Polynômes généralisés et premiers pas vers l'analyse multifractale sur les groupes de Lie

Arman Molla
Promoteur : Samuel Nicolay

Défense de thèse en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

6 octobre 2022

LIÈGE université

Motivation

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, on utilise notamment les espaces de Hölder ponctuels $\Lambda^\alpha(x_0)$ pour quantifier la régularité en x_0.

Espaces de Hölder ponctuel classique

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $\Lambda^\alpha(x_0)$ si elle est bornée sur un voisinage de x_0 et s'il existe $C > 0$, $R > 0$ et un polynôme P de degré au plus $[\alpha]$ tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

si $0 < |x - x_0| < R$.

Motivation

En vue d'étendre cette théorie aux groupes de Lie, deux questions se posent.

(1) Peut-on généraliser la notion de polynôme sur un groupe de Lie G ?

(2) Si oui, peut-on les utiliser pour définir l'analogue des espaces $\Lambda^\alpha(x_0)$ sur G ? Sinon, quelle alternative ?

I. Polynômes généralisés

Polynômes donnés en terme d'équation fonctionnelle

Si G est un groupe de Lie, $h \in G$ et $f : G \to \mathbb{R}$, on peut considérer l'opérateur de différence finie Δ_h avec

$$\Delta_h f(x) = f(xh) - f(x)$$

et Δ_h^m l'opérateur itéré $\Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h$.

Polynômes donnés en terme d'équation fonctionnelle

Si G est un groupe de Lie, $h \in G$ et $f : G \to \mathbb{R}$, on peut considérer l'opérateur de différence finie Δ_h avec

$$\Delta_h f(x) = f(xh) - f(x)$$

et Δ_h^m l'opérateur itéré $\Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h$.

Si $G = \mathbb{R}^n$, les solutions localement bornée presque partout de

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$$

sont exactement les polynômes de degré $\leq m$. Quid du cas des groupes de Lie généraux ?

Polynômes donnés en terme d'équation fonctionnelle

Equation de Fréchet

L'équation de Fréchet d'ordre $m+1$ est donnée par

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$$

pour tout $x, h \in G$. L'équation de Fréchet est dite locale en $x_0 \in G$ si l'égalité a lieu pour x au voisinage de x_0 et h au voisinage du neutre 1.

(1) On aurait pu utiliser la différence finie à gauche, l'équation aurait été équivalente.

(2) On étudie cette équation sur $L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$, G étant muni de "la" mesure de Haar.

Théorème de régularité général

Régularité des solutions

Si $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$ est solution de l'équation de Fréchet locale en $x_0 \in G$, alors il existe un voisinage U de x_0 et un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que

$$f(x \exp X) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq n} \frac{\mathcal{L}_{i_1 \ldots i_j} f(x)}{j!} X_{i_1} \cdots X_{i_j}$$

pour tout $x \in U$ et tout $X \in V$.

Attention : si l'on ne fait aucune hypothèse sur f, on peut trouver des solutions très pathologiques (via les bases de Hamel dans le cas simple $G = \mathbb{R}$).

Condition d'abélianité

On peut faire le lien avec le cas $\mathbb{R}^n$ en se restreignant à une classe particulière de fonctions.

Fonction abélienne à droite

Une fonction $f : G \to \mathbb{R}$ est abélienne à droite si

$$f(xyz) = f(xzy) \quad \forall x, y, z \in G.$$

Elle sera localement abélienne à droite en x_0 si l'égalité a lieu pour x au voisinage de x_0 et y, z au voisinage du neutre.

Condition d'abélianité

Solutions abéliennes à droite

Si $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$ est localement abélien à droite en $x_0 \in G$ et est solution de l'équation de Fréchet locale en x_0, alors il existe des homomorphismes C^∞ locaux $f_1, ..., f_k : G \to \mathbb{R}$, des réels a_α pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^k$ avec $|\alpha| \leq m$ et un voisinage U du neutre tels que

$$f(x_0 h) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha f_1(h)^{\alpha_1} \cdots f_k(h)^{\alpha_k}$$

pour tout $h \in U$. Le nombre k est la dimension de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Si, de plus, G est simplement connexe, alors les $f_1, ..., f_k$ sont même des homomorphismes C^∞ globaux.

