en évidence la portée limite d'un câble, qui s'obtient pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$L_{\text{lim}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{(1 + \varepsilon)W^{(T)}}$$

La figure 14 donne les valeurs de la portée limite pour l'aluminium, l'acier doux, l'acier à haute limite élastique et l'acier à très haute limite élastique en fonction du rapport  $L/H$ .

Quelque soit le matériau, la portée maximale théorique d'un câble s'obtient pour  $L/H=2,926$  et vaut :

- pour l'acier à très haute limite élastique ( $\sigma = 1000$  Mpa) :  $L_{\text{lim}} = 16707$  mètres;
- pour l'acier à haute limite élastique ( $\sigma = 300$  Mpa) :  $L_{\text{lim}} = 5012$  mètres;
- pour l'acier doux ( $\sigma = 140$  Mpa) :  $L_{\text{lim}} = 2339$  mètres;
- pour l'aluminium :  $L_{\text{lim}} = 2622$  mètres;

Ces portées limites diminuent très fortement lorsque le câble est plus tendu ( $L/H$  plus grand) ou moins tendu ( $L/H$  plus petit).

Par ailleurs, l'indicateur de déplacement d'un câble permet de calculer les valeurs de  $\delta/L$  des câbles dont la portée est égale à la portée limite de résistance. Il vaut (la démonstration est identique à celle de l'arc de section constante, voir chapitre 4, §6.1) :

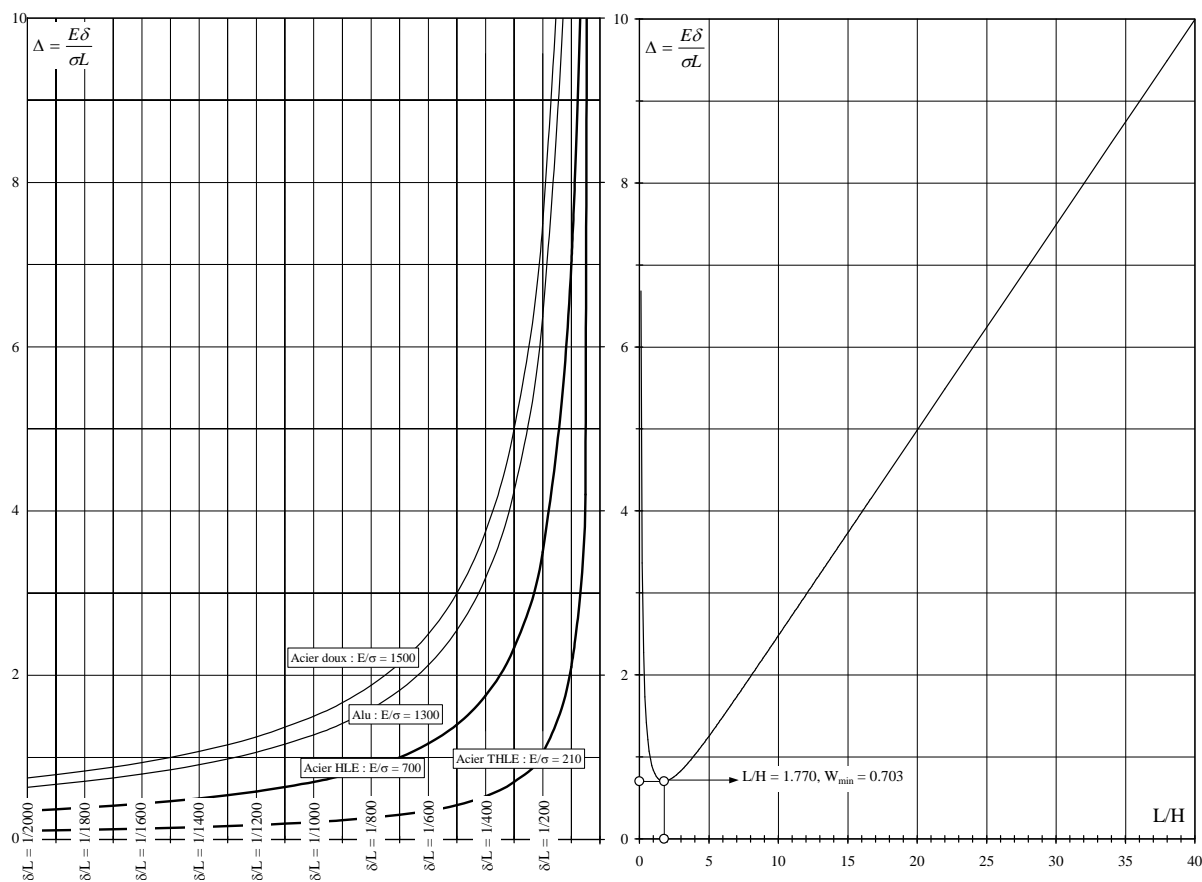
$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \frac{1}{2\beta_1} \left[ \beta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \ln \left( \frac{4H}{L} (1 + \beta_2) \right) + \frac{16}{3} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \beta_2^3 - \frac{1}{64} \left( \frac{L}{H} \right)^3 \right) \right]$$

Avec

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{1 + \left( \frac{4H}{L} \right)^2} \\ \beta_2 = \sqrt{1 + \left( \frac{L}{4H} \right)^2} \end{cases}$$

La figure 13 illustre les valeurs de cet indicateur de déplacement (figure de droite) et permet d'évaluer la valeur de la flèche relative  $\delta/L$  en fonction de  $L/H$  et du type de matériau. On constate que l'acier à très haute limite élastique engendre des allongements très grands, mais l'importance de cette remarque est limitée puisqu'il s'agit de câbles. Or, les grandes déformations sont souvent tolérées dans les infrastructures à base de câbles comme les téléphériques, télésièges ou passerelles à base de câbles.

**Remarque importante :** il faut remarquer que, dans le cas d'un câble, la portée limite est indépendante de l'épaisseur du câble.



**Figure 13 :** indicateur de déplacement d'un câble (à droite) et flèches relatives correspondantes (à gauche) pour chaque type d'acier.



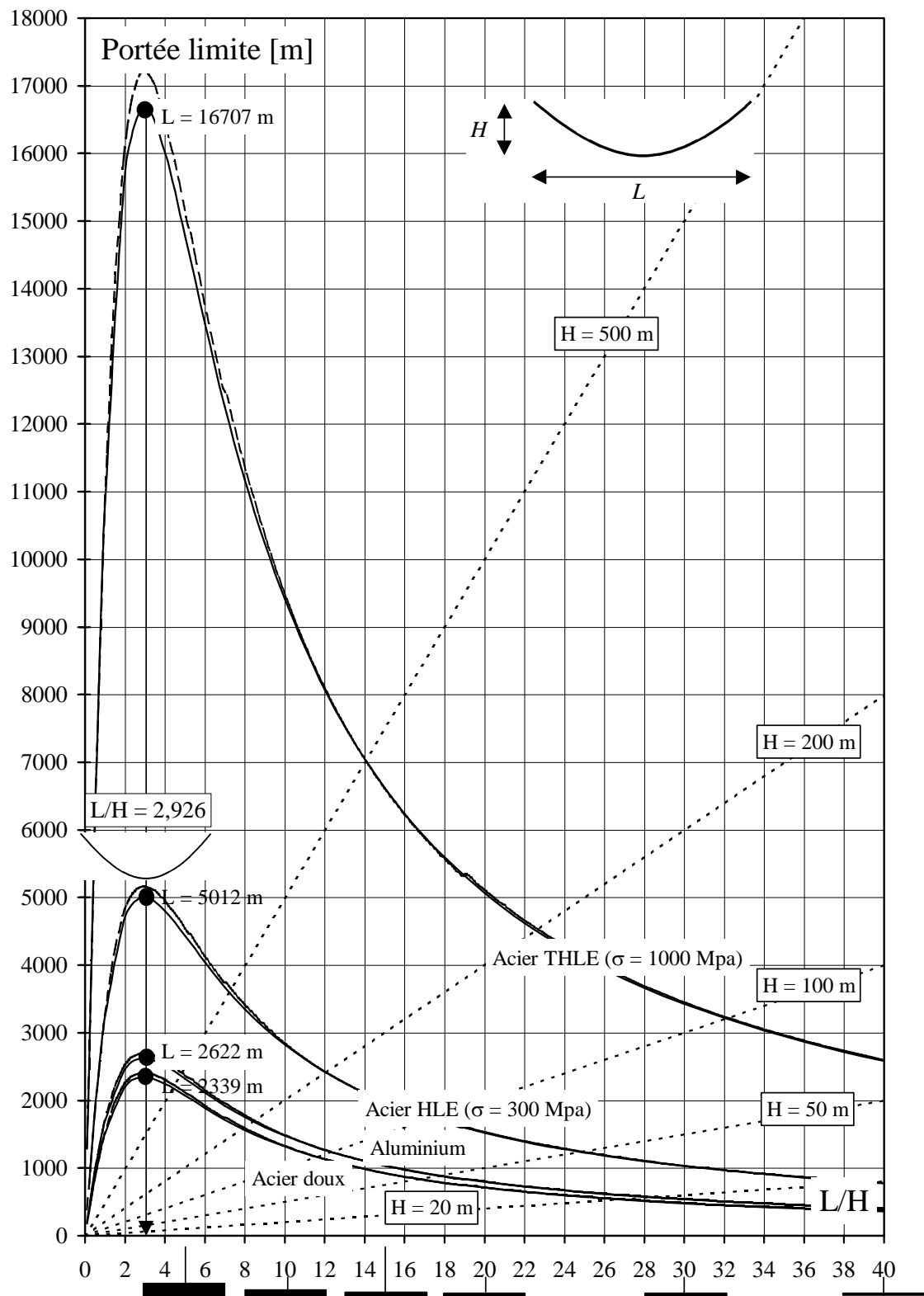
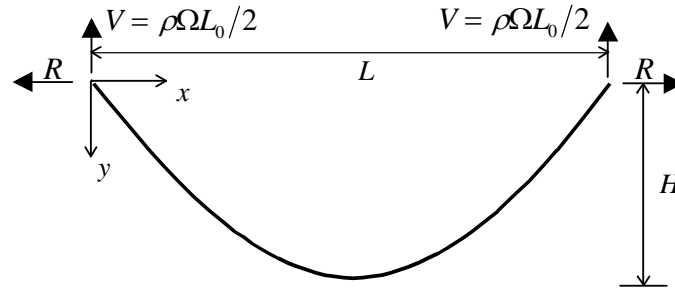


Figure 14 : portée limite des câbles. En traits continus : calculs effectués selon l'hypothèse "câble parabolique", en traits pointillés longs : calculs plus précis effectués selon l'hypothèse "chaînette".

#### 4.2. Calcul selon l'hypothèse "câble en chaînette"



Lorsqu'un câble est uniquement soumis à son poids propre, sa géométrie n'est pas parabolique : il prend alors la forme d'une chaînette dont les équations sont données ci-dessous. R est la réaction horizontale aux appuis.

$$\text{Longueur totale du câble } L_0 : L_0 = \frac{2R}{mg} \text{SinHyp} \left( \frac{mgL}{2R} \right) \quad [8]$$

$$\text{Ordonnée } y : y(x) = \frac{R}{\rho\Omega} \left( \text{CosHyp} \left( \frac{\rho\Omega L}{2R} \right) - \text{CosHyp} \left[ \frac{\rho\Omega}{R} \left( \frac{L}{2} - x \right) \right] \right) \quad [9]$$

$$\text{Effort normal} : N(x) = R \cdot \text{CosHyp} \left[ \frac{\rho\Omega}{R} \left( \frac{L}{2} - x \right) \right] \quad [10]$$

$$\text{Coordonnée courante} : s(x) = \frac{R}{\rho\Omega} \left( \frac{\rho\Omega L_0}{2RH} - \text{SinHyp} \left[ \frac{\rho\Omega}{R} \left( \frac{L}{2} - x \right) \right] \right) \quad [11]$$

Si  $\Omega$  est la section du câble, supposée constante, la portée limite est atteinte pour :

$$N(x=0) = \sigma\Omega \quad [12]$$

Si on suppose le rapport L/H connu, l'équation [9] se transforme comme suit :

$$\frac{H}{L} = \beta_1 \left( \text{CosHyp} \left( \frac{1}{2\beta_1} \right) - 1 \right), \text{ avec } \beta_1 = \frac{R}{\rho\Omega L} \text{ comme solution de cette équation implicite.}$$

De même, l'équation [10] devient :

$$\beta_2 = \text{CosHyp} \left[ \frac{1}{2\beta_1} \right], \text{ avec } \beta_2 = \frac{N(x=0)}{R} \text{ comme solution de cette équation.}$$

En remarquant que  $\beta_1\beta_2 = \frac{N(x=0)}{\rho\Omega L}$ , la condition [12] se transforme comme suit :

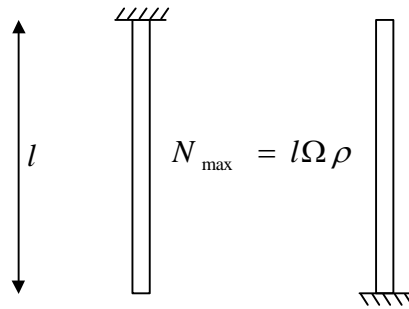
$$\boxed{L_{\text{lim}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{\beta_1\beta_2}}$$

Cette relation permet d'établir les courbes en pointillés longs de la figure 14 qui montrent que l'hypothèse "câble de géométrie parabolique" est plus sévère que l'hypothèse "câble en chaînette" d'une part, mais que les deux approches fournissent des résultats très semblables d'autre part.

## 5. PORTEE LIMITE DES TREILLIS

### 5.1. Préambule

Le concept de portée limite d'un treillis est délicat à appréhender. Pour s'en convaincre, on peut considérer le treillis le plus simple qui soit : celui qui est composé d'une seule barre. Soit donc une barre verticale soumise uniquement à son poids propre, comme l'illustre la figure 15.



**Figure 15** : barre verticale soumise à son poids propre, en traction (à gauche) ou en compression (à droite)

Lorsque la barre est suspendue, elle est en traction et sa hauteur maximale est égale à :

$$\frac{N_{\max}}{\Omega} = \sigma \Leftrightarrow l\rho = \sigma \Leftrightarrow l_{\max} = \frac{\sigma}{\rho} \quad [13]$$

La situation optimale, relative à la barre la plus légère, correspond à une section nulle. En effet, la relation [13] ne fait intervenir que le type de matériau. Ceci conduit naturellement à la conclusion suivante, abordée au chapitre 1 (§4.2.2) :

*Si l'on peut négliger le flambement des barres comprimées, le treillis optimum soumis uniquement à son poids propre est celui dont la section de toutes les barres tend vers une valeur nulle.*

Cette constatation rejoint celle qui correspond au comportement des câbles.

Lorsque la barre est en compression, sa hauteur maximale approximative peut être obtenue à partir de la loi d'Euler :

$$\frac{N_{\max}}{\Omega} = \frac{\pi^2 E I}{\mu^2 l^2 \Omega} = \frac{\pi^2 E}{\mu^2 l^2} q \Omega \Leftrightarrow l = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 \frac{qE}{\rho} \Omega}$$

Cette fois, la longueur maximale dépend non seulement du matériau (rapport  $E/\rho$ ), mais aussi du type de section (par le facteur de forme  $q$ ) et de la valeur elle-même de la section ( $\Omega$ ). Ceci veut dire que, pour un matériau donné, il n'existe pas de borne supérieure à la longueur de la barre, puisqu'il suffit d'adapter la section pour atteindre une longueur quelconque, à condition de ne pas dépasser la contrainte "admissible" du matériau. Il est donc légitime de penser que la portée limite absolue d'un treillis est celle qui correspond à ce treillis dont toutes les barres sont dimensionnées à la même contrainte, le flambement étant négligé. Cette constatation confirme les résultats obtenus pour les arcs.

## 5.2. Discussion sur la portée limite des treillis

Si on dimensionne les barres en compression en tenant compte du flambement, on peut se baser sur la relation établie au chapitre 1 (relation [4], §4.2.4.) :

$$V = \frac{(F + \rho V)L}{\sigma} \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \frac{(F + \rho V)L}{2\sigma} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu\sigma L)^2}{qE(F + \rho V)}} \right)$$

Si on pose à nouveau  $F = \varepsilon (\rho V)$ , la relation précédente devient :

$$1 = \frac{\rho L}{\sigma} (1 + \varepsilon) \left[ \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{(C)} k_i \left( \frac{l_i}{L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu\sigma L)^2}{qE(1 + \varepsilon)\rho V}} \right) \right]$$

Pour un treillis de rapport  $L/H$  et de matériau donné, cette relation relie la portée  $L$  et le volume total de matière  $V$ . Ceci veut donc dire que la solution de portée limite n'est pas unique et dépend de la quantité de matière que l'on place dans les barres en compression. Cela rejoint la constatation effectuée au §5.1., relative à une barre verticale soumise à son poids propre.

Si on pose  $W^{(T)} = \sum_{(T)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) = \text{fonction}(L/H)$  et  $W^{(C)} = \sum_{(C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) = \text{fonction}(L/H)$ , la condition de portée limite devient :

$$L_{\text{lim}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{\left[ W^{(T)} + W^{(C)} \left( \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + \beta}) \right) \right]}$$

$$\text{avec } \beta \hat{=} \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i/L)^2}{k_i} \frac{(\mu\sigma L)^2}{qE(1 + \varepsilon)\rho V}$$

Le paramètre  $\beta$  provient du surplus de matière dû au dimensionnement des barres en compression suivant la loi d'Euler (courbe en cloche). La présence du terme de volume total  $V$  montre que la portée limite dépend de l'élanement géométrique moyen  $l/h$  des barres. En effet :

$$V = \sum_k l_k \Omega_k = \sum_k l_k s_k h_k^2 = L^3 \sum_k \left( \frac{l_k^3}{L^3} \right) s_k \left( \frac{h_k^2}{l_k^2} \right) \approx L^3 s_{\text{moy}} \left( \frac{h}{l} \right)_{\text{moy}}^2 \sum_k \left( \frac{l_k}{L} \right)^3$$

Dans cette expression,  $s_{\text{moy}}$  est le *facteur de forme moyen* des barres. Ce facteur de forme a été défini au chapitre 5 (§I.1, figures I.2 et I.3). Le paramètre  $\beta$  devient :

$$\beta \hat{=} \frac{4\mu^2}{\pi^2 (1 + \varepsilon)} \left[ \frac{(l_i/L)^2}{k_i \sum_k (l_k/L)^3} \right] \frac{\sigma^2}{E\rho} \frac{1}{Z_{\text{moy}}} \frac{1}{L} \left( \frac{l}{h} \right)_{\text{moy}}^2$$

L'importance du terme  $\beta$  peut être non-négligeable : il dépend du matériau, de l'élanement moyen des barres, du type des sections, et il est lui-même inversement proportionnel à la portée. Dans le cas d'un

treillis dont toutes les barres sont optimisées de façon individuelle, sa détermination devient laborieuse, non seulement parce que toutes les barres sont différentes, mais aussi parce que le poids propre est réparti de façon hétérogène.

L'expression ci-dessus de la portée limite montre que sa borne supérieure absolue s'obtient pour  $\beta = 0$ .

