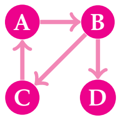
Les quarante-deux poules

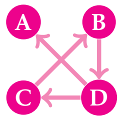
Vous me connaissez peut-être : le fouteبôle, je n'en ai rien à… faire (inutile de verser dans le houliganisme verbal) ; il faudrait me payer très cher pour que je perde deux heures de mon temps devant un téléviseur qui diffuse un match ; quant à m'emmener au stade, les fortunes réunies de MM. ARNAUT, BEZOS, GATES et MUSK (par ordre alphabétique) n'y suffiraient pas. Mais, ces derniers temps, il a été difficile d'échapper totalement au tsunami d'informations concernant la coupe du monde. Et si l'aspect sportif (disent-ils) m'importe peu, vraiment peu, il y a des questions combinatoires qui m'ont titillé l'esprit. Je m'attaque ici à la suivante, issue bien sûr de ce qu'il est convenu d'appeler : la phase de poules ([1]).

> *Quatre équipes s'affrontent en un mini-tournoi, dans lequel chacune rencontre une fois chaque autre. Le vainqueur de chaque partie reçoit trois points et le perdant aucun ; mais le match peut être nul, auquel cas chacune des équipes reçoit un point.*
>
> *Combien de résultats le tournoi de cette poule peut-il avoir ?*

En un sens, c'est facile : 6 rencontres, chacune avec 3 issues possibles : la poule peut avoir $3^6 = 729$ résultats. Mais ce serait trop simple ; nous sommes en effet enclins à considérer que les deux résultats



et



(où la flèche d'un nœud vers un autre indique la victoire de l'équipe représentée par le nœud-source sur celle représentée par le nœud-but, et l'absence de flèche entre deux nœuds un match nul) sont les mêmes, en ce sens qu'ils ne diffèrent que par les étiquettes. Mathématiquement, cela signifie que la permutation

$$\begin{cases} A \mapsto B \\ B \mapsto D \\ C \mapsto C \\ D \mapsto A \end{cases}$$

de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ transforme le premier diagramme en le second ; ces deux diagrammes sont donc isomorphes. Et la question à laquelle nous voulons répondre est : Combien de résultats cette poule peut-elle avoir, à isomorphisme près ?

La réponse est : il y a 42 diagramme de résultats possibles, mais seulement 40 tableaux de points, car, dans deux cas, deux diagrammes non isomorphes donnent le même tableau de points. C'est plutôt beaucoup, à mon estime : avant d'entamer ma quête, j'aurais parié sur un nombre bien plus faible. Cela dit, au risque de vous décevoir, je dois avouer qu'il n'y a pas grand-chose d'intelligent dans le dénombrement : essentiellement, il s'agit de dessiner tous les diagrammes et de regrouper ceux qui sont isomorphes. Bon, il n'est heureusement tout de même pas indispensable d'en dessiner 729 ! Mais il est important d'être bien systématique.

Une bonne idée, sans doute, est de les classer d'entrée par nombre de matchs nuls ; en effet, deux diagrammes qui n'ont pas le même nombre de nuls ne sont en aucun cas isomorphes. Au passage, remarquons que le nombre de points distribués dans une poule est de $6 \times 3 = 18$ s'il n'y a aucun match nul, et que chaque partage fait perdre un point au total ; calculer le total t des points des quatre équipes de la poule permet donc de connaitre le nombre n de nuls : $n = 18 - t$. Compter le nombre de résultats avec k matchs nuls est un exercice de combinatoire « classique » : $\binom{6}{k} \times 2^{6-k}$.

À la clôture du travail, deux choses doivent être vérifiées : son exhaustivité et le fait que deux diagrammes considérés comme non isomorphes ne le sont vraiment pas. Pour le second point, il s'agit de trouver, pour chaque paire de diagrammes retenus comme différents, une caractéristique qui les distingue. Par exemple, est-il certain que

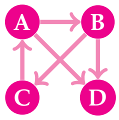
---

1. Un peu de lexicographie. Dans son sens ornithologique, le mot *poule* vient du latin *pulla*, féminin de *pullus*, qui désigne le jeune de n'importe quel animal (il a également donné *poulain*) ; dès avant le XVIIIe s., il a supplanté *géline*, qui était le descendant naturel du latin *gallina*, pour désigner l'animal bien connu. Jusque là, tout va bien.

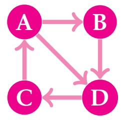
C'est maintenant que les choses se compliquent, non pas sur le plan morphologique, mais sur le plan sémantique : pourquoi en effet ce nom d'animal a-t-il été emprunté pour désigner, d'abord une cagnotte que des joueurs mettent en commun, et ensuite le groupe des joueurs qui s'affrontent ? Une hypothèse plausible est que les joueurs qui déposent leur mises dans le pot font penser aux poules qui déposent leurs œufs dans le pondoir. Pourquoi pas ?