Extension aux distributions

On suppose G **unimodulaire**. Si $T \in \mathcal{D}'(G)$ et $h \in G$, on définit $\Delta_h^m T$ la distribution donnée par

$$\Delta_h^m T(\varphi) = T(\Delta_{h^{-1}}^m \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

L'équation de Fréchet locale en $x_0 \in G$ est alors définie par

$$\Delta_h^m T(\varphi) = 0$$

pour h au voisinage du neutre et $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ avec U un voisinage de x_0.

Solutions dans le cas des distributions

Les solutions $T \in \mathcal{D}'(G)$ de l'équation de Fréchet locale en x_0 s'identifient au voisinage de x_0 à des fonctions de classes C^∞.

Extension aux espaces homogènes

On suppose que G agit transitivement (à droite) sur une variété différentielle M via

$$(x, p) \in G \times M \mapsto px \in M.$$

Cette action définit naturellement des opérateurs de différence finie Δ_h ($h \in G$) agissant sur des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$. On peut alors considérer l'équation de Fréchet locale en $p_0 \in M$:

$$\Delta_h^{m+1} f(p) = 0$$

si p est au voisinage de p_0 dans M et h au voisinage du neutre dans G.

Extension aux espaces homogènes

Solutions sur certains espaces riemannien

Supposons que M est un espace homogène riemannien de G naturellement réductif dont les géodésiques sont les orbites de sous-groupes à un paramètre de G.

Si $f : M \to \mathbb{R}$ est borné sur un voisinage de $p_0 \in M$ et solution de l'équation de Fréchet locale en p_0, alors il existe des fonctions c_0, $c_{i_1 \dots i_j}$ sur M de classe C^∞ au voisinage de p_0 telles que

$$f(\exp_p X) = c_0(p) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_j \leq n} c_{i_1 \dots i_j}(p) X_{i_1} \cdots X_{i_j}$$

lorsque X est au voisinage de 0 dans $T_p M$ et p au voisinage de p_0.

Extension aux espaces homogènes

Solutions abéliennes sur les espaces homogènes généraux

Supposons que M est un espace homogène de G. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est borné sur un voisinage de $p_0 \in M$ et solution de l'équation de Fréchet locale en p_0 et si $f(xyp) = f(yxp)$ lorsque x, y sont au voisinage du neutre de G et p est au voisinage de p_0, alors il existe des homomorphismes locaux $f_1, ..., f_k$ de G sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ qui s'annulent sur G_{p_0} et des constantes $a_\alpha \in \mathbb{R}$ ($|\alpha| \leq m$) tels que

$$f(p_0 h) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha f_1(h)^{\alpha_1} \cdots f_k(h)^{\alpha_k}$$

lorsque h est au voisinage du neutre dans G.

Polynômes généralisés : G abélien

La forme particulière des solutions peut restreindre l'espace des polynômes généralisés (locaux ou globaux) selon les propriétés algébriques de G.

Exemple : $G = \mathbb{R}^n$

On retrouve les polynômes usuels

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X^\alpha.$$

Exemple : $G = S^1$

Pas de polynômes globaux mais au voisinage d'un point z_0, on a

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j \arg(z z_0^{-1})^j.$$

Polynômes généralisés : G nilpotent

Si $\mathfrak{g}$ est nilpotent et si $G = \mathfrak{g}$, malgré la structure non-abélienne, les polynômes généralisés f sont les polynômes usuels de $\mathbb{R}^n$, mais une notion de degré plus difficile à apréhender en général.

Cas 2-nilpotent

Si G est un groupe de Lie 2-nilpotent, alors f est une solution de l'équation de Fréchet locale en x_0 d'ordre $m+1$ ssi $X \in \mathfrak{g} \mapsto f(x_0 \exp X)$ est un polynôme de degré au plus m au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$.

