



Cours de Géométrie

6. L'ajustement et l'analyse d'un levé topographique par la méthode des moindres carrés

[Prof. C. Debouche](#)

Les références bibliographiques citées dans ce texte sont consultables en suivant le lien <https://hdl.handle.net/2268/293535>

Sommaire

Sommaire	2
Chapitre 6. L'ajustement et l'analyse d'un levé topographique par la méthode des moindres carrés	3
6.1. Introduction.....	3
6.1.1. Quelques notions	4
6.1.2. Le lever des angles d'un triangle.....	5
6.1.3. Une triangulation	7
6.1.4. Un nivellement.....	12
6.2. Les notations.....	14
6.2.1. La "reformulation" des exemples du § 6.1	14
6.2.2. Les principes	17
6.2.3. Les symboles et leur signification	18
6.3. Le modèle.....	20
6.3.1. Le modèle fonctionnel	20
6.3.2. Le modèle stochastique.....	25
6.4. L'ajustement.....	27
6.4.1. Le critère	27
6.4.2. La pondération	27
6.4.3. Les équations normales.....	29
6.4.4. La solution des équations normales	29
6.4.5. Le calcul des paramètres.....	30
6.4.6. Le calcul des résidus	33
6.5. L'analyse	34
6.5.1. Justesse et précision.....	34
6.5.2. La propagation de la matrice des variances et des covariances.....	35
6.5.3. Les résidus, la variance de référence à posteriori et le test global de justesse	37
6.5.4. La détection des fautes.....	41
6.5.5. La redondance des observations et la justesse du canevas	46
6.5.6. La précision des paramètres.....	53
6.5.7. L'ellipse comme mesure de la précision de deux paramètres	56
6.5.8. Quelques autres mesures de la précision à deux ou à trois dimensions	65
6.6. Les propriétés de l'ajustement d'un levé par la méthode des moindres carrés	67
Index des matières	68
Index Bibliographique.....	68

Chapitre 6. L'ajustement et l'analyse d'un levé topographique par la méthode des moindres carrés

6.1. Introduction

Un levé topographique est le résultat d'un ensemble de mesurages. Il comprend inévitablement des erreurs ou même des fautes (§ 5.3¹). Les longueurs, angles, coordonnées mesurées ne sont pas les véritables longueurs, angles ou coordonnées. Ces dernières sont inconnues et ne pourront jamais être connues. Il convient donc de traiter ces résultats en tenant compte de ce fait.

Les erreurs inévitables et les fautes éventuelles que contiennent les grandeurs mesurées impliquent leur incohérence vis-à-vis de la réalité. Par exemple, la somme des trois angles mesurés d'un triangle ne sera pas égale à 200 gon alors qu'elle l'est dans la réalité. Dans le cas d'un cheminement polygonal fermé (§ 11.1), on observe inévitablement un « écart de fermeture », c'est-à-dire que les coordonnées de la première station, calculées à partir des mesurages effectués sur l'ensemble des stations du cheminement, ne sont pas égales aux coordonnées affectées à cette station. Dans un tour d'horizon (§ 8.3.3), la somme des angles mesurés n'est pas égale à 380°.

Ces exemples montrent la nécessité d'ajuster les valeurs mesurées, c'est-à-dire de les « corriger » de manière à ce que le résultat de l'ajustement soit cohérent avec la réalité. La réalité est que la somme des trois angles d'un triangle plan doit être égale à 180°. Il faut corriger les angles mesurés de manière à respecter cette contrainte. Les valeurs estimées de ces trois angles seront donc les valeurs mesurées auxquelles on ajoute une correction lors du processus d'ajustement.

Après avoir ajusté les valeurs mesurées, on s'interroge sur leur qualité (§ 5.3¹). Sont-elles justes ? Quelle est leur précision ? C'est la phase d'analyse du levé. La réponse à ces questions se fera par des tests d'hypothèse (§ 5.4¹).

Après avoir introduit quelques notions et présenté quelques exemples dans le § 6.1 d'introduction, nous proposerons des notations « canoniques » (§ 6.2) qui faciliteront et généraliseront l'écriture du modèle mathématique utilisé (§ 6.3). L'ajustement, c'est-à-dire le calcul des corrections à apporter aux valeurs mesurées est exposé dans le § 6.4. L'analyse des résultats permettant de vérifier l'absence de fautes et d'erreurs systématiques constitue le dernier paragraphe (§ 6.5).

On pourra trouver des informations complémentaires dans **LEICK** (2004), **MIKHAIL** et **GRACIE** (1981), **VANICEK** et **KRAKIWSKY** (1992).

Des exemples détaillés d'ajustement et d'analyse d'un levé topographique sont présentés dans les chapitres 11 et 12.

¹ <https://hdl.handle.net/2268/293759>

6.1.1. Quelques notions

1° L'ajustement d'un levé n'est possible que si on a procédé à un nombre de mesures supérieur au nombre de mesures strictement nécessaire. Reprenant l'exemple du lever d'un triangle. Pour estimer les trois angles d'un triangle, il suffit d'en mesurer deux et de déduire la valeur du troisième de ce que la somme des trois angles doit être égale à 180° . Ce faisant, on ne peut évidemment procéder à un ajustement ni à une analyse de la justesse et de la précision des deux angles mesurés. En effet, la somme des trois angles (deux mesurés et un calculé) est égale à 180° , quelles que soient les erreurs et fautes éventuelles commises sur les mesures. Pour pouvoir ajuster les résultats du mesurage des angles, il faut nécessairement mesurer les trois angles du triangle, c'est-à-dire procéder à une mesure supplémentaire par rapport au nombre de mesures minimum.

L'écart qui existe entre le nombre de mesures effectuées et le nombre de mesures minimum nécessaire au lever du triangle s'appelle la **redondance** ou plus précisément la **redondance du lever**:

$$\rho = n - n_0$$

où n est le nombre d'observations,
 n_0 est le nombre minimum d'éléments nécessaires à l'identification du modèle.

La notion de redondance est équivalente à la notion de nombre de degrés de liberté utilisée en statistique.

2° Comme l'ajustement implique une correction des valeurs mesurées, il produit ainsi des valeurs estimées des grandeurs mesurées en ajoutant à ces valeurs mesurées une correction ou **résidu** selon l'expression :

$$\hat{\alpha}_i = a_i + r_{a_i}$$

où a_i est la valeur mesurée du $i^{\text{ème}}$ angle,
 $\hat{\alpha}_i$ est la valeur estimée par ajustement du $i^{\text{ème}}$ angle,
 r_{a_i} est la correction ou également appelée le résidu calculée par l'ajustement pour l'observation du $i^{\text{ème}}$ angle.

3° L'ajustement des observations à la réalité suppose que celle-ci soit traduite en équation(s). Celle(s)-ci s'appellent les **conditions** ou les **contraintes**. En reprenant l'exemple du triangle, la condition qui traduit la réalité en une équation s'écrit évidemment :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ.$$

Dans cette expression, α_1 , α_2 et α_3 représentent les vraies valeurs des angles du triangle. Elles sont inconnues. Cette condition s'écrit plutôt en fonction des valeurs estimées de ces angles par ajustement des valeurs observées :

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 = 180^\circ.$$

Pour pouvoir procéder à l'ajustement, il faut que le nombre de conditions ne dépasse par la valeur de la redondance.

4° L'ajustement consiste donc à corriger les valeurs observées de manière à respecter la réalité, présentée sous la forme d'un modèle mathématique. Il reste à identifier la manière de procéder à cet ajustement. Il s'agit en fait de définir un **critère d'ajustement**. Divers critères d'ajustement pourraient être retenus. Par exemple, dans le cas des trois angles mesurés d'un triangle, on peut répartir l'écart de fermeture (différence entre la somme des trois angles mesurés et 180°) en trois corrections égales au tiers de cet écart de fermeture, appliquées à chaque angle mesuré. Cela produit les estimations suivantes :

$$\hat{\alpha}_1 = a_1 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ}{3},$$

$$\hat{\alpha}_2 = a_2 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ}{3},$$

$$\hat{\alpha}_3 = a_3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ}{3}.$$

Le critère d'ajustement est simple et les trois corrections sont identiques. Cependant, ce critère présente l'inconvénient d'être spécifique au cas du triangle. De plus, il produit des résidus et des valeurs estimées dont on ignore la distribution de probabilité et pour lesquelles il ne sera donc pas possible d'établir des tests d'hypothèse relatifs à la vérification de leur justesse ou de leur précision.

Il est donc souhaitable de choisir un critère d'ajustement qui soit applicable à n'importe quel type de lever topographique. Il est également impératif de retenir un critère d'ajustement qui fournisse des résultats dont la distribution de probabilité est connue en vue d'établir des tests d'hypothèse sur ces derniers.

En outre, il faut évidemment minimiser les corrections à apporter aux valeurs mesurées.

C'est pour ces raisons qu'est retenu le critère des **moindres carrés**. Comme son nom l'indique, ce critère consiste à minimiser la somme des carrés des corrections ou résidus :

$$\text{Moindres carrés : } \sum_{i=1}^n r_i^2 \text{ minimum.}$$

6.1.2. Le lever des angles d'un triangle

Afin de concrétiser l'exemple du triangle évoqué ci-dessus, soit les résultats du mesurage des trois angles d'un triangle plan :

$$a_1 = 41^\circ 33'$$

$$a_2 = 78^\circ 57'$$

$$a_3 = 59^\circ 27'$$

Les trois mesures ($n = 3$) génèrent donc une redondance égale à un ($\rho = 1$) puisque la mesure de deux angles aurait suffi à l'estimation des trois angles ($n_0 = 2$).

Comme indiqué ci-dessus, la contrainte s'écrit :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$$

$$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 = 180^\circ$$

avec les notations :

$$\hat{a}_1 = a_1 + r_1$$

$$\hat{a}_2 = a_2 + r_2$$

$$\hat{a}_3 = a_3 + r_3$$

Le critère d'ajustement selon les moindres carrés s'écrit :

$$\Phi = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \text{minimum}.$$

Pour établir le minimum de la somme des carrés des résidus, il peut être procédé comme suit, afin de réduire à deux le nombre d'inconnues dans cette expression en utilisant la contrainte :

$$(a_1 + r_1) + (a_2 + r_2) + (a_3 + r_3) = 180^\circ$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 180^\circ - (a_1 + a_2 + a_3) = 3'$$

$$r_3 = 3' - r_1 - r_2$$

La somme des carrés des résidus s'écrit alors :

$$\Phi = r_1^2 + r_2^2 + (3' - r_1 - r_2)^2.$$

La valeur des résidus r_1 et r_2 qui minimise cette expression s'obtient évidemment en annulant les dérivées partielles de ladite expression par rapport à ces deux variables, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = 2r_1 + 2(3' - r_1 - r_2)(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} = 2r_2 + 2(3' - r_1 - r_2)(-1) = 0 \end{cases}$$

Ces équations portent le nom d'**équations normales**. Elles se résolvent par les expressions :

$$4r_1 + 2r_2 = 6'$$

$$2r_1 + 4r_2 = 6'$$

$$\Rightarrow r_1 = 1', r_2 = 1' \text{ et } r_3 = 1'$$

On constate que l'application du critère des moindres carrés consiste, dans ce cas, à simplement partager l'écart de fermeture de 3' en trois résidus identiques de 1' chacun. Il en résulte que les valeurs estimées par ajustement au sens des moindres carrés des trois angles du triangle valent donc :

$$\hat{a}_1 = 41^\circ 33' + 1' = 41^\circ 34'$$

$$\hat{a}_2 = 78^\circ 57' + 1' = 78^\circ 58'$$

$$\hat{a}_3 = 59^\circ 27' + 1' = 59^\circ 28'$$

6.1.3. Une triangulation

1° L'exemple suivant est celui d'une petite triangulation. Il s'agit d'estimer la valeur des angles α_1 à α_6 tels que décrits dans la figure 6.1.1. Cet exemple est tiré de **MIKHAIL** et **GRACIE** (1981).

Cet exemple complète celui du triangle en le compliquant légèrement.

Les angles qui doivent être estimés font l'objet d'un mesurage qui donne les résultats suivants :

$$a_1 = 48,88^\circ$$

$$a_2 = 42,10^\circ$$

$$a_3 = 44,52^\circ$$

$$a_4 = 43,80^\circ$$

$$a_5 = 46,00^\circ$$

$$a_6 = 44,70^\circ$$

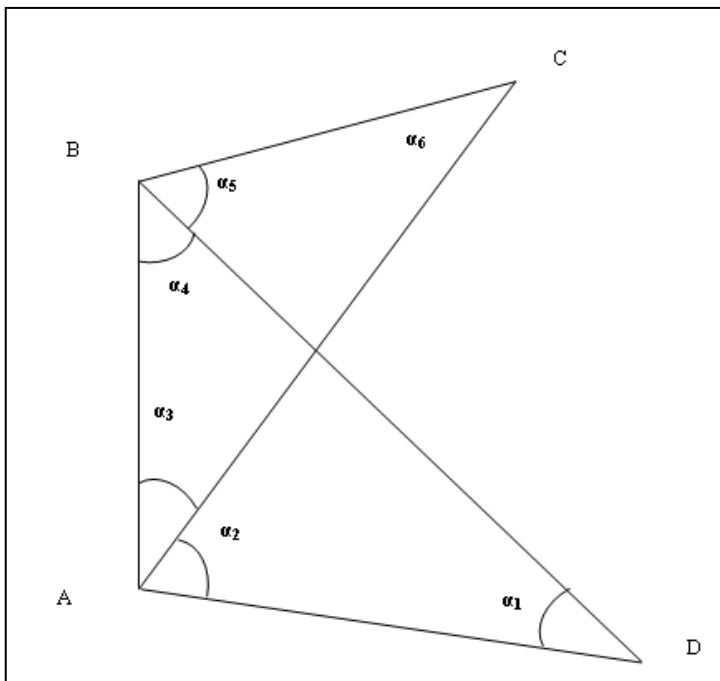


Figure 6.1.1. Disposition des points (A, B, C et D) et des angles (α_1 à α_6), mesurés dans une triangulation.

Il convient au préalable de vérifier que la redondance est suffisante. Le nombre minimum d'angles à mesurer est de quatre, dans la mesure où cette triangulation peut se voir sous la forme de deux triangles ABC et ABD. Trois des quatre angles du premier triangle doivent au minimum être levés. Le quatrième angle de ce triangle peut se déduire de la relation indiquant que la somme des angles de ce triangle est égale à 180° . Il suffit également de lever un des deux angles du triangle ABD qui n'appartiennent pas au premier triangle. La mesure de quatre angles suffit donc ($n_0 = 4$). En conséquence, la redondance est égale à :

$$\rho = n - n_0 = 6 - 4 = 2.$$

Les contraintes qui traduisent mathématiquement les relations existant entre les paramètres du lever (les angles à estimer) sont au nombre de deux, une par triangle. Elles s'écrivent :

$$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 180^\circ$$

$$\hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 + \hat{a}_6 = 180^\circ$$

ou :

$$(a_1 + r_1) + (a_2 + r_2) + (a_3 + r_3) + (a_4 + r_4) = 180^\circ$$

$$(a_3 + r_3) + (a_4 + r_4) + (a_5 + r_5) + (a_6 + r_6) = 180^\circ$$

En remplaçant les angles par les résultats du mesurage, on obtient :

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0,70^\circ$$

$$r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 0,98^\circ$$

Ces deux relations quantifient les écarts de fermeture des deux triangles. Elles permettent également d'explicitier deux des six résidus en fonction des quatre autres :

$$r_1 = 0,70^\circ - r_2 - r_3 - r_4,$$

$$r_6 = 0,98^\circ - r_3 - r_4 - r_5,$$

ce qui permet d'écrire la somme des carrés des résidus :

$$\Phi = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2$$

sous la forme :

$$\Phi = (0,70^\circ - r_2 - r_3 - r_4)^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + (0,98^\circ - r_3 - r_4 - r_5)^2.$$

Les valeurs des résidus qui rendront minimum cette fonction s'obtiennent par les équations normales suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} = 2 (0,70^\circ - r_2 - r_3 - r_4) (-1) + 2r_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_3} = 2 (0,70^\circ - r_2 - r_3 - r_4) (-1) + 2r_3 + 2 (0,98^\circ - r_3 - r_4 - r_5) (-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_4} = 2 (0,70^\circ - r_2 - r_3 - r_4) (-1) + 2r_4 + 2 (0,98^\circ - r_3 - r_4 - r_5) (-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_5} = 2r_5 + 2(0,98^\circ - r_3 - r_4 - r_5) (-1) = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système d'équation est la suivante :

$$\begin{aligned} r_2 &= 0,07, \\ r_3 &= 0,28, \\ r_4 &= 0,28, \\ r_5 &= 0,21. \end{aligned}$$

Et on peut évidemment en déduire les deux autres résidus.

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,07 \\ r_6 &= 0,21. \end{aligned}$$

Comme on peut le constater, il est moins facile de concevoir un critère d'ajustement spécifique et simple pour ce lever. Par contre, l'application du critère des moindres carrés s'applique sans difficulté.

2° La procédure suivie ci-dessus pour appliquer le critère des moindres carrés est particulière et ne peut se généraliser facilement. Nous allons introduire une méthode générale permettant d'écrire les équations normales et de les résoudre d'une manière générale, applicable à tous types de levers. Il s'agit de l'utilisation de la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**.

Celle-ci est utilisée lors de la recherche d'un extremum (maximum ou minimum) d'une fonction continue quelconque dont les variables sont soumises à des contraintes.

Soit donc à minimiser (ou maximiser) la fonction générale de v variables :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_v) = 0.$$

Par ailleurs ces v variables sont soumises à w contraintes qui s'écrivent de manière générale sous la forme :

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_v) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_v) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_w(x_1, x_2, \dots, x_v) &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale de cette recherche d'extremum lié par des contraintes consiste à écrire une nouvelle fonction à minimiser :

$$f'(x) = f(x) - 2 \sum_{i=1}^w k_i g_i(x),$$

où k_i est un nouveau paramètre appelé multiplicateur de Lagrange. Il y en a autant que de contraintes. La recherche de la solution, c'est-à-dire des valeurs de x_i qui minimisent (ou maximisent) la valeur de $f(x)$ se fait en résolvant le système des équations normales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f'(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f'(x)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f'(x)}{\partial x_v} = 0 \\ \frac{\partial f'(x)}{\partial k_1} = 0 \\ \frac{\partial f'(x)}{\partial k_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f'(x)}{\partial k_w} = 0 \end{array} \right.$$

Ce système comprend donc $v + w$ équations qui permettent d'obtenir les valeurs des v variables x et des w multiplicateurs de Lagrange k .