Si on pose  $W^{(T+C)} = W^{(T)} + W^{(C)} = \sum_{(T+C)} \left( k_i \frac{l_i}{L} \right) = \text{Fonction}(L/H)$ , on obtient :

$$L_{\text{lim,absolue}} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{W^{(T+C)}}$$

En faisant l'hypothèse simplificatrice que le poids propre est distribué à tous les nœuds sous forme d'un effort ponctuel  $(F+\rho V)/2n$ , le terme  $W^{(T+C)}$  peut être calculé analytiquement pour un treillis Warren (par exemple) à "n" mailles. Ceci a été fait par Philippe Samyn dans sa thèse de doctorat (voir bibliographie) qui montre que :

$$W^{(T+C)} = \frac{n H}{2 L} + \frac{4n^2 + 3n - 1}{24n^2} \frac{L}{H}$$

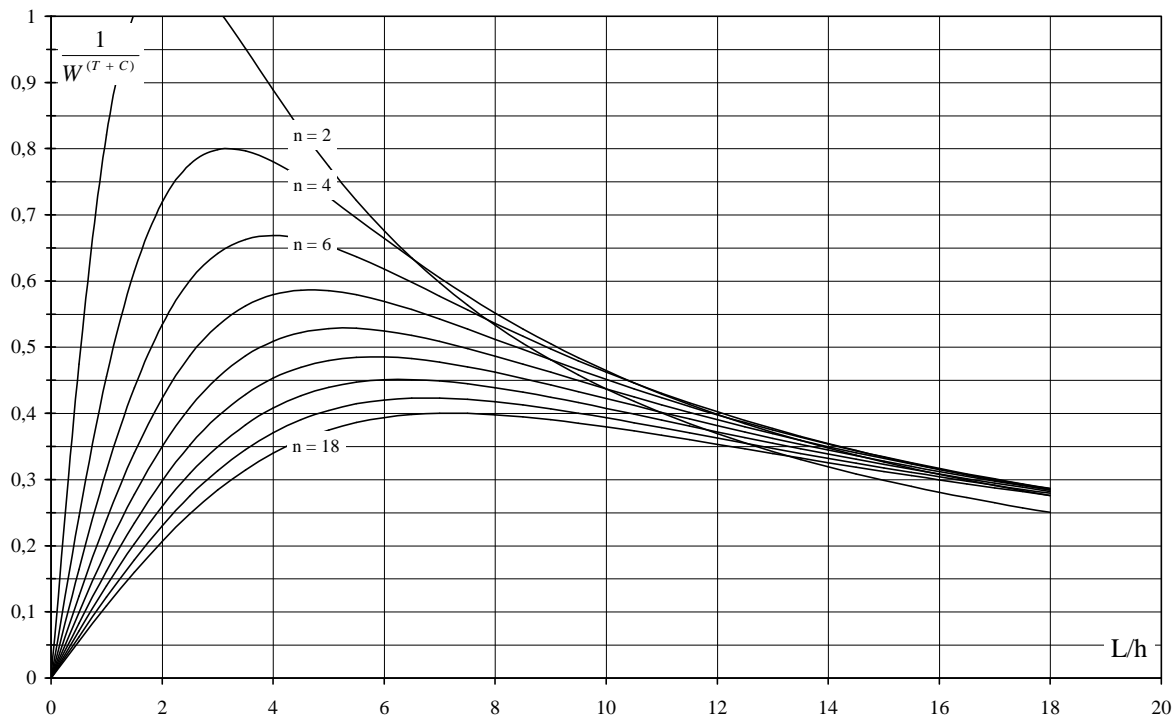


Figure 16 : valeurs de  $W^{(T+C)}$  relatives à la poutre Warren ( $n = 2..18$ )

Les portées limites théoriques absolues s'obtiennent en multipliant les valeurs de la figure 16 par le rapport  $\sigma/\rho$  propre au matériau concerné. La prise en compte du flambement des barres en compression réduira ces valeurs selon l'importance du paramètre  $\beta$  défini ci-dessus.

## 6. CONCLUSION

Le tableau ci-dessous reprend les expressions de la portée limite obtenues pour les quatre types de structures. Ces expressions ont permis d'établir un ordre de grandeur de ces portées limites et de mettre en évidence les divers paramètres qui entrent en jeu, comme par exemple le facteur de forme  $Z$  que l'on retrouve partout sauf pour le câble. Par ailleurs, il a été montré que la portée limite d'une poutre est presque toujours plus sévère lorsque celle-ci est basée sur les déformations plutôt que sur la résistance du matériau, à l'inverse des arcs.

Si on compare les poutres et les arcs au point de vue de la portée limite de résistance, on constate que les arcs permettent d'atteindre des portées limites bien supérieures, comme le montre la figure 12. Un second avantage des arcs par rapport aux poutres est leur raideur importante, à condition qu'ils soient funiculaires.

A propos du câble, on constate que la portée limite est toujours obtenue pour  $L/H = 3$  (2,926 exactement), quel que soit le matériau considéré. Ce résultat est aussi valable lorsque l'hypothèse de la géométrie en chaînette, plus réaliste, est considérée. On remarque par ailleurs peu de différence entre les résultats issus des deux hypothèses "chaînette" ou "parabole". En outre, la portée limite d'un câble ne dépend pas de la valeur de sa section. De cette propriété due à l'absence d'éléments en compression découle une autre propriété remarquable bien connue : pour une portée donnée et en l'absence de charges extérieures, le câble le plus léger correspond au câble de section nulle.

Poutres	Arcs	Câbles	Treillis
$L_{lim,rés} = \sqrt{\frac{1}{Z} \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) h}$ $\downarrow$ $L_{lim,déf} = \sqrt{\frac{24}{5} \left( \frac{\delta}{L} \right) \left( \frac{E}{\rho} \right) \frac{1}{Z} h^2}$	$L_{lim,rés} = \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) \frac{1}{W^{(C)} (1 + \sqrt{1 + \beta})}$ <p>Avec <math>\beta = f(Z, L, H, h, \sigma^2 / \rho E)</math></p>	$L_{lim,rés} = \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) \frac{1}{W^{(T)}}$ <p>Avec <math>W^{(T)} = f(L/H)</math></p>	$L_{lim,rés} = \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) \frac{1}{\left[ W^{(T)} + W^{(C)} \left( \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + \beta}) \right) \right]}$ <p>Avec <math>W^{(T,C)} = f(L/H)</math>                      et <math>\beta = f(Z_{moy}, Vh_{moy}, \text{matériau}, L, L/H)</math></p>

**Tableau 1** : récapitulation des expressions de portée limite.

Par ailleurs, l'étude montre que les treillis sont les structures dont la portée limite est la plus laborieuse à évaluer. Il est donc délicat d'établir une comparaison objective de ceux-ci avec les autres types de structures.

Enfin, les résultats découlant de la présente analyse doivent être considérés en gardant à l'esprit que les équations établies l'ont été en considérant les matériaux dans leur domaine élastique et en négligeant tous les facteurs liés aux incertitudes inhérentes à une réalisation pratique : effets du vent, incertitudes sur les caractéristiques du matériau ou effets dynamiques en tous genre. Les valeurs des portées limites calculées à partir de ces équations doivent donc être prises avec les précautions qui s'imposent. Elles ont néanmoins le mérite de mettre en évidence les divers facteurs qui entrent en jeu et d'autoriser certaines comparaisons entre les différents types de structures.



# *Epilogue*

*Capacités portantes et  
indicateurs comparés  
des poutres, arcs,  
câbles et treillis*

*Photo de première page : arc naturel, Utah, USA.  
Source : FNAC Louvain-la-Neuve.*



## 1. INTRODUCTION

Les chapitres 2 à 6 sont consacrés à l'étude des treillis, arcs et poutres droites étudiés indépendamment les uns des autres. Les chapitres 2 et 3 ont montré la supériorité du treillis Warren par rapport aux deux autres types de treillis tandis que le chapitre 4 compare les arcs de différents types au point de vue du volume et de la raideur. Le chapitre 5 apporte une nuance aux études précédentes en étudiant l'influence des contraintes secondaires tandis que le chapitre 6 s'attarde aux portées limites des différents types de structures, y compris les câbles et les poutres.

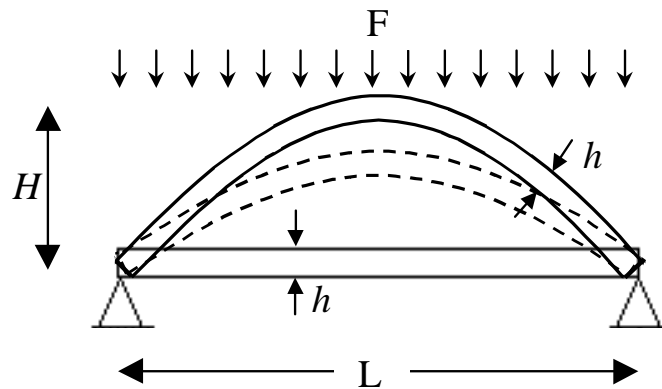
Jusqu'à présent, la comparaison des différents types structures s'est donc limitée aux considérations de portées limites étudiées au chapitre 6. Il semble intéressant, comme ultime approche, de comparer les capacités portantes et les indicateurs de volume des 4 structures de type arcs, treillis, poutres droites et câbles.

## 2. COMPARAISON DES CAPACITES PORTANTES ET DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES POUTRES

### 2.1. Capacités portantes

Soit une certaine portée  $L$  à franchir avec une poutre isostatique sur deux appuis de section constante caractérisée par les facteurs de forme " $q_p$ ", et " $Z_p$ " définis précédemment, et illustrés aux figures 1 et 2 ci-dessous. A une contrainte "admissible"  $\sigma$  correspond une charge maximale uniformément distribuée  $F_p$ .

Supposons une transformation morphologique continue de cette poutre en un arc parabolique de mêmes caractéristiques (même portée, même valeur et type de section, même matériau), prenant progressivement des élancements  $L/H$  de plus en plus petits. Chacun de ces arcs correspond à une charge maximale uniformément distribuée notée  $F_a$  et il est intéressant de mettre en évidence la valeur  $F_a/F_p$ , égale au rapport entre le pouvoir portant de l'arc et celui de la poutre de mêmes caractéristiques.



Les charges critiques respectives d'une poutre et d'un arc (voir chapitre 4, §2.3.2., équation [3]) sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_p = \frac{16I\sigma}{Lh} \\ F_a = \gamma \left( \frac{\gamma_{cor}}{\sigma\Omega} + \frac{L^2}{EI} \right)^{-1} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{F_a}{F_p} = \frac{Lh}{16I\sigma} \frac{\gamma}{\left( \frac{\gamma_{cor}}{\sigma\Omega} + \frac{L^2}{EI} \right)}$$

L'équation précédente peut se transformer comme suit : 
$$\frac{F_a}{F_p} = \frac{h}{L} \frac{\gamma}{\left( \frac{16I\gamma_{cor}}{L^2\Omega} + 16\frac{\sigma}{E} \right)}$$

Or, le premier terme de l'expression entre parenthèses peut être réécrit de façon à mettre en évidence le facteur de forme  $Z = \Omega h^2 / 16I$  de la section. En effet :

$$\frac{16I\gamma_{cor}}{L^2\Omega} = \left( \frac{h}{L} \right)^2 \frac{16I}{\Omega h^2} \gamma_{cor} = \left( \frac{h}{L} \right)^2 \frac{1}{Z} \gamma_{cor}$$

On obtient donc, finalement:

$$\boxed{\frac{F_a}{F_p} = \frac{\gamma(h/L)}{\left( \gamma_{cor} \frac{1}{Z} \left( \frac{h}{L} \right)^2 + 16\frac{\sigma}{E} \right)} = \text{fonction} \left( \frac{L}{h}, \frac{\sigma}{E}, Z, \frac{L}{H} \right)}$$

L'équation précédente permet d'établir les figures 3 et 4 relatives, respectivement, au béton armé et à l'acier HLE qui correspondent chacun à des valeurs extrêmes du rapport  $\sigma/E$ . Ces figures suggèrent les commentaires suivants :

Le rapport entre la charge totale maximale d'un arc et celle d'une poutre de mêmes caractéristiques est d'autant plus grande que :

- La section est pleine;
- Le rapport L/h (à ne pas confondre avec L/H) est grand;
- le rapport E/ $\sigma$  est petit;

Pour les valeurs classiques de l'élanement L/H de l'arc (2...6) et du rapport L/h (>10), la charge maximale d'un arc est **au moins 8 fois supérieure** à celle de la poutre de même caractéristiques. Ce rapport diminue fortement lorsque l'arc n'est plus le funiculaire des charges, c'est-à-dire lorsque les charges ne sont pas distribuées. Par contre, il augmente encore lorsque les appuis de l'arc sont encastrés.

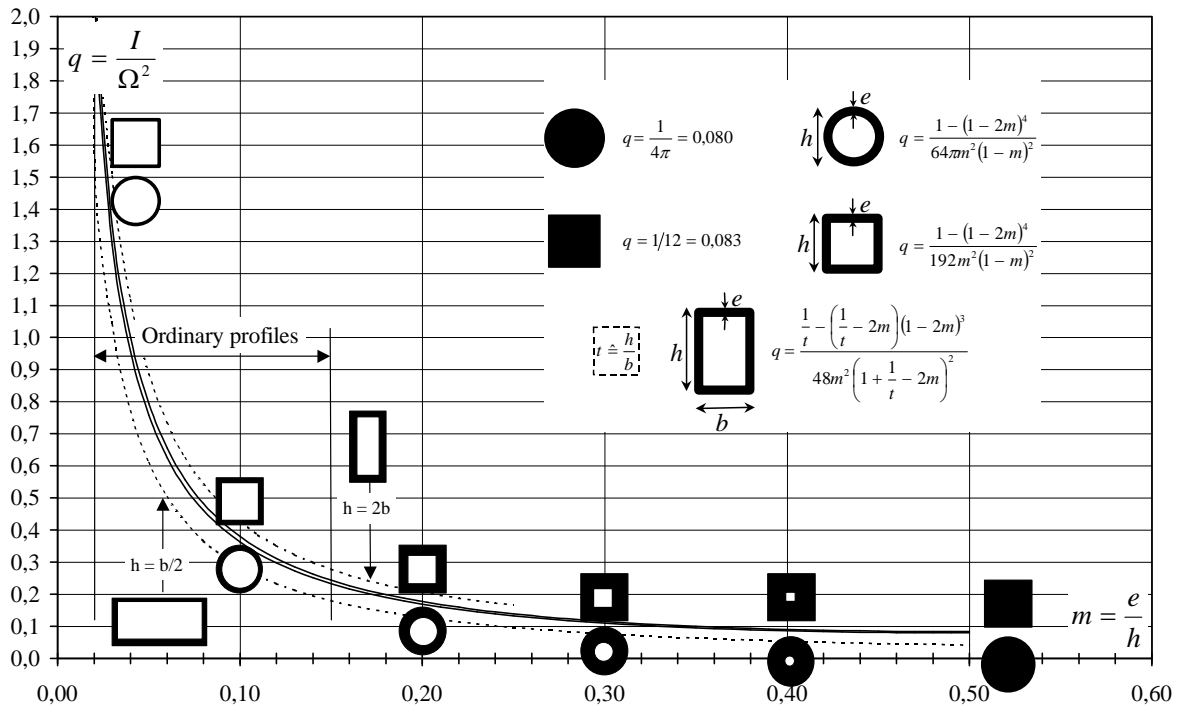


Figure 1 : valeur du facteur de forme  $q = I/\Omega^2$  .

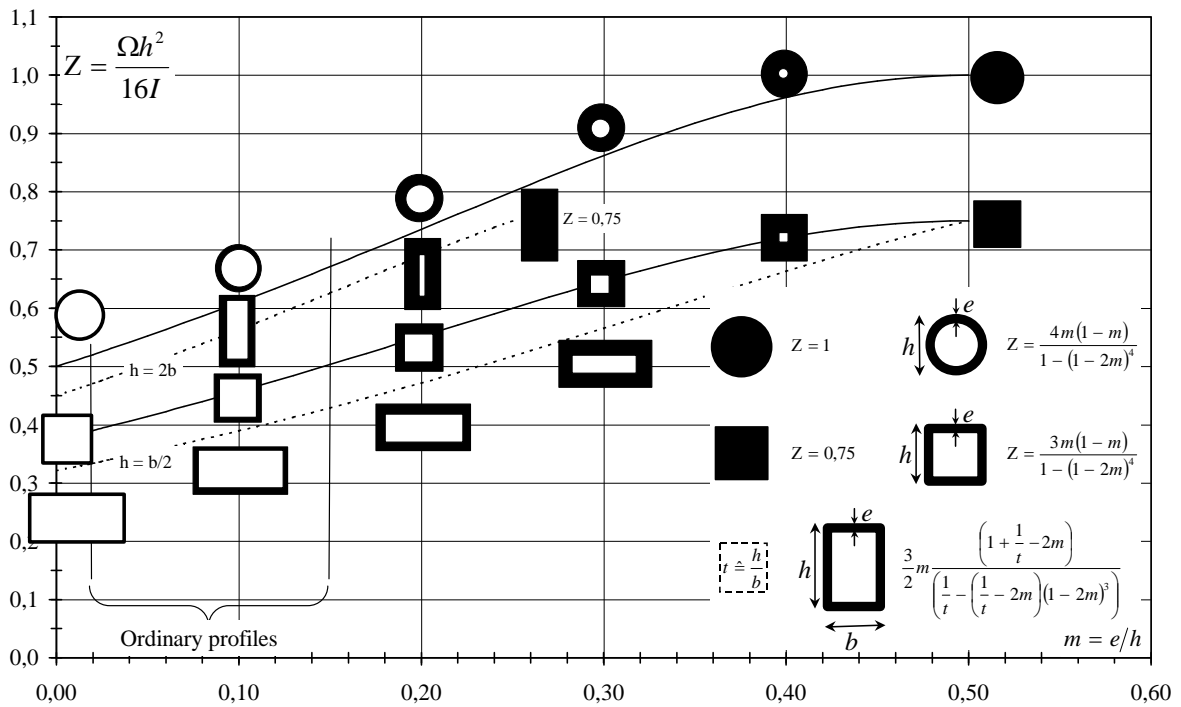


Figure 2 : valeur du facteur de forme  $Z = \Omega h^2/16I$  .

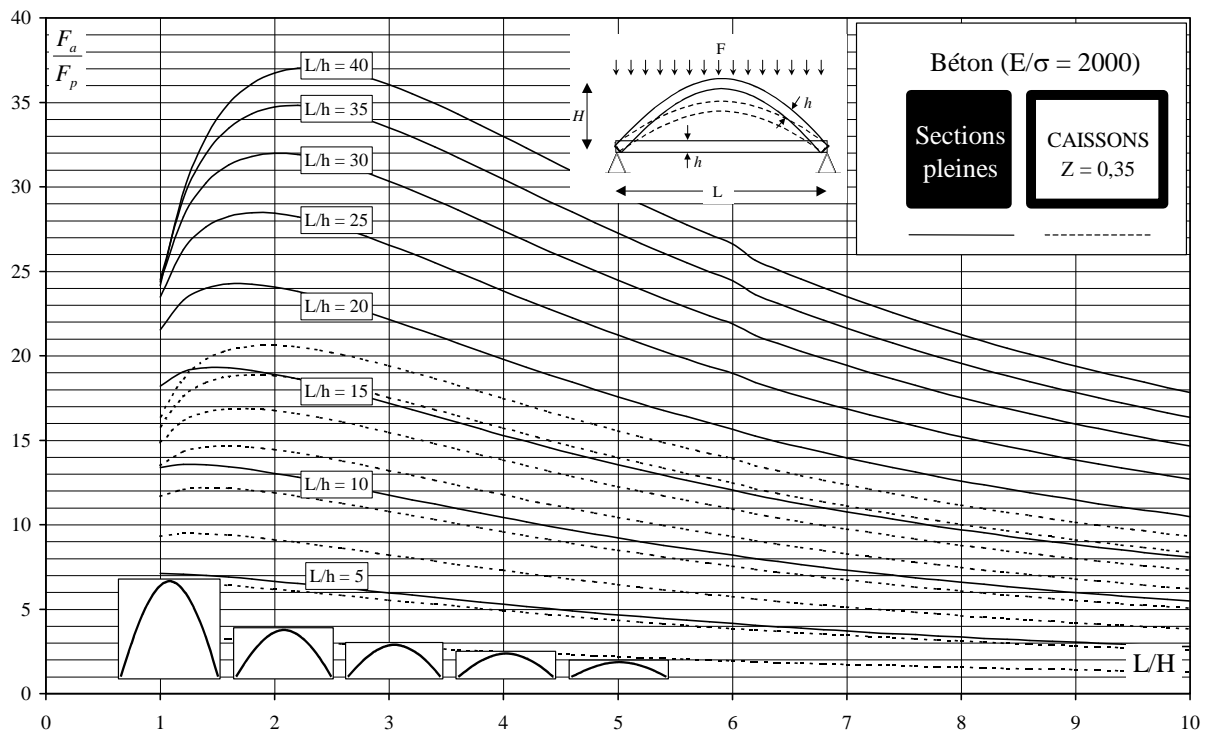


Figure 3 : rapport entre les capacités portantes d'un arc à deux articulations en béton et d'une poutre sur deux appuis de mêmes caractéristiques.