Polynômes généralisés : G résoluble

Pour un groupe non-nilpotent, l'espace des polynômes généralisés peut être strictement plus petit que l'espace des polynômes usuels.

Le groupe $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$

Si $G = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ avec l'opération $(x, y) * (x'y') = (xx', xy' + y)$, les polynômes généralisés au voisinage du neutre $(1, 0)$ sont de la forme

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{m} a_j \ln^j(x).$$

Mais en général, pour un groupe résoluble, l'espace des polynômes généralisés locaux est non-trivial.

Polynômes généralisés : G semi-simple

Cas de $SL(2,\mathbb{R})$

Les solutions de l'équation de Fréchet locale d'ordre 2 sont réduites aux constantes.

Conjecture : si la série centrale de $\mathfrak{g}$ est donnée par

$$\mathfrak{g} \supsetneq \mathfrak{g}^{(1)} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{g}^{(N)} = \mathfrak{g}^{(N+1)} = \cdots ,$$

la taille de l'espace des solutions est contrôlée par la taille de $\mathfrak{g}^{(N)}$. On conjecture que les polynômes généralisés sont engendrés par les projections prises dans $(\mathfrak{g}^{(N)})^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$.

Equation fonctionnelle de Cauchy d'ordre supérieur

Equation de Cauchy

L'équation de Cauchy d'ordre m est donnée par

$$\Delta_h^m f(x) = m! f(h)$$

pour tout $x, h \in G$. L'équation de Cauchy est dite locale si l'égalité a lieu pour x et h au voisinage du neutre.

(1) Si $m = 1$, on a simplement

$$f(xh) = f(x) + f(h).$$

Les solutions sont les homomorphismes de G dans $\mathbb{R}$.

(2) A l'ordre m, les solutions s'expriment en terme de polynômes homogènes de degré m au voisinage du neutre.

(3) Avec des différence à pas variable : généralisation de l'algèbre symétrique d'un espace vectoriel.

II. Régularité höldérienne sur les groupes de Lie unimodulaires

Espaces de Hölder

Espace de polynômes généralisés trop pauvre pour définir $\Lambda^{\alpha}(x_0)$.

Cependant, il est connu que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta^m_{tX} f(x)}{t^m} = \mathcal{L}^m_X f(x).$$

La différence finie permettrait de quantifier la régularité au lieu des polynômes.

Espace de Hölder ponctuel à droite $\Lambda^{\alpha}_r(x_0)$

Soient $x_0 \in G$ et $\alpha > 0$. Une fonction $f \in L^{\infty}_{\text{loc}}(G)$ appartient à $\Lambda^{\alpha}_r(x_0)$ s'il existe $C > 0$, $R > 0$, $m > \alpha$ tels que

$$\sup_{\|X\| \leq r_1} \|\Delta^m_{\exp X}(f \circ L_{x_0})\|_{B_d(r_2)} \leq C(r_1 + r_2)^{\alpha} \quad \forall r_1, r_2 < R.$$

En utilisant les différences à gauche, on peut définir $\Lambda^{\alpha}_l(x_0)$.

Espaces de Hölder

(1) En général, $\Lambda_l^\alpha(1) = \Lambda_r^\alpha(1)$. Dès lors, on écrira simplement $\Lambda^\alpha(1)$, sans indices.

(2) La définition est indépendante de la métrique riemannienne invariante choisie.

(3) Par translation, on peut réduire notre étude à $\Lambda^\alpha(1)$.

(4) Si $\alpha < \beta$, alors $\Lambda^\beta(x_0) \subset \Lambda^\alpha(x_0)$.

Approximation par des suites de fonctions C^∞

Approximation par des fonctions C^∞

Soit $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$. On a $f \in \Lambda^\alpha(1)$ ssi il existe une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(G)$, un entier $m > \alpha$, $C > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\|f - (f_0 + \cdots + f_j)\|_{B_d(r)} \leq C\ (2^{-j} + r)^\alpha$$

et

$$\|\mathcal{L}_{i_1 \ldots i_k} f_j\|_{B_d(r)} \leq C\ 2^{jk}(2^{-j} + r)^\alpha$$

pour tout $k \leq m$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, $r < R$ et tout $j \in \mathbb{N}$.