3° L'application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange à notre triangulation se fait en écrivant la nouvelle fonction à minimiser sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi' = & r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 \\ & - 2k_1 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 0,70) \\ & - 2k_2 (r_3 + r_4 + r_5 + r_6 - 0,98) \end{aligned}$$

Les huit équations normales s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi'}{\partial r_1} = 2r_1 - 2k_1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial r_2} = 2r_2 - 2k_1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial r_3} = 2r_3 - 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial r_4} = 2r_4 - 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial r_5} = 2r_5 - 2k_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial r_6} = 2r_6 - 2k_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial k_1} = -2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 0,70) = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial k_2} = -2(r_3 + r_4 + r_5 + r_6 - 0,98) = 0 \end{array} \right.$$

La première et la deuxième équations indiquent que :

$$r_1 = r_2 = k_1.$$

La cinquième et la sixième équations indiquent que :

$$r_5 = r_6 = k_2.$$

La troisième et la quatrième équations indiquent que :

$$r_3 = r_4 = r_1 + r_6.$$

En conséquence, la 7^{ème} équation peut s'écrire :

$$4r_1 + 2r_6 = 0,70,$$

et la 8^{ème} équation donne :

$$4r_6 + 2r_1 = 0,98.$$

La solution de ces équations est évidemment identique à la solution trouvée ci-dessus.

$$\begin{array}{l} r_1 = 0,07, \\ r_2 = 0,07, \\ r_3 = 0,28, \\ r_4 = 0,28, \\ r_5 = 0,21, \\ r_6 = 0,21. \end{array}$$

6.1.4. Un nivellement

Après l'exemple du triangle et celui de la triangulation, l'exemple d'un nivellement présenté ici est également emprunté à **MIKHAIL** et **GRACIE** (1981). Il se distingue des deux précédents par le fait que le mesurage va porter sur des grandeurs qui ne sont pas les grandeurs à estimer. On va mesurer des dénivelées alors que ce sont des altitudes qui doivent être estimées. La figure 6.1.2 présente la situation. L'altitude du point A est connue et notée h_A et il faut estimer les altitudes des points B, C et D (h_B , h_C et h_D). Par un nivellement direct (§ 10.3), les dénivelées suivantes sont obtenues :

<i>de B vers A</i>	$\Delta h_1 = 11,973$
<i>de D vers B</i>	$\Delta h_2 = 10,940$
<i>de D vers A</i>	$\Delta h_3 = 22,932$
<i>de B vers C</i>	$\Delta h_4 = 21,040$
<i>de D vers C</i>	$\Delta h_5 = 31,891$
<i>de A vers C</i>	$\Delta h_6 = 8,983$

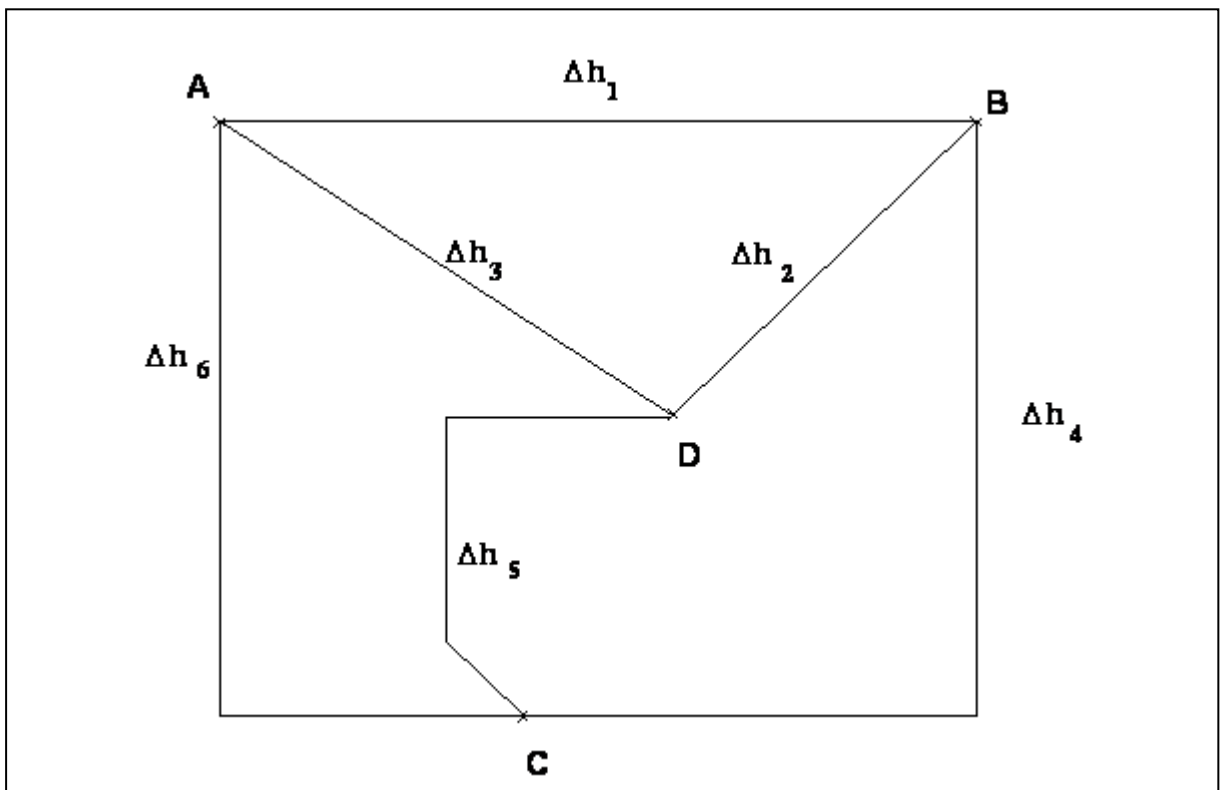


Figure 6.1.2. Un nivellement.

Il faut calculer les altitudes des points B, C et D par ajustement au sens des moindres carrés.

On dispose de six mesures ($n = 6$) alors que trois auraient été suffisantes pour calculer les trois altitudes inconnues ($n_0 = 3$). La redondance est donc :

$$\rho = 6 - 3 = 3.$$

Les valeurs estimées des dénivelées s'obtiennent à partir des dénivelées mesurées, c'est-à-dire des observations, auxquelles on ajoute des résidus calculés par ajustement :

$$\widehat{\Delta h}_i = \Delta h_i + r_i.$$

Dans la réalité, les dénivelées et les altitudes des points sont liées par les relations suivantes, qui constituent donc les contraintes de notre modèle :

$$h_B + \widehat{\Delta h}_1 - h_A = 0 \quad \text{ou} \quad h_B + \Delta h_1 + r_1 - 281,130 = 0$$

$$h_D + \widehat{\Delta h}_2 - h_B = 0 \quad \text{ou} \quad h_D + \Delta h_2 + r_2 - h_B = 0$$

$$h_D + \widehat{\Delta h}_3 - h_A = 0 \quad \text{ou} \quad h_D + \Delta h_3 + r_3 - 281,130 = 0$$

$$h_B + \widehat{\Delta h}_4 - h_C = 0 \quad \text{ou} \quad h_B + \Delta h_4 + r_4 - h_C = 0$$

$$h_D + \widehat{\Delta h}_5 - h_C = 0 \quad \text{ou} \quad h_D + \Delta h_5 + r_5 - h_C = 0$$

$$h_A + \widehat{\Delta h}_6 - h_C = 0 \quad \text{ou} \quad h_A + \Delta h_6 + r_6 - h_C = 0$$

car on a évidemment la relation suivante entre la dénivelée entre deux points et les altitudes de ces deux points :

$$\Delta h_{AB} = h_B - h_A,$$

où Δh_{AB} est la dénivelée mesurée de A vers B.

A partir de ces contraintes, on peut exprimer les résidus de la manière suivante :

$$r_1 = 281,130 - \Delta h_1 - h_B$$

$$281,130 - 11,973 - h_B = 269,157 - h_B$$

$$r_2 = h_B - h_D - 10,940$$

$$r_3 = 258,198 - h_D$$

$$r_4 = h_C - h_B - 21,040$$

$$r_5 = h_C - h_D - 31,891$$

$$r_6 = h_C - 290,113$$

Le critère d'ajustement est évidemment celui des moindres carrés et s'écrit :

$$\Phi = \sum r_i^2.$$

Les équations normales s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial h_B} = 3h_B - h_C - h_D - 259,057 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h_C} = -h_B + 3h_C - h_D - 343,044 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h_D} = -h_B - h_C + 3h_D - 215,367 = 0 \end{cases}$$

La solution des équations normales permet d'obtenir les altitudes recherchées. Il s'agit donc de valeurs estimées des altitudes de ces points, par la méthode de l'ajustement au sens des moindres carrés.

$$\begin{cases} h_B = 269,1313 \text{ m} \\ h_D = 258,2088 \text{ m} \\ h_C = 290,1281 \text{ m} \end{cases}$$

6.2. Les notations

6.2.1. La "reformulation" des exemples du § 6.1

Les trois exemples des paragraphes précédents (6.1.2 à 6.1.3) ont été présentés avec leurs notations propres. Ils ont également été résolus spécifiquement.

Il convient cependant d'adopter une formulation générale, qui serait applicable à tous les types de levés que l'on peut rencontrer. Qu'il s'agisse d'un cheminement polygonal (§ 11.3) d'un relèvement (§ 11.2), d'un nivellement trigonométrique (§ 10.4) ou direct (§ 10.3) ou de mesurage par référence à des satellites (partie VI) ou de toute autre méthode de mesurage, le but est de trouver une formulation unique du processus d'ajustement qui puisse être appliquée à tous les levés.

Pour construire cette formulation unique, nous reformulons les trois exemples précédents.

1° En ce qui concerne le levé des angles d'un triangle, nous avons obtenu la contrainte suivante :

$$(a_1 + r_1) + (a_2 + r_2) + (a_3 + r_3) = 180^\circ,$$

que nous réécrivons sous la forme :

$$r_1 + r_2 + r_3 = 180^\circ - (a_1 + a_2 + a_3) = 3'$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = 180^\circ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 3,$$

ou

$$\mathbf{M}^\circ \mathbf{R} = \mathbf{d} - \mathbf{M}^\circ \mathbf{O} = \mathbf{m}$$

- où \mathbf{M}° est la matrice des coefficients multiplicateurs des observations (dans ce cas, il s'agit d'un vecteur ligne),
 \mathbf{R} est le vecteur des résidus,
 \mathbf{d} est un vecteur de constantes connues (dans ce cas, il s'agit d'une seule valeur),
 \mathbf{O} est le vecteur des observations,
 \mathbf{m} est le vecteur des termes constants des contraintes (dans ce cas, il s'agit d'une seule valeur).

Notons que c'est nécessairement la même matrice qui pré-multiplie les résidus et les observations.

2° L'exemple de la triangulation peut également être reformulé de la manière suivante. Les deux contraintes de celui-ci s'écrivaient :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 180^\circ - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \\ r_3 + r_4 + r_5 + r_6 &= 180^\circ - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 \end{aligned}$$

Nous pouvons les réécrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180^\circ \\ 180^\circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,70^\circ \\ 0,98^\circ \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{M}^\circ \mathbf{R} = \mathbf{d} - \mathbf{M}^\circ \mathbf{O} = \mathbf{m},$$

avec les mêmes notations que celles de l'exemple précédent. On obtient donc une même formulation pour deux levés différents.

3° Reprenant l'exemple du nivellement dont les contraintes s'écrivaient :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 281,130 - \Delta h_1 - h_B \\
 281,130 - 11,973 - h_B &= 269,157 - h_B \\
 r_2 &= h_B - h_D - 10,940 \\
 r_3 &= 258,198 - h_D \\
 r_4 &= h_C - h_B - 21,040 \\
 r_5 &= h_C - h_D - 31,891 \\
 r_6 &= h_C - 290,113
 \end{aligned}$$

nous les présentons sous la forme :

$$\begin{aligned}
 r_1 + h_B &= 281,30 - \Delta h_1 = 269,157 \\
 r_2 - h_B + h_D &= -\Delta h_2 = -10,940 \\
 r_3 + h_D &= 281,30 - \Delta h_3 = 258,198 \\
 r_4 + h_B - h_C &= -\Delta h_4 = -21,040 \\
 r_5 - h_C + h_D &= -\Delta h_5 = -31,891 \\
 r_6 - h_C &= -281,30 - \Delta h_6 = -290,113
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B \\ h_C \\ h_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 281,130 \\ 0 \\ 281,130 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 269,157 \\ -10,940 \\ 258,198 \\ -21,040 \\ -31,891 \\ -290,113 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{M}^o \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \mathbf{P} = \mathbf{d} - \mathbf{M}^o \mathbf{O} = \mathbf{m}.$$

Nous avons introduit deux nouvelles notations à savoir la matrice des coefficients multiplicateurs des paramètres \mathbf{M}^p et le vecteur des paramètres \mathbf{P} .

Cette expression est la forme canonique du modèle mathématique d'un lever quelconque qui sera soumis à l'ajustement au sens des moindres carrés.

6.2.2. Les principes

Dans les notations et les écritures matricielles, il y a séparation de ce qui concerne:

- les observations et leur résidu (\mathbf{M}^o et \mathbf{R} dans les exemples ci-dessus),
- les paramètres du modèle (\mathbf{M}^p et \mathbf{P} dans les exemples ci-dessus),
- les constantes du modèle (\mathbf{d} et \mathbf{m} dans les exemples ci-dessus).

Dans certaines situations, le modèle est dépourvu de paramètres et ne contient que des observations. C'est le cas du lever d'un triangle et de la triangulation exposé ci-dessus (§ 6.1.2 et 6.1.3). Dans ce cas on peut considérer que les paramètres du modèle sont en fait les observations. Il s'agit dans ce cas d'un **ajustement limité aux observations**. Dans cette situation, le modèle contient autant de conditions qu'il y a de redondance.

$$c = \rho$$

Dans d'autres situations le modèle contient des observations et des paramètres inconnus qui font précisément l'objet du lever. C'est le cas du nivellement exposé ci-dessus (§ 6.1.4). Les observations ont porté sur des dénivelées, en vue d'estimer des altitudes. On est dans la situation d'un **ajustement indirect** où

- le nombre de conditions contenues dans le modèle est égal au nombre d'observations,
- les conditions constituant le modèle comprennent et des observations et des paramètres,
- chaque condition comprend une seule observation affectée d'un coefficient unitaire.

Dans ce cas on a évidemment :

$$c = n.$$

Afin de pouvoir rencontrer une plus grande diversité de situations dans les levés topographiques, il est souhaitable de généraliser les deux situations présentées ci-dessus (ajustement limité aux observations et ajustement indirect) dans une formulation plus puissante, permettant notamment d'introduire plusieurs observations dans chaque condition, tout en maintenant la distinction entre observations et paramètres du modèle.

Cette méthode suppose toujours évidemment que la redondance existe et que le nombre d'observations soit suffisant vis-à-vis du nombre de paramètres à estimer et du nombre d'équations (ou de conditions) du modèle.

Ces trois types d'ajustement se caractérisent par les valeurs présentées dans le tableau 6.2.1.

Tableau 6.2.1. Redondance, nombre de paramètres et nombre de conditions dans les différents types d'ajustement des moindres carrés.

	Ajustement des moindres carrés		
	limité aux observations	indirect	généralisé
Redondance	$n > n_0$ et donc $\rho > 0$		
Nombre de paramètres	$u = 0$	$u = n_0$	$0 \leq u \leq n_0$
Nombre de conditions du modèle	$c = \rho$	$c = n$	$u < c \leq n$

6.2.3. Les symboles et leur signification

Le tableau 6.2.2 présente l'ensemble des symboles utilisés dans l'ajustement et l'analyse par la méthode des moindres carrés généralisés en ce comprises des notions qui seront explicitées ci-après.

Les grandeurs matricielles et vectorielles sont écrites en caractère gras.

Tableau 6.2.2. Grandeurs, symboles, formules et dimensions.

Symboles	Grandeurs	Formules	Dimensions
n	Nombre d'observations		
n_0	Nombre minimum d'observations nécessaire à la spécification univoque du modèle	$n_0 < n$	
ρ	Redondance	$n - n_0$	
u	Nombre de paramètres du modèle	$0 \leq u \leq n_0$	
c	Nombre de conditions indépendantes constituant le modèle	$u \leq c \leq n$	
\mathbf{O}	Vecteur des observations		$n * 1$
$\hat{\mathbf{O}}$	Vecteur des observations ajustées		$n * 1$
\mathbf{R}	Vecteur des résidus	$\mathbf{Q}(\mathbf{M}^0) \mathbf{w}_e(\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P})$	$n * 1$
\mathbf{P}	Vecteur des paramètres		$u * 1$
\mathbf{P}_0	Valeurs approchées des paramètres		$u * 1$
$\Delta \mathbf{P}$	Valeurs estimées des paramètres dans le cas linéaire et corrections des valeurs des paramètres dans le cas non linéaire	$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}$	$u * 1$
$\hat{\mathbf{P}}$	Valeurs estimées des paramètres dans le cas non linéaire	$\mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P}$	$u * 1$
\mathbf{d}	Vecteur de constantes		$c * 1$

Symboles	Grandeurs	Formules	Dimensions
m	Vecteur des termes constants des conditions du modèle	d - M° O	c * 1
M°	Matrice des coefficients pour les observations dans le modèle	$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{O}}$ (dans le cas non linéaire)	c * n
M^P	Matrice des coefficients pour les paramètres dans le modèle	$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{P}}$ (dans le cas non linéaire)	c * u
Σ₀₀	Matrice des variances et des covariances des observations		n * n
W	Matrice des pondérations à priori pour les observations	$\sigma_w^2 \Sigma^{-1}$	n * n
Q	Matrice des cofacteurs à priori pour les observations	W⁻¹	n * n
Q_e	Matrice des cofacteurs pour les observations équivalentes	M° Q M°'	c * c
W_e		Q_e⁻¹	c * c
N	Matrice des coefficients des équations normales	M^{P'}(M°QM°')⁻¹M^P	u * u
t	Vecteur des constantes dans les équations normales	M^{P'}(M°QM°')⁻¹m	u * 1
k	Vecteur des multiplicateurs de Lagrange		c * 1
σ_w^2	Variance de référence à priori		
$\hat{\sigma}_r^2$	Variance résiduelle également appelée variance à posteriori ou variance de référence estimée par les moindres carrés (valeur à posteriori)		
$\hat{\sigma}_{r_i}^2$	Variance estimée du i ^{ème} résidu		
ρ_i	Facteur de redondance de la i ^{ème} observation		

6.3. Le modèle

Le modèle est évidemment un modèle mathématique. Celui-ci comprend deux composantes. La première est le **modèle fonctionnel** défini dans le § 6.3.1 et la deuxième est le **modèle stochastique** défini dans le § 6.3.2.

6.3.1. Le modèle fonctionnel

Le modèle fonctionnel est constitué d'un certain nombre d'équations indépendantes qui furent appelées contraintes ou conditions ci-dessus. Celles-ci décrivent les relations existant entre les observations, les corrections qu'il convient d'y apporter (les résidus) et les paramètres du modèle.

Rappelons le modèle du nivellement :

$$\begin{aligned}r_1 + h_B &= 281,30 - \Delta h_1 = 269,157 \\r_2 - h_B + h_D &= -\Delta h_2 = -10,940 \\r_3 + h_D &= 281,30 - \Delta h_3 = 258,198 \\r_4 + h_B - h_C &= -\Delta h_4 = -21,040 \\r_5 - h_C + h_D &= -\Delta h_5 = -31,891 \\r_6 - h_C &= -\Delta h_6 = -290,113\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{M}^o \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \mathbf{P} = \mathbf{d} - \mathbf{M}^o \mathbf{O} = \mathbf{m}$$

Dans ce modèle, les équations sont linéaires en les observations, les paramètres et les résidus. Il n'en est pas toujours de la sorte. Un exemple de modèle non linéaire est donné ci-dessous (exemple 6.2.1).

Soit donc, d'une manière générale un modèle :

$$\mathbf{M} (\mathbf{O} + \mathbf{R}, \mathbf{P}) = 0$$

qui représente la relation suivante:

$$\mathbf{M}^o \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \mathbf{P} - \mathbf{m} = 0 ,$$

constitué de c relations non linéaires dans lesquelles apparaissent

- n observations représentées par le vecteur \mathbf{O} ,
- n résidus représentés par le vecteur \mathbf{R} ,
- u paramètres représentés par le vecteur \mathbf{P} .

La solution du critère d'ajustement qui sera présenté au § 6.4. requiert la linéarisation de ces relations. En effet, si ces relations ne sont pas linéaires, le système des équations normales ne le sera pas non plus. Or pour être résolu, ce système doit être linéaire ou "linéarisé". Dans ce but, les relations constituant le modèle doivent être "linéarisées" si elles ne sont pas linéaires. Cette linéarisation se fait de la manière suivante, présentée pour la $i^{\text{ème}}$ équation du modèle :

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{O} + \mathbf{R}, \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P}) \approx \mathbf{M}_i(\mathbf{O}, \mathbf{P}_0) + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial O_j} \right]_{O, P_0} r_j + \sum_{j=1}^u \left[\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial P_j} \right]_{O, P_0} \Delta P_j.$$

Il s'agit d'un développement en série de Taylor limité aux dérivées premières, dans l'espace des n résidus et des u paramètres. En convenant de noter \mathbf{M}^o la matrice contenant les dérivées partielles du modèle par rapport aux observations et \mathbf{M}^p la matrice des dérivées partielles du modèle par rapport aux paramètres, cette écriture du modèle linéarisé peut se présenter sous la forme :

$$\mathbf{M} \approx \mathbf{M}(\mathbf{O}, \mathbf{P}_0) + \mathbf{M}^o \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \Delta\mathbf{P},$$

ou :

$$\mathbf{M}^o \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \Delta\mathbf{P} = \mathbf{m}.$$

Cette écriture est identique à la présentation du modèle linéaire dans laquelle :

$$\mathbf{m} = -\mathbf{M}(\mathbf{O}, \mathbf{P}_0).$$

Le vecteur $\Delta\mathbf{P}$ comprend les corrections à apporter aux valeurs attribuées aux paramètres et qui figurent dans le vecteur \mathbf{P}_0 .