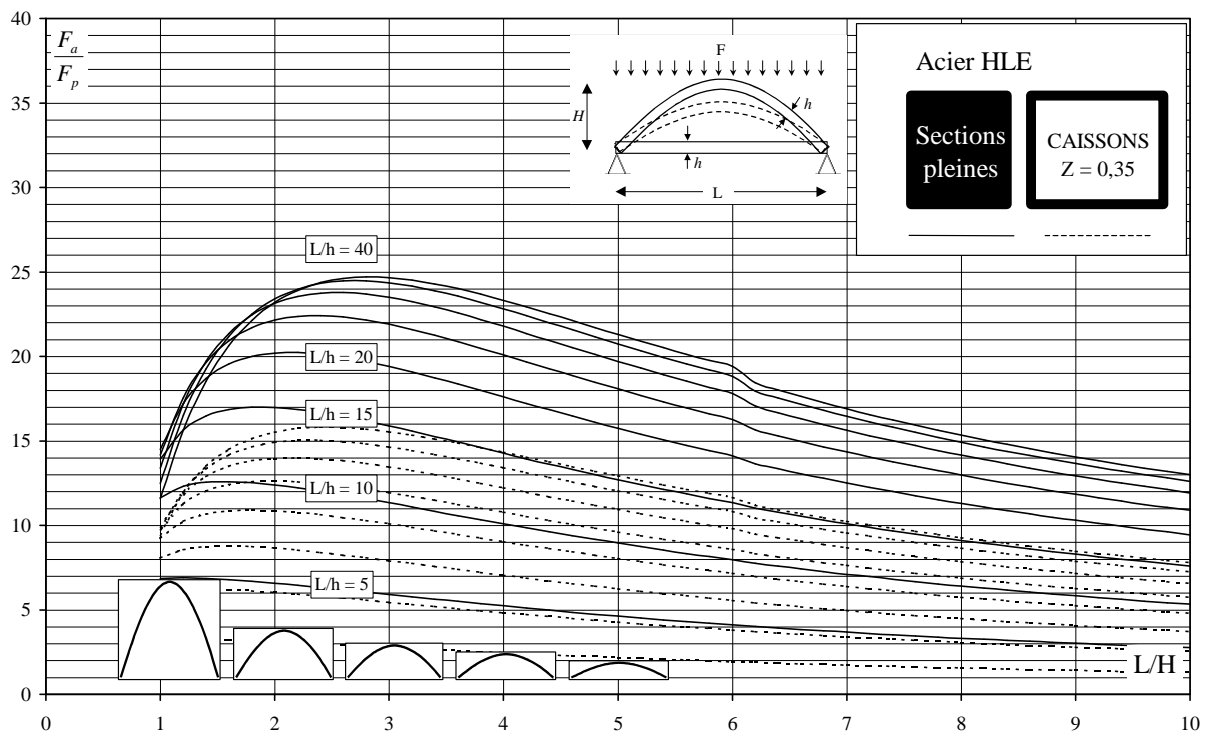


Figure 4 : rapport entre les capacités portantes d'un arc à deux articulations en acier HLE et d'une poutre sur deux appuis de mêmes caractéristiques.

## 2.2. Comparaison des indicateurs de volume

L'étude précédente a montré que l'arc peut toujours reprendre une charge totale bien supérieure à la poutre de mêmes caractéristiques. A charge égale, il est donc légitime de penser que le volume de l'arc sera inférieur à celui de la poutre, même si la longueur de la fibre moyenne de l'arc est légèrement supérieure à celle de la poutre. Toutefois, si on compare un arc de section pleine avec une poutre de section creuse, il se peut, selon les élancements, que l'indicateur de volume de l'arc soit plus grand que celui de la poutre. Le but est donc ici de comparer les volumes des 2 types de structures indépendamment de la valeur ou du type de leurs sections respectives.

Soit donc un arc dont la section constante est caractérisée par un facteur de forme " $q_a$ " (et un indicateur de flambement  $\Psi_a$ ) et une poutre caractérisée par un facteur de forme " $Z_p$ ".

L'indicateur de volume de l'arc de section constante vaut (chapitre 4, §2.3.2.) :

$$W_a = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{cor}}{\gamma} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + 4\gamma \left( \frac{\Psi_a}{\gamma_{cor}} \right)^2} \right) \cdot g^{(L/H)}$$

$g^{(L/H)}$  est une fonction qui ne dépend que du rapport L/H (tout comme  $\gamma$  et  $\gamma_{cor}$ ), telle que  $l_{arc} = g^{(L/H)}L$ , et représentée à la figure 10 du chapitre 4.

L'indicateur de volume d'une poutre isostatique sur 2 appuis vaut :  $W_p = Z_p \frac{L}{h}$ .

Le rapport entre les deux indicateurs est donc une fonction des paramètres suivants :

$$\frac{W_p}{W_a} = fonction \left( \left( \frac{L}{H} \right)_a, \Psi_a, \left( \frac{L}{h} \right)_p, Z_p \right) \rightarrow fonction \left( \Psi_a, \left( \frac{L}{h} \right)_p, Z_p \right) \quad [1]$$

Le terme en L/H peut être éliminé si on considère uniquement les rapports L/H relatifs aux arcs les plus légers, pour chaque valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  (valeurs de L/H illustrées à la figure 16 du chapitre 4).

Si l'arc et la poutre sont relatifs à une même portée L, à un même matériau et à une même charge totale F, le rapport  $W_p/W_a$  des indicateurs de volume est égal au rapport des volumes. Les figures 4 à 7 ci-dessous ont été calculées sur base de l'expression [1] et correspondent au 4 cas suivants :

- l'arc à 3 articulations comparé à la poutre de section pleine ( $Z = 0,75$ );
- l'arc à 3 articulations comparé à la poutre en caisson ( $Z = 0,35$ );
- l'arc sans articulations comparé à la poutre de section pleine ( $Z = 0,75$ );
- l'arc sans articulations comparé à la poutre en caisson ( $Z = 0,35$ );

Ces 4 cas représentent des extrêmes. En effet, en pratique le facteur de forme Z est toujours compris entre 0,35 (ce qui correspond aux meilleurs caissons), et 0,75 (ce qui correspond aux sections pleines). Par ailleurs, l'arc à 3 articulations est l'arc le plus défavorisé au point de vue du volume (voir chapitre 4, figure 16), ce qui n'est pas le cas de l'arc sans articulations, qui est toujours le plus léger.

La ligne horizontale noire sur les figures 4 à 7 représente la frontière en dessous de laquelle l'arc est moins efficace que la poutre. En fait, ceci ne se produit que lorsque l'on combine un arc de section peu efficace (section pleine) avec une poutre de section efficace (en caisson) de faible élancement L/h.

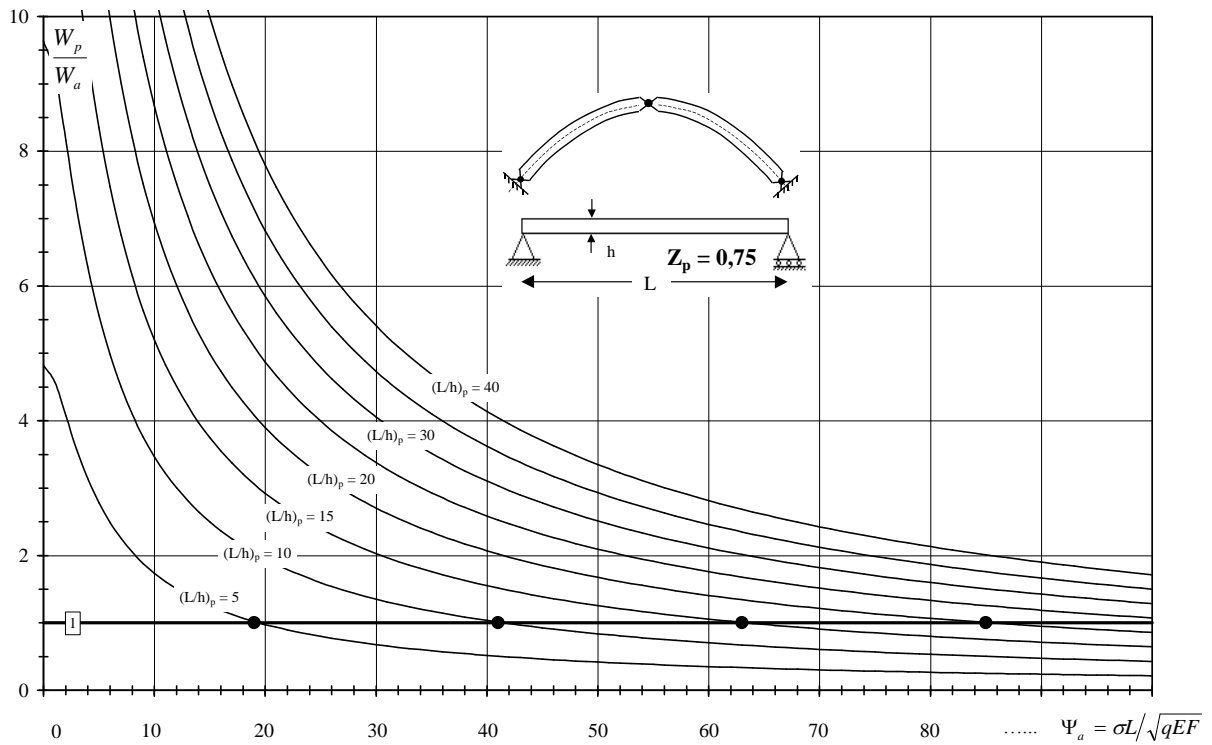


Figure 4 : rapport entre les indicateurs de volume d'un arc à 3 articulations et d'une poutre isostatique de section caractérisée par un facteur de forme  $Z = 0,75$  (section pleine).

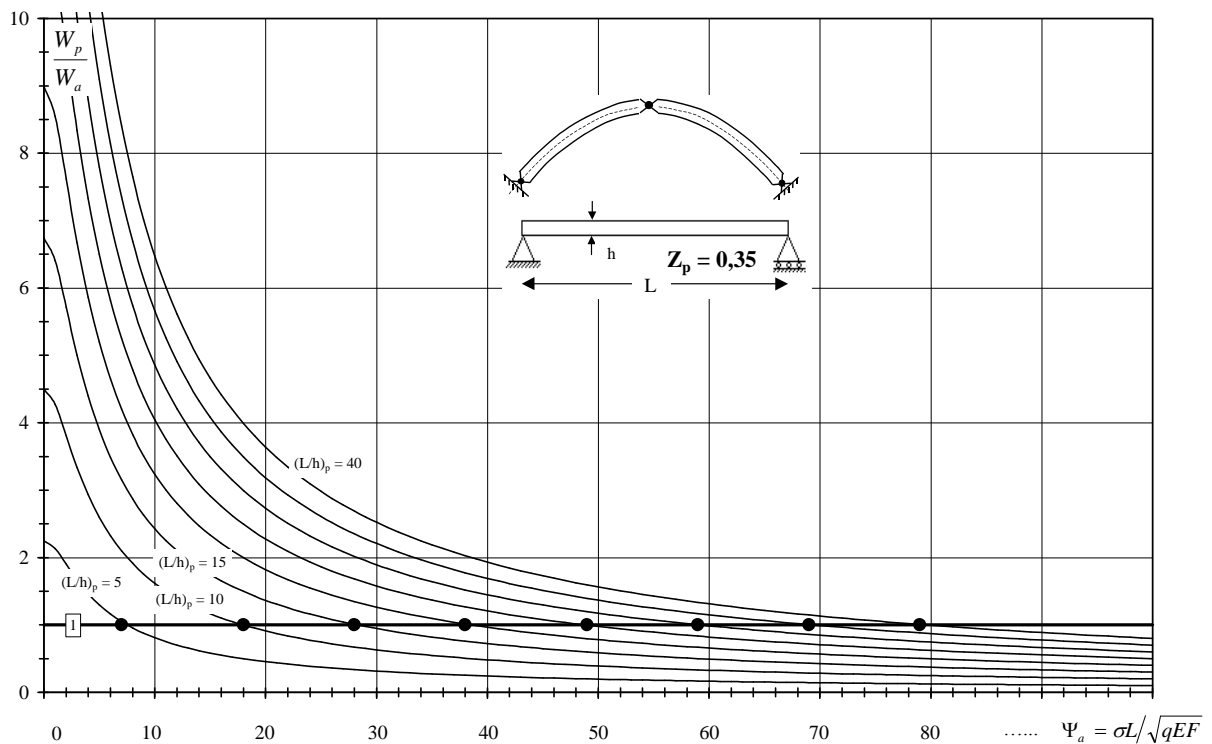
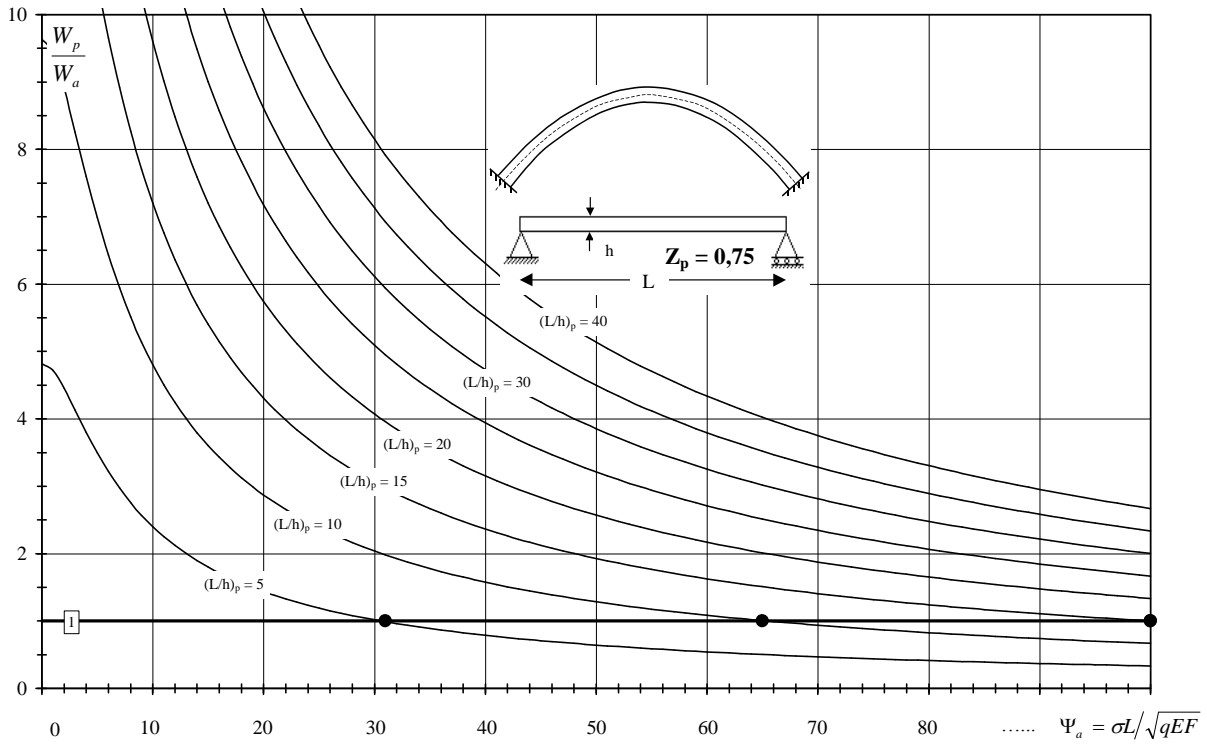
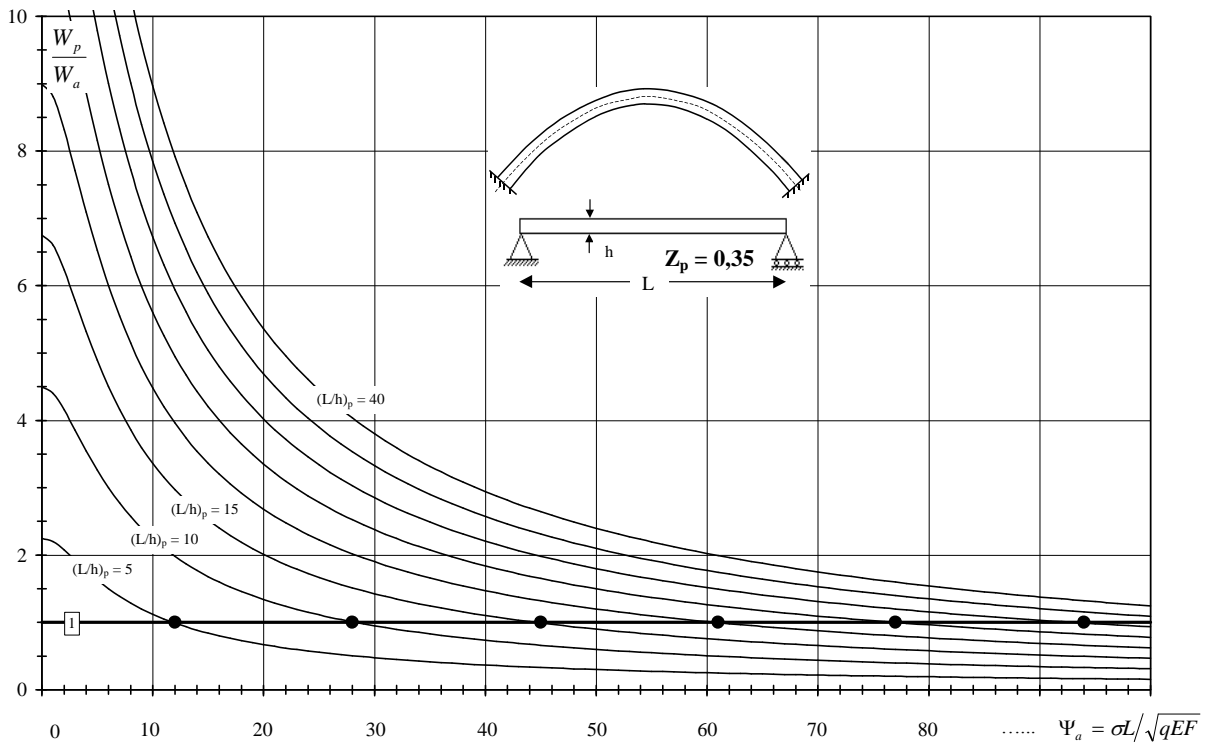


Figure 5 : rapport entre les indicateurs de volume d'un arc à 3 articulations et d'une poutre isostatique de section caractérisée par un facteur de forme  $Z = 0,35$  (caisson).



**Figure 6 :** rapport entre les indicateurs de volume d'un arc **SANS articulations** et d'une poutre isostatique de section caractérisée par un facteur de forme  $Z = 0,75$  (section pleine).



**Figure 7 :** rapport entre les indicateurs de volume d'un arc **SANS articulations** et d'une poutre isostatique de section caractérisée par un facteur de forme  $Z = 0,35$  (caisson).

### 3. COMPARAISON DES CAPACITES PORTANTES ET DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES CABLES

Le câble étant la structure duale d'un arc d'une part, et ne subissant que de la traction d'autre part, il est évident qu'il aura une capacité portante beaucoup plus importante que l'arc de mêmes caractéristiques, puisque ce dernier est sujet au flambement. L'indicateur de volume du câble correspond à celui de l'arc dimensionné sans tenir compte du flambement, ou lorsque  $\Psi = 0$ . Autrement dit, l'indicateur de volume du câble correspond à l'ordonnée à l'origine de la courbe d'efficacité de l'arc de section constante correspondant. Le rapport entre leurs indicateurs de volume respectifs peut donc être déduit immédiatement des courbes d'efficacité de l'arc de section constante calculées au chapitre 4 (Figure 16).