En particulier, si G est compact, on peut avoir $f = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j$ en tant que distributions $\rightsquigarrow$ espaces 2-microlocaux.

Espaces 2-microlocaux

Espaces $\Lambda^{\alpha,\beta}(1)$

Soient $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_n$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Une distribution f de G appartient à $\Lambda^{\alpha,\beta}(1)$ s'il existe une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(G)$, un entier $m > \max(\alpha, \alpha+\beta)$, $C > 0$ et $R > 0$ tels que

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j$$

pour la topologie faible-$\star$ de $\mathcal{D}'(G)$ et

$$\|\mathcal{L}_{i_1 \dots i_k} f_j\|_{B_d(r)} \leq C\, 2^{jk} 2^{-\alpha j} (1 + 2^j r)^{-\beta}$$

pour tout $k \leq m$, $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, $r < R$ et tout $j \in \mathbb{N}$.

A l'origine, introduit par J.-M. Bony. Puis étudié par S. Jaffard, Y. Meyer, S. Seuret, J. Lévy-Véhel notamment.

Espaces 2-microlocaux : quelques propriétés

Propriétés de $\Lambda^{\alpha,\beta}(1)$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Si D est un opérateur différentiel invariant à gauche d'ordre k et $f \in \Lambda^{\alpha,\beta}(1)$, alors $Df \in \Lambda^{\alpha-k,\beta}$.

(2) Si $\alpha + \beta > 0$ et $f \in \Lambda^{\alpha,\beta}(1)$, alors f est de classe $C^{\langle \alpha+\beta \rangle}$ au voisinage du neutre.

(3) Si G est compact, alors pour tout $\alpha > 0$, on a $\Lambda^{\alpha}(1) \subsetneq \Lambda^{\alpha,-\alpha}(1)$.

(4) Si G est compact, $\alpha > 0$ et $\alpha + \beta > 0$, alors $\Lambda^{\alpha,\beta}(1) \subset \Lambda^{\alpha}(1)$.

Approximation polynomiale

Les inégalités précédentes montrent que le polynôme de Taylor en 1 de $\sum_{k=0}^{j} f_k$ converge vers un polynôme $\mathcal{P}$. On a alors un développement de f semblable à celui de Taylor.

Quasi-caractérisation par approximation polynomiale

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Si $f \in \Lambda^\alpha(1)$, il existe $C > 0$, $R > 0$, un polynôme P sur $\mathfrak{g}$ de degré au plus $[\alpha]$ tel que

$$\|f \circ \exp - P\|_{B(0,r)} \leq C\, r^\alpha \quad \forall r < R.$$

La réciproque est vraie si G admet une distance bi-invariante. Par conséquent, $\exp^* \Lambda^\alpha(1) \subset \mathfrak{C}^\alpha(0)$, avec égalité si G admet une distance bi-invariante.

Quelques remarques

(1) Si d est bi-invariant, alors la quasi-caractérisation de $\mathfrak{C}^\alpha(0)$ de S. Jaffard par les coefficients d'ondelettes de $f \circ \exp$ peut être utilisée $\Rightarrow$ Quasi-caractérisation $\Lambda^\alpha(1)$ par les coefficients d'ondelettes possible.

(2) De manière similaire, on définit les espaces de Hölder locaux et globaux.

Espaces $\Lambda^\alpha_{\mathrm{loc}}(x_0)$

Fixons $\alpha > 0$ et $x_0 \in G$. On dit que $f \in \Lambda^\alpha_{\mathrm{loc}}(x_0)$ si $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$ et s'il existe $C > 0$, $m > \alpha$ et $R > 0$ tels que

$$\sup_{\|X\| \leq r} \|\Delta^m_{\exp X}(f \circ L_{x_0})\|_{B_d(R)} \leq C\, r^\alpha \quad \forall r < R.$$

De même, on a une version globale qui, dans le cas compact, est $\Lambda^\alpha(G) = \cap_{x \in G} \Lambda^\alpha_{\mathrm{loc}}(x)$.