Il importe de souligner qu'il s'agit d'une représentation approximative du modèle \mathbf{M} . Il en résultera en pratique que la solution des équations normales donnera lieu à un processus itératif. La première itération est initiée en donnant aux paramètres une valeur initiale, évaluée grossièrement. La première itération permettra de calculer une première correction à apporter à ces valeurs initiales. La deuxième itération prendra pour valeurs des paramètres \mathbf{P}_0 les valeurs initiales de la première itération auxquelles sont ajoutées les corrections issues de la solution des équations normales obtenue dans la première itération. Les itérations sont interrompues lorsque les corrections calculées pour les paramètres sont inférieures à une limite convenue.

L'annexe n° 8 présente les formules de linéarisation d'un gisement et d'une distance. Ces outils, définis aux § 5.5.1² et 5.5.2² sont effectivement souvent présents dans les modèles fonctionnels associés à différents types de lever.

Exemple 6.3.1. Positionnement d'un point par mesure de distances – modèle fonctionnel.

Soit à déterminer les coordonnées d'un point stationné (identifié par l'indice 0) à partir duquel sont mesurées des distances le séparant de six points de coordonnées connues (identifiés par les indices 1 à 6). Le tableau 6.3.1 donne les distances mesurées et les

² <https://hdl.handle.net/2268/293759>

coordonnées des points ainsi visés. La figure 6.3.1 présente, schématiquement, l'implantation de ces points.

Tableau 6.3.1. Positionnement d'un point par mesure de distances - distances mesurées entre le point 0 et les points 1 à 6, coordonnées des points 1 à 6.

Point visé (i)	Distance horizontale (m)	x_i	y_i
1	46,715	173.121,77	139.205,45
2	51,586	173.178,01	139.187,82
3	34,967	173.165,54	139.144,79
4	42,624	173.100,44	139.134,51
5	81,576	173.071,12	139.108,81
6	59,413	173.075,40	139.168,40

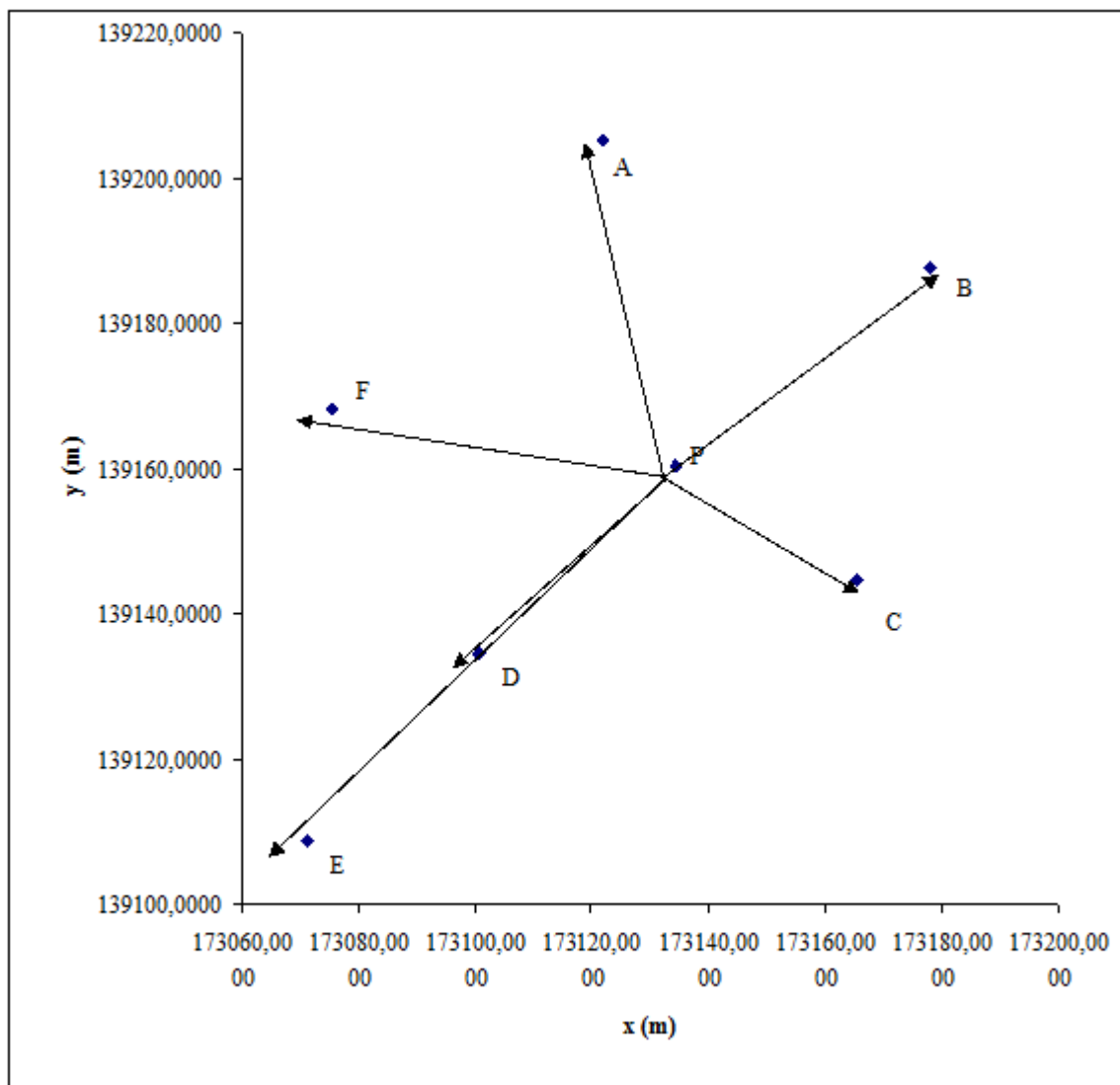


Figure 6.3.1. Implantation schématique des points visés et du point stationné.

Le modèle fonctionnel correspondant comprend autant de contraintes que d'observations ($c = n = 6$). Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 d_{0,1} + r_{d_{0,1}} - \sqrt{(x_0 + x_1)^2 + (y_0 + y_1)^2} &= 0 \\
 d_{0,2} + r_{d_{0,2}} - \sqrt{(x_0 + x_2)^2 + (y_0 + y_2)^2} &= 0 \\
 d_{0,3} + r_{d_{0,3}} - \sqrt{(x_0 + x_3)^2 + (y_0 + y_3)^2} &= 0 \\
 d_{0,4} + r_{d_{0,4}} - \sqrt{(x_0 + x_4)^2 + (y_0 + y_4)^2} &= 0 \\
 d_{0,5} + r_{d_{0,5}} - \sqrt{(x_0 + x_5)^2 + (y_0 + y_5)^2} &= 0 \\
 d_{0,6} + r_{d_{0,6}} - \sqrt{(x_0 + x_6)^2 + (y_0 + y_6)^2} &= 0
 \end{aligned}$$

où	$d_{0,i}$	est la distance horizontale mesurée entre le point 0 et le point i , corrigée des erreurs systématiques (§ 9.4),
	$r_{d_{0,i}}$	est le résidu ou correction apportée à la distance $d_{0,i}$,
	x_i	est la coordonnée en x du $i^{\text{ème}}$ point,
	y_i	est la coordonnée en y du $i^{\text{ème}}$ point.

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned}
 0 \leq u \leq n_0 &\Rightarrow 0 \leq 2 \leq 2 \\
 u < c \leq n &\Rightarrow 2 \leq 6 \leq 6
 \end{aligned}$$

Le nombre de paramètres est bien égal à 2 (x_0 et y_0). Le nombre minimum d'observations nécessaire à l'identification de la valeur des paramètres sans ajustement n_0 est égal à 2.

La matrice M^0 , de dimension $c \times n$ (6×6) comprend les dérivées des contraintes par rapport aux observations. Dans ce cas c'est une matrice unité. Il s'agit, en fait, d'un ajustement qualifié d'indirect ci-dessus, que nous traiterons cependant avec le formalisme de l'ajustement généralisé. Il répond en effet à cette définition également.

La matrice M^p , de dimension $c*u$ ($6*2$) comprend les dérivées des contraintes par rapport aux paramètres, soit dans notre cas :

$$M^p = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_0} & \frac{\partial M_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_0} & \frac{\partial M_2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M_3}{\partial x_0} & \frac{\partial M_3}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M_4}{\partial x_0} & \frac{\partial M_4}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M_5}{\partial x_0} & \frac{\partial M_5}{\partial y_0} \\ \frac{\partial M_6}{\partial x_0} & \frac{\partial M_6}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(x_0 + x_1)}{d_{0,1}} & -\frac{(y_0 + y_1)}{d_{0,1}} \\ -\frac{(x_0 + x_2)}{d_{0,2}} & -\frac{(y_0 + y_2)}{d_{0,2}} \\ -\frac{(x_0 + x_3)}{d_{0,3}} & -\frac{(y_0 + y_3)}{d_{0,3}} \\ -\frac{(x_0 + x_4)}{d_{0,4}} & -\frac{(y_0 + y_4)}{d_{0,4}} \\ -\frac{(x_0 + x_5)}{d_{0,5}} & -\frac{(y_0 + y_5)}{d_{0,5}} \\ -\frac{(x_0 + x_6)}{d_{0,6}} & -\frac{(y_0 + y_6)}{d_{0,6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,267601 & 0,963352 \\ 0,847808 & 0,530667 \\ 0,894186 & -0,447651 \\ -0,793684 & -0,608530 \\ -0,774088 & -0,632993 \\ -0,990827 & 0,133843 \end{bmatrix}$$

Pour entamer les itérations qui permettront de calculer la valeur estimée des paramètres (§ 6.4.5), il faut donner à ces paramètres une valeur initiale, forcément approchée. Les coordonnées approchées du point n^0 pourraient se calculer à partir d'un des triangles formés par ce point 0 et par deux autres points choisis arbitrairement parmi les 6 points de coordonnées connues. Les trois côtés de ce triangle et les coordonnées de deux de ses sommets étant connus, les coordonnées du troisième point (n^0) peuvent être calculées.

On peut également prendre comme valeur initiale des coordonnées du point 0, la moyenne des coordonnées des six points visés, pour autant que ce point 0 soit grossièrement situé au centre de ces points connus. Dans notre cas, ce calcul très approximatif des coordonnées initiales du sommet 0 donne comme résultat :

$$(x_0)_0 = 173.118,71 \text{ m,}$$

$$(y_0)_0 = 139.158,53 \text{ m,}$$

où $(x_0)_0$ et $(y_0)_0$ sont les valeurs approximatives, respectivement des coordonnées x_0 et y_0 , qui seront utilisées comme valeur initiale de ces paramètres lors de la première itération.

Le vecteur m , de dimension $c*1$ ($5*1$) s'écrit:

$$m = -M(O,PO) = \begin{bmatrix} -d_{0,1} + \sqrt{((x_0)_0 - x_1)^2 + ((y_0)_0 - y_1)^2} \\ -d_{0,2} + \sqrt{((x_0)_0 - x_2)^2 + ((y_0)_0 - y_2)^2} \\ -d_{0,3} + \sqrt{((x_0)_0 - x_3)^2 + ((y_0)_0 - y_3)^2} \\ -d_{0,4} + \sqrt{((x_0)_0 - x_4)^2 + ((y_0)_0 - y_4)^2} \\ -d_{0,5} + \sqrt{((x_0)_0 - x_5)^2 + ((y_0)_0 - y_5)^2} \\ -d_{0,6} + \sqrt{((x_0)_0 - x_6)^2 + ((y_0)_0 - y_6)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,536615 \\ 14,650597 \\ 13,765517 \\ -12,627748 \\ -12,919081 \\ -14,939890 \end{bmatrix}.$$

6.3.2. Le modèle stochastique

Le modèle stochastique précise le contenu aléatoire du modèle fonctionnel. En effet dans celui-ci on considère que les observations sont dépourvues de faute ($F = 0$) et d'erreur systématique ($s = 0$) (§ 5.3.1³) mais pas d'erreur accidentelle. Les observations sont donc des valeurs observées de variables aléatoires.

$$G = \gamma + F + A + s = \gamma + A$$

- où G est la valeur mesurée d'une grandeur quelconque et par exemple d'un angle ou d'une longueur, par la suite appelée "observation",
 γ est la valeur vraie de cette grandeur (valeur du mesurande),
 F est une faute éventuelle commise lors du mesurage,
 A est une erreur accidentelle inévitable et
 s est une erreur systématique éventuelle.

Comme proposé dans le § 5.3.4³, la fonction de densité de probabilité de ces erreurs accidentelles est la distribution normale de moyenne nulle. La fonction de densité des observations est donc aussi une distribution normale.

D'une manière générale, si le modèle comprend n observations, on utilise donc une distribution normale à n dimensions pour caractériser le comportement aléatoire des observations.

La moyenne de cette distribution est le vecteur contenant les vraies valeurs des grandeurs qui font l'objet de la mesure (vu la nullité de l'espérance mathématique des erreurs accidentelles). Ces valeurs sont généralement inconnues, ce qui est sans conséquence sur le processus d'ajustement et d'analyse.

³ <https://hdl.handle.net/2268/293759>

La dispersion de cette variable aléatoire à n dimensions se mesure par sa matrice des variances marginales et des covariances en chaque paire d'observations. Dans la plupart des cas, on considère cependant que toutes les erreurs accidentelles associées aux observations sont indépendantes entre elles. Dans ce cas les covariances sont nulles et la **matrice des variances et des covariances**, également appelée **matrice de dispersion**, est une matrice diagonale :

$$\Sigma_{oo} = \begin{bmatrix} \sigma_{o_1}^2 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{o_2}^2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \sigma_{o_i}^2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \sigma_{o_{n-1}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \sigma_{o_n}^2 \end{bmatrix} .$$

Dans cette matrice, $\sigma_{o_i}^2$ est la variance de la $i^{\text{ème}}$ observation.

Ces hypothèses permettront d'établir les propriétés statistiques des résultats de l'ajustement et notamment les paramètres des distributions d'échantillonnage des paramètres estimés et les tests d'hypothèse relatifs à la présence de faute ou à la pertinence du modèle.

Exemple 6.3.2. Positionnement d'un point par mesure de distances – modèle stochastique.

Poursuivant l'exemple 6.3.1, il faut établir la matrice des variances et des covariances des observations. Les distances ont été mesurées avec un mesureur électronique de distance (§ 9.3) dont la précision se calcule par :

$$\sigma_d = 0,005 + 5 \cdot 10^{-6} d$$

où	σ_d	est l'écart-type de la mesure de distance (m),
	d	est la distance mesurée (m).

En conséquence, et en utilisant les distances mesurées pour le calcul des écarts-types, la matrice des variances et des covariances des observations s'écrit :

$$\Sigma_{oo} = \begin{bmatrix} 2,7390E-05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,7646E-05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,6779E-05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,7177E-05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,9245E-05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8058E-05 \end{bmatrix} .$$

6.4. L'ajustement

6.4.1. Le critère

Le but poursuivi est d'ajuster le modèle aux observations de manière à ce qu'il soit aussi proche que possible de celles-ci. Il est donc logique de choisir comme critère de rendre minimum les corrections qui doivent être apportées aux observations afin qu'elles vérifient le modèle.

En conséquence le critère choisi pour calculer la valeur des paramètres inconnus est le traditionnel critère des moindres carrés appliqué aux résidus :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \mathbf{R}'\mathbf{R}$$

dont on recherche la valeur minimum.

L'ajustement du modèle consiste donc à rechercher les valeurs à donner aux paramètres \mathbf{P} de manière à ce que les équations du modèle soient vérifiées, tout en minimisant les corrections qui doivent être apportées aux observations.

A l'issue de l'ajustement on disposera donc de valeurs estimées pour les paramètres $\hat{\mathbf{P}}$ ainsi que de valeurs corrigées des observations :

$$\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{O} + \mathbf{R}$$

6.4.2. La pondération

S'il est raisonnable de considérer que toutes les observations sont indépendantes entre elles, il est moins évident de leur accorder à toutes la même "confiance" sauf dans des cas très simples comme celui du lever des angles d'un triangle. En effet, le lever topographique s'appuiera généralement sur des mesures de natures différentes (angle, dénivelée et distance par exemple) et donc de précisions différentes. De plus des mesures d'une même nature peuvent avoir été prises avec des équipements différents, se distinguant par leur précision.

En conséquence le critère d'ajustement est modifié de manière à pouvoir accorder à chaque observation (et donc à chaque résidu) un poids qui lui est propre w_i . Reste évidemment à choisir une valeur pour chacun de ces poids.

Il tombe sous le sens que le poids accordé à une observation sera d'autant plus grand que cette observation est réalisée avec une grande précision et donc une petite variance. On peut donc proposer le calcul suivant des pondérations :

$$w_i = \frac{k}{\sigma_{o_i}^2},$$

où k est une constante de proportionnalité qui peut se fixer arbitrairement.

Il est d'usage de donner à cette constante la valeur de la variance de l'observation à laquelle on souhaite donner un poids égal à 1. Cette variance porte généralement les noms de **variance à priori**, **facteur de variance**, **variance de poids unitaire** et **variance de référence**. Nous adopterons cette dernière appellation et lui donnerons la notation σ_w^2 .

En conséquence les poids se calculent par la relation :

$$w_i = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{o_i}^2}.$$

En conservant l'hypothèse d'indépendance des observations entre elles, ce qui donne à leur matrice de variances et de covariances le caractère diagonal, la matrice des poids pour les observations se calcule par :

$$\mathbf{W} = \sigma_w^2 \Sigma_{oo}^{-1}$$

Rappelons que cette matrice de pondération \mathbf{W} sera une matrice pleine si les observations sont corrélées, une matrice diagonale si les observations sont indépendantes mais de précision variable et une matrice identité si les observations sont indépendantes et toutes de même variance. Dans ce dernier cas, il n'y a, en fait, aucune pondération.

Certains auteurs (**LEICK, 2004 P. 97**) proposent d'égaliser cette variance à priori à 1. Cela dispense de choisir la valeur à lui donner et simplifie la définition des poids et de la matrice de pondération qui s'écrivent, dans ce cas :

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{o_i}^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{W} = \Sigma_{oo}^{-1}$$

Cette proposition revient à "standardiser" les observations, c'est-à-dire les remplacer par des observations transformées de manière à leur conférer une variabilité identique pour chacune d'entre elles et caractérisée par une variance égale à un. La variabilité d'une observation est, en fait, la variabilité de l'erreur commise sur l'observation (§ 6.3.2) qui sera estimée par le résidu calculé par l'ajustement. C'est donc la variance des résidus qui vaut un dans ce cas.

En conséquence et quelle que soit l'option choisie pour la valeur de la variance à priori, le critère d'ajustement devient :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n w_i r_i^2 = \mathbf{R}'\mathbf{W}\mathbf{R}$$

6.4.3. Les équations normales

Le problème consiste donc à rechercher les valeurs des u paramètres qui minimiseront la fonction Φ en respectant les contraintes que constituent les équations du modèle

$$\mathbf{M}^0 \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P} = \mathbf{m}.$$

Pour ce faire on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange (§ 6.1.3) et on peut écrire la nouvelle fonction à minimiser sous la forme :

$$\Phi' = \mathbf{R}' \mathbf{W} \mathbf{R} - 2\mathbf{k}' (\mathbf{M}^0 \mathbf{R} + \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P} - \mathbf{m}),$$

expression dans laquelle le vecteur \mathbf{k} contient les c multiplicateurs de Lagrange associés aux c contraintes.