De même, si l'arc et le câble que l'on compare correspondent à un même matériau, une même section et une même portée, le rapport de leurs capacités portantes respectives est égal à l'inverse du rapport de leurs indicateurs de volume respectifs :

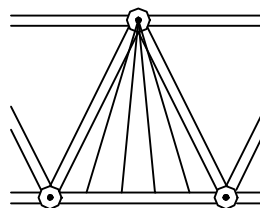
$$\frac{F_a}{F_c} = \frac{W_c}{W_a} \ll 1$$

Ce rapport des capacités portantes peut donc lui aussi être évalué directement à partir des courbes d'efficacité relatives à l'arc de section constante.

### 4. COMPARAISON DES INDICATEURS DE VOLUME DES POUTRES ET DES TREILLIS

Il est plus délicat de traiter les treillis car une comparaison rigoureuse ne peut s'effectuer que si on tient compte du volume des éléments chargés de reporter les charges sur leurs nœuds. Une solution élégante consiste en l'étude des treillis Multi-liernes, qui ont fait l'objet d'un dépôt de brevet Européen en mars 1999 par Philippe Samyn. Le principe des treillis Multi-liernes consiste à soutenir les éléments inférieurs d'un treillis Warren par une série de haubans en traction qui reportent les charges aux nœuds de la membrure supérieure, comme illustré à la figure 8. Ainsi, le treillis est composé uniquement d'éléments en compression ou en traction, à l'exclusion de tout élément fléchi. Il en résulte alors une structure qui est rigoureusement comparable avec les poutres ou les arcs.

**Figure 8** : principe du treillis Multi-liernes.



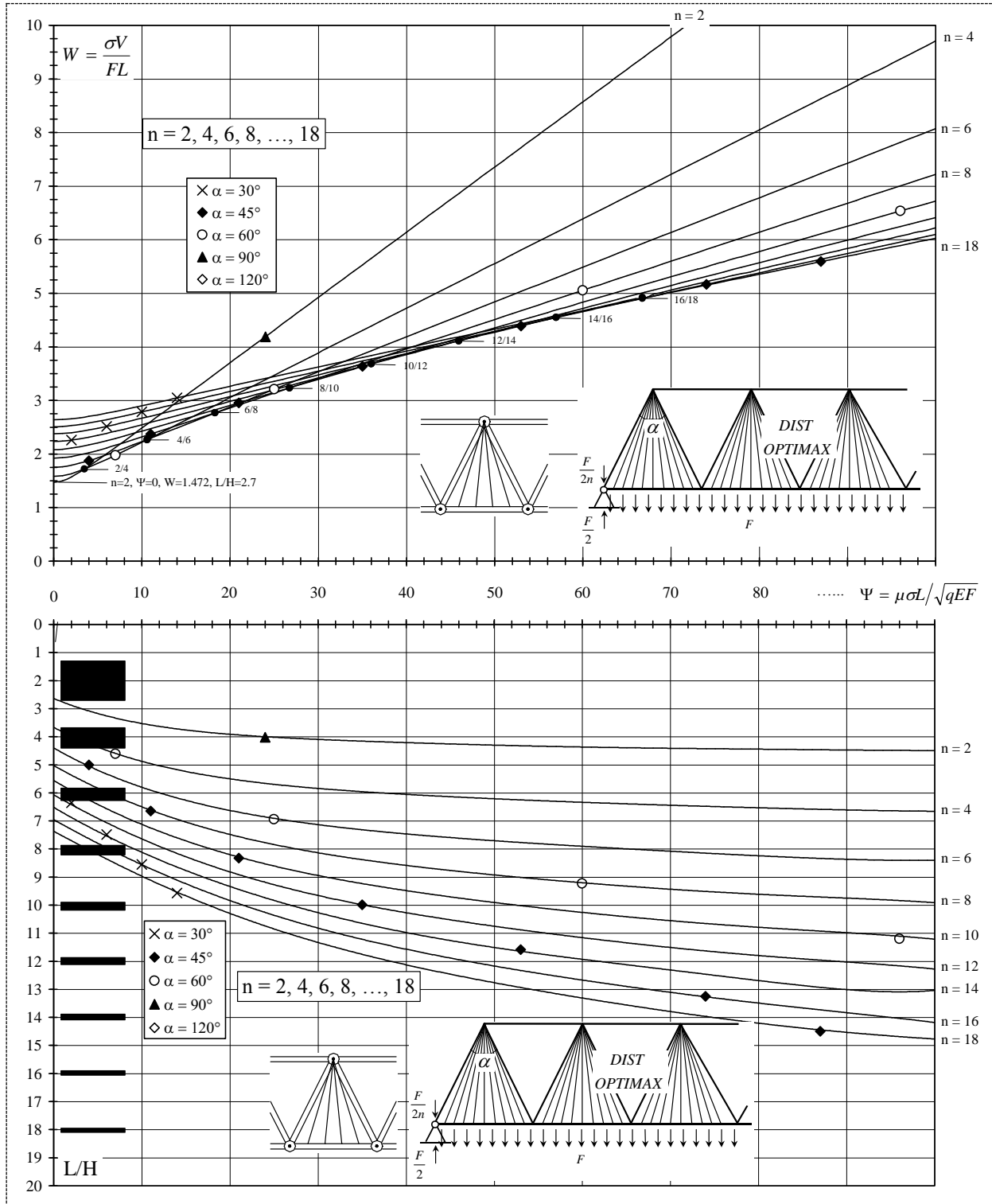
La présence de ces liernes est responsable d'un surplus d'indicateur de volume, qu'il faut ajouter à celui du treillis chargé sur ses nœuds supérieurs et dépourvu de liernes. Si on néglige les contraintes secondaires de flexion et que l'on suppose une infinité de liernes formées d'un même matériau que le treillis, on montre que ce surplus est donné par l'expression suivante :

$$\Delta W = \frac{H}{L} + \frac{1}{12n^2} \frac{L}{H} \quad (\text{n est le nombre de mailles})$$



L'expression de ce surplus d'indicateur de volume est valable quelles que soient les valeurs de l'indicateur de flambement.

La figure 9 illustre les courbes d'efficacité relatives aux treillis multi-liernes dont toutes les barres ont été optimisées individuellement. Seules les courbes relatives à un nombre pair de mailles sont représentées car ce sont elles qui forment la courbe enveloppe. La figure 10 reprend les courbes de la figure 9 pour "n" pair et impair (à gauche) en vis-à-vis avec les courbes d'efficacité du treillis multi-liernes composé de 4 catégories de barres identiques (à droite).



**Figure 9** : courbes d'efficience des treillis multi-liernes dont toutes les barres sont optimisées individuellement (pour  $n$  pair).

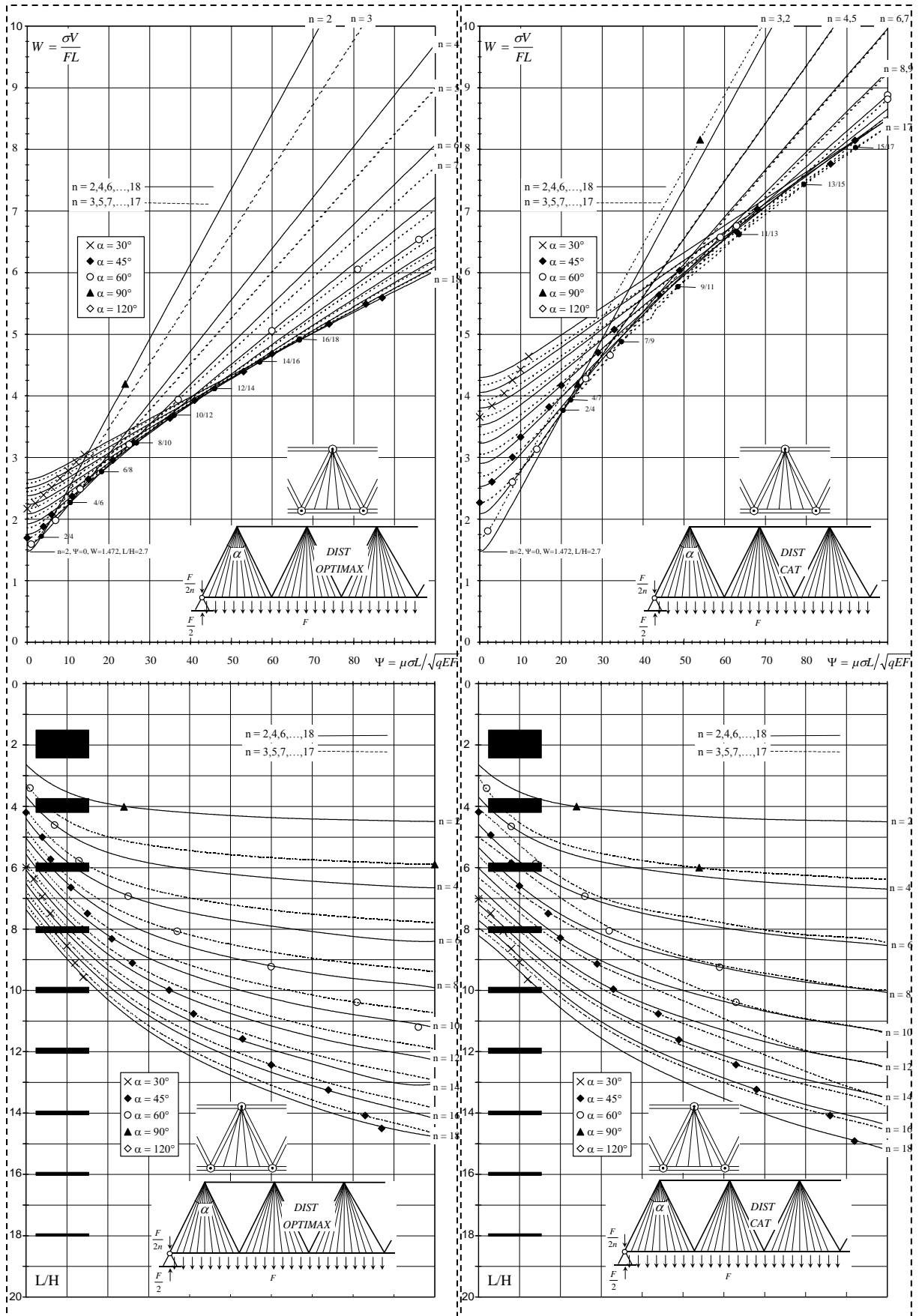


Figure 10 : courbes d'efficace des treillis multi-liernes dont toutes les barres sont optimisées individuellement (à gauche) ou par catégories (à droite).

La courbe enveloppe des courbes d'efficience de la figure 9 peut donc servir de base à une comparaison des treillis et des poutres.

Soit donc un treillis multi-liernes dont les barres en compression sont caractérisées par un facteur de forme " $q_T$ " (et un indicateur de flambement  $\Psi_T$ ) et une poutre caractérisée par un facteur de forme " $Z_p$ ".

Les valeurs de l'indicateur de volume des treillis les plus légers sont celles de la courbe enveloppe illustrée à la figure 9. Elles sont relatives à des nombres pairs de mailles ( $n=2, 4, 6, 8 \dots 18$ ). De façon générale, ces valeurs sont données par l'expression suivante :

$$W_T = f(\Psi_T)$$

L'indicateur de volume d'une poutre isostatique sur 2 appuis vaut :  $W_p = Z_p \frac{L}{h}$ .

Le rapport entre les deux indicateurs est donc une fonction des paramètres suivants :

$$\frac{W_p}{W_T} = \text{fonction} \left( \Psi_T, \left( \frac{L}{h} \right)_p, Z_p \right) \quad [2]$$

Si le treillis et la poutre sont relatifs à une même portée  $L$ , à un même matériau et à une même charge totale  $F$ , le rapport  $W_p/W_T$  des indicateurs de volume est égal au rapport des volumes. Les figures 11 et 12 ci-dessous ont été calculées sur base de l'expression [2] et correspondent respectivement à la poutre de section pleine ( $Z = 0,75$ ) et en caisson ( $Z = 0,35$ );

La ligne horizontale noire sur les figures 11 et 12 représente la frontière en dessous de laquelle le treillis est moins efficace que la poutre, ce qui ne se produit que lorsque l'on combine un treillis dont les barres en compression ont une section peu efficace (sections pleines) avec une poutre de section efficace (en caisson) peu élancée.

Notons que les figures 11 et 12 correspondent au treillis dont toutes les barres sont optimisées de façon individuelle. De plus, ce sont les treillis les plus légers (c'est à dire ceux qui composent l'enveloppe des courbes d'efficience de la figure 9) qui ont été pris comme référence. Il faut donc nuancer les résultats présentés qui semblent largement en faveur du treillis dans la plupart des situations.

## 5. COMPARAISON DES INDICATEURS DE VOLUME DES ARCS ET DES TREILLIS

Comme expliqué au point précédent, la méthode la plus élégante pour comparer rigoureusement un treillis aux autres types de structures est d'effectuer la comparaison en considérant les treillis multi-liernes qui sont exclusivement composés d'éléments tendus ou comprimés. Si on compare le meilleur des treillis (c'est à dire le multi-liernes dont toutes les barres sont optimisées individuellement) avec le meilleur des arcs de section constante (c'est-à-dire l'arc sans articulations), on peut établir la figure 13 qui exprime le rapport  $W_T/W_a$  en fonction de l'indicateur de flambement  $\Psi_a$  de l'arc. Chaque courbe est associée à une certaine valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi_T$  relatif au treillis.

Cette figure est donc obtenue à partir de la courbe enveloppe des treillis multi-liernes de la figure 9 d'une part et à partir de la courbe d'efficience de l'arc sans articulations de section constante d'autre part (Chapitre 4, figure 16).

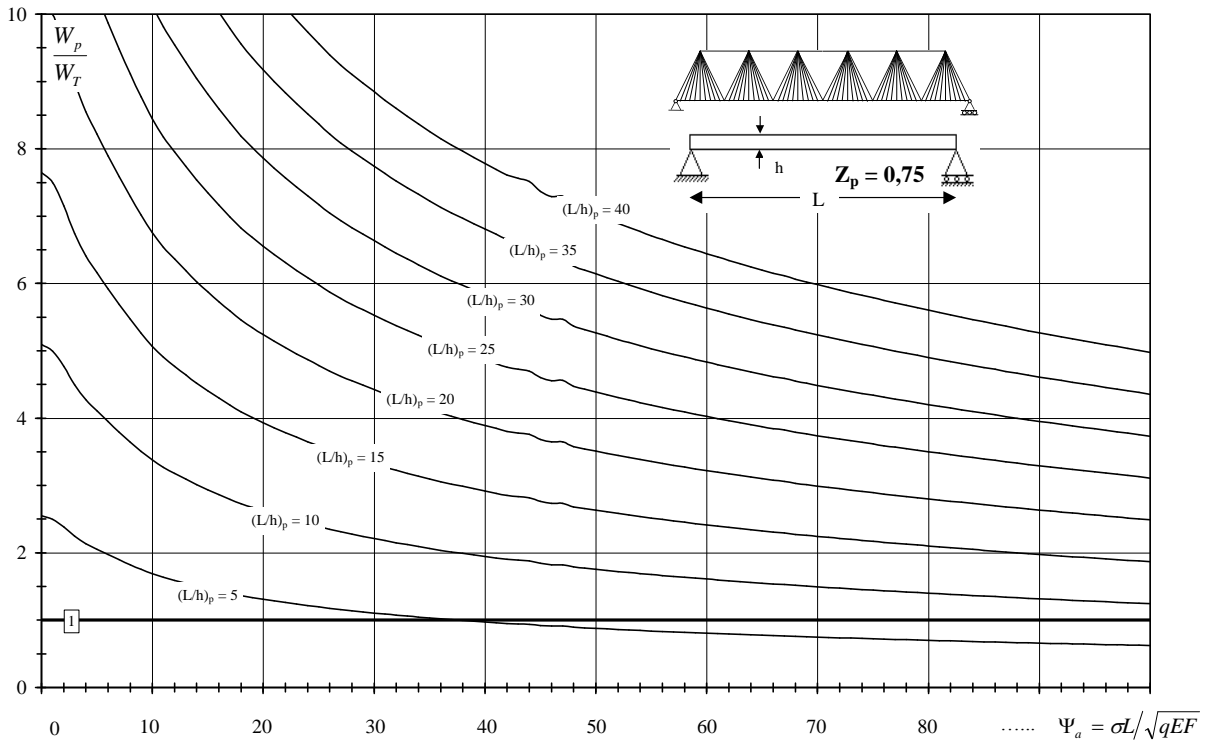


Figure 11 : rapport entre les indicateurs de volume d'un treillis (Warren multi-liernes) et d'une poutre isostatique de section caractérisée par un facteur de forme  $Z_p = 0,75$  (section pleine).

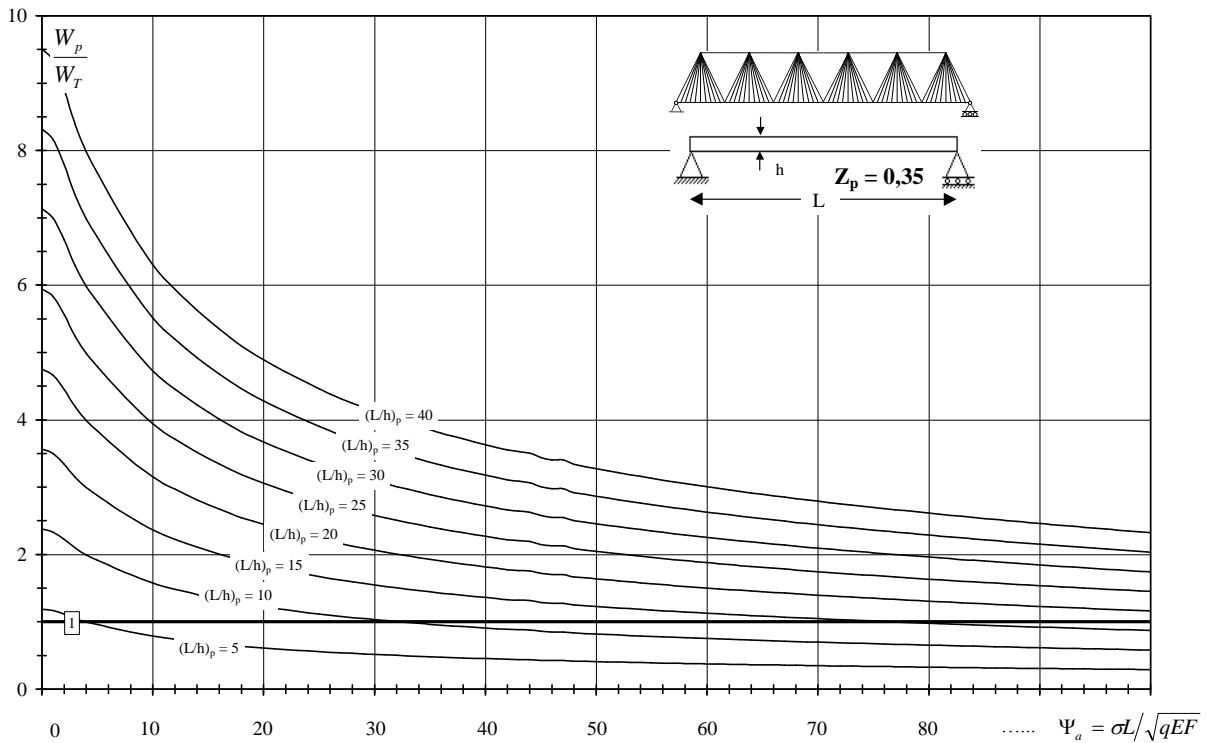
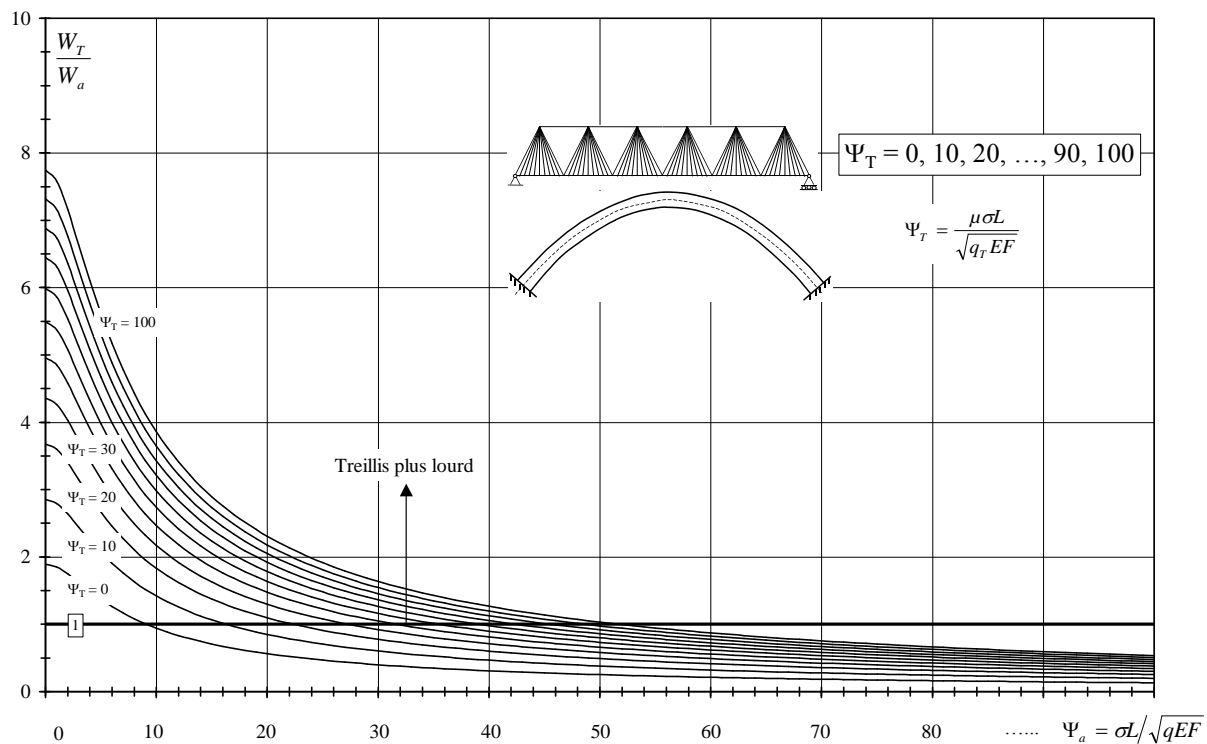


Figure 12 : rapport entre les indicateurs de volume d'un treillis (Warren multi-liernes) et d'une poutre isostatique de section en caisson caractérisée par un facteur de forme  $Z_p = 0,35$ .