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. En effet, une fois de plus, le mot *poule*, dans ce sens de groupe de joueurs, a été emprunté par les Anglais, qui en ont fait *pool* et lui ont donné le sens plus général de *groupe de personnes ou d'entreprises qui mettent leurs ressources en commun*. (On notera qu'il existe en anglais un second mot *pool* qui signifie *flaque* ou, sous la forme *(swimming-)pool*, *piscine* ; lui est d'origine germanique.) Comme on pouvait le craindre, ce mot anglais a été réimporté en français, et on peut quelquefois lire « Les assistants de l'U.E.R. ne sont pas attachés à un professeur, mais travaillent en pool. » ou « Les équipes ont été versées dans huit pools. ». Quel gâchis ! Soyons fermes, boutons l'anglicisme hors de Francophonie ! Dans un cas comme dans l'autre, c'est bien de *poule* qu'il s'agit.

RÉFÉRENCES : Alain REY, *Dictionnaire historique de la langue française*, Dictionnaires Le Robert, 1992. *Wiktionnaire* (consulté en décembre 2022).



et

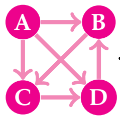


ne sont pas isomorphes ? L'un comme l'autre possèdent deux triangles de flèches (ABD et ABC à gauche, ABD et ADC à droite), le premier étant transitif () et le second circulaire (). Oui, mais… à gauche, la flèche commune aux deux triangles est une des « flèches courtes » du triangle transitif, tandis qu'à droite c'est la « flèche longue » ; cela les distingue donc.

Pour nous assurer que notre dénombrement est exhaustif, nous allons déterminer combien de résultats contient la classe d'isomorphie de chaque diagramme retenu : le total doit être 729 ; nous pourrons même faire la vérification pour chaque nombre de matchs nuls, de 0 à 6.

Mais comment déterminer l'effectif de la classe d'isomorphie d'un tableau ? C'est le quotient de 24 par le nombre de permutations de $\{A,B,C,D\}$ qui fixent le diagramme ; ces permutations constituent un sous-groupe du groupe symétrique $\mathscr{S}_{\{A,B,C,D\}}$; le théorème de LAGRANGE nous garantit donc que son ordre divise 24.

EXEMPLE. Considérons le diagramme suivant :

 .

Une permutation qui le laisse invariant doit avoir A pour point fixe, car c'est le seul sommet d'où partent trois flèches ; et elle doit respecter le cycle (B,C,D). Il y a 3 telles permutations : outre l'identité,

$$\left\{\begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto C \\ C \mapsto D \\ D \mapsto B \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto D \\ C \mapsto B \\ D \mapsto C. \end{array}\right.$$

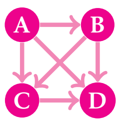
par conséquent, ce diagramme est un représentant d'une classe d'isomorphie comprenant 8 diagrammes. Il est également possible de raisonner d'une autre manière : pour construire un diagramme isomorphe à celui-ci, il faut d'abord choisir le sommet d'où partiront 3 flèches (4 choix possibles), puis choisir dans quel sens « tourne » le cycle constitué par les trois autres flèches (2 choix possibles) ; en tout, $4 \times 2 = 8$ choix, soit autant de diagrammes isomorphes à celui qui est figuré.

Voici la table des nombres de résultats, de diagrammes et de tableaux :

# nuls	# résultats	# diagrammes	# tableaux
0	64	4	4
1	192	10	9
2	240	12	11
3	160	10	10
4	60	4	4
5	12	1	1
6	1	1	1
Tot.	729	42	40.

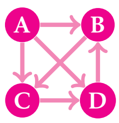
Et, enfin, classés par nombre de matchs nuls, la liste des 42 diagrammes possibles, accompagnés de son tableau de points (avec, pour chaque équipe, le nombre de matchs gagnés, nuls et perdus, puis le nombre de points obtenus) et du nombre de diagrammes isomorphes. Dans chaque classe, le représentant choisi est celui où les résultats vont en décroissant de A à D.

Sans match nul



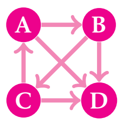
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	2	0	1	6
C	1	0	2	3
D	0	0	3	0

(24)



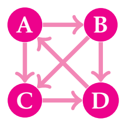
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	1	0	2	3
C	1	0	2	3
D	1	0	2	3

(8)



	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	2	0	1	6
C	2	0	1	6
D	0	0	3	0

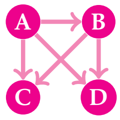
(8)



	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	2	0	1	6
C	1	0	2	3
D	1	0	2	3

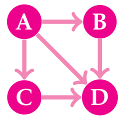
(24)

Avec 1 nul



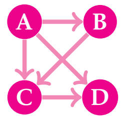
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	2	0	1	6
C	0	1	2	1
D	0	1	2	1

(12)



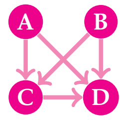
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	0	3	0

(12)



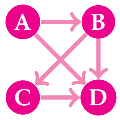
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	1	1	1	4
C	1	0	2	3
D	0	1	2	1

(24)



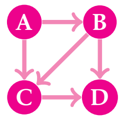
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	2	1	0	7
C	1	0	2	3
D	0	0	3	0

(12)