Pour trouver le minimum, il faut annuler les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux variables qu'elle contient, c'est-à-dire les résidus et les paramètres, ce qui donne les équations normales :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi'}{\partial \mathbf{R}} = 2\mathbf{R}' \mathbf{W} - 2\mathbf{k}' \mathbf{M}^0 = 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial \Delta \mathbf{P}} = -2\mathbf{k}' \mathbf{M}^p = 0 \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire, après transposition et réarrangement:

$$\begin{cases} \mathbf{W} \mathbf{R} = (\mathbf{M}^0)' \mathbf{k} \\ (\mathbf{M}^p)' \mathbf{k} = 0 \end{cases}$$

6.4.4. La solution des équations normales

La première de ces deux équations permet d'explicitier les résidus :

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^0' \mathbf{k}$$

Pour la simplicité des écritures suivantes, on définit la matrice des cofacteurs des observations de la manière suivante :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}^{-1}.$$

On définira également une matrice des cofacteurs équivalente :

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{M}^0 \mathbf{Q} \mathbf{M}^0',$$

qui correspond à une matrice des cofacteurs calculée sur des "observations équivalentes", à c dimensions, fonctions linéaires des observations:

$$\mathbf{O}_e = \mathbf{M}^0 \mathbf{O}.$$

Avec ces définitions nouvelles, on peut introduire dans l'expression du modèle l'explicitation des résidus obtenue ci-avant :

$$\mathbf{Q}_e \mathbf{k} + \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P} = \mathbf{m},$$

et en tirer la valeur des multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_e^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}) = \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P})$$

Cette explicitation des multiplicateurs de Lagrange peut s'introduire dans la deuxième équation normale pour donner :

$$(\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}) = 0$$

ou

$$\left[(\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^p) \right] \Delta \mathbf{P} = (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \mathbf{m}$$

ou encore plus simplement :

$$\mathbf{N} \Delta \mathbf{P} = \mathbf{t},$$

Où \mathbf{N} est la matrice des coefficients des équations normales et \mathbf{t} en est le vecteur des constantes :

$$\mathbf{N} = \left(\mathbf{M}^p \right)' \mathbf{W}_e \left(\mathbf{M}^p \right),$$

$$\mathbf{t} = (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \mathbf{m}.$$

6.4.5. Le calcul des paramètres

Les valeurs des paramètres dans le cas d'un modèle linéaire, ou des corrections à apporter à l'estimation préalable des paramètres à l'issue de la première itération, dans le cas d'un modèle non linéaire, peuvent se calculer simplement par l'expression :

$$\Delta \mathbf{P}_1 = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}.$$

Si le modèle est linéaire, ce seul calcul produit la solution du problème, c'est-à-dire la valeur des paramètres qui valideront le modèle en modifiant le moins possible les observations.

Si le modèle est non linéaire, le processus de solution est itératif en raison de l'approximation résultant de la linéarisation du modèle. Dans ce cas, il faut disposer d'une estimation initiale des valeurs à donner aux paramètres \mathbf{P}_0 , effectuer la première itération et modifier cette estimation initiale en fonction de la correction calculée par cette première itération :

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P}_1.$$

Une deuxième itération est ensuite menée en prenant cette estimation pour valeur initiale. Elle permet de réaliser une nouvelle estimation des paramètres :

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_1 + \Delta \mathbf{P}_2.$$

Généralement les corrections calculées au cours de cette deuxième itération sont inférieures à la précision attendue, ce qui permet de terminer l'estimation des paramètres après cette deuxième itération, les valeurs retenues étant les valeurs estimées au cours de la première itération additionnées des corrections calculées au cours de cette deuxième itération.

Si les corrections calculées au cours de cette deuxième itération ne sont pas suffisamment petites, le processus itératif se poursuit jusqu'à obtenir des corrections ΔP_i inférieures à la limite que l'on s'est fixée, l'estimation des paramètres étant alors réalisée par l'expression :

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta \mathbf{P}_i.$$

Exemple 6.4.1. Positionnement d'un point par mesure de distances – calcul des paramètres par itérations

Reprenant les données de l'exemple 6.3.1, et en choisissant la valeur unitaire comme variance de référence, les matrices \mathbf{Q} (6*6), \mathbf{W}_e (6*6), \mathbf{N} (2*2) et les vecteurs \mathbf{t} (2*1) et $\Delta \mathbf{P}$ (2*1) ont pour valeurs :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2,73899\text{E-}05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,76464\text{E-}05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,67789\text{E-}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,71769\text{E-}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,92449\text{E-}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,80583\text{E-}05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_e = \begin{bmatrix} 36509,82269 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36171,13956 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37342,86022 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36795,96724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 34193,96429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35640,01476 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 137129,3244 & 21713,91087 \\ 21713,91087 & 79517,26095 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2142001,661 \\ 561093,0478 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 15,1584 \\ 2,9169 \end{bmatrix}$$

Ces corrections sont évidemment exprimées en mètre. A l'issue de cette première itération, on obtient donc respectivement pour les coordonnées en x et en y du point 0, une correction de 15,1584 et 2,9169 m. Les paramètres issus de cette première itération se calculent par la relation:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P}_1,$$

ce qui donne dans notre cas, les résultats (en m):

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 173.118,7127 \\ 139.158,2953 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15,1584 \\ 2,9169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.133,8692 \text{ m} \\ 139.161,2097 \text{ m} \end{bmatrix}.$$

Ces valeurs sont introduites comme valeurs "initiales" de la deuxième itération. Cette deuxième itération donne comme résultat final les corrections et les paramètres suivants (en m):

$$\hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 173.133,8692 \\ 139.161,2097 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4055 \\ -0,7701 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.134,2746 \\ 139.160,4396 \end{bmatrix}$$

Les corrections restent importantes ce qui nécessite de procéder à une troisième itération. Celle-ci produit les corrections suivantes (en m) :

$$\hat{P}_3 = \begin{bmatrix} 173.134,2746 \\ 139.160,4396 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0009 \\ 0,0020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.134,2756 \text{ m} \\ 139.160,4416 \text{ m} \end{bmatrix}.$$

Ces dernières corrections, bien que très réduites sont supérieures au minimum admis que nous avons fixé au dixième de mm. Il faut donc procéder à une quatrième itération qui donne comme valeurs des corrections :

$$\Delta P_4 = \begin{bmatrix} 1,05E-07 \\ 6,82E-08 \end{bmatrix}$$

Le processus itératif d'ajustement est terminé et les valeurs estimées des paramètres sont donc celles qui sont issues de la troisième itération, soit

$$x_0 = 173.134,276 \text{ m et} \\ y_0 = 139.160,442 \text{ m.}$$

6.4.6. Le calcul des résidus

Les valeurs estimées des paramètres étant connues, les résidus des observations peuvent se calculer en combinant les explicitations des résidus et des multiplicateurs de Lagrange écrites ci-avant :

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}^0 \mathbf{k} \text{ et } \mathbf{k} = \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}),$$

ce qui permet d'écrire:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}(\mathbf{M}^0)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}).$$

Il convient de préciser que ces vecteurs et matrices se calculent en fonction des résultats de la dernière itération du processus de calcul dans le cas non linéaire. En conséquence les valeurs des paramètres prises en considération sont les valeurs estimées à l'issue de l'avant dernière itération \mathbf{P}_{i-1} .

Exemple 6.4.2. Positionnement d'un point par mesure de distances – calcul des résidus

Poursuivant l'exemple précédent nous obtenons comme valeurs des résidus, exprimées en mètre :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0,0032 \\ 0,0070 \\ -0,0072 \\ 0,0076 \\ -0,0023 \\ -0,0044 \end{bmatrix}.$$

6.5. L'analyse

6.5.1. Justesse et précision

1° Outre la production de coordonnées, l'art du topographe doit également lui permettre de juger de la qualité de celles-ci, avec rigueur et objectivité.

D'une manière générale, la qualité d'un levé concerne essentiellement la qualité des estimations auxquelles il conduit (les valeurs des coordonnées des sommets d'un canevas polygonal par exemple). Celle-ci dépend des différences possibles dans ces estimations qui résulteraient de la répétition des mesures et des calculs du levé.

Ces différences dans le résultat de deux levés successifs peuvent s'expliquer par deux raisons.

Premièrement les observations sont des valeurs observées de variables aléatoires du fait des erreurs accidentelles qui les perturbent, et en conséquence, les estimations qui dérivent des observations sont également des valeurs observées de variables aléatoires, qui sont différentes à chaque "réalisation" du processus de mesurage. La variation possible des valeurs estimées du levé du fait de cette composante aléatoire ou stochastique est la **précision du levé** (§ 5.3.5).

La deuxième raison de différences entre les résultats de deux levés successifs réside dans les fautes et les erreurs systématiques qui peuvent affecter les observations de même que dans les erreurs de modèle fonctionnel ou stochastique. La variation possible des valeurs estimées du levé du fait de ces fautes et erreur est la **justesse⁴ du levé**.

La **qualité du levé** s'apprécie donc en fonction de sa justesse et de sa précision.

2° La première étape de l'analyse des résultats de l'ajustement d'un levé est d'en évaluer la justesse, c'est-à-dire d'établir un test permettant de mettre en évidence la présence de fautes dans les observations ou d'erreur dans le modèle, tant fonctionnel que stochastique. C'est le test global de justesse qui permet cette mise en évidence éventuelle. Il est présenté dans le § 6.5.3.

Si la justesse du levé ne peut être acceptée au terme de ce test global, il est utile de pouvoir tester la justesse de chaque observation afin d'identifier celle(s) qui serait entachée(s) d'une faute. C'est le test particulier de justesse qui est exposé au § 6.5.4.

A titre d'information complémentaire et dans l'hypothèse où les tests de justesses, global et particuliers, n'ont pas mis en évidence la présomption de présence d'une ou de plusieurs fautes, il est possible de quantifier la justesse du canevas du levé, c'est-à-dire la capacité de ce canevas à révéler la présence de faute(s) sur les observations. Il s'agit des notions de redondance des observations et de faute minimale détectable qui seront exposées au § 6.5.5.

⁴ En anglais : reliability

3° La précision du levé s'apprécie au moyen des matrices des variances et des covariances des résidus, des observations et des paramètres. Elle n'est cependant parfaitement définie qu'en l'absence de faute et d'erreur systématique sur les observations. Il convient donc de procéder en premier lieu à l'examen de la justesse qui sera suivi de l'évaluation de la précision. Celle-ci sera présentée au § 6.5.6.

Il est fréquent d'avoir comme paramètres les coordonnées d'un point. Dans ces circonstances il est utile de pouvoir décrire la précision planimétrique de ce point en décrivant la précision simultanément pour la coordonnée en x et la coordonnée en y. Cette évaluation bidimensionnelle de la précision peut se faire au moyen de la notion d'ellipse de tolérance qui généralise l'intervalle de tolérance défini à une dimension (§ 5.3.6⁵). La définition et le mode de calcul de ces ellipses sont abordés dans le § 6.5.7.

6.5.2. La propagation de la matrice des variances et des covariances

Nous avons vu ci-dessus (§ 6.3.2) que les observations sont considérées comme des valeurs observées de variables aléatoires dont la variabilité est décrite par leurs matrices des variances et des covariances.

Nous avons également vu que les valeurs estimées des paramètres et des résidus sont calculées à partir de relations qui sont des fonctions des observations. Ces paramètres et ces résidus estimés seront donc également des valeurs observées de variables aléatoires. Pour en décrire la variabilité et permettre l'élaboration de divers tests d'hypothèse à leur sujet, il faut donc pouvoir calculer leurs matrices des variances et des covariances. Ces dernières dépendent de la matrice des variances et des covariances des observations qui va se "propager" au travers des relations utilisées pour calculer les paramètres et les résidus.

Afin d'établir la façon dont cette matrice des variances et des covariances des observations se propage au travers des formules relativement complexes de l'ajustement décrites dans le § 6.4, nous commençons en rappelant le mode de propagation d'une variance dans le cas simple unidimensionnel. Soit une variable aléatoire Y, fonction linéaire d'une autre variable aléatoire X, de variance connue :

$$Y = a + bX.$$

La variance de la variable X se propage au travers de cette transformation linéaire et donne pour variance de la variable Y la valeur (**DAGNELIE, 2007 P. 227**) :

$$\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2,$$

où σ_X^2 est la variance de la variable X.

Soit à présent la propagation de la variance au travers d'une fonction non linéaire univariée

$$Y = f(X).$$

La variance de la variable Y, issue de la propagation de la variance de la variable X au travers de la transformation non linéaire, s'écrit (**DAGNELIE, 2007 P. 228**):

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{df}{dx} \right)_{m_x}^2 \sigma_X^2$$

⁵ <https://hdl.handle.net/2268/293759>

Il convient de noter le caractère approximatif de ce résultat, qui découle d'une linéarisation de la fonction f(X) par un développement en série, dont les termes contenant les dérivées d'ordre supérieur et égal à deux sont négligés.

Quittant les relations univariées, envisageons à présent une transformation linéaire multivariée. Soit à établir la propagation de la matrice des variances et des covariances de p variables (X₁, X₂, ... X_p) au travers d'un système d'équations linéaires définissant q nouvelles variables (Y₁, Y₂, ... Y_q), fonctions linéaires multivariées de ces p variables

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X},$$

qui peut se détailler de la manière suivante:

$$\begin{cases} Y_1 = a_1 + b_{1,1} X_1 + b_{1,2} X_2 + \dots + b_{1,p} X_p \\ Y_2 = a_2 + b_{2,1} X_1 + b_{2,2} X_2 + \dots + b_{2,p} X_p \\ \dots \dots \dots \\ Y_q = a_q + b_{q,1} X_1 + b_{q,2} X_2 + \dots + b_{q,p} X_p \end{cases}$$

La matrice des variances et des covariances des nouvelles variables, issue de la propagation de la matrice des variances et des covariances des variables initiales s'écrit (MIKHAIL E.M. ET GRACIE G., 1981 P. 150):

$$\Sigma_{YY} = \mathbf{B} \Sigma_{XX} \mathbf{B}',$$

où Σ_{XX} est la matrice des variances et des covariances des p variables X (de dimension p*p),
 Σ_{YY} est la matrice des variances et des covariances des q variables Y (de dimension q*q).

Venons-en enfin à la propagation de la matrice des variances et des covariances de q fonctions non linéaires multivariées de p variables

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}),$$

qui peuvent se détailler de la manière suivante:

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_p) \\ Y_2 = f_2(X_1, X_2, \dots, X_p) \\ \dots \dots \dots \\ Y_q = f_q(X_1, X_2, \dots, X_p) \end{cases}$$

La propagation de la matrice des variances et des covariances des variables X au travers de ces relations non linéaires produit une matrice des variances et des covariances des variables Y qui s'écrit (MIKHAIL E.M. ET GRACIE G., 1981 P. 152):

$$\Sigma_{YY} = \mathbf{J}_{YX} \Sigma_{XX} \mathbf{J}'_{YX},$$

où \mathbf{J}_{YX} est la matrice des dérivées partielles des q fonctions par rapport aux p variables.

Cette dernière matrice porte également le nom de Jacobien. Elle peut se détailler de la manière suivante :

$$J_{YX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial X_1} & \frac{\partial f_q}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial X_p} \end{bmatrix}$$

C'est cette dernière "propagation" qui sera utilisée ci-dessous.

6.5.3. Les résidus, la variance de référence à posteriori et le test global de justesse

1° Rappelons que les résidus se calculent par la relation :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}(\mathbf{M}^0)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}),$$

appliquée au terme de la dernière itération (§ 6.4.6).

A partir des valeurs des résidus, on peut estimer la **variance résiduelle** en divisant la somme pondérée des carrés des résidus (somme des carrés des écarts résiduelle) par le nombre de degrés de liberté du modèle ($c - u$), c'est-à-dire le nombre d'équations redondantes dans le modèle (**LEICK, 2004**).

Cette variance résiduelle peut donc se calculer par l'expression :

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\mathbf{R}' \mathbf{W} \mathbf{R}}{c - u}.$$

Le nombre de degrés de liberté du modèle est également appelé **redondance du modèle** ou **redondance du canevas**.

Cette variance résiduelle est également appelée **variance à posteriori**. On peut également démontrer que son espérance mathématique est égale à la variance à priori :

$$E(\hat{\sigma}_r^2) = \sigma_w^2.$$

Le numérateur de cette expression s'écrit en fonction de la relation donnant les résidus :

$$\mathbf{R}' \mathbf{W} \mathbf{R} = \left[\mathbf{Q}(\mathbf{M}^0)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}) \right]' \mathbf{W} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{M}^0)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}) \right]$$

Le second membre de cette expression peut aussi s'énoncer sous la forme :

$$(\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P})' \mathbf{W}_e' \mathbf{M}^0 \mathbf{Q}' \mathbf{W} \mathbf{Q}(\mathbf{M}^0)' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}).$$

En se souvenant que \mathbf{Q} et \mathbf{W}_e sont des matrices symétriques et donc égales à leur transposée d'une part et d'autre part que :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_e^{-1} = (\mathbf{M}^0) \mathbf{Q} (\mathbf{M}^0)',$$

l'expression précédente peut s'écrire :

$$(\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P})' \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P})$$

ou

$$\mathbf{m}' \mathbf{W}_e \mathbf{m} + [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}]' \mathbf{W}_e [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}] - \mathbf{m}' \mathbf{W}_e [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}] - [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}]' \mathbf{W}_e \mathbf{m}.$$

En se souvenant que :

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t},$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^p),$$

$$\mathbf{t} = (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \mathbf{m},$$

le deuxième terme de la dernière expression peut subir les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}]' \mathbf{W}_e [\mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}] &= \Delta \mathbf{P}' [(\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^p)] \Delta \mathbf{P} \\ &= \Delta \mathbf{P}' [\mathbf{N}] \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} = \Delta \mathbf{P}' (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \mathbf{m} \end{aligned}$$

ce qui démontre qu'il est identique au dernier terme, changé de signe, de la même expression. Il en résulte que la somme pondérée des résidus peut se calculer par l'expression :

$$\mathbf{R}' \mathbf{W} \mathbf{R} = \mathbf{m}' \mathbf{W}_e \mathbf{m} - \mathbf{t}' \Delta \mathbf{P}.$$

Comme, au cours de la dernière itération, les valeurs des corrections apportées aux paramètres sont assimilables à zéro, la variance résiduelle peut s'estimer par :

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{W}_e \mathbf{m}}{c - u},$$

où \mathbf{m} est calculé en fonction des estimations de \mathbf{P} obtenues à l'avant dernière itération :

$$\mathbf{m} = -\mathbf{M}(\mathbf{O}, \mathbf{P}_{i-1}).$$

2° Cette variance résiduelle peut se comparer à la variance de référence. En effet celle-ci est la variance de l'observation dont le poids est unitaire dans le critère d'ajustement. Elle est donc aussi la variance de l'erreur accidentelle associée à cette observation, qui peut se comparer à la variance du résidu de cette observation, elle-même estimée par la variance résiduelle énoncée ci-dessus. Nous avons vu également ci-dessus que l'espérance mathématique de cette variance à posteriori est égale à la variance à priori.

A partir de cette comparaison, un test statistique d'hypothèse peut être élaboré. Son objectif est de vérifier l'égalité entre la variance résiduelle calculée à posteriori et la variance de référence fixée à priori, en fonction de la précision des processus de mesurage.

L'hypothèse nulle de ce test comprend les propositions suivantes :

- la matrice des variances et des covariances choisie pour les observations décrit correctement la dispersion des erreurs accidentelles que contiennent ces observations ;

- le modèle fonctionnel donne une description exacte des relations liant les observations et les paramètres ;
- il n'y a pas de faute ni d'erreur systématique importante dans les observations.

Ce test porte sur la variance résiduelle. Il est construit en se souvenant que, si les résidus peuvent être considérés comme de distribution normale, la distribution d'échantillonnage de la variance (**DAGNELIE, 2007 P. 357**) permet d'écrire que :

$$\chi_{obs}^2 = \frac{(c-u) \hat{\sigma}_r^2}{\sigma_w^2}$$

est une valeur observée d'une variable χ^2 à $c-u$ degrés de liberté si l'hypothèse nulle est vérifiée. Le test consiste donc à rejeter l'hypothèse nulle si la valeur de χ_{obs}^2 est trop éloignée de sa valeur attendue, c'est-à-dire si elle est trop faible ou trop élevée. En pratique, l'hypothèse nulle sera rejetée si :

$$\chi_{obs}^2 < \chi_{c-u, \alpha/2}^2 \quad \text{ou} \quad \chi_{obs}^2 > \chi_{c-u, 1-\alpha/2}^2.$$

Les valeurs limites se lisent dans la table des valeurs de la variable χ^2 présentée dans l'annexe n°1⁶.

Exemple 6.5.1. Positionnement d'un point par mesure de distances - évaluation de la justesse de l'ajustement.