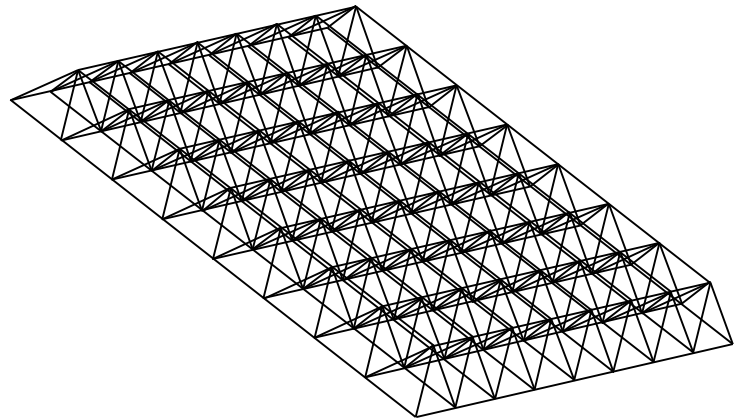
**Figure 13 :** rapport entre l'indicateur de volume  $W_T$  d'un treillis (Warren multi-liernes) caractérisé par un indicateur de flambement  $\Psi_T$  et l'indicateur de volume  $W_a$  d'un arc sans articulations de section constante et d'indicateur de flambement  $\Psi_a$ .

La figure 13 montre que le treillis est plus lourd que l'arc lorsque l'on combine une grande valeur de  $\Psi_T$  avec une petite valeur de  $\Psi_a$ . Autrement dit, le treillis est plus lourd que l'arc lorsque le type de section relatif à ses éléments comprimés est médiocre (éléments pleins :  $q$  petit) et que la section de l'arc, au contraire, est un caisson performant.

## 6. CONCLUSION

Cette dernière étude montre qu'il n'y a pas de réponse unique à un problème structurel donné. L'arc présente, par rapport à la poutre de mêmes caractéristiques, une capacité portante bien supérieure et des déformations relatives à mi-travée bien inférieures...mais reste très sensible à l'effet des charges aléatoires. Le câble est encore plus performant au niveau de la capacité portante à quantité de matière égale mais il est fortement sensible aux charges variables qui peuvent être responsables de déformations excessives. Par ailleurs, il nécessite des ancrages solides, gros consommateurs de matière, même lorsque l'on peut tirer profit d'un contexte naturel. Quant aux treillis, ils s'avèrent très performants, tant au niveau de leur capacité portante, que de leurs déformations ou leur capacité à répartir et reprendre des charges variables aléatoires. Enfin, la poutre en caisson est globalement la plus grande consommatrice de matière, mais reste évidemment une solution privilégiée pour sa simplicité structurelle et son aptitude à reprendre les charges aléatoires.





# *Conclusion et perspectives*



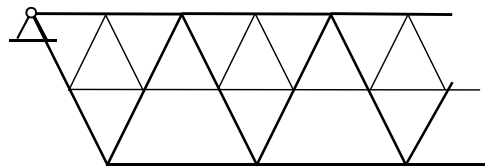


**CONSIDERATIONS SUR L'IMPORTANCE DU FLAMBEMENT :**

L'analyse des courbes d'efficience des différentes structures étudiées dans la présente thèse montre que le flambement peut seulement être négligé pour les valeurs de l'indicateur de flambement  $\Psi$  proches de zéro. Ces courbes mettent en évidence que les valeurs croissantes de  $\Psi$  correspondent à des volumes totaux pouvant dépasser considérablement le volume calculé sans tenir compte du flambement.

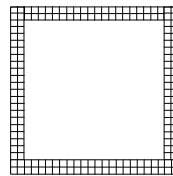
Comme Philippe Samyn l'a montré dans sa thèse, et particulièrement dans l'épilogue, le flambement des éléments comprimés d'une structure peut être atténué de trois manières différentes. Chacune d'elles correspond à une diminution de la valeur de l'indicateur de flambement  $\Psi$  de la structure.

1. **En considérant des structures dont les éléments comprimés sont contrebutés, ce qui est le cas des multi-treillis :**



→ bien que ces contrebutages ne soient pas envisageables dans toutes les situations et qu'ils augmentent le nombre des assemblages et ne facilitent pas la mise en œuvre, ils permettent effectivement de réduire fortement les longueurs de flambement des éléments comprimés, et donc le volume total des structures.

2. **En choisissant des éléments comprimés dont la section transversale est "performante" :**



→ Tout d'abord, ce type de section est difficilement envisageable pour le bois massif et le béton : seuls l'acier, l'aluminium et les nouveaux matériaux permettent la réalisation de telles sections.

Ensuite, il est utile de rappeler que le rapport entre le volume  $V$  d'une barre comprimée et dimensionnée selon la loi d'Euler  $\sigma/\sigma_{crit} = 1 + \Lambda^2$  et le volume  $V_0$  d'une barre de même longueur soumise à la même charge mais dimensionnée sans tenir compte du flambement est égal à :

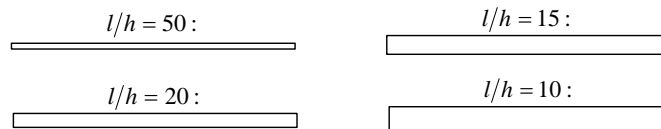
$$\frac{V}{V_0} = 1 + \frac{16}{\pi^2} \left( \frac{\mu l}{h} \right)^2 \left( \frac{\sigma}{E} \right) Z \Rightarrow V = V_0 + \Delta V \quad [1]$$

Dans cette expression, " $\mu l$ " est la longueur effective de la barre, " $h$ " sa dimension transversale dans le plan de flambement et  $Z$  est le *facteur de forme* de la section, égal à  $\Omega h^2 / (16I)$ , et représenté à la figure 23 du chapitre 1. Comme le montre cette figure, le facteur de forme  $Z$  est, dans le meilleur des cas et pour les sections creuses les plus performantes (celles qui ont des parois infiniment minces), toujours supérieur à 0,38<sup>1</sup>. Il

<sup>1</sup> Certains profils industriels à larges ailes peuvent toutefois présenter un facteur de forme  $Z$  plus performant pouvant descendre jusqu'à 0,32 dans le meilleur des cas ...et selon l'axe d'inertie principal.

est, au pire, égal à 1, ce qui correspond aux sections circulaires pleines. On en conclut donc que **le choix d'une section performante peut diminuer la valeur de  $\Delta V$  d'une valeur maximale de 60% par rapport à la solution qui correspond au choix du plus mauvais profil**. Notons aussi que la section carrée creuse à parois alvéolées, représentée ci-dessus, permet d'obtenir des facteurs de forme "Z" proches de ceux des sections creuses à parois infiniment minces tout en diminuant le risque de flambement local...mais le facteur de forme Z reste de toute façon limité à sa borne inférieure de 0,38.

3. *En diminuant l'élanement géométrique l/h des éléments comprimés :*



L'élanement géométrique l/h d'un élément comprimé influence de manière considérable le surplus de volume  $\Delta V$ . En effet, d'une part il est présent dans l'expression [1] à la puissance 2 et, d'autre part, ses valeurs ne sont limitées que par des considérations esthétiques ou pratiques (assemblages, manutention,...). Par exemple, toutes autres choses restant égales, la valeur de  $\Delta V$  est **divisée par 25** si l'on choisit un élanement l/h=10 plutôt qu'un élanement l/h=50 ! Il est toutefois essentiel de faire remarquer que, la longueur "l" restant constante, une diminution du rapport l/h a pour conséquence d'augmenter h, et donc de **créer des sections creuses dont les parois sont de plus en plus minces**, ce qui augmente les risques de flambement local...

Pour illustrer ces propos, on peut reprendre l'exemple de la passerelle traitée au chapitre 1, §9. Chaque treillis Warren qui compose la passerelle correspond à un indicateur de flambement  $\Psi = 48$  et comporte des barres en compression carrées creuses de rapport e/h = 0.1, ce qui correspond à des facteurs de forme Z et q égaux, respectivement, à 0.46 et 0.38, qui sont déjà des valeurs performantes.

Dans cet exemple, on constate que le volume total de chaque treillis est égal à **0,766 m<sup>3</sup>**. La barre la plus comprimée de la membrure supérieure a une longueur de 3,85 m et un diamètre de 202 mm, ce qui correspond à l/h = 19, une section de 7763 mm<sup>2</sup> et à une épaisseur de profil e=20 mm, ce qui est considérable. Si on considère le plus léger des treillis à 13 mailles dimensionné sans tenir compte du flambement (ordonnée à l'origine de la courbe d'efficacité relative à n=13), on trouve un volume de **0,385 m<sup>3</sup>**, soit 2 fois moins de matière que si l'on tient compte du flambement.

Si on recalcule l'indicateur de flambement  $\Psi$  en imposant une valeur du facteur "q" 5 fois plus grande, c'est-à-dire 1.9, on trouve  $\Psi=21.4$  m=e/h=0.021 et Z=0.39. Si on garde le même nombre de mailles, les courbes d'efficacité montrent que l'élanement L/H du treillis doit être de 9,5 pour qu'il soit optimum. Par ailleurs, un calcul donne les résultats suivants :

Barre supérieure : h=335 mm, l/h=11,5, e=7mm,  $\Omega=4685$  mm<sup>2</sup>.  
 Volume total du treillis : **V=0,525 m<sup>3</sup>**.

Dans ce cas, on voit que l'élanement l/h des barres est proche de 10, ce qui semble déjà important, mais on voit que le volume total est passé de 0,766 à 0,525 mm<sup>2</sup>. Il faut aussi être attentif à l'épaisseur des parois qui deviennent très fines et peuvent flamber localement.

On peut encore diminuer ce volume sachant que (Chapitre 1, figure 20) le nombre de mailles optimal relatif à  $\Psi=21,4$  est 5 pour L/H=6,3. Si on garde q=1,9, on trouve :

Barre supérieure : h=359 mm, l/h=28, e=7,5mm,  $\Omega=5359$  mm<sup>2</sup>.  
 Volume total du treillis : **V=0,478 m<sup>3</sup>**.

Il faut toutefois garder à l'esprit que cette dernière solution impose des longueurs plus grandes aux éléments du tablier chargés de reporter les charges sur les nœuds et qu'elle n'est donc pas rigoureusement comparable aux deux précédentes, sauf si l'on considère le cas du multi-treillis.

Cet exemple montre qu'un gain important peut effectivement être obtenu en jouant sur l'épaisseur des profils, mais que cela ne pourra jamais éliminer complètement l'influence du flambement, sous peine de créer d'autres problèmes, par exemple de flambement local suite aux épaisseurs de parois trop minces.

Finalement, l'ordre de grandeur du surplus de volume inhérent à ces phénomènes d'instabilité est essentiellement dicté par l'aspect visuel que l'on veut bien donner à une structure : construire "visuellement léger et structurellement lourd" ou "visuellement lourd et structurellement léger"...

### ***LES APPORTS DE CETTE THESE :***

Cette thèse tente de fournir un complément d'informations sur le comportement des structures et sur les considérations qui guident leur choix. Tout d'abord, elle a permis de mettre en évidence une méthode innovatrice de prédimensionnement et d'optimisation des structures grâce à la définition d'indicateurs adimensionnels particuliers : l'indicateur de flambement, l'indicateur de poids propre, l'indicateur de contraintes parasitaires, l'indicateur de delta-volume et l'indicateur de rotation, eux-mêmes basés sur 3 autres indicateurs sans dimension baptisés *facteurs de forme*.

Ensuite, l'utilisation de cette méthode et son application pour les structures classiques ont permis de mettre en évidence la supériorité de certaines structures par rapport à d'autres. C'est le cas du treillis Warren qui montre une flagrante supériorité sur tous les points de vue : le volume, la raideur et les contraintes parasitaires. D'autres résultats significatifs ont pu être établis, comme l'influence de l'hyperstaticité des arcs sur leur volume ou les facteurs qui déterminent la portée limite des structures.

Par ailleurs, ce travail montre toute la pénalité introduite par le dimensionnement irréfléchi des structures afin de les faire résister au flambement : si celui-ci ne peut jamais être évité complètement, il est clair que son influence peut souvent être diminuée fortement par le choix de structures ou de profils adéquats, ce qui n'est malheureusement pas toujours possible pour des raisons constructives ou tout simplement parce que cela implique des proportions irréalistes.

Enfin, le logiciel ISSD a été mis au point et complété pour les besoins de cette thèse. Il constitue à lui seul un investissement horaire important qui représente une part non-négligeable du temps imparti à ce travail. Vu le succès de ce logiciel auprès de diverses Universités ou Ecoles supérieures belges et européennes, il semble légitime de considérer qu'il est à lui seul, et "malgré lui", l'un des aboutissements importants de cette thèse.

### ***LES PERSPECTIVES :***

Les perspectives de recherche découlant de ce travail sont nombreuses. A ce jour, il semble que seuls Zalewski [ZAL92] et Quintas Ripoll [QUI89] et [QUI92] aient approché cette méthode fondée sur les indicateurs morphologiques, sans toutefois la généraliser ni l'étendre pour prendre en compte le flambement ou le poids propre. Ce travail ouvre donc la voie à l'étude d'autres structures comme les pylônes, les structures tridimensionnelles de type cylindres, paraboloides, hyperboloides en treillis ou non, les structures bidimensionnelles ou tridimensionnelles en porte-à-faux, les dômes en simple et double nappe, les surfaces sphériques, elliptiques ou composées, les structures de tenségrité, et bien

d'autres encore. Par ailleurs, il semble intéressant d'intégrer à cette théorie quelques éléments de calcul aux états limites, ce qui peut être une critique de cette étude qui considère les matériaux dans leur domaine élastique. Une extension nécessaire à cette thèse est aussi le développement du programme ISSD en vue de permettre l'optimisation automatique des structures tridimensionnelles. Par ailleurs, une analyse et comparaison de structures existantes viendrait utilement élargir ce travail.

*Louvain-la-Neuve, le 15 février 2000.*

# Bibliographie

---

Chaque référence reprise dans cette bibliographie est précédée des trois premières lettres du nom de l'auteur suivies de l'année de publication, le tout entre crochets.

- [ALW84] Alwood R. J., Chung Y.S., "Minimum Weight Design of Trusses By An Optimality Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 697-713, 1984.
- [BEU98] Beukers A., "Lightness, The Inevitable Renaissance of Minimum Energy Structures", *010 Publishers, Rotterdam*, 1998.
- [BOU93] Bouley J.C., "Un pont Warren à poutres latérales pour le franchissement du canal de la Deûle à Hénin-Beaumont", *Bulletin ponts métalliques*, n° 16, pp. 59-72, Otua, Paris, 1993.
- [COU67] Courbon J., "Flambement des arcs", (*Supplément aux*) *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, n° 235-236, pp. 859-993, Paris, 1967.
- [DOB84] Dobbs M.W., Felton L.P., "Optimization of Truss Geometry", *ASCE J. Struct. div.*, ST10, pp. 2105-2118, 1969.
- [DUG95] Duguet P., Hoorpah W., "Passerelle pour piétons à Houdeng", *Bulletin ponts métalliques*, n° 17, pp. 169-177, Otua, Paris, 1995.
- [DIN86] Ding Y., "Shape Optimization of Structures : A Litterature Survey", *Computers and structures*, Vol 24, n° 6, pp. 985-1004, Londres, 1986.
- [EUR92] Eurocode Acier (E3), Norme Belge NBN ENV 1993-1-1 : 1992/AC : 1992.
- [EUR92] Eurocode Béton (E2), Norme Belge NBN ENV 1992-1-1 : NBN 15-002.
- [FAR84] Farkas J., "Optimum Design of Metal structures", *Ellis Horwood Series in Engineering Science*, London, 1984.
- [GEM71] Geminard L., Giet A., "Stabilité des constructions, Tome 2 : travaux virtuels, cadres, arcs", *Editions Dunod*, Paris, 1971.
- [HIR96] Hirt M.A., Bez R., "Construction métallique", *Traité de génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes*, Lausanne, 1999 (Première édition 1994).
- [LAT99] Latteur P., "Le calcul des structures", *Editions Académia Bruylant, Collection Pedasup n°40*, Louvain-la-Neuve, 1999 (première édition : 1997).
- [LAT99] Latteur P., "A Global Approach to the Evaluation of Secondary Effects in Trusses Composed of Rigid Nodes", actes du *Congrès EAAE, Architecture and Engineering, The Teaching of Architecture for Multidisciplinary Practice*, Plymouth, février 1999.