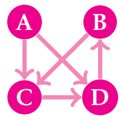
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	2	0	1	6
C	1	1	1	4
D	0	0	3	0

(24)



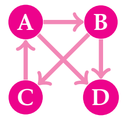
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	2	0	1	6
C	1	0	2	3
D	0	1	2	1

(24)



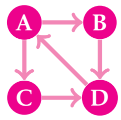
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	1	0	2	3
D	1	0	2	3

(24)



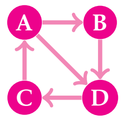
	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	2	0	1	6
C	1	1	1	4
D	0	1	2	1

(24)



	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	1	0	2	3

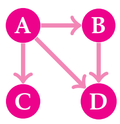
(12)



	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	1	0	2	3

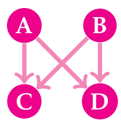
(24)

Avec 2 nuls



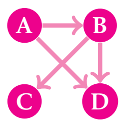
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	1	1	1	4
C	0	2	1	2
D	0	1	2	1

(24)



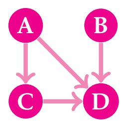
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	2	1	0	7
C	0	1	2	1
D	0	1	2	1

(6)



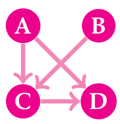
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	2	0	1	6
C	0	2	1	2
D	0	1	2	1

(24)



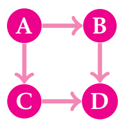
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	2	0	5
C	1	1	1	4
D	0	0	3	0

(24)



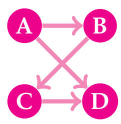
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	2	0	5
C	1	0	2	3
D	0	1	2	1

(24)



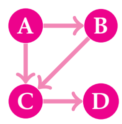
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	1	2	1

(12)



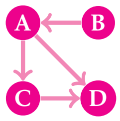
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	1	2	1

(24)



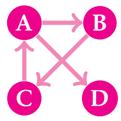
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	1	0	2	3
D	0	2	1	2

(24)



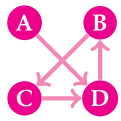
	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	1	2	0	5
C	1	1	1	4
D	0	1	2	1

(24)



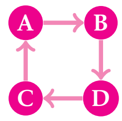
	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	2	1	2

(24)



	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	1	0	2	3

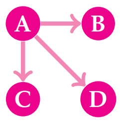
(24)



	G	N	P	Pts
A	1	1	1	4
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	1	1	1	4

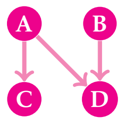
(6)

Avec 3 nuls



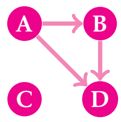
	G	N	P	Pts
A	3	0	0	9
B	0	2	1	2
C	0	2	1	2
D	0	2	1	2

(4)



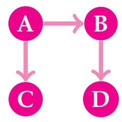
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	2	0	5
C	0	2	1	2
D	0	1	2	1

(24)



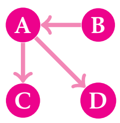
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	0	3	0	3
D	0	1	2	1

(24)



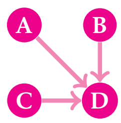
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	1	1	1	4
C	0	2	1	2
D	0	2	1	2

(24)



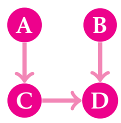
	G	N	P	Pts
A	2	0	1	6
B	1	2	0	5
C	0	2	1	2
D	0	2	1	2

(12)



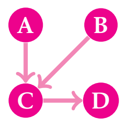
	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	2	0	5
C	1	2	0	5
D	0	0	3	0

(4)



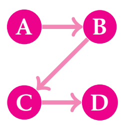
	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	2	0	5
C	1	1	1	4
D	0	1	2	1

(24)



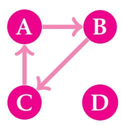
	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	2	0	5
C	1	0	2	3
D	0	2	1	2

(12)



	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	2	1	2

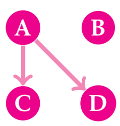
(24)



	G	N	P	Pts
A	1	1	1	4
B	1	1	1	4
C	1	1	1	4
D	0	3	0	3

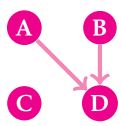
(8)

Avec 4 nuls



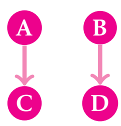
	G	N	P	Pts
A	2	1	0	7
B	0	3	0	3
C	0	2	1	2
D	0	2	1	2

(12)



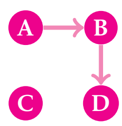
	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	2	0	5
C	0	3	0	3
D	0	1	2	1

(12)



	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	2	0	5
C	0	2	1	2
D	0	2	1	2

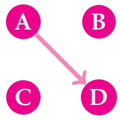
(12)



	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	1	1	1	4
C	0	3	0	3
D	0	2	1	2

(24)

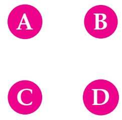
Avec 5 nuls



	G	N	P	Pts
A	1	2	0	5
B	0	3	0	3
C	0	3	0	3
D	0	2	1	2

(12)

Avec 6 nuls



	G	N	P	Pts
A	0	3	0	3
B	0	3	0	3
C	0	3	0	3
D	0	3	0	3

(1)