A partir des résultats obtenus lors de la dernière itération de l'ajustement présenté dans l'exemple 6.4.1 et en appliquant les formules présentées ci-dessus, on procède au test global de justesse dont les résultats sont présentés dans le tableau n° 6.5.1.

Tableau 6.5.1. Test global de justesse de l'ajustement du positionnement d'un point par mesure de distances.

$\mathbf{m}' \mathbf{W}_e \mathbf{m}$	$c - u$	$\hat{\sigma}_r$	χ_{obs}^2	$P(\chi_{c-u}^2 > \chi_{obs}^2)$	Conclusion
7,055	4	1,764	7,055	0,133	AH ₀

Nous choisissons une valeur de α égale à 0.05 comme risque de première espèce. La probabilité associée à la valeur de la statistique du test étant largement supérieure à $\alpha/2$, nous acceptons l'hypothèse testée (AH₀), dans ses trois composantes énoncées ci-dessus.

Notons qu'une probabilité trop élevée et en particulier supérieure à 0,975 ($1 - \alpha/2$) nous conduirait à rejeter l'hypothèse testée, la valeur de la variance résiduelle étant trop faible que pour être compatible avec le modèle stochastique. Cette conclusion peut se produire par exemple lors d'une surestimation importante des variances des observations.

3° Il existe une autre manière de procéder au test de cette même hypothèse. En effet, à partir de la distribution de la valeur de χ_{obs}^2 et en vertu des propriétés de la variable F de Snedecor (**DAGNELIE, 2007 P. 299**), on peut également montrer que :

⁶ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}_r^2}{\sigma_w^2}$$

est une valeur observée d'une variable F de Snedecor dont les nombres de degrés de liberté sont c-u et l'infini.

Lorsque l'hypothèse nulle est vérifiée, la moyenne de cette variable est proche de l'unité, les valeurs attendues du numérateur et du dénominateur étant identiques. Dans le cas contraire et suivant la façon dont l'hypothèse nulle n'est pas vérifiée, la valeur prise par cette variable s'écartera de l'unité vers des valeurs inférieures ou supérieures. Comme généralement ce sont les valeurs supérieures qui se produisent et qui doivent faire l'objet du test (précision des observations inférieure à celle qui est fixée à priori), seules les valeurs trop grandes conduiront au rejet de l'hypothèse nulle.

En conséquence et selon les principes généraux des tests d'hypothèse (DAGNELIE, 2007), l'hypothèse nulle est rejetée lorsque F_{obs} est supérieur à la valeur limite $F_{1-\alpha}$ dont les nombres de degrés de liberté sont c-u et l'infini. Rappelons que α représente le risque de première espèce, c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors que celle-ci est vérifiée, ce qui est évidemment une conclusion erronée.

On peut assimiler ce risque de première espèce au risque du topographe. Le risque associé à l'autre conclusion erronée, c'est-à-dire l'acceptation de l'hypothèse nulle alors qu'elle n'est pas vérifiée, pourrait s'appeler le risque du client.

La valeur de $F_{1-\alpha}$ se lit dans une table des distributions F de Snedecor (voir annexe 37).

En raison des divers aspects de l'hypothèse nulle ainsi testée, ce test porte le nom de **test global de la justesse** du levé.

4° La variance résiduelle est une valeur estimée de la variance de référence si l'hypothèse nulle est vérifiée. Elle peut donc se substituer à celle-ci dans le calcul de la matrice des variances et des covariances des résidus et des paramètres qui sera exposé ci-dessous (§ 6.5.4 et 6.5.6). Cependant cette estimation est issue d'un seul jeu de données avec une redondance éventuellement réduite. Il se peut donc que la variance de référence soit mieux connue et donc préférée à la variance résiduelle dans la suite de l'analyse (MIKHAIL ET GRACIE, 1981 P. 250, VAN CRAENENBROUCK, 1987 P. 79).

⁷ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

6.5.4. La détection des fautes

1° Si le test global de justesse décrit au § précédent conduit au rejet de l'hypothèse nulle, l'analyse doit se poursuivre en reprenant les différents éléments de cette hypothèse nulle puisque celle-ci est complexe.

Le rejet peut être expliqué par une erreur sur le modèle mathématique. Celle-ci peut porter sur le modèle stochastique et correspondre par exemple à une mauvaise évaluation de la matrice des variances et des covariances des observations Σ_{oo} . Il est effectivement fréquent de surévaluer la précision des équipements de mesurage utilisés. Les précisions annoncées par les constructeurs sont rarement atteintes dans la pratique.

Au sein du modèle mathématique, l'erreur peut relever plutôt du modèle fonctionnel qui ne donnerait pas une description exacte des relations liant les observations et les paramètres.

Après avoir examiné ces deux sources d'erreur, il reste à rechercher les éventuelles fautes ou erreurs systématiques qui auraient pu être commises dans les opérations de mesurage ou de calcul préliminaire. Cette démarche peut se faire à partir de la dispersion estimée des résidus, c'est-à-dire de leur matrice des variances et des covariances. Celle-ci peut se calculer de la manière suivante.

La première des deux équations normales (§ 6.4.3) permet d'exprimer les résidus estimés en fonction des multiplicateurs de Lagrange :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{M}^o)' \mathbf{k} = \mathbf{Q} (\mathbf{M}^o)' \mathbf{k}$$

avec pour ces derniers l'écriture suivante (§ 6.4.4):

$$\mathbf{k} = \mathbf{W}_e (\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \Delta \mathbf{P}) = \mathbf{W}_e \left[\mathbf{m} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \mathbf{m} \right]$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] \mathbf{m}$$

2° Pour la simplicité des notations, ce calcul se fera en deux étapes dont la première consiste à calculer la matrice des variances et des covariances des multiplicateurs de Lagrange. En vertu de la loi de propagation de la matrice des variances et des covariances (§ 6.5.2), appliquée à la dernière présentation du vecteur \mathbf{K} , on peut écrire :

$$\Sigma_{kk} = \mathbf{J}_{k,o} \Sigma_{oo} \mathbf{J}_{k,o}'$$

avec

$$\mathbf{J}_{k,o} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{O}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{O}} \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] \mathbf{m},$$

$$\mathbf{J}_{k,o} = \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{O}} \mathbf{m},$$

$$\mathbf{J}_{k,o} = -\mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] \mathbf{M}^o.$$

ce qui permet d'écrire:

$$\Sigma_{kk} = \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] \mathbf{M}^o \Sigma_{oo} (\mathbf{M}^o)' \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right]' (\mathbf{W}_e)'$$

On peut démontrer facilement, tenant compte du fait que la matrice $\left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right]$ est idempotente, que cette expression se simplifie pour se présenter sous la forme :

$$\Sigma_{kk} = \sigma_w^2 \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right]$$

La deuxième étape consiste à calculer la matrice des variances et des covariances de R en appliquant la loi de propagation de la matrice des variances et des covariances (§ 6.5.2) à la relation existant entre k et R :

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}} = \mathbf{J}_{\mathbf{R},\mathbf{k}} \Sigma_{kk} (\mathbf{J}_{\mathbf{R},\mathbf{k}})' = \left[\mathbf{Q}(\mathbf{M}^o)' \right] \Sigma_{kk} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{M}^o)' \right]',$$

ou

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}} = \sigma_w^2 \mathbf{Q}(\mathbf{M}^o)' \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] (\mathbf{M}^o) \mathbf{Q},$$

en raison de la symétrie de Q.

Comme indiqué à la fin du paragraphe 6.5.3, si la redondance est très importante et que, en conséquence, une plus grande confiance peut être accordée dans la variance résiduelle que dans la variance de référence, l'estimation de la matrice des variances et des covariances des résidus se calculera en substituant la variance résiduelle à la variance de référence :

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}} = \hat{\sigma}_r^2 \mathbf{Q}(\mathbf{M}^o)' \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] (\mathbf{M}^o) \mathbf{Q}.$$

3° La diagonale de l'une ou l'autre de ces deux matrices contient donc les variances estimées des résidus

$$\hat{\sigma}_{r_i}^2.$$

Si le modèle mathématique est correct, et donc notamment en l'absence de faute sur les observations, les résidus sont des variables aléatoires de distribution normale, de moyenne nulle et de variance inconnue. En conséquence la valeur :

$$t_{obs_i} = \frac{|r_i|}{\hat{\sigma}_{r_i}}$$

est une valeur observée d'une variable aléatoire t de Student à c-u degrés de liberté. L'hypothèse nulle, relative à l'absence de faute sur la i^{ème} observation est donc rejetée si cette valeur est supérieure à la valeur $t_{c-u, 1-\alpha/2}$ à c-u degrés de liberté (annexe 2⁸). Dans ce test, la valeur de α représente la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vérifiée, c'est-à-dire de conclure à l'existence d'une faute alors qu'il n'y en a pas.

Ce test est donc particulier à chaque observation. Il portera le nom de **test particulier de justesse**.

⁸ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

4° Il faut cependant signaler que les résidus ne sont pas indépendants puisqu'ils sont liés par les c relations du modèle. Les n tests qui peuvent se réaliser sur chaque observation ne sont donc pas indépendants. En conséquence la valeur réelle du risque α ne sera pas celle qui est choisie pour chacun des tests.

En effet, si n tests sont réalisés indépendamment l'un de l'autre au niveau de signification α la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle, alors qu'elle est vérifiée, est égale pour chacun des tests à $1 - \alpha$, et la probabilité d'accepter l'ensemble des n hypothèses est donc, en fonction de la propriété de multiplicativité des probabilités (**DAGNELIE, 2007 et VANICEK ET KRAKIWSKY, 1986**):

$$(1 - \alpha)^n .$$

La probabilité d'aboutir au rejet d'au moins une hypothèse nulle, c'est-à-dire à une conclusion erronée, est alors :

$$\alpha_n = 1 - (1 - \alpha)^n .$$

C'est donc le risque global de première espèce lié à l'ensemble des n tests. Il augmente très rapidement en fonction du nombre de tests. Il est, pour une valeur de α égale à 0,05, égal à 0,10 pour deux tests et 0,40 pour dix tests.

Pour corriger cette valeur excessive du risque global, il faut réduire le risque α associé à chaque test. Une solution simple consiste à diviser le risque global souhaité par le nombre de tests pour déterminer la valeur de α :

$$\alpha = \frac{\alpha_g}{n} .$$

Cette correction du niveau de signification revient à multiplier la valeur critique $t_{c-u, 0,975}$ par un facteur variant approximativement entre 1,5 (pour $c-u=3$) et 1,8 (pour $c-u=50$) et la valeur critique $\tau_{c-u, 0,995}$ entre 1,03 (pour $c-u=3$) et 1,6 (pour $c-u=50$).

En pratique ce test particulier de justesse est appliqué en premier lieu aux résidus pour lesquels les valeurs de t_{obs} sont les plus élevées, pour terminer par ceux dont la valeur t_{obs} est la plus faible.

5° Il faut remarquer que ces tests sont peu puissants dans la mesure où nous disposons d'une seule valeur pour chacune des variables aléatoires correspondant à un résidu.

On peut envisager de transformer le test exposé ci-dessus de manière à en augmenter la puissance. Pour ce faire, **POPE (1976)** propose de remplacer la valeur de la distribution de Student $t_{1-\alpha}$ par une valeur notée $\tau_{c-u, 1-\alpha}$, calculée par l'expression :

$$\tau_{c-u, 1-\alpha/2} = \frac{\sqrt{c-u} t_{c-u-1, 1-\alpha/2}}{\sqrt{c-u-1 + t_{c-u-1, 1-\alpha/2}^2}} .$$

Les valeurs critiques ainsi calculées sont plus faibles que les valeurs de la distribution de **STUDENT** et tendent vers ces dernières lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Le tableau 6.5.2 présente, à titre indicatif, quelques valeurs comparées des valeurs des distributions t de **STUDENT** et τ (tau).

Tableau 6.5.2. Valeurs comparées de la distribution t de **STUDENT** et τ de **POPE**.

c - u	t de STUDENT		τ de POPE		t - τ	
	$t_{c-u, 0,975}$	$t_{c-u, 0,995}$	$\tau_{c-u, 0,975}$	$\tau_{c-u, 0,995}$	0,975	0,995
2	2,920	6,965	1,40	1,41	1,52	5,55
3	2,353	4,541	1,56	1,70	0,79	2,84
4	2,132	3,747	1,61	1,87	0,52	1,88
5	2,015	3,365	1,63	1,97	0,38	1,39
10	1,812	2,764	1,65	2,17	0,16	0,60
15	1,753	2,602	1,65	2,22	0,10	0,38
20	1,725	2,528	1,65	2,25	0,08	0,28
30	1,697	2,457	1,65	2,28	0,05	0,18
40	1,684	2,423	1,65	2,30	0,03	0,12
50	1,676	2,403	1,65	2,30	0,03	0,10
60	1,671	2,390	1,65	2,31	0,02	0,08
70	1,667	2,381	1,65	2,31	0,02	0,07
80	1,664	2,374	1,65	2,31	0,02	0,06
90	1,662	2,368	1,65	2,31	0,02	0,06
100	1,660	2,364	1,65	2,31	0,01	0,05
500	1,648	2,334	1,65	2,33	0,00	0,01
∞	1,645	2,326	1,65	2,33	0,00	0,00

6° A noter qu'une seule faute, commise sur une seule observation, peut provoquer l'obtention de valeurs significatives de t_{obs} (comparées à $t_{c-u, 1-\alpha}$ ou à $\tau_{c-u, 1-\alpha}$) pour plusieurs résidus, conduisant ainsi à suspecter la présence de plusieurs fautes sur plusieurs observations. **CROSS** et **PRICE** (1985) proposent une méthode permettant la mise en évidence de cette situation dans le cas particulier d'un modèle linéaire indirect (§ 6.2.1).

Exemple 6.5.2. Positionnement d'un point par mesure de distances – détection des fautes.

A partir des résultats obtenus lors de la dernière itération de l'ajustement présenté dans l'exemple 6.4.1 et en appliquant les formules présentées ci-dessus, on procède à la détection des fautes même si cette détection est vraisemblablement superflue vu l'acceptation de la troisième composante de l'hypothèse associée au test global de justesse, c'est-à-dire l'absence de faute et d'erreur systématique.

Pour calculer les statistiques associées à ces tests, il faut au préalable établir la matrice des variances et des covariances des résidus. Ces calculs donnent le résultat suivant :

$$\Sigma_{RR} = \begin{bmatrix} 1,357E-05 & -3,586E-06 & 9,534E-06 & 4,834E-06 & 5,237E-06 & -5,777E-06 \\ -3,586E-06 & 2,034E-05 & -2,458E-06 & 7,423E-06 & 7,445E-06 & 4,611E-06 \\ 9,534E-06 & -2,458E-06 & 1,638E-05 & 1,436E-06 & 1,094E-06 & 8,713E-06 \\ 4,834E-06 & 7,423E-06 & 1,436E-06 & 1,952E-05 & -7,720E-06 & -3,890E-06 \\ 5,237E-06 & 7,445E-06 & 1,094E-06 & -7,720E-06 & 2,145E-05 & -3,643E-06 \\ -5,777E-06 & 4,611E-06 & 8,713E-06 & -3,890E-06 & -3,643E-06 & 1,979E-05 \end{bmatrix}$$

Les valeurs de la diagonale de cette matrice sont évidemment les variances des résidus. Elles permettent le calcul des écarts-types des résidus. En application de la formule du test particulier de justesse, on obtient les valeurs suivantes pour chacun des six résidus :

$$t_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,56 \\ 1,78 \\ 1,71 \\ 0,49 \\ 0,98 \end{bmatrix}.$$

Pour pratiquer les tests particuliers de justesse, il faut choisir le niveau de signification adéquat et comparer ces valeurs observées à la valeur théorique adéquate.

En ce qui concerne le niveau de signification, nous tiendrons compte du fait que nous réalisons simultanément six tests de signification sur des valeurs qui ne sont pas indépendantes. Nous corrigeons donc le niveau de signification individuel de chacun de ces tests pour que le niveau de signification de l'ensemble soit égal à 0,05, selon la formule vue ci-dessus :

$$\alpha = \frac{\alpha_g}{n} = \frac{0,05}{6} = 0,0083.$$

Cela nous conduit à choisir comme niveau de signification la valeur de 0,0083 et non de 0,05. La valeur théorique de la distribution t de STUDENT correspondante vaut :

$$t_{c-u;1-\alpha/2} = t_{4;0,0042} = 5,885.$$

Toutes les valeurs de t_{obs} étant largement inférieures à cette limite, les hypothèses associées à ces tests sont toutes acceptées : les résultats ne mettent pas en évidence la présence d'une ou de plusieurs fautes. Cette conclusion est évidemment logique avec le résultat du test global de justesse présenté dans l'exemple 6.5.1.

A noter que l'on peut renforcer la puissance de ce test, c'est-à-dire sa capacité à mettre en évidence une faute éventuelle, en remplaçant la valeur limite calculée selon la distribution de STUDENT par la valeur limite $\tau_{c-u;1-\alpha/2}$, calculée comme suit (§ 6.5.4):

$$\tau_{c-u;1-\alpha/2} = \frac{\sqrt{c-u} t_{c-u-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{c-u-1+t_{c-u-1;1-\alpha/2}^2}} = \frac{\sqrt{6-2} 5,885}{\sqrt{6-2-1+5,885^2}} = 1,919.$$

Les conclusions en sont inchangées.

6.5.5. La redondance des observations et la justesse du canevas

1° Les valeurs ajustées des observations se calculent par l'expression suivante :

$$\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{O} + \mathbf{R}.$$

La variance des observations ajustées correspond à la partie de la variance totale (variance des observations) qui est expliquée par le modèle. Elle se calcule simplement en déduisant la variance résiduelle de la variance totale. En termes de matrice de variances et de covariances, cela se traduit par la relation :

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{O}}} = \Sigma_{\mathbf{O}\mathbf{O}} - \Sigma_{\mathbf{R}\mathbf{R}}.$$

2° Pour chaque observation, on peut également apprécier la capacité que possède le canevas de mettre en évidence une faute qui la perturberait. Il s'agit généralement d'un contrôle exercé par les observations voisines. Le canevas est évidemment d'autant plus fiable que chaque observation est ainsi bien contrôlée par ses voisines. Cette caractéristique, calculable pour chaque observation s'appelle le **facteur de redondance**. Il se calcule par la relation (LEICK, 2004 P. 152) :

$$\rho_i = \frac{\hat{\sigma}_{r_i}^2}{\sigma_{o_i}^2},$$

où ρ_i est le facteur de redondance de la $i^{\text{ème}}$ observation,
 $\hat{\sigma}_{r_i}^2$ est la variance estimée du $i^{\text{ème}}$ résidu, $i^{\text{ème}}$ valeur de la diagonale de la matrice $\Sigma_{\mathbf{R}\mathbf{R}}$,
 $\sigma_{o_i}^2$ est la variance de la $i^{\text{ème}}$ observation, $i^{\text{ème}}$ valeur de la diagonale de la matrice $\Sigma_{\mathbf{O}\mathbf{O}}$.

Le facteur de redondance est une mesure de la contribution de l'observation o_i à la redondance globale du canevas, mesurée par le nombre de degrés de liberté $c - u$. La somme des facteurs de redondance est par ailleurs égale à $c - u$.

Ce facteur de redondance, compris entre 0 et 1, peut s'interpréter comme étant la part d'une éventuelle faute commise lors de la mesure de l'observation \mathbf{F}_i qui est répercutée sur la valeur du résidu et donc décelable par le test particulier de justesse correspondant.

La **justesse interne du canevas** est mesurée par ce facteur de redondance. C'est en effet la possibilité qu'ont les observations environnantes de permettre la détection de fautes éventuelles sur l'observation correspondante.

En pratique on utilise le critère décrit au tableau 6.5.3 (VAN CRANENBROECK, 1987 P. 50).

Tableau 6.5.3. Qualification du facteur de redondance.

Valeurs du facteur de redondance	Observation
$0,00 \leq \rho_i \leq 0,01$	non contrôlée
$0,01 < \rho_i \leq 0,10$	mal contrôlée
$0,10 < \rho_i \leq 0,25$	modérément contrôlée
$0,25 < \rho_i \leq 1,00$	bien contrôlée

Cette redondance permet de définir le **facteur d'absorption**:

$$(1 - \rho_i) F_i,$$

qui représente la part de la faute F_i éventuellement commise sur la $i^{\text{ème}}$ observation, qui se propage dans les paramètres estimés et falsifie donc le résultat de l'ajustement (LEICK, 2004 p. 157).