Exemple 1 : Fonction “cusp”

Si G admet une métrique riemannienne bi-invariante, $\alpha > 0$ et si d est la distance associée, on pose $f(x) = d(x,1)^\alpha$. On peut montrer que $f \in \Lambda^\alpha(1)$ mais que $f \notin \Lambda^\beta(1)$ pour tout $\beta > \alpha$. Si U est un voisinage assez petit de 1, f est de classe C^∞ sur $U \backslash \{1\}$.

Exemple 2 : Fonction de Weierstrass généralisée

Si G est un groupe de Lie compact, ρ est une représentation unitaire irréductible non-trivial de G sur un espace de Hilbert V et $\alpha \in]0,1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \Re \mathrm{Tr}(\rho(x^{2^j})) \quad \forall x \in G.$$

On peut alors montrer que $f \in \Lambda^{\alpha}(G)$ mais que $f \notin \Lambda^{\beta}(x)$ quel que soit $x \in G$ et $\beta > \alpha$ à l'aide de techniques d'ondelettes. En particulier, f est continu partout mais différentiable nulle part.

Caractérisation par ondelettes dans le cas compact

Problème : définir une notion d'ondelette sur des groupes de Lie qui rende compte de la régularité höldérienne.

Transfo. en ondelettes continue à échelles discrètes si G compact

Soit V un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp : V \to U$ est un difféomorphisme. Une ondelette est une fonction $\psi \in \mathcal{D}(G)$ à support dans U. Ses dilatées sont données par

$$\psi_{(j)}(x) = 2^{jn}\psi_{\mathfrak{g}}(2^j \log(x))\vartheta(\log(x))$$

avec $\psi_{\mathfrak{g}} = \psi \circ \exp$ sur V et 0 sur $\mathfrak{g} \backslash V$. La transformée en ondelette d'une distribution à l'échelle dyadique $j \in \mathbb{N}_0$ est

$$W_\psi^j : \mathcal{D}'(G) \to C^\infty(G), T \mapsto \psi_{(j)} \star T.$$

Caractérisation par ondelettes dans le cas compact

Condition d'admissibilité adaptée

Une ondelette ψ sera dite admissible lorsque

(1) $\int \psi_{\mathfrak{g}}(X)dX = 0$ (moment d'ordre 0 nul)

(2) On a la formule de reconstruction suivante

$$T = \varphi \star T + \sum_{j=1}^{+\infty} W_\psi^j T$$

au sens faible des distributions pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ qui satisfait à l'équation

$$\psi_{(0)} = \varphi_{(1)} - \varphi_{(0)}.$$

Pour simplifier, on notera $W_\psi^0 T = \varphi \star T$ et φ sera nommée fonction d'échelle.

Caractérisation par ondelettes dans le cas compact

Moment local d'ordre m : $\int X^\alpha \psi_{\mathfrak{g}}(X)dX = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m$.

Quasi-caractérisation par ondelettes de $\Lambda^\alpha(1)$

Soient $\alpha > 0$ et $m > \alpha$, ψ une ondelette admissible avec m moments locaux nuls et φ sa fonction d'échelle.

(1) Si $f \in \Lambda^\alpha(1)$, alors il existe $C > 0$, $J \in \mathbb{N}$ et $R > 0$ tels que

$$|W_\psi^j f(x)| \leq C 2^{-\alpha j}(1 + 2^j r)^\alpha \tag{1}$$

pour tout $j \geq J$, $r < R$ et $x \in B_d(r)$.

(2) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $f \in \Lambda^\varepsilon_{\mathrm{loc}}(1)$ et s'il existe $C > 0$, $R > 0$ tels que (1) soit vérifié pour tout $j \in \mathbb{N}$, $r < R$ et $x \in B_d(r)$, alors il existe $C_0 > 0$, $R_0 > 0$ tels que

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_{[\alpha]}[\mathfrak{g}]} \|f \circ \exp - P\|_{B(0,r)} \leq C_0 \ r^\alpha |\log r| \quad \forall r < R_0.$$

Caractérisation par ondelettes dans le cas compact : remarques

(1) On obtiens aussi de véritables caractérisations de $\Lambda^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(1)$ et $\Lambda^{\alpha}(G)$ en terme d'ondelettes.