- [LAT99] Latteur P., Lejeune M., "ISSD : An Interactive Software for Structural Design", actes du *Congrès EAAE, Architecture and Engineering, The Teaching of Architecture for Multidisciplinary Practice*, Plymouth, février 1999.
- [LAT99] Latteur P., Samyn Ph., "Une méthode globale d'optimisation des treillis", actes du 2<sup>ème</sup> *Congrès Universitaire de Génie Civil*, pp. 365-372, Poitiers, mai 1999.
- [LAT99] Latteur P., Samyn Ph., "Optimization of Arches Subjected to Distributed Loads", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, Vol. I, pp. B.3.11-B.3.20, Madrid, Septembre 1999.
- [LAT99] Latteur P., Samyn Ph., "The Determination of Stresses Due to Bending in Trusses Loaded on Their Rigid Nodes : Study of the Influence of Buckling", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, Vol. I, pp. B.2.33-B.2.40, Madrid, Septembre 1999.
- [LAT00] Samyn Ph., Latteur P., Vilquin T., "A Search For Efficient Trusses", (pour publication dans les) *Proceedings of the IASS International Symposium : Bridging Large Spans From Antiquity To The Present*, Istanbul, Mai 2000.
- [LAR70] Laredo M., "Résistance des matériaux ", *Editions Dunod*, Paris, 1970.
- [LEO94] Leonhardt F., "Ponts, L'esthétique des ponts", *Presses polytechniques romandes*, Lausanne, 1994.
- [LHE74] L'Hermite R., "Flambage et stabilité, le flambage élastique des pièces droites", *Editions Eyrolles*, Paris, 1974.
- [LHE76] L'Hermite R., "Flambage et stabilité, le flambage des arcs et des plaques", *Editions Eyrolles*, Paris, 1976.
- [MAJ72] Majid K.I., "Optimum Design of Hyperstatic Structures", *International. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 561-578, 1972.
- [MAJ74] Majid K.I., "Optimum Design of Structures", *Butterworth & Co. Publishers*, London, 1974.
- [MAS94] Massonet C., Cescotto S., "Mécanique des matériaux", *Editions De Boeck Wesmael*, Bruxelles, 1994.
- [MIC04] Michell A.G.M., "The limit of Economy of Material in Frame Structures", *Philosophical Magazine*, S.6, Vol. 8, n° 47, pp. 589-597, 1904.
- [QUI89] Quintas Ripoll V., "Sobre el teorema de Maxwell y la optimization de arcos de cubierta", *Informes de la construction*, vol. 40, n°400, pp. 57-70, Madrid, 1989.
- [QUI92] Quintas Ripoll V., "Sobre las formas de minimo volumen de las celosias de seccion constante", *Informes de la construction*, vol. 43, n°418, pp. 61-67, Madrid, 1992.
- [RAM89] Ramondenc Ph., Nguyen Van Phuoc, "Réhabilitation d'un ouvrage d'art métallique ancien Pont en arc sur le Grand Bras de Seine Liaison ferroviaire Vallée de Montmorency-Ermont-Invalides", *Bulletin ponts métalliques*, n° 13, pp. 29-36, Otua, Paris, 1989.
- [SAK92] Saka M.P., Ulker M., "Optimum Design of Geometrically Nonlinear Space Trusses", *Computers and structures*, U.K., Vol 42, n° 3, pp. 289-299, Londres, 1992.

- [SAM92] Samyn Ph., Schiffmann J., Ruelle M., "Poutres et treillis tridimensionnels en mailles triangulaires à progression harmonique", *Proceedings of the First IASS International Seminar on Structural Morphology*, pp. 441-453, Montpellier, septembre 1992.
- [SAM92] Samikian A., "Analyse et calcul des structures", *Editions Gaëtan Morin, Québec, 1994*.
- [SAM98] Samyn Ph., Latteur P., Van Vooren J., "Volume of Structures", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, pp. 537-545, Sydney, 1998.
- [SAM98] Samyn Ph., Latteur P., "Displacements of structures", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, pp. 362-367, Sydney, 1998.
- [SAM99] Samyn Ph., "Etude comparée du volume et du déplacement de structures isostatiques bidimensionnelles sous charges verticales entre deux appuis", Thèse de doctorat, Université de Liège, 1999.
- [SAM99] Samyn Ph., Latteur P., "Multi-harmonic and Internally-Stayed Harmonic Structures : The Search for Minimum Weight", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, Vol. I, pp. B.3.41-B.3.50, Madrid, Septembre 1999.
- [SAM99] Samyn Ph., Latteur P., "Internally-stayed Trusses : The Search for Minimum Weight", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, Vol. I, pp. B.3.33-B.3.40, Madrid, 1999.
- [SAM00] Latteur P., Samyn Ph., W.P. De Wilde, "Volume And Displacement Indicators For Tubes And Profiles", (pour publication dans les) *Proceedings of the IASS International Symposium : Bridging Large Spans From Antiquity To The Present*, Istanbul, mai 2000.
- [SHE99] Shea K., Smith I.F.C., "Applying Shape Annealing to Full-Scale Transmission Tower Re-Design", *Proceedings of DETC99 : ASME Design Engineering Technical Conference*, Las Vegas, 1999.
- [STU99] Studer M.A., Frey F., "Introduction à l'analyse des structures", *Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1999 (Première édition 1997)*.
- [TIM68] Timoshenko S., "Résistance des matériaux : Théorie élémentaire et problèmes" (traduit d'après la troisième édition américaine par Pinto R.), *Editions Dunod*, Paris, 1968.
- [TIM68] Timoshenko S., "Résistance des matériaux : Théorie développée et problèmes" (traduit d'après la deuxième édition américaine par Lafitte Ch.), *Editions Dunod*, Paris, 1968.
- [UZM99] Uzman U., Daloglu A., "Optimum Design of Parabolic and Circular Arches With Varying Cross Section", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 8, n° 5, pp. 465-476, 1999.
- [VIR93] Virlogeux M., Bouchon E., Resplendido J., Berthelley J., "Projet d'arc métallique tubulaire au dessus de l'autoroute A75 à l'échangeur d'Antrenas", *Bulletin ponts métalliques*, n° 16, pp. 159-169, Otua, Paris, 1993.
- [VIR95] Virlogeux M., Bouchon E., Berthelley J., Resplendido J., Bourjot A., Clément M., "L'arc métallique tubulaire au dessus de l'autoroute A75 à l'échangeur d'Antrenas", *Bulletin ponts métalliques*, n° 17, pp. 93-100, Otua, Paris, 1995.
- [WIE96] Wiedemann J., "*Leichtbau 1 : Elemente*", Springer-Verlag, Berlin, 1996 (première édition : 1986).



[WIE96] Wiedemann J., "*Leichtbau 2 : Konstruktion*", Springer-Verlag, Berlin, 1996 (première édition : 1989).

[ZAL80] Zalewski W. "The Flow Of Forces", *Excerpt from Notes on Structural Behavior for Architecture Students*, M.I.T., 28 Pages, 1980.

[ZAL92] Zalewski W., Kus St., "Shaping Structures For Least Weight", *Proceedings of the IASS International Congress on Shells and Spatial Structures*, pp. 376-383, Stuttgart, 1992.

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL  
Faculteit Toegepaste Wetenschappen



# Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques



*Application aux structures soumises en partie  
ou en totalité au flambement*

Tome 3/4 : annexe 1 (compléments au chapitre 2)

Pierre Lateur

*Verhandeling ingediend ter  
verkrijging van de graad van Doctor  
in de Toegepaste Wetenschappen*

*Promotor : Prof. Dr W. P. De Wilde*

*Februari 2000*

## Contenu :

Ce dossier *annexe 1* contient toutes les figures relatives au chapitre 2. Il comporte 3 parties (I, II et III) correspondant respectivement aux treillis Warren, Pratt et Howe.

### **Partie I : le treillis Warren**

#### I.1. Treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (Norm)

##### I.1.1. Charges distribuées (Distr)

###### I.1.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### I.1.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

##### I.1.2. Charges aléatoires (Aleat)

###### I.1.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### I.1.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

#### I.2. Treillis situés en dessous de la ligne définie par les appuis (Sous)

##### I.2.1. Charges distribuées (Distr)

###### I.2.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### I.2.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

##### I.2.2. Charges aléatoires (Aleat)

###### I.2.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### I.2.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

### **Partie II : le treillis Pratt**

#### II.1. Treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (Norm)

##### II.1.1. Charges distribuées (Distr)

###### II.1.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### II.1.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

##### II.1.2. Charges aléatoires (Aleat)

###### II.1.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### II.1.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

#### II.2. Treillis situés en dessous de la ligne définie par les appuis (Sous)

##### II.2.1. Charges distribuées (Distr)

###### II.2.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### II.2.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

##### II.2.2. Charges aléatoires (Aleat)

###### II.2.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

###### II.2.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

## Partie III : le treillis Howe

### III.1. Treillis situés au dessus de la ligne définie par les appuis (Norm)

#### III.1.1. Charges distribuées (Distr)

##### III.1.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

##### III.1.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

#### III.1.2. Charges aléatoires (Aleat)

##### III.1.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

##### III.1.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

### III.2. Treillis situés en dessous de la ligne définie par les appuis (Sous)

#### III.2.1. Charges distribuées (Distr)

##### III.2.1.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

##### III.2.1.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

#### III.2.2. Charges aléatoires (Aleat)

##### III.2.2.1. Optimisation individuelle des barres (Optimax)

##### III.2.2.2. Optimisation par catégories de barres (Cat)

*Remarque importante : l'erreur suivante, détectée trop tard, n'a pas pu être corrigée avant reliure :*

*Sur les figures relatives à l'indicateur d'élançement, l'expression suivante :*

$$\Lambda_{\max,\min} = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi E}} \lambda_{\max,\min}$$

*doit être remplacée par celle-ci :*

$$\Lambda_{\max,\min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \lambda_{\max,\min}$$

*Cette erreur a été corrigée dans le tome 1.*

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL  
Faculteit Toegepaste Wetenschappen



# Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques



*Application aux structures soumises en partie  
ou en totalité au flambement*

Tome 4/4 : annexe 2 (publications)

Pierre Latteur

*Verhandeling ingediend ter  
verkrijging van de graad van Doctor  
in de Toegepaste Wetenschappen*

*Promotor : Prof. Dr W. P. De Wilde*

*Februari 2000*

## Contenu :

### 1. Mode d'emploi du programme ISSD

### 2. Publications

"A Search For Efficient Trusses", pour publication dans les actes du symposium international de l'IASS, mai 2000, Istanbul. P. Latteur, Ph. Samyn et W. P. De Wilde.

"Design of Classical Trusses by the Use of Morphological Indicators", Journal of Structural Engineering de l'ASCE (en attente d'acceptation). P. Latteur, Ph. Samyn et W. P. De Wilde.

"Comparaison des treillis classiques de type Warren, Pratt et Howe : optimisation et prédimensionnement sur base d'indicateurs morphologiques", revue française de génie civil (en attente d'acceptation). P. Latteur, Ph. Samyn et W. P. De Wilde.

"The Determination of Stresses Due to Bending in Trusses Composed of Rigid Nodes Loaded on Their Nodes : Study of the Influence of Buckling", actes du congrès international de l'IASS, septembre 1999, Madrid. P. Latteur et Ph. Samyn.

"Optimization of Parabolic Arches Subjected to Distributed Loads", actes du congrès international de l'IASS, septembre 1999, Madrid. P. Latteur et Ph. Samyn.

"Une méthode globale d'optimisation des treillis", actes du 2<sup>ème</sup> congrès universitaire de génie civil, mai 1999, Poitiers. P. Latteur et Ph. Samyn.

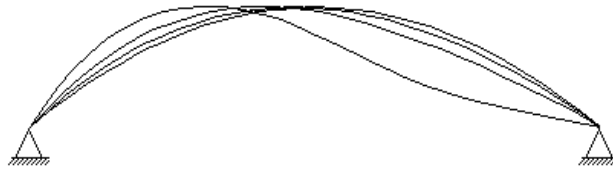
"A Global Approach to the Evaluation of Secondary Stresses in Trusses Composed of Rigid Nodes", actes du congrès international de l'AEEA, "Entre l'Architecte et l'Ingénieur", février 1999, Plymouth. P. Latteur.

"ISSD : An Interactive Software for Structural Design", actes du Congrès EAAE, Architecture and Engineering, The Teaching of Architecture for Multidisciplinary Practice, février 1999, Plymouth. P. Latteur et M. Lejeune. (Se référer au mode d'emploi ci-après, beaucoup plus actuel).

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL  
Faculteit Toegepaste Wetenschappen



# Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques



*Application aux structures soumises en partie  
ou en totalité au flambement*

Tome 2/4 : thèse annexe  
Applicabilité de la méthode des indicateurs morphologiques  
aux treillis tridimensionnels

Pierre Latteur

*Verhandeling ingediend ter  
verkrijging van de graad van Doctor  
in de Toegepaste Wetenschappen*

*Promotor : Prof. Dr W. P. De Wilde*

*Februari 2000*

# EXTENSION DE LA METHODE DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES AUX TREILLIS TRIDIMENSIONNELS

## 1. Etude d'un treillis tridimensionnel plan

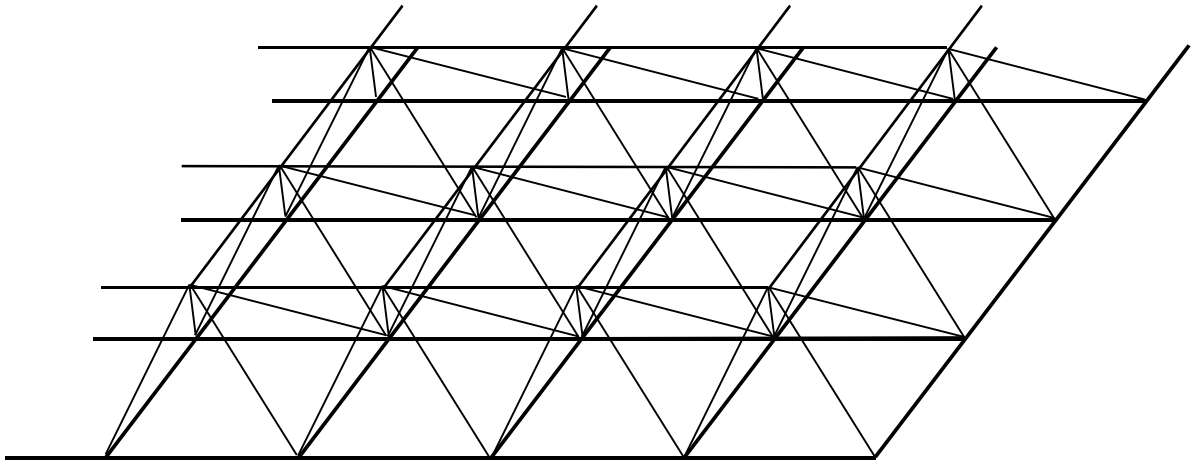


Figure 1 : treillis tridimensionnel à mailles pyramidales.

Les développements ci-dessous ont pour objectif de démontrer l'applicabilité de la méthode des indicateurs morphologiques aux treillis tridimensionnels. Pour le treillis à mailles pyramidales illustré à la figure 1, les conditions d'appui déterminent le mode de répartition des efforts. S'il est appuyé sur ses 4 cotés, une résolution numérique s'impose car il est alors hyperstatique. On considère donc ici le cas du treillis reposant sur deux lignes d'appuis, de telle sorte qu'une étude simplifiée peut consister à analyser la poutre tridimensionnelle de la figure 2.

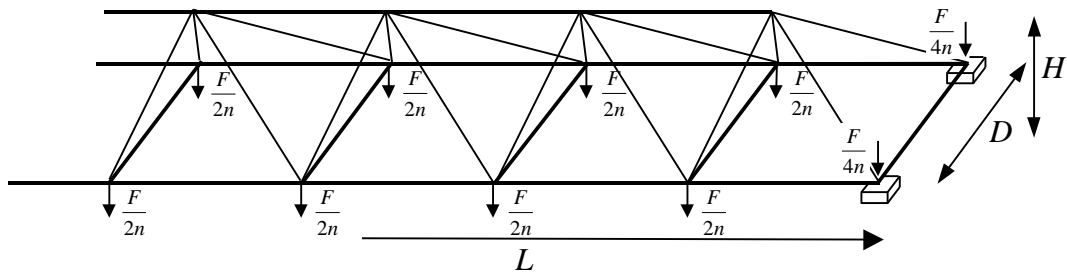
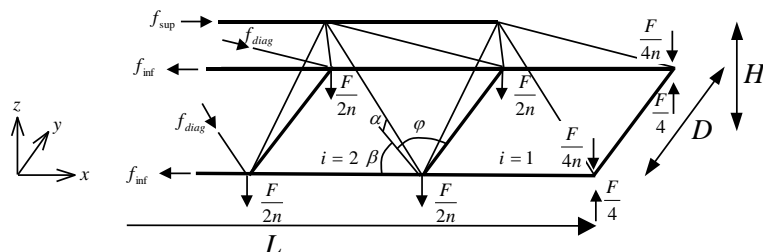


Figure 2 : poutre tridimensionnelle à mailles pyramidales.

Soit  $F$  la charge répartie totale pouvant s'appliquer sur la poutre, et supposée uniformément distribuée. Soit  $L$  sa longueur,  $H$  sa hauteur et  $D$  sa largeur. Soit " $n$ " le nombre de mailles pyramidales, que l'on limitera aux valeurs paires. Soit  $f_{inf}$ ,  $f_{sup}$  et  $f_{diag}$  respectivement l'effort dans un élément inférieur, supérieur et diagonal de la maille d'indice " $i$ ", comme illustré à la figure 3.

Figure 3 :





### 1.1. Etude de la poutre à mailles pyramidales

Si "i" représente l'indice de la maille (voir figure 3), les efforts dans chacune des barres valent :

$$\begin{cases} f_{diag}^{(C)} = \frac{F}{4n \sin \alpha} (n - 2i + 1) \\ f_{sup} = F \frac{L}{H} \frac{1}{2n^2} (i - 1)(n - i + 1) \\ f_{inf} = \frac{F}{4n} \left[ \frac{L}{H} \frac{1}{n} (i - 1)(n - i + 1) + (n - 2i + 1) \frac{\cos \beta}{tg \alpha} \right] \end{cases}$$

Par ailleurs, l'effort dans les diagonales en traction est égal à l'effort dans la diagonale en compression de la même maille. De plus, l'effort dans les barres transversales vaut soit  $(F/4n)(n - 1)\sin \beta / tg \alpha$  pour les barres d'appui (en traction), soit  $(F/2n)\sin \beta / tg \alpha$  pour les autres (en compression). Pour  $n > 2$ , c'est l'effort de compression qui détermine la section maximale.