3° A partir de l'examen du risque de deuxième espèce associé au test particulier de justesse (§ 6.5.4), on peut introduire le concept de **justesse du canevas**, mesuré par la notion de **faute minimale détectable**.

Nous considérons que la matrice des variances et des covariances des résidus est connue et se calcule par la relation (§ 6.5.4) :

$$\Sigma_{RR} = \sigma_w^2 \mathbf{Q}(\mathbf{M}^o)' \mathbf{W}_e \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}^p \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^p)' \mathbf{W}_e \right] (\mathbf{M}^o) \mathbf{Q}.$$

En l'absence de faute commise sur la $i^{\text{ème}}$ observation ($H_0 : F_i = 0$), l'espérance mathématique du $i^{\text{ème}}$ résidu est égale à zéro et son écart-type est égal à σ_{F_i} qui est la racine carrée de la $i^{\text{ème}}$ valeur de la diagonale de la matrice Σ_{RR} . Si les erreurs commises sur les observations ont une distribution normale, comme supposée dans le modèle stochastique (§ 6.3.2), alors les résidus ont aussi une distribution normale et la grandeur :

$$u_{\text{obs}} = \frac{r_i}{\sigma_{F_i}}$$

est évidemment une valeur observée d'une distribution normale réduite (de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1). Le test particulier de justesse consiste à rejeter l'hypothèse nulle H_0 si la valeur de u_{obs} est trop peu probable, c'est-à-dire si elle se situe dans la zone critique définie par le niveau de signification α et indiquée sur la figure 6.5.1.

Imaginons à présent que l'hypothèse nulle ne soit pas vérifiée, mais qu'au contraire une faute a été commise sur la $i^{\text{ème}}$ observation. C'est donc l'hypothèse alternative H_a qui est vérifiée:

$$H_a : F_i \neq 0.$$

Dans ce cas, on peut montrer (LEICK, 2004 P. 154) que l'espérance mathématique du résidu correspondant vaut :

$$E[r_i | H_a] = -\rho_i F_i$$

où ρ_i est la redondance de la $i^{\text{ème}}$ observation décrite ci-dessus. L'écart-type de ce résidu n'est pas affecté par la présence d'une faute. Dans ce cas, la valeur u_{obs} est une valeur observée d'une distribution normale, d'écart-type inchangé mais dont l'espérance mathématique vaut :

$$E[U_{\text{obs}} | H_a] = -\frac{\rho_i F_i}{\sigma_{r_i}} = \delta_i.$$

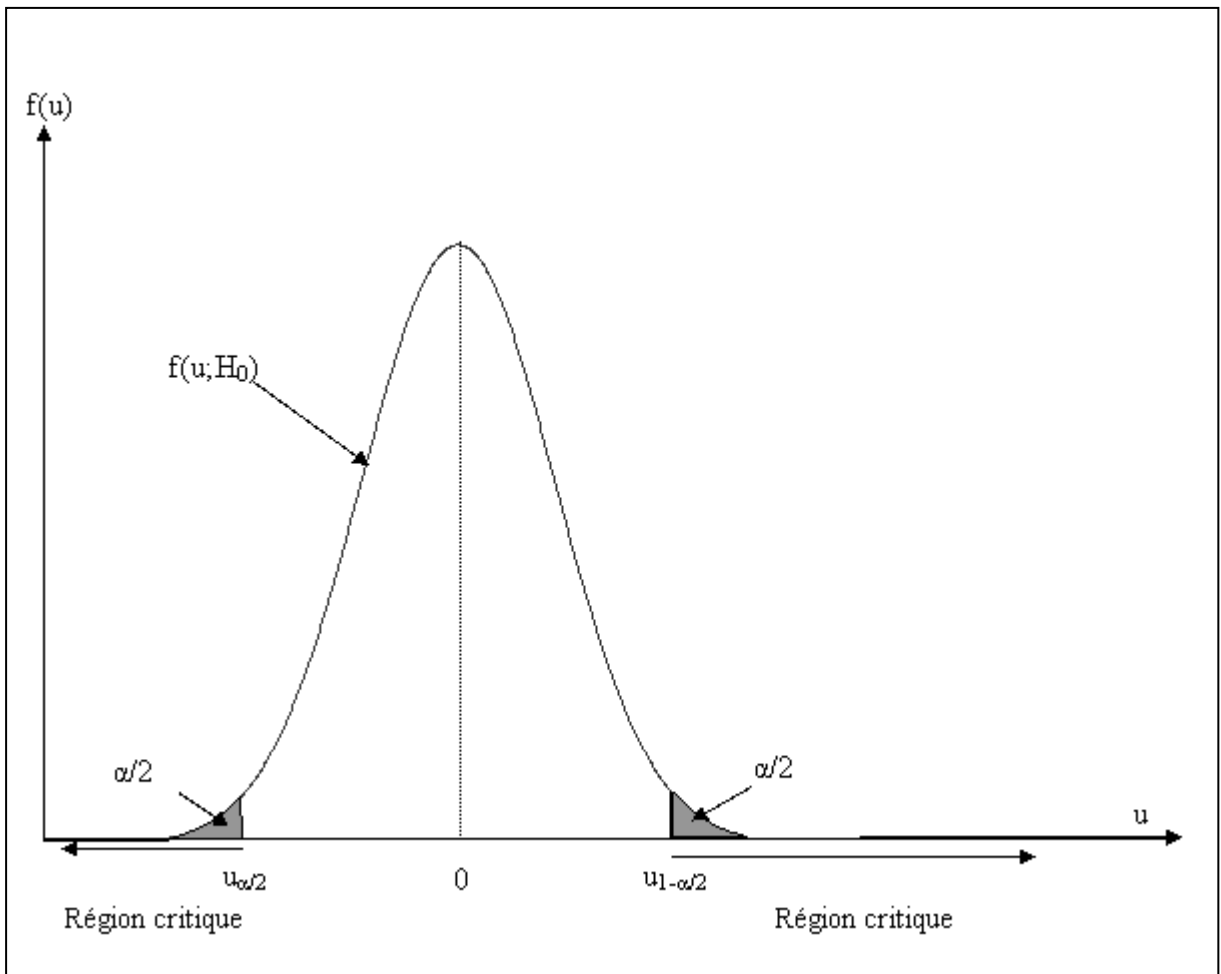


Figure 6.5.1. Fonction de densité de probabilité de la statistique du test particulier de justesse, l'hypothèse nulle étant vérifiée.

La fonction de densité de probabilité correspondante s'obtient donc par une simple translation horizontale de la fonction de densité de probabilité correspondant à la situation où l'hypothèse nulle est vérifiée. Cette translation est notée δ_i , défini dans l'expression précédente. La figure 6.5.2 représente la fonction de densité initiale, sous H_0 et la fonction de densité sous H_a translatée de δ_i .

Rappelons que l'hypothèse nulle est acceptée lorsque u_{obs} est situé en dehors de la région critique, c'est-à-dire entre $u_{\alpha/2}$ et $u_{1-\alpha/2}$. Le risque de deuxième espèce β (§ 5.4.1⁹) est la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle alors que c'est l'hypothèse alternative qui est vérifiée. C'est donc la surface sous la fonction de densité de probabilité associée à H_a qui correspond aux valeurs de u_{obs} comprises dans la zone d'acceptation, c'est-à-dire entre $u_{\alpha/2}$ et $u_{1-\alpha/2}$. Cette surface est illustrée dans la figure 6.5.2.

La valeur du risque β ne peut évidemment pas être calculée puisqu'elle dépend de la valeur de l'hypothèse alternative, c'est-à-dire, dans notre cas, de la valeur de la faute commise F_i . Par contre, il est possible de calculer la valeur de la faute qui est associée à une valeur arbitrairement choisie de β . En effet, si on connaît la valeur de ce risque de deuxième espèce, on peut calculer la valeur de δ_i .

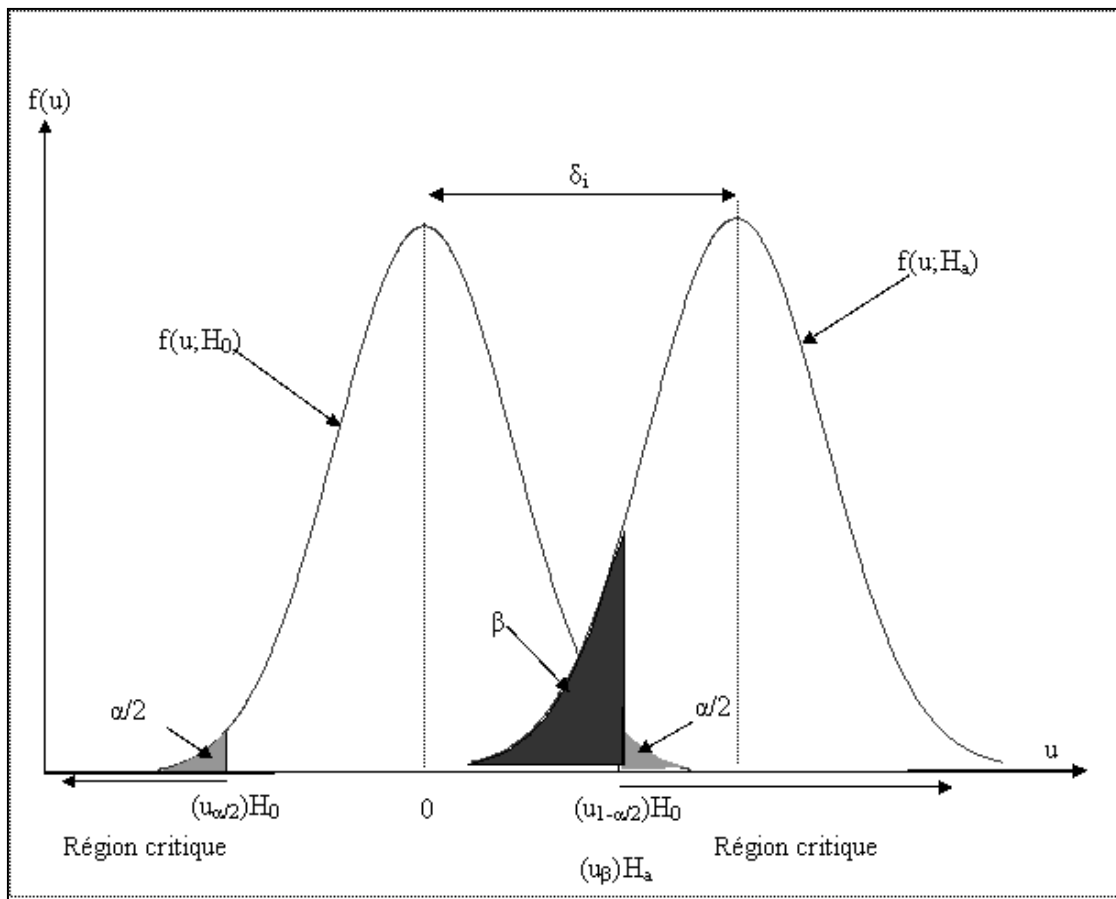


Figure 6.5.2. Fonctions de densité de probabilité de la statistique du test particulier de justesse, l'hypothèse nulle H_0 étant vérifiée ou l'hypothèse alternative H_a étant vérifiée.

La figure 6.5.2 montre que l'on peut obtenir cette valeur de δ_i à partir de la relation :

$$\delta_i = u_{1-\alpha/2} + u_{1-\beta} .$$

Connaissant δ_i , il est alors possible de calculer la valeur de la faute minimale détectable $F_{m\delta_i}$ par la relation suivante, tirée de l'espérance mathématique de U_{obs} présentée ci-dessus :

⁹ <https://hdl.handle.net/2268/293759>

$$|\text{Fmd}_i| = \frac{\sigma_{\varepsilon_i} \delta_i}{\rho_i} = \frac{\sigma_{o_i} \delta_i}{\sqrt{\rho_i}}$$

La valeur ainsi obtenue peut se présenter comme étant la **faute minimale détectable Fmd** avec une probabilité $1 - \beta$. En effet, toute valeur de F_i supérieure à cette limite déplacera la $f(u;H_a)$ vers la droite (figure 6.5.2), diminuant ainsi le risque β de conclure à l'absence de faute.

C'est bien la valeur absolue $|\text{Fmd}_i|$ qui doit être prise en considération. Le raisonnement présenté dans la figure 6.5.2 s'est limité à la situation d'une valeur positive de δ_i , conséquence d'une faute F_i négative, situant $f(u;H_a)$ à la droite de $f(u;H_0)$. Une valeur positive de la faute situera $f(u;H_a)$ à la gauche de $f(u;H_0)$, provoquant une valeur négative de δ_i , identique à la précédente, au signe près.

Le tableau 6.5.4 donne quelques valeurs de δ_i pour diverses valeurs des risques α et β .

Tableau 6.5.4. Valeurs du paramètre de translation δ calculées à partir de la distribution normale réduite et en fonction des risques α et β .

α	$u_{1-\alpha/2}$	β	$u_{1-\beta}$	δ
0,05	1,960	0,20	0,842	2,802
0,025	2,241	0,20	0,842	3,083
0,001	3,291	0,20	0,842	4,132
0,05	1,960	0,10	1,282	3,242
0,025	2,241	0,10	1,282	3,523
0,001	3,291	0,10	1,282	4,572
0,05	1,960	0,05	1,645	3,605
0,025	2,241	0,05	1,645	3,886
0,001	3,291	0,05	1,645	4,935

Ce tableau indique que, si on souhaite donner la même valeur (5 % par exemple) au risque du mesureur (risque α) et au risque de l'utilisateur (risque β), la faute minimale détectable sur une observation sera au minimum (si la redondance de l'observation est égale à 1) égale à 3,523 fois l'écart-type de l'observation en question.

4° Le processus de calcul de la faute minimale détectable présenté ci-dessus se fonde sur la variance de référence et non sur la variance résiduelle. Ce choix est justifié si cette variance de référence est plus fiable que la variance résiduelle (§ 6.5.3. 4°). S'il en est autrement, par exemple parce que la variance de référence, comme les variances de toutes les autres observations, n'a pas fait l'objet d'une estimation précise et indépendante du levé analysé, il est plus prudent de s'en tenir à la variance résiduelle. Dans ce cas, c'est la statistique t_{obs} qui se substituera à la statistique u_{obs} pour la réalisation du test particulier de justesse et pour le calcul de la faute minimale détectable qui se fera par la relation :

$$|\text{Fmd}_i| = \frac{\sigma_{\varepsilon_i} \delta_i}{\rho_i} \frac{\hat{\sigma}_r}{\sigma_w} = \frac{\sigma_{o_i} \delta_i}{\sqrt{\rho_i}} \frac{\hat{\sigma}_r}{\sigma_w}$$

Les valeurs de δ_i sont alors calculées en fonction de la distribution t de **STUDENT** à $c - u$ degrés de libertés et non de la distribution normale réduite u . Le tableau 6.5.5 donne à titre indicatif quelques valeurs de δ .

Tableau 6.5.5. Valeurs du paramètre de translation δ calculées à partir de la distribution t de STUDENT et en fonction des risques α et β .

alpha	0,050	0,025	0,001	0,050	0,025	0,001	0,050	0,025	0,001
beta	0,20	0,20	0,20	0,10	0,10	0,10	0,05	0,05	0,05
dl									
1	14,083	26,828	637,954	15,784	28,530	639,655	19,020	31,766	642,891
2	5,363	7,266	32,660	6,188	8,091	33,485	7,223	9,125	34,520
3	4,161	5,155	13,903	4,820	5,814	14,562	5,536	6,530	15,278
4	3,717	4,436	9,551	4,310	5,029	10,143	4,908	5,627	10,742
5	3,490	4,083	7,788	4,046	4,639	8,344	4,586	5,178	8,884
10	3,107	3,513	5,466	3,600	4,006	5,959	4,041	4,446	6,399
15	2,998	3,356	4,939	3,472	3,830	5,413	3,885	4,243	5,826
20	2,946	3,283	4,710	3,411	3,748	5,175	3,811	4,148	5,574
30	2,896	3,213	4,500	3,353	3,670	4,956	3,740	4,057	5,343
40	2,872	3,180	4,402	3,324	3,632	4,854	3,705	4,013	5,235
50	2,857	3,160	4,345	3,307	3,610	4,795	3,684	3,987	5,172
100	2,829	3,121	4,236	3,274	3,566	4,681	3,644	3,936	5,051
200	2,815	3,102	4,183	3,258	3,544	4,626	3,624	3,911	4,992
500	2,807	3,091	4,152	3,248	3,531	4,593	3,613	3,896	4,958
1000	2,804	3,087	4,142	3,245	3,527	4,583	3,609	3,891	4,947

Les valeurs de ce paramètre de translation sont supérieures à celles présentées dans le tableau 6.5.4. C'est logique puisque dans ces valeurs intervient le doute qui existe sur la variance résiduelle qui est une estimation de la variance de référence et non une valeur connue sans erreur. La différence est évidemment d'autant plus grande que le nombre de degrés de liberté est faible, c'est-à-dire que la redondance générale du canevas est faible.

Sur une observation dont la redondance est égale à un (valeur maximale très rarement atteinte) la faute minimale détectable pour α et β égaux à 5 % sera donc de 19 fois supérieure à l'écart-type de cette observation si la redondance du canevas (c-u) n'est que d'une unité.

5° La notion de faute minimale détectable est de la plus haute importance pour juger de la justesse d'un canevas. Elle dépend de la précision des observations et de leur redondance, c'est-à-dire du canevas proprement dit. Elle dépend également des niveaux des risques choisis, tant pour le mesureur (risque α) que pour l'utilisateur des résultats du mesurage (risque β). Ces niveaux de risques doivent être fixés avant de procéder au mesurage, lors de la commande de celui-ci par l'utilisateur.

La valeur de la faute minimale détectable peut s'apprécier en la comparant à l'écart-type de l'observation correspondante, par exemple en calculant le rapport entre cette Fmd et l'écart-type correspondant :

$$\frac{Fmd_i}{\sigma_{o_i}}$$

Si ce rapport est inférieur à trois, on peut considérer, en pratique, que la faute minimale détectable est du même ordre de grandeur que l'erreur accidentelle. Il n'est donc pas possible, quelque soit le canevas du mesurage, de mieux contrôler la présence d'une faute. Des valeurs de ce rapport supérieures à trois indiquent que l'observation est insuffisamment contrôlée. Ce rapport reçoit parfois la notation RSB (rapport signal/bruit), le signal étant en l'occurrence la Fmd.

Le choix entre le recours à la variance de référence ou le recours à la variance résiduelle est également déterminant sur la valeur des fautes minimales détectables. Il est évidemment préférable de pouvoir considérer la variance de référence. Cela suppose que les écarts-types des observations sont connus de manière quasi certaine. Il est conseillé de ne pas s'en tenir aux écarts-types annoncés par les constructeurs des matériels de mesurage (stations totales, récepteurs GNSS, etc.) mais de procéder à une estimation de ces écarts-types par une expérimentation rigoureuse des matériels de mesurage, selon une procédure adéquate, permettant une estimation robuste de leur précision (§ 7.4 pour une station totale, ch. 15 pour un récepteur GNSS, etc.).

Exemple 6.5.3. Positionnement d'un point par mesure de distances – redondance et justesse du canevas

A partir des résultats obtenus lors de la dernière itération de l'ajustement présenté dans l'exemple 6.4.1 et en appliquant les formules présentées ci-dessus, on procède au calcul des redondances des observations et des fautes minimales détectables. Nous considérons que les variances des observations sont connues et, en conséquence, nous prenons en compte la variance de référence (que nous avons fixée à 1) et non la variance résiduelle estimée pour le calcul de la faute minimale détectable. Nous avons choisi la valeur de 0,05 pour chacun des deux risques α et β , ce qui donne, dans ce cas, une valeur de $\delta = 3,605$ (tableau 6.5.4).

Ces choix étant posés, on obtient comme résultat :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,496 \\ 0,736 \\ 0,612 \\ 0,718 \\ 0,733 \\ 0,705 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Fmd} = \begin{bmatrix} 0,027 \text{ m} \\ 0,022 \text{ m} \\ 0,024 \text{ m} \\ 0,022 \text{ m} \\ 0,023 \text{ m} \\ 0,023 \text{ m} \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que la somme des redondances est bien égale à 4, c'est-à-dire $c - u$.