(2) Si G est compact, on peut introduire une notion d'ondelettes discrètes en utilisant ceux bien connus sur $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathfrak{g}$ via une base. Une caractérisation de $\Lambda^{\alpha}(G)$ peut aussi être obtenue ainsi.

Caractérisation par ondelettes si G est homogène

Homogène : G connexe, simplement connexe et muni d'un endomorphisme diagonalisable $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de valeurs propres strictement positives et telle que $D_r = \exp(\ln(r)A)$ est un automorphisme d'algèbre de Lie.

Frame d'ondelettes : Ensemble fini de fonctions de $L^2(G)$ et ses dilatés par D_{2^j} et translatés par des éléments d'une partie discrète Γ de G adéquate (e.g. sous-groupe discret Γ avec G/Γ compact). On suppose que ces ondelettes vérifie la condition de Parseval.

On obtient une caractérisation de $\Lambda^\alpha(G)$ dans ce contexte aussi !

Espaces de régularité sur S^2

On peut introduire des espaces de ce type sur la sphère en la munissant de l'action naturelle de $SO(3, \mathbb{R})$.

Espaces $\Lambda^\alpha(q)$ sur S^2

Si $q \in S^2$ et $\alpha > 0$, alors $f \in \Lambda^\alpha(q)$ si f est localement borné et $f \circ \pi \in \Lambda^\alpha(R)$ dans $SO(3, \mathbb{R})$ où R est une matrice de rotation telle que $q = Rp$ et $\pi : SO(3, \mathbb{R}) \to S^2, R \mapsto Rp$.

L'espace défini ici ne dépend pas du point de base $p \in S^2$ choisi. On obtient des caractérisations plus pratiques comme dans les groupes de Lie.

Espaces de régularité sur S^2

Caractérisations de $\Lambda^\alpha(p)$

Soient $\alpha > 0$ et $p \in S^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $f \in \Lambda^\alpha(p)$

(2) f est localement borné et il existe $m > \alpha$, $R > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{\mathcal{K}(H)<r_1} \|\Delta_H^m f\|_{B_d(1,r_2)p} \leq C\,(r_1 + r_2)^\alpha \quad \forall r_1, r_2 < R$$

où $\Delta_H f(p) = f(e^H p)$ est la différence finie de S^2 pour tout $H \in \mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$, $p \in S^2$ et $\mathcal{K}$ est la norme induite par la forme de Killing de $\mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$.

Espaces de régularité sur S^2

Caractérisations de $\Lambda^\alpha(p)$ (suite)

(3) f est localement borné et il existe une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(S^2)$, $m > \alpha$, $R > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|f - (f_0 + \cdots + f_j)\|_{B_d(1,r)p} \leq C\ (2^{-j} + r)^\alpha \quad \forall j \in \mathbb{N}, r < R$$

et

$$\|\mathcal{R}^*_{i_1\ldots i_k} f_j\|_{B_d(1,r)p} \leq C\ 2^{jk}(2^{-j} + r)^\alpha$$

pour tous $j \in \mathbb{N}, r < R, k \leq m, i_1, ..., i_k \leq 3$ où $\mathcal{R}^*_i$ sont des champs de vecteurs fondamentaux de S^2 induits par une base de $\mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$.

Caractérisations de $\Lambda^\alpha(p)$ (suite 2)

(4) f est localement borné et il existe un polynôme P de degré au plus $[\alpha]$ sur $\mathfrak{o}(3,\mathbb{R})(\simeq \mathbb{R}^3)$, $C > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\|f \circ \exp_p - P\|_{B_{\mathcal{K}}(0,r)} \leq C\ r^\alpha$$

pour tout $r < R$ où $\exp_p(H) := e^H p$.

Merci de votre attention !