Si on considère un treillis composé de 5 catégories de barres (diagonales en traction, diagonales en compression, éléments supérieurs, inférieurs et latéraux), c'est la barre la plus sollicitée d'une catégorie qui impose sa section aux autres. On a :

$$\begin{cases} f_{diag, MAX}^{(C)} = f_{diag, MAX}^{(T)} = \frac{F}{4n \sin \alpha} (n - 1) \\ f_{sup, MAX} = \frac{F}{8} \frac{L}{H} \\ f_{inf, MAX} = \frac{F}{4n} \left[ \frac{L}{H} \frac{(n^2 - 4)}{4n} + \frac{\cos \beta}{tg \alpha} \right] \\ f_{transv, MAX} = \frac{F}{2n} \frac{\sin \beta}{tg \alpha} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} l_{diag}^{(C)} = l_{diag}^{(T)} = L / (2n \cos \alpha \cos \beta) \\ l_{sup} = l_{inf} = \frac{L}{n} \\ l_{transv} = D \end{cases}$$

On peut alors calculer les indicateurs de volume de l'ensemble des barres appartenant à une catégorie :

**Barres en traction :**  $W^{(T)} = k_i (l_i / L) \times \text{NbreDeBarres}$

- **2n barres inférieures :**  $W^{(inf)} = \frac{1}{2n} \left( \frac{(n^2 - 4)}{4n} \frac{L}{H} + \frac{\cos \beta}{tg \alpha} \right)$

- **2n diagonales en traction :**  $W^{(diag, T)} = \frac{1}{2n} (n - 1) \frac{1}{\cos \beta \sin 2\alpha}$

**Barres en compression :**  $W^{(C)} = \frac{1}{2} k_i (l_i / L) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{(l_i / L)^2}{k_i} \Psi^2} \right) \times \text{NbreDeBarres}$

- **(n+1) barres transversales :**  $W^{(transv)} = \frac{(n + 1)}{4n} \frac{D}{L} \frac{\sin \beta}{tg \alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{\pi^2} \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{tg \alpha}{\sin \beta} \Psi^2} \right)$

- **(n-1) barres supérieures :**  $W^{(sup)} = \frac{(n - 1)}{16n} \frac{L}{H} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{32}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \frac{H}{L} \Psi^2} \right)$

• *2n diagonales en compression :*

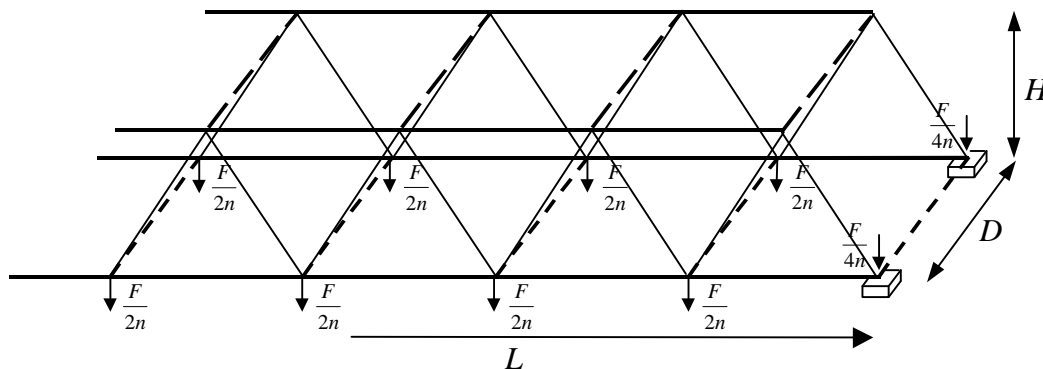
$$W^{(diag,C)} = \frac{(n-1)}{4n} \frac{1}{\cos \beta \sin 2\alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n(n-1)} \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha \cos \beta)^2} \Psi^2} \right)$$

La somme des 5 termes relatifs à chacune des catégories de barres fournit une expression de l'indicateur de volume de la poutre entière qui dépend de 3 nombres adimensionnels :

$$W_{poutre} = \text{fonction}(L/H, L/D, \Psi)$$

L'étude tridimensionnelle a donc pour conséquence d'introduire l'élançement géométrique  $L/D$  du treillis selon la dimension transversale.

Les figures 6 et 7 correspondent respectivement à un rapport  $L/D = 10$  et  $L/D = 20$ . Elles illustrent les courbes d'efficacité des poutres à base pyramidale pour tous les nombres de mailles compris entre 4 et 40. Il faut noter que la base des mailles pyramidales est carrée lorsque  $L/D = n$ . Sur chacune de ces deux figures, ce cas est illustré par la courbe en gras qui met en évidence la propriété suivante : les treillis sont toujours plus lourds lorsque la base des mailles possède une largeur plus grande que sa longueur. En effet, toutes les courbes relatives à  $n > L/D$  (en pointillés) sont parallèles et n'ont aucune intersection commune, alors que les courbes relatives à  $n < L/D$  (en traits continus) se coupent et forment une enveloppe inférieure des courbes d'efficacité.

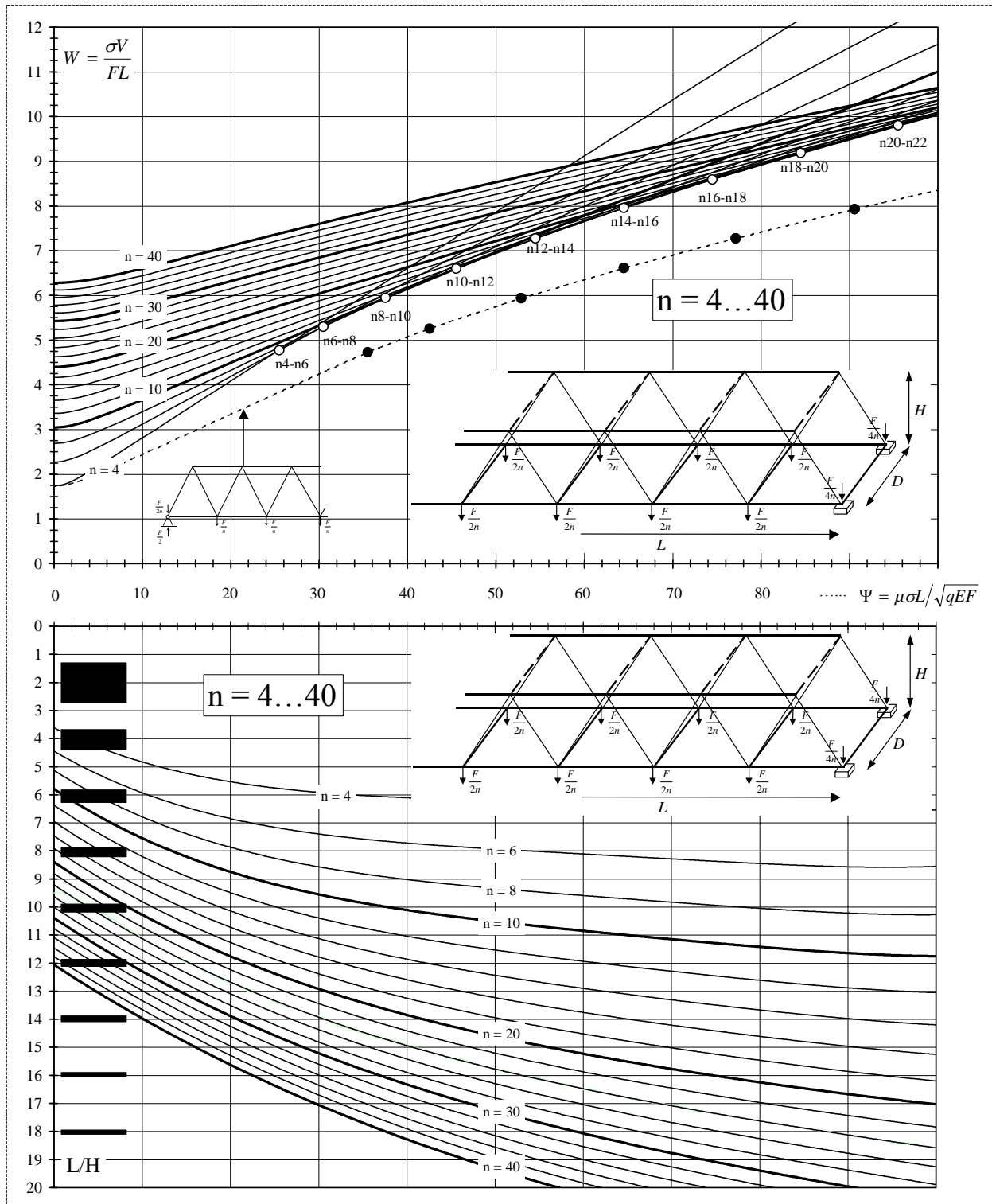


**Figure 4 :** la poutre composée de deux treillis Warren parallèles.

Pour  $D/L \rightarrow 0$ , la dimension transversale devient insignifiante et la poutre correspond alors à l'association de deux poutres Warren parallèles accolées l'une à l'autre, physiquement reliées par la membrure supérieure, et soumises chacune à une charge  $F/2$ . Comme les deux poutres ont la membrure supérieure en commun, la somme de leurs volumes est inférieure à la somme des volumes de deux poutres Warren accolées mais distinctes soumises chacune à une charge totale  $F/2$ . La courbe enveloppe relative à ce cas est représentée en pointillés sur les figures 6 et 7 (les boules blanches correspondent à des segments de courbes relatifs à des nombres de mailles différents, repris dans leur intégralité à la figure 5).

**En résumé, les figures 5 à 7 montrent que la poutre à mailles pyramidales n'est plus légère que son homologue formée de 2 treillis Warren espacés d'une distance "D" que pour les rapport  $L/D$  élevés.**

Finalement, il faut aussi noter que le volume total de deux poutres Warren soumises chacune à une charge totale  $F/2$  est supérieur à celui d'une seule poutre Warren soumise à une charge totale  $F$ . L'enveloppe des courbes d'efficacité relatives à ce dernier cas est illustré en pointillés à la figure 5.



**Figure 5 :** courbes d'efficacité du treillis soumis composé de deux poutres Warren à  $n$  mailles parallèles, pour  $n = 4, 6 \dots 38, 40$ . La charge totale vaut  $F$  : chaque poutre Warren est donc soumise à une charge  $F/2$ . Les montants transversaux ont été négligés.

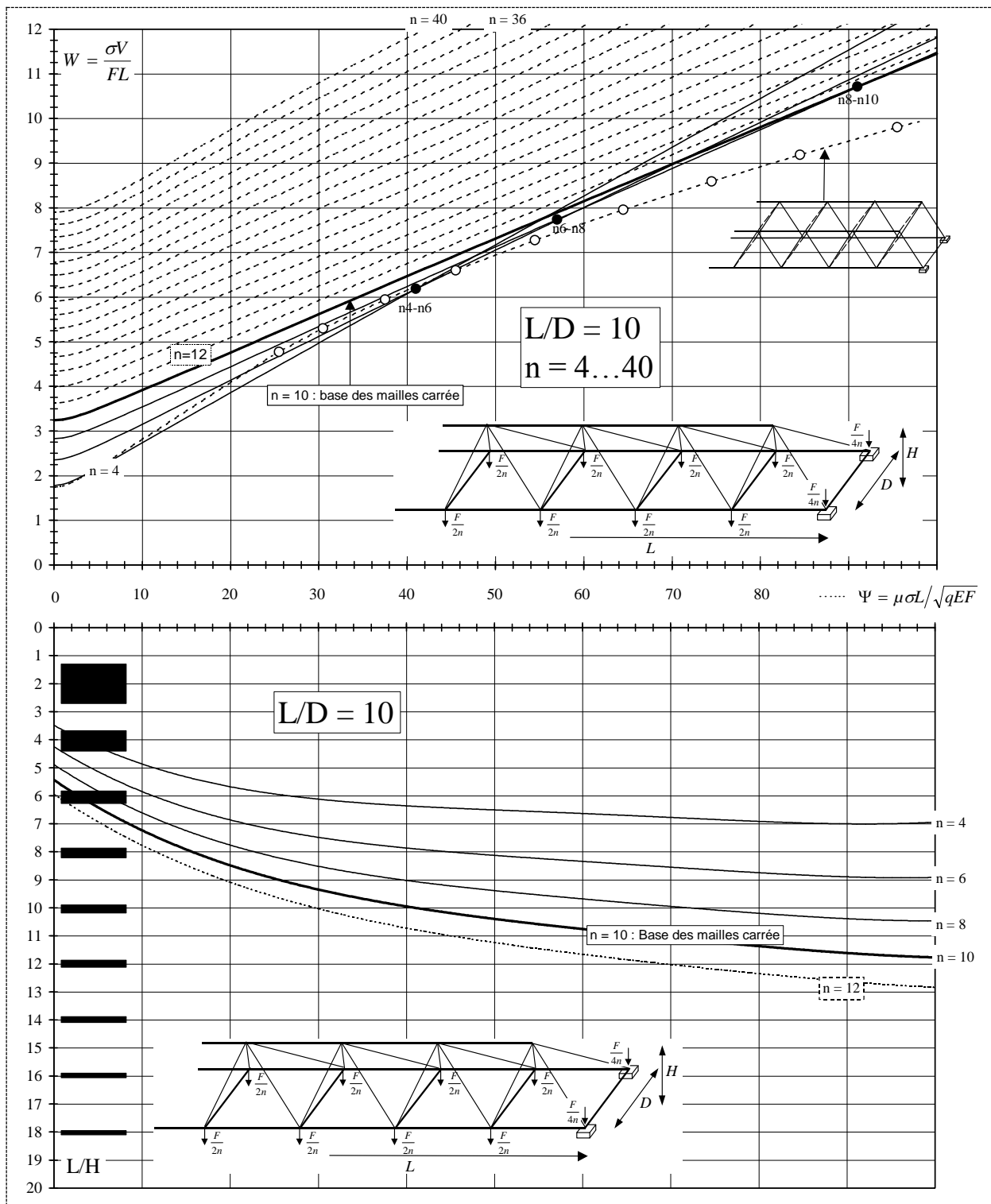


Figure 6 : courbes d'efficace de la poutre à mailles pyramidales, pour  $n = 4, 6 \dots 38, 40$ , et pour  $L/D = 10$ .

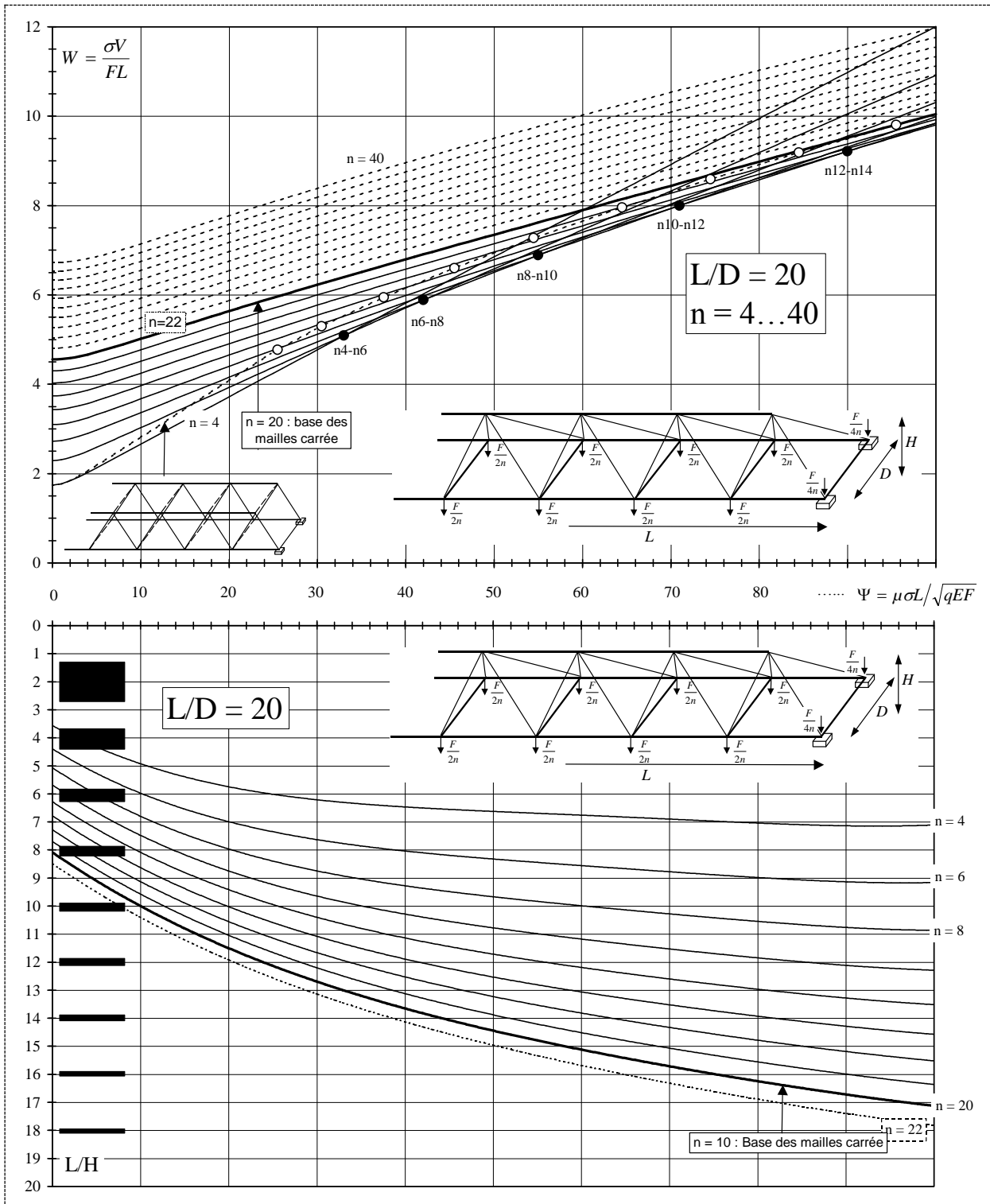
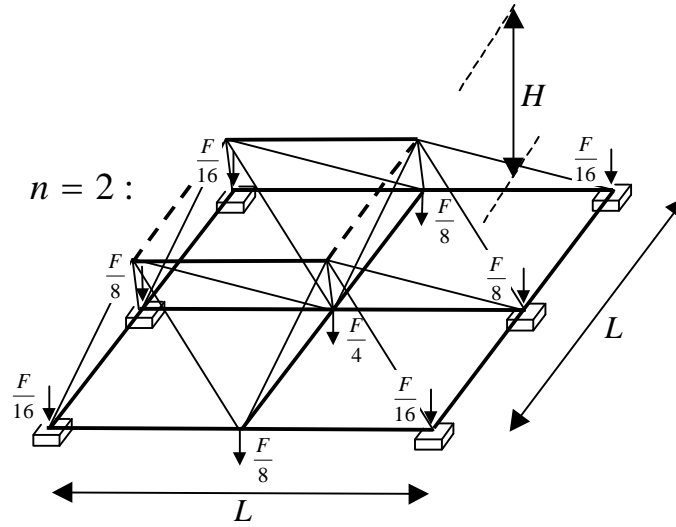


Figure 7 : courbes d'efficace de la poutre à mailles pyramidales, pour  $n = 4, 6 \dots 38, 40$ , et pour  $L/D = 20$ .

## 1.2. Etude du treillis complet composé de plusieurs poutres tridimensionnelles



**Figure 8 :** treillis plan à  $n^2$  mailles pyramidales à base carrée ( $n=2$ ), reposant sur deux lignes d'appuis.

Soit un treillis tridimensionnel de dimension transversale prise égale à  $L$ . Ce treillis est formé d'un nombre " $n_p$ " de poutres parallèles à mailles pyramidales, et il est soumis à une charge totale  $F$  s'appliquant donc sur la surface  $L \times L$ . Chaque poutre supporte une charge totale  $F_p = F/n_p$ , et a un volume  $V_p$ .

L'indicateur de volume minimal d'une poutre vaut :

$$W_p = \frac{\sigma V_p}{(F/n_p)L} = f\left(\left(\frac{L}{H}\right)_{p,\min}, \frac{L}{D}, \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qE(F/n_p)}}\right)$$

Le volume  $V$  du treillis composé de  $n_p$  poutres vaut donc :

$$V = n_p V_p = \frac{FL}{\sigma} f\left(\left(\frac{L}{H}\right)_{p,\min}, \frac{L}{D}, \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qE(F/n_p)}}\right),$$

ce qui correspond à un indicateur de volume valant :

$$W = f\left(\left(\frac{L}{H}\right)_{p,\min}, \frac{L}{D}, \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}} \sqrt{n_p}\right)$$

Si la base des mailles pyramidales est carrée, on a  $n_p = L/D = n$  et on obtient :

$$W = f\left(\left(\frac{L}{H}\right)_{p,\min}, n, \Psi \sqrt{n}\right)$$

La figure 9 illustre les valeurs de l'indicateur de volume obtenues à partir de l'équation précédente pour un treillis à mailles pyramidales dont la base est carrée ( $L/D = n$ ). Elles correspondent donc à un treillis plan carré de dimensions  $L \times L \times H$  composé de  $n^2$  mailles pyramidales. Remarquons que

l'indicateur de volume relatif à un treillis plan rectangulaire de dimensions  $L \times Lt \times H$  peut s'obtenir facilement à partir d'une valeur  $W$  lue sur la figure 9 : il vaut  $(Lt/L)W$ , en notant que  $F$  est la charge totale agissant sur une surface  $L \times L$ . La figure 10 illustre quelques treillis appartenant à l'enveloppe des courbes d'efficacité de la figure 9.