On constate que toutes les mesures de distances sont très bien contrôlées (voir tableau 6.5.3). De plus, les fautes minimales sur les distances mesurées, détectables avec une probabilité de 95 % sont toutes du même ordre de grandeur, comprises entre 2 et 3 cm. La fiabilité du canevas de mesure est donc bien homogène.

6° L'influence de chacune des fautes minimales détectables sur les paramètres ajustés est appelée la **justesse externe du canevas**. **BAARDA** (1968), cité par **LEICK** (2004) propose de la calculer pour chacune des observations par l'expression:

$$\lambda_{o_i} = \frac{1 - \rho_i}{\rho_i} \delta^2,$$

où	ρ_i	est la redondance de la $i^{\text{ème}}$ observation,
	δ	est le paramètre de translation choisi (tableaux 6.5.4 ou 6.5.5),
	λ_{o_i}	est l'impact de la faute minimale détectable sur les paramètres estimés.

Si les valeurs de λ_{o_i} sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire si les redondances des observations sont du même ordre de grandeur, le canevas est homogène quant à la justesse externe. Si la redondance d'une observation est faible, l'impact d'une faute commise sur cette observation peut être très important.

6.5.6. La précision des paramètres

La précision des valeurs estimées des paramètres se mesure à partir de la matrice des variances et des covariances des estimateurs de ces paramètres.

Rappelons que l'estimateur des paramètres s'écrit, au terme de la $i^{\text{ème}}$ itération :

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \hat{\mathbf{P}}_{i-1} + \Delta \mathbf{P}_i,$$

où $\hat{\mathbf{P}}_{i-1}$ est la valeur estimée des paramètres à l'issue de l'itération précédente (valeurs initiales données aux paramètres si $i = 1$);
 $\Delta \mathbf{P}_i$ est le vecteur des corrections calculées pour les paramètres au cours de cette $i^{\text{ème}}$ itération.

On peut considérer dans cette expression que \mathbf{P}_{i-1} est un vecteur de constantes numériques dont les composants ont été déterminés par les itérations précédant la dernière. En conséquence, la matrice des variances et des covariances de l'estimateur des paramètres est celle du vecteur $\Delta \mathbf{P}_i$. Celui-ci est calculé par l'expression suivante vue ci-avant :

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}\mathbf{P})' \mathbf{W}_e \mathbf{m}.$$

La composante aléatoire contenue dans cette expression est localisée dans le vecteur \mathbf{M} , qui est fonction des observations \mathbf{O} , celles-ci étant les variables aléatoires de distribution normale et de matrice des variances et des covariances $\Sigma_{\mathbf{O}\mathbf{O}}$:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{M}(\mathbf{O}, \mathbf{P}_{i-1}).$$

En conséquence la matrice des variances et des covariances des paramètres s'écrira :

$$\hat{\Sigma}_{PP} = \hat{\Sigma}_{\Delta P \Delta P} = J_{\Delta P, O} \Sigma_{OO} J'_{\Delta P, O},$$

avec :

$$\mathbf{J}_{\Delta P, O} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{O}} \left[\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \mathbf{m} \right] = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{O}} = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \mathbf{M}^o$$

Cette expression peut encore se transformer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\hat{p}\hat{p}} &= \hat{\Sigma}_{\Delta P \Delta P} = \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \mathbf{M}^o \Sigma_{oo} \left[\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \mathbf{M}^o \right]' \\ &= \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \left((\mathbf{M}^o) \Sigma_{oo} (\mathbf{M}^o)' \right) \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^P) \mathbf{N}^{-1} \\ &= \sigma_w^2 \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e \left((\mathbf{M}^o) \mathbf{Q}_{oo} (\mathbf{M}^o)' \right) \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^P) \mathbf{N}^{-1} \quad , \\ &= \sigma_w^2 \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^P) \mathbf{N}^{-1} \\ &= \sigma_w^2 \mathbf{N}^{-1} \end{aligned}$$

en se souvenant que:

$$\Sigma_{oo} = \sigma_w^2 \mathbf{W}^{-1} = \sigma_w^2 \mathbf{Q}_{oo}$$

$$\mathbf{W}_e^{-1} = \mathbf{Q}_e = \mathbf{M}^o \mathbf{Q} \mathbf{M}^{o'}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{M}^P)' \mathbf{W}_e (\mathbf{M}^P).$$

Précisons que ces matrices sont calculées au cours de la dernière itération, en prenant donc comme valeurs des paramètres le vecteur \mathbf{P}_{i-1} .

Comme indiqué à la fin du paragraphe 6.5.3, si la redondance du canevas ($c - u$) est très importante et que, en conséquence, une plus grande confiance peut être accordée dans la variance résiduelle que dans la variance de référence, l'estimation de la matrice des variances et des covariances des paramètres se calculera en substituant la variance résiduelle à la variance de référence :

$$\hat{\Sigma}_{\hat{p}\hat{p}} = \hat{\Sigma}_{\Delta P \Delta P} = \hat{\sigma}_r^2 \mathbf{N}^{-1}.$$

Les éléments diagonaux de cette matrice donnent les variances et donc les écarts-types des trois coordonnées. Ils permettent de tracer l'intervalle de tolérance (unidimensionnel) associé à chacune des trois coordonnées (§ 5.3.6¹⁰) dont les limites sont :

$$\hat{x}_S \pm 2,58 \sigma_{\hat{x}_S}$$

$$\hat{y}_S \pm 2,58 \sigma_{\hat{y}_S}$$

$$\hat{z}_S \pm 2,58 \sigma_{\hat{z}_S}$$

¹⁰ <https://hdl.handle.net/2268/293759>

si la variance de référence σ_w^2 tient lieu de variance résiduelle ou :

$$\begin{aligned} \hat{x}_S &\pm t_{0,995;k} \hat{\sigma}_{\hat{x}_S} \\ \hat{y}_S &\pm t_{0,995;k} \hat{\sigma}_{\hat{y}_S} \\ \hat{z}_S &\pm t_{0,995;k} \hat{\sigma}_{\hat{z}_S} \end{aligned}$$

si la variance résiduelle estimée $\hat{\sigma}_r^2$ est prise en considération. Dans ces expressions, $t_{0,995;k}$ est la valeur de la distribution de probabilité de **STUDENT** à k degrés de liberté (annexe n° 2¹¹) dont la fonction de répartition vaut 0,995.

Rappelons que ces limites, calculées séparément pour chaque coordonnée, sont des valeurs observées de variables aléatoires, issues des observations, et qui ont 99 chances sur 100 de contenir la vraie valeur de la coordonnée.

Cette triple évaluation univariée de la précision peut se compléter par des mesures globales de la précision. On peut par exemple calculer la trace de la matrice des variances et des covariances des paramètres Σ_{PP} qui correspond simplement à la somme des variances des trois paramètres. Cette indication de la précision globale porte le nom de **critère de Helmert**:

$$H = \hat{\sigma}_{\hat{x}_S}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{y}_S}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{z}_S}^2.$$

Une autre caractérisation globale des variances et covariances peut être faite en calculant le déterminant de la matrice des variances et des covariances des paramètres. C'est le **critère de WERKMEISTER**. Il se calcule donc par la relation :

$$W = \|\Sigma_{PP}\|.$$

Exemple 6.5.4. Positionnement d'un point par mesure de distances – précision des coordonnées estimées.

Reprenant les données de l'exemple 6.3.1 et en considérant que la variance de référence peut tenir lieu de variance résiduelle, on obtient pour la matrice des variances et des covariances des paramètres les valeurs :

$$\hat{\Sigma}_{\Delta P \Delta P} = \sigma_w^2 \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 7,62196\text{E-}06 & -2,08134\text{E-}06 \\ -2,08134\text{E-}06 & 1,31442\text{E-}05 \end{bmatrix},$$

ce qui permet de calculer les valeurs des écarts-types des coordonnées du point 0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{x}_0} &= 0,0028 \text{ m}, \\ \sigma_{\hat{y}_0} &= 0,0036 \text{ m}. \end{aligned}$$

De plus, cette matrice permet de calculer le coefficient de corrélation entre ces deux coordonnées estimées ce qui donne la valeur

$$r_{\hat{x}_0 \hat{y}_0} = -0,21.$$

¹¹ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

Cette corrélation est faible et non significative.

Le tableau 6.5.6 présente les valeurs estimées des coordonnées en x et en y du point 0, ainsi que leurs limites de tolérance.

Tableau 6.5.6. Valeurs estimées des coordonnées en x et en y du point 0, ainsi que leurs limites de tolérance (en mètre).

	Coordonnées estimées	Intervalles de tolérance	
		Limites inférieures	Limites supérieures
x ₀	173.134,276	173.134,268	173.134,283
y ₀	139.160,442	139.160,432	139.160,451

On constate que le canevas utilisé produit des estimations très précises des coordonnées en x et en y du point 0.

6.5.7. L'ellipse comme mesure de la précision de deux paramètres

1° La plupart des levés topographiques ont pour objet de déterminer les coordonnées de la position d'objets particuliers du terrain. Ces coordonnées, au nombre de trois, sont souvent regroupées en deux coordonnées planimétriques (x et y) et une coordonnée altimétrique (z).

L'évaluation de la précision planimétrique à deux dimensions (x et y) peut se faire en généralisant la notion d'écart-type ou d'erreur standard utilisée à une dimension à la notion d'**ellipse de l'erreur standard** à deux dimensions. De la même manière, la notion d'intervalle de tolérance (§ 5.3.6¹²) sera généralisée à la notion d'**ellipse de tolérance**.

La normalité supposée des erreurs accidentelles sur les observations et le critère d'ajustement retenu permettent de considérer que la distribution d'échantillonnage des paramètres ajustés est une distribution normale à u dimensions et dont la matrice des variances et des covariances est la matrice $\Sigma_{\Delta P \Delta P}$ dont la valeur estimée se calcule selon les formules exposées au § précédent. En outre et toujours sous ces conditions, cet estimateur des moindres carrés est non biaisé, et en conséquence, l'espérance mathématique de cette distribution d'échantillonnage est la vraie valeur des paramètres.

Ces considérations permettent d'analyser la précision planimétrique d'un point en utilisant la distribution normale à deux dimensions comme distribution d'échantillonnage de ses coordonnées en x et en y.

2° Si on note par u l'erreur commise sur la coordonnée x, c'est-à-dire l'écart existant entre la valeur estimée de cette coordonnée et sa vraie valeur et de même par v l'erreur commise sur la coordonnée y, on peut écrire comme fonction de densité de probabilité de ces deux variables u et v :

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\text{cor}_{xy}^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\text{cor}_{xy}^2)} \left[\left(\frac{u}{\sigma_x}\right)^2 - 2\text{cor}_{xy} \left(\frac{u}{\sigma_x}\right) \left(\frac{v}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{v}{\sigma_y}\right)^2 \right] \right\}$$

¹² <https://hdl.handle.net/2268/293759>

Un plan horizontal correspondant à une valeur constante K de cette fonction de densité de probabilité va intercepter celle-ci par une ellipse d'équation :

$$\left(\frac{u}{\sigma_x}\right)^2 - 2 \text{cor}_{xy} \left(\frac{u}{\sigma_x}\right) \left(\frac{v}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{v}{\sigma_y}\right)^2 = (1 - \text{cor}_{xy}^2) k^2$$

où k est une constante:

$$k^2 = \ln \left[4\pi^2 K^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \text{cor}_{xy}^2) \right]$$

La probabilité associée aux valeurs de u et de v délimitées par cette ellipse dépend évidemment de la valeur de la constante K et donc aussi de la valeur de k . Nous reviendrons sur cette dépendance.

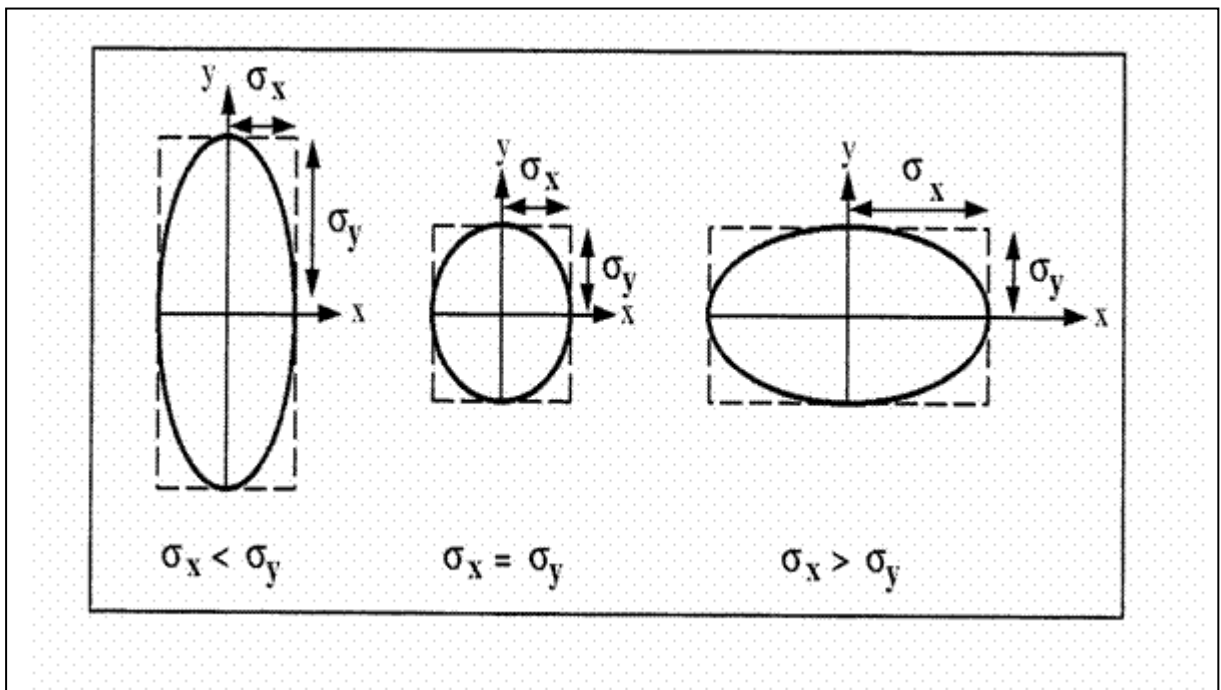


Figure 6.5.3. Ellipses d'erreur standard pour des erreurs sur x et sur y indépendantes.

En attribuant à k la valeur unitaire ($k = 1$) nous définissons l'**ellipse d'erreur standard**. Ses dimensions, sa forme et son orientation sont fonction des valeurs de σ_x , σ_y et cor_{xy} . Elle s'inscrit cependant toujours dans le rectangle dont les deux côtés sont égaux à deux fois les deux écarts-types.

En l'absence de corrélation ($\text{cor}_{xy} = 0$), l'ellipse d'erreur standard a ses axes confondus avec les axes x et y (figure 6.5.4), son demi grand axe étant égal au plus grand des deux écarts-types σ_x et σ_y .

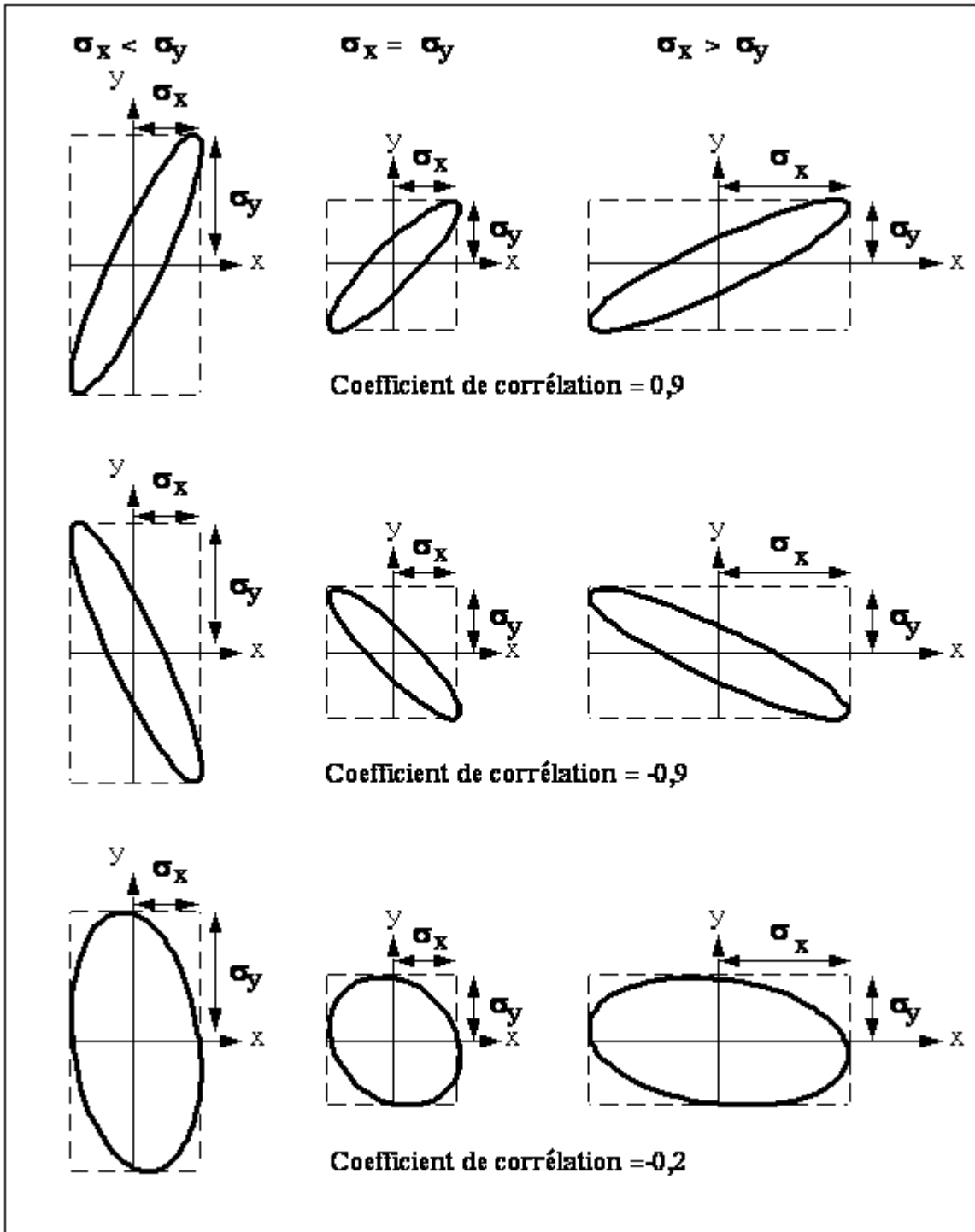


Figure 6.5.4. Ellipses d'erreur standard pour des erreurs sur x et sur y caractérisées par diverses valeurs du coefficient de corrélation.

Si la corrélation n'est pas nulle entre les erreurs u et v , les axes de l'ellipse ne sont plus confondus avec les axes u et v .

Le signe du coefficient de corrélation, qui est aussi le signe de la covariance entre x_i et y_i , permet de localiser le grand axe de l'ellipse. Il sera dans le premier et le troisième quadrants pour une corrélation positive et dans les deuxième et quatrième quadrants pour une corrélation négative.

De plus l'ellipse sera d'autant plus étirée que la valeur absolue du coefficient de corrélation sera proche de l'unité. La figure 6.5.2 illustre ces caractéristiques.

3° Il reste donc à calculer les paramètres de cette ellipse en fonction des écarts-types et covariance des valeurs estimées des coordonnées en x et en y afin de pouvoir la tracer sur les plans. La figure 6.5.5 permet d'établir ce calcul.

Les paramètres à calculer sont les valeurs des demis grands et petits axes de l'ellipse (a et b sur la fig. 6.5.5) et de l'angle fait par les axes de cette ellipse et les axes u et v (κ sur la fig. 6.5.5).