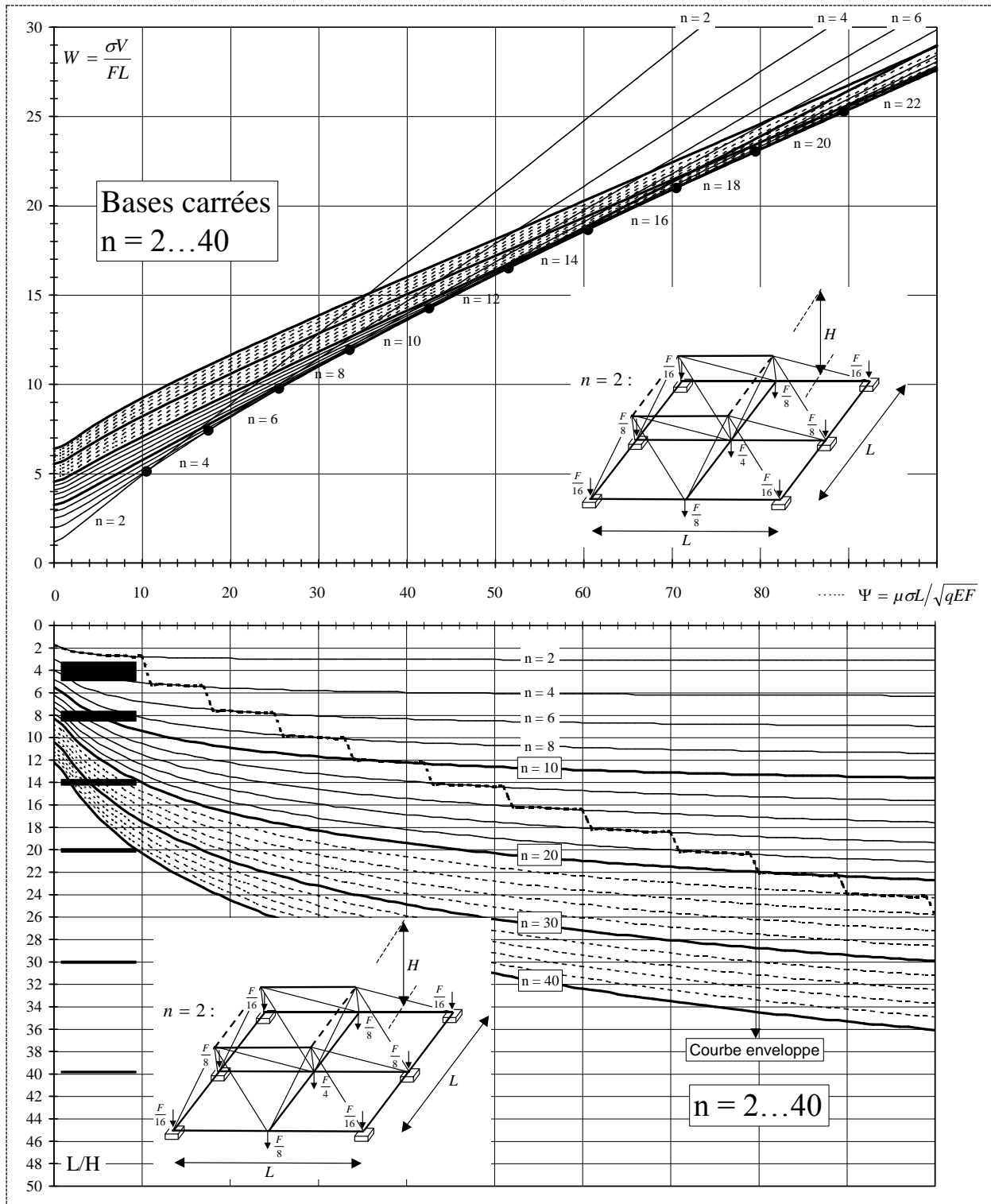
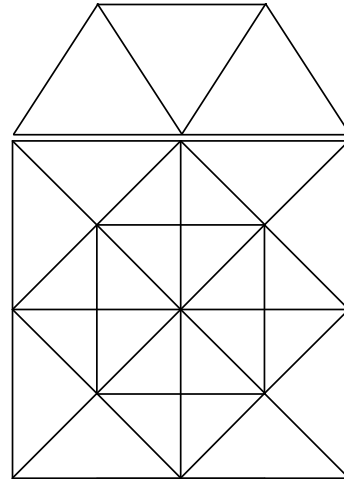
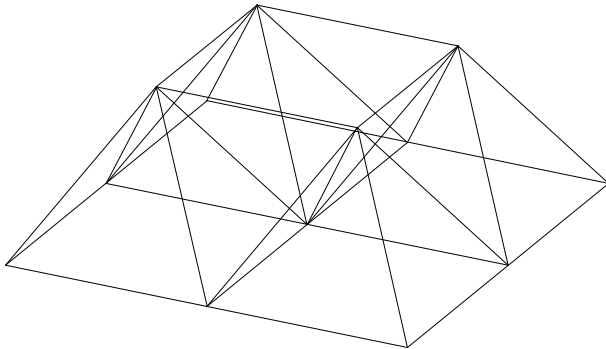


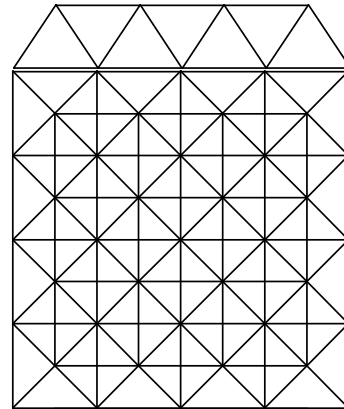
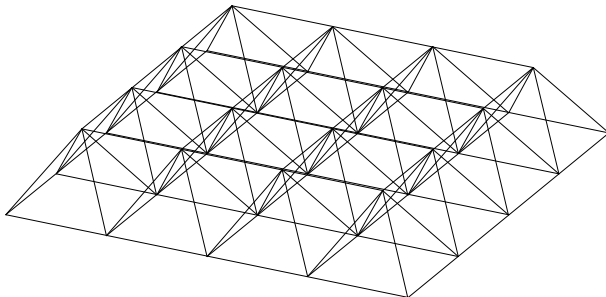
Figure 9 : courbes d'efficacité du treillis composé de  $n^2$  pyramides à base carrée, pour  $n = 2 \dots 40$ .

**Figure 10** : quelques treillis appartenant à l'enveloppe des courbes d'efficacité.

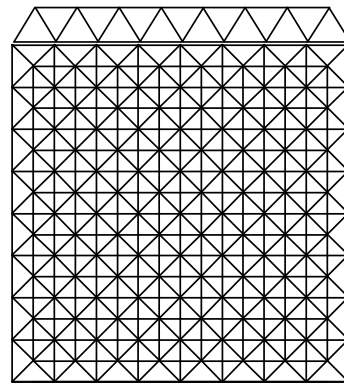
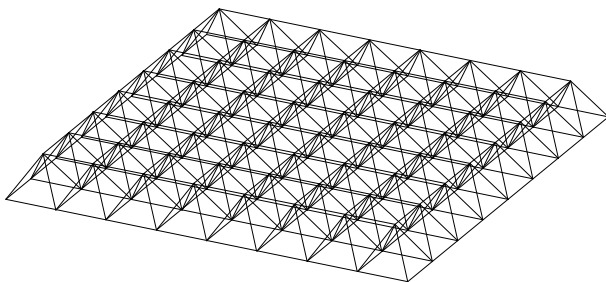
$$\Psi = 5 , n = 2 , L/H = 2,6 , W = 2,948$$



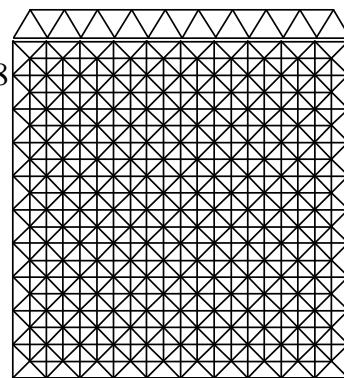
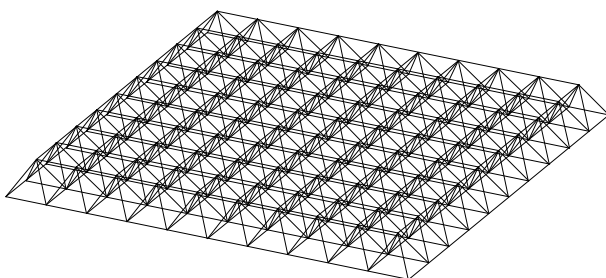
$$\Psi = 15 , n = 4 , L/H = 5,4 , W = 6,617$$



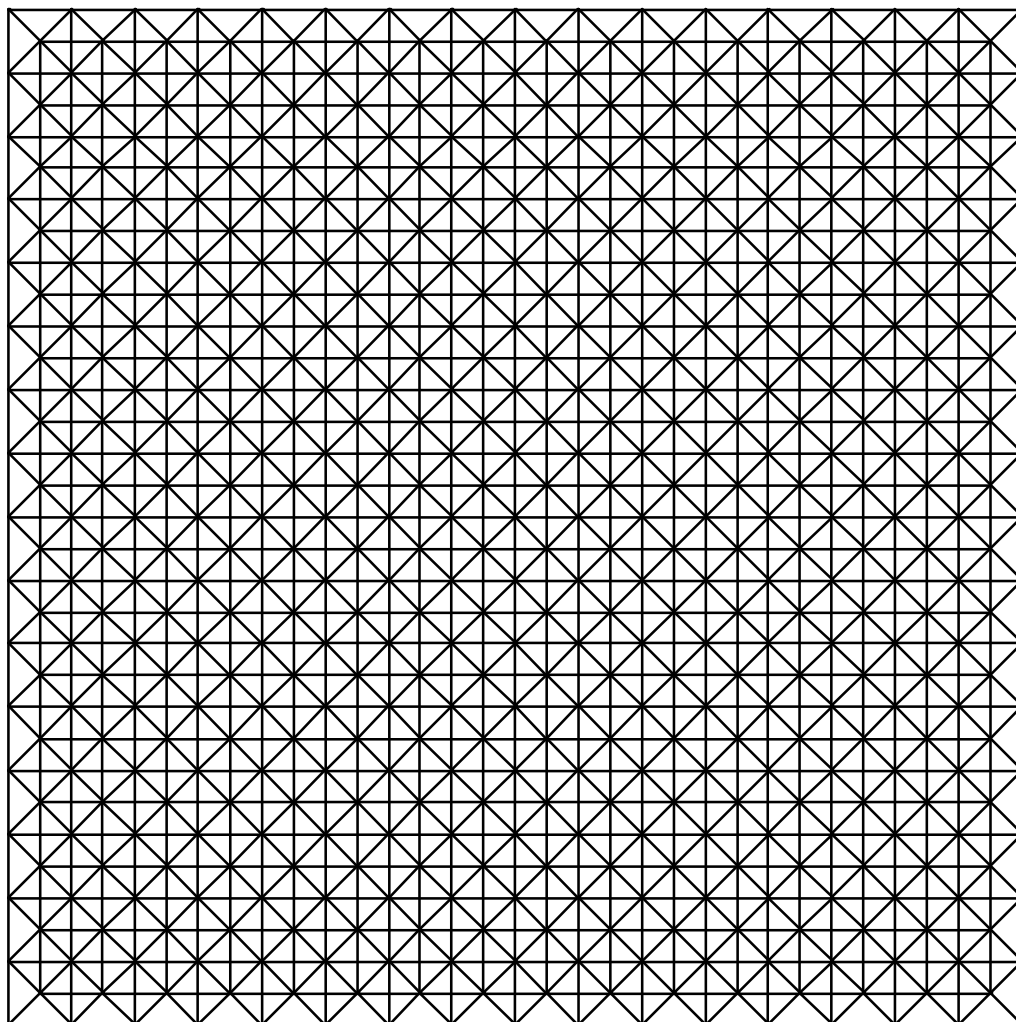
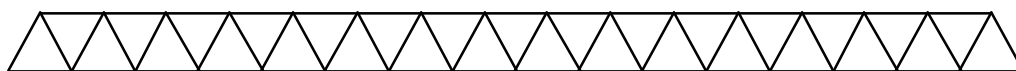
$$\Psi = 30 , n = 8 , L/H = 10,0 , W = 10,985$$



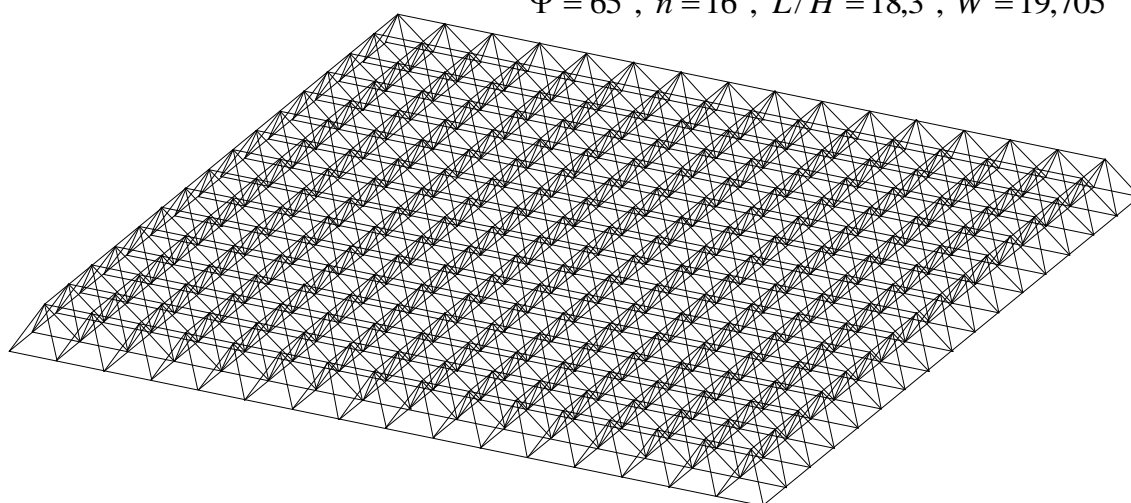
$$\Psi = 40 , n = 10 , L/H = 12,2 , W = 13,618$$



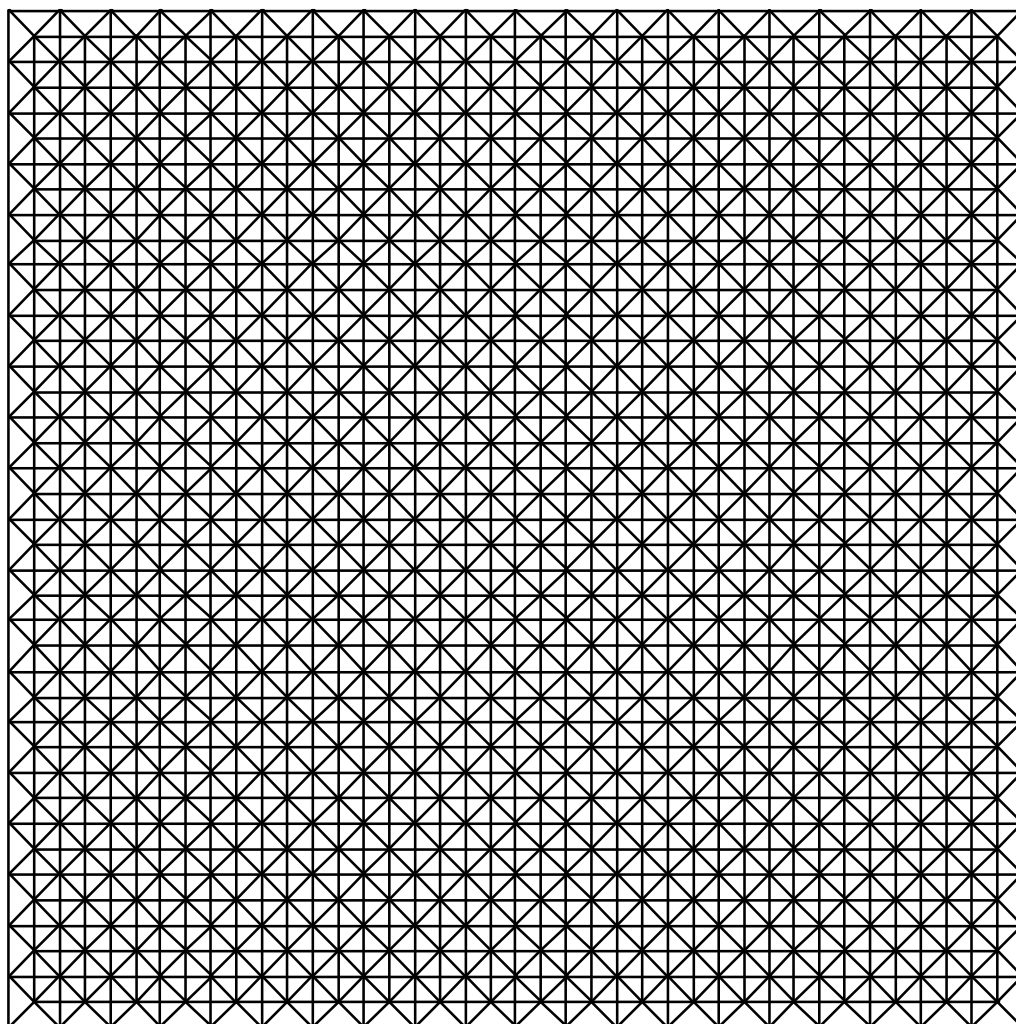
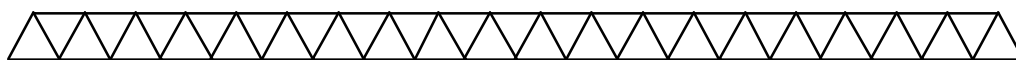




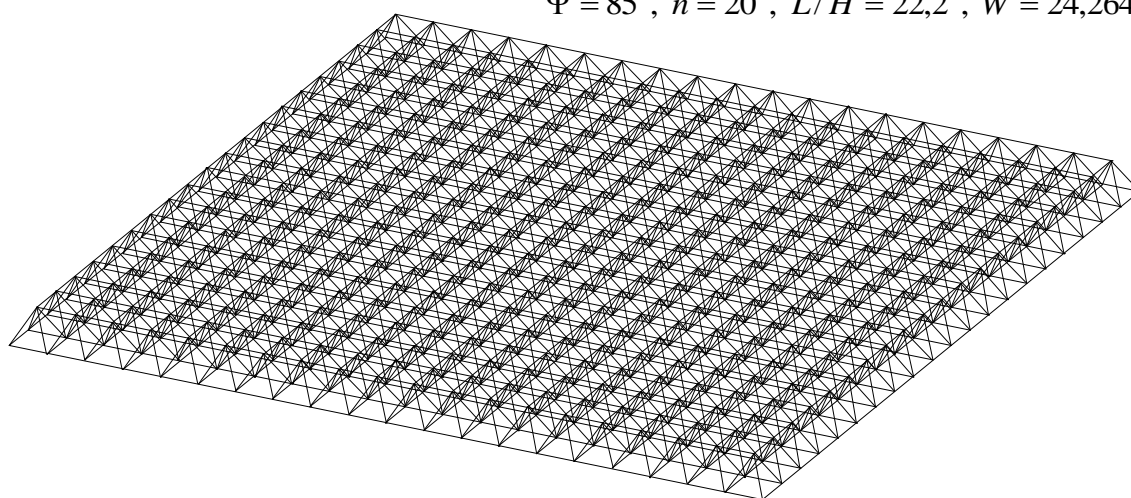
$\Psi = 65$  ,  $n = 16$  ,  $L/H = 18,3$  ,  $W = 19,705$



*Figure 10 (suite)*



$\Psi = 85$  ,  $n = 20$  ,  $L/H = 22,2$  ,  $W = 24,264$



*Figure 10 (suite)*

## **2. Conclusion**

Cette thèse annexe montre l'applicabilité de la méthode des indicateurs morphologiques aux structures tridimensionnelles et ouvre la porte à l'étude d'autres structures : pylônes, structures tridimensionnelles de type cylindres, paraboloides, hyperboloides en treillis ou non, structures bidimensionnelles ou tridimensionnelles en porte-à-faux, dômes en simple et double nappe, surfaces sphériques, elliptiques ou composées, structures de tenségrité, et bien d'autres encore.