On associe aux axes de l'ellipse deux nouveaux axes de coordonnées u' et v' . Tous points du plan peuvent donc s'identifier soit par rapport aux axes u et v soit par rapport aux axes u' et v' . Le passage de l'un à l'autre des deux référentiels se fait donc simplement par rotation d'un angle κ , ce qui se traduit par la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa \\ -\sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

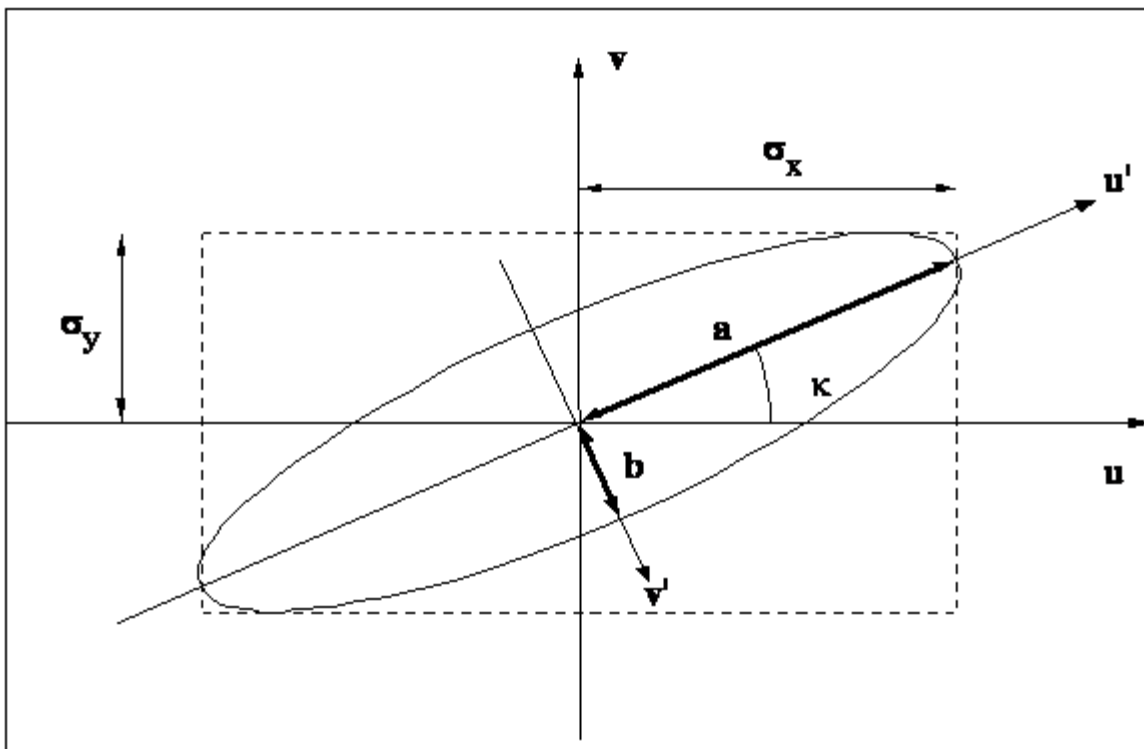


Figure 6.5.5. Paramètres de l'ellipse d'erreur standard.

Il faut remarquer que la corrélation entre les deux nouvelles variables u' et v' est nulle puisqu'il y a identité entre les axes définis par ces deux variables et les axes de l'ellipse

d'erreur standard (figure 6.5.3). Pour la même raison, on peut également en conclure que le demi grand axe de l'ellipse est l'écart-type de u' et que le demi petit axe est l'écart-type de v' (ou éventuellement l'inverse suivant le signe de la corrélation entre u et v).

La matrice des variances et covariances des variables u et v est :

$$\Sigma_{UV} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{\hat{x}\hat{y}} \\ \mu_{\hat{x}\hat{y}} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

La matrice des variances et covariances des variables u' et v' peut donc s'écrire sous la forme diagonale :

$$\Sigma_{U'V'} = \begin{bmatrix} \sigma_{u'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v'}^2 \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi générale de propagation des erreurs à la transformation des variables u et v en variables u' et v' (§ 6.5.2), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{u'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa \\ -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{\hat{x}\hat{y}} \\ \mu_{\hat{x}\hat{y}} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué les produits matriciels et en égalant les termes correspondants on obtient finalement les résultats suivants (**MIKHAIL E.M. ET GRACIE G., 1981 P.227**)

$$a = \sigma_{u'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{\left((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{\hat{x}\hat{y}}^2 \right)} \right]}$$

$$b = \sigma_{v'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{\left((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{\hat{x}\hat{y}}^2 \right)} \right]}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2\mu_{\hat{x}\hat{y}}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)} \right]$$

L'angle κ ainsi calculé situe l'inclinaison du grand axe de l'ellipse si $\sigma_{\hat{x}_i}^2 > \sigma_{\hat{y}_i}^2$ et l'inclinaison du petit axe dans le cas contraire.

4° Il reste à évaluer la probabilité qui est associée à cette ellipse d'erreur standard. Cela peut se faire à partir des variables u' et v' . En effet les points contenus dans l'ellipse d'erreur standard, exprimés en fonction de ces variables, répondent à l'équation suivante qui est celle de l'ellipse vue ci-dessus, dans laquelle la corrélation entre les deux variables est nulle :

$$\frac{U'^2}{\sigma_{u'}^2} + \frac{V'^2}{\sigma_{v'}^2} \leq k^2 = 1.$$

Le premier membre de cette inégalité correspond à la somme du carré de deux variables normales réduites, c'est-à-dire à une variable aléatoire de distribution χ^2 à deux degrés de liberté (**DAGNELIE, 2007 P. 295**), ce qui permet d'écrire :

$$P\left[\frac{U^2}{\sigma_u^2} + \frac{V^2}{\sigma_v^2} \leq k^2\right] = P[S \leq k^2] = \int_0^{k^2} \frac{1}{2} e^{-s/2} ds = 1 - e^{-k^2/2},$$

car la fonction de densité de probabilité de la variable χ^2 à deux degrés de liberté s'écrit simplement (DAGNELIE, 2007 P. 291) :

$$f(s) = \frac{1}{2} e^{-s/2}.$$

Comme l'ellipse d'erreur standard est définie par la valeur $k = 1$, on vérifie facilement que la probabilité qui lui correspond est de 0,393.

On peut donc interpréter cette ellipse d'erreur standard, si elle est centrée sur les valeurs estimées des coordonnées en x et en y , comme étant une surface qui a 39,3 chances sur cent de contenir la vraie position du sommet en question.

5° Cette ellipse peut aussi se calculer par dilatation linéaire de manière à correspondre à une probabilité plus importante de contenir la vraie position du sommet. Il suffit de multiplier les demis grands et petits axes calculés ci-dessus par la valeur de k , choisie en fonction de la probabilité retenue. Cette valeur porte le nom de **facteur d'élargissement** et est présentée dans le tableau 6.5.7 pour différentes valeurs de la probabilité.

Tableau 6.5.7. Facteur d'élargissement de l'ellipse théorique en fonction de la probabilité de contenir la vraie position du sommet, pour des variances et covariances connues.

k	$P[S \leq k^2]$
1,000	0,393
1,177	0,500
1,516	0,683
2,000	0,865
2,146	0,900
2,448	0,950
3,000	0,989
3,035	0,990
3,500	0,998
3,545	0,999

En fonction de ces valeurs, l'**ellipse de tolérance** qui contiendra la vraie position du sommet avec une probabilité de 99 pour-cent se calculera avec un facteur d'extension de 3,035. Les demis grands et petits axes de cette ellipse a et b se calculent donc par les relations :

$$a = 3,035 \sigma_u = 3,035 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{xy}^2)} \right]}$$

$$b = 3,035 \sigma_v = 3,035 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{xy}^2)} \right]}$$

6° Le calcul des valeurs de a et de b suppose que soit connue la matrice des variances et des covariances des paramètres ajustés, dont on peut extraire les valeurs de σ_x^2 , σ_y^2 et μ_{xy} . Or la valeur de cette matrice est inconnue. Ce dont on dispose c'est une estimation de cette matrice, au terme de l'ajustement : $\hat{\Sigma}_{\Delta PAP}$, dont on peut extraire les valeurs estimées $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$ et $\hat{\mu}_{xy}$. Substituant les valeurs estimées aux valeurs réelles, on introduit une imprécision supplémentaire qui a pour conséquence de dilater l'ellipse de tolérance. Cet accroissement de la surface de l'ellipse dépend évidemment de la précision de ces estimations. Celle-ci dépend du nombre de degrés de liberté de cette matrice variance covariance, c'est-à-dire de c-u.

On peut montrer (LEICK, 2004 P. 143) que le facteur d'élargissement à prendre en considération se calcule par l'expression :

$$\sqrt{2F_{2,c-u,\alpha}}$$

où $F_{2,c-u,\alpha}$ est la valeur théorique d'une variable F de SNEDECOR à 2 et c-u degrés de liberté et dont la fonction de répartition vaut $1-\alpha$ (annexe n°3¹³).

Le tableau 6.5.8 donne quelques valeurs de ce facteur d'élargissement pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté. Il montre la convergence de ce facteur d'élargissement vers celui qui a été présenté ci-dessus, dans le cas de variances et covariances connues. Il montre également l'influence déterminante du nombre de degrés de liberté sur la taille de l'ellipse de tolérance. Pratiquement, celui-ci doit atteindre au moins la valeur de 10 pour avoir une ellipse de tolérance de surface raisonnable.

Tableau 6.5.8. Facteur d'élargissement de l'ellipse théorique en fonction de la probabilité de contenir la vraie position du sommet, pour des variances et covariances estimées.

c - u	P [S ≤ k ²]		
	0,95	0,99	0,999
1	20,0	100,0	999,7
2	6,164	14,071	44,695
3	4,371	7,851	17,233
4	3,727	6,000	11,068
5	3,402	5,152	8,616
10	2,865	3,888	5,460
15	2,714	3,566	4,762
20	2,643	3,420	4,462
25	2,602	3,337	4,295
30	2,575	3,283	4,189
35	2,556	3,246	4,116
40	2,542	3,218	4,062
50	2,523	3,180	3,989
100	2,485	3,106	3,849
500	2,455	3,049	3,743

¹³ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

Exemple 6.5.5. Positionnement d'un point par mesure de distances – ellipse de tolérance.

A partir de la matrice des variances et des covariances des paramètres présentée dans l'exemple 6.5.4, on peut calculer les demis axes de l'ellipse de tolérance en appliquant les formules présentées ci-dessus, ce qui donne comme valeurs :

$$a = 3,035 \sigma_{u'} = 3,035 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{\left((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{xy}^2 \right)} \right]} = 0,0113 \text{ m,}$$

$$b = 3,035 \sigma_{v'} = 3,035 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{\left((\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\mu_{xy}^2 \right)} \right]} = 0,0080 \text{ m.}$$

Pour tracer cette ellipse, il faut évidemment calculer également l'angle κ qui prend pour valeur :

$$\kappa = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2\mu_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)} \right] = 0,3230.$$

Rappelons que cet angle correspond à l'orientation de demi petit axe, puisque la variance de la coordonnée estimée en y est supérieure à celle de la coordonnée estimée en x.

La figure 6.5.6 présente l'ellipse de tolérance tracée avec ces valeurs. On peut y constater que cette ellipse définit une surface qui ne diffère que relativement peu du rectangle défini par les limites de tolérances sur les coordonnées en x et en y, telles que présentées dans le tableau 6.5.6 de l'exemple 6.5.4. Cela provient de la faible corrélation entre ces deux coordonnées estimées. Dans cette situation, l'ellipse de tolérance n'apporte pas vraiment une information nouvelle et pertinente.

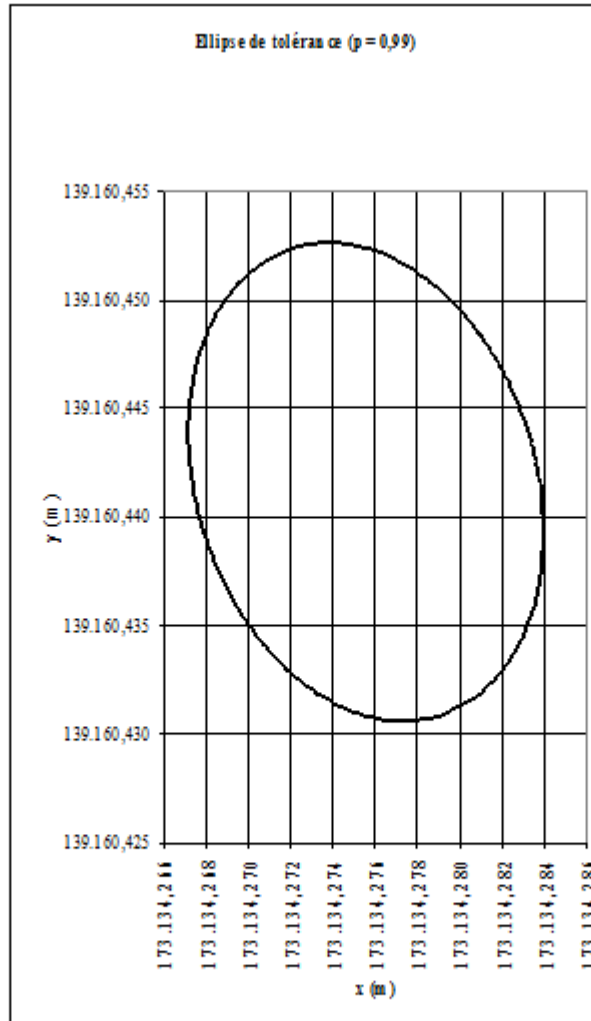


Figure 6.5.6. Ellipse de tolérance du positionnement du point 0 par mesure de distance le séparant des points 1 à 6.

6.5.8. Quelques autres mesures de la précision à deux ou à trois dimensions

1° A deux dimensions, si la différence entre les écarts-types est modérée ($\sigma_{\min} / \sigma_{\max} \geq 0,20$) et que la covariance n'est pas connue, on peut remplacer, à des fins de simplification des calculs, l'ellipse par une circonférence dont le rayon est proportionnel à la moyenne des écarts-types (**LEICK, 2004 P 150**). En planimétrie, si ce cercle contient la vraie position du point avec une probabilité de 50 %, son rayon porte le nom **d'erreur circulaire probable (ECP)**¹⁴ et se calcule par la relation suivante, dont le coefficient est tiré du tableau 6.5.7 :

$$\text{ECP} = 1,177 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0,5887 (\sigma_x + \sigma_y).$$

Si la probabilité que le cercle contienne le point est de 90 %, son rayon porte le nom de **précision circulaire standard**¹⁵ (PCS), également notée ECP_{90} et se calcule par l'expression :

$$\text{PCS} = 2,1460 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 1,0730 (\sigma_x + \sigma_y) = 1,8226 \text{ ECP}.$$

La moyenne quadratique des deux variances concernées s'utilise également sous différentes appellations : **erreur moyenne de position**¹⁶ (EMP), ou **distance racine du carré moyen**¹⁷ ou **erreur de position carrée moyenne**¹⁸. Elle se calcule évidemment par la relation :

$$\text{EMP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Le cercle ayant cette mesure comme rayon contient entre 64 % et 77 % de la probabilité, selon la valeur de la covariance entre les coordonnées en x et en y. Cette probabilité se situe entre 95 % et 98 % si on multiplie cette mesure par deux (**LEICK, 2004 P151**).

2° L'équivalent à trois dimensions de l'ECP s'appelle **l'erreur sphérique probable**¹⁹ (ESP) et se calcule par la relation :

$$\text{ESP} = 1,5381 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 0,5127 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

La sphère ayant l'ESP pour rayon contient la vraie position du point dans l'espace avec une probabilité de 50 %. Ce paramètre n'est cependant d'application que si l'écart entre l'écart-type maximum et l'écart-type minimum répond à la limite suivante :

$$\sigma_{\min} / \sigma_{\max} \geq 0,35.$$

¹⁴ Circular error probable (CEP).

¹⁵ Circular accuracy standard (CAS) ou Circular map accuracy standard (CMAS).

¹⁶ Mean position error (MPE).

¹⁷ Distance root mean square (DRMS).

¹⁸ Mean square positional error (MSPE).

¹⁹ Spherical error probable (SEP).

Si on souhaite que la sphère contienne la vraie position du point avec une probabilité de 90 %, il faut en calculer le rayon, appelé **précision sphérique standard**²⁰ (**PSS**), par la relation :

$$\text{PSS} = 1,626 \text{ ESP.}$$

Quant à la moyenne quadratique des trois variances, elle porte le nom d'erreur sphérique radiale moyenne (ESRM) et se calcule par la relation :

$$\text{ESRM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

La sphère qui a l'ESRM pour rayon contient la vraie position du point avec une probabilité d'environ 61 %.

Les probabilités énoncées ci-dessus sont approximatives, car ces mesures de précision ne tiennent pas compte des liens existants entre les valeurs estimées des coordonnées en x, en y et en z. Il ne faut donc pas utiliser de telles mesures de précisions lorsque les corrélations entre ces valeurs estimées sont élevées.

²⁰ *Spherical accuracy standard (SAS).*

6.6. Les propriétés de l'ajustement d'un levé par la méthode des moindres carrés

L'ajustement d'un levé topographique par la méthode des moindres carrés, telle qu'exposée dans ce chapitre, n'est pas particulièrement simple à comprendre ni à mettre en pratique.

Son utilisation est cependant largement facilitée par l'utilisation de logiciels adéquats, généralement fournis par les constructeurs de matériel topographique et accompagnant ceux-ci, que ce soit des stations totales ou des récepteurs GNSS.

Cette méthode jouit de propriétés intéressantes qui justifient largement son utilisation, malgré sa complexité. Ces propriétés sont les suivantes (VANICEK ET KRAKIWSKY, 1986).

La valeur estimée des paramètres $\hat{\mathbf{P}}$ est unique si la matrice \mathbf{N} (§ 6.4.4) est non singulière.

$\hat{\mathbf{P}}$ est un estimateur sans biais de la vraie valeur des paramètres si l'espérance mathématique (la moyenne théorique) des résidus est nulle $E(\mathbf{R}) = 0$. Il en est évidemment ainsi si on peut admettre que les résidus correspondent aux erreurs accidentelles affectant les observations, ce qui est le cas en l'absence de faute et d'erreur systématique selon le modèle stochastique proposé (§ 6.3.2).

$\hat{\mathbf{P}}$ est un estimateur de variance minimum de la vraie valeur des paramètres, c'est-à-dire l'estimateur le plus précis.

$\hat{\mathbf{P}}$ est un estimateur du maximum de vraisemblance de la vraie valeur des paramètres, si les résidus ont une distribution de probabilité normale. Cela signifie que la valeur estimée des paramètres est la plus vraisemblable.

La valeur estimée des résidus est dépourvue de biais.

La variance résiduelle estimée $\hat{\sigma}_r^2$ est dépourvue de biais. Il en est de même des matrices des variances et des covariances des valeurs estimées des paramètres $\Sigma_{\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}}$, des résidus $\Sigma_{\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}}$ et des observations $\Sigma_{\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{O}}}$. Cette propriété est cependant conditionnée à la définition de la matrice des poids par la relation $\mathbf{W} = \sigma_w^2 \Sigma_{\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{O}}}^{-1}$ (§ 6.4.2).

Index des matières

- ajustement
 - indirect, 17
 - limité aux observations, 17
- conditions, 4
- contraintes, 4
- critère
 - d'ajustement, 5
 - de Helmert, 55
 - de Werkmeister, 55
- distance racine du carré moyen, 65
- ellipse**
 - de l'erreur standard, 56, 57
 - de tolérance, 56, 61
- équations normales, 6
- erreur
 - circulaire probable, 65
 - de position carrée moyenne, 65
 - moyenne de position (EMP), 65
 - sphérique probable (ESP), 65
- facteur**
 - d'absorption, 47
 - de redondance, 46
 - de variance, 28
 - d'élargissement, 61
- faute
 - minimale détectable, 47
 - minimale détectable Fmd, 50
- justesse
 - du levé, 34
 - externe du canevas, 53
 - interne du canevas, 46
- justesse du canevas, 47
- matrice
 - de dispersion, 26
 - des variances et des covariances, 26
- modèle**
 - fonctionnel, 20
 - stochastique, 20
- moindres carrés, 5
- multiplicateurs de Lagrange, 9
- précision
 - circulaire standard, 65
 - du levé, 34
 - sphérique standard (PSS), 66
- qualité du levé, 34
- redondance, 4
 - du canevas, 37
 - du lever, 4
 - du modèle, 37
- résidu, 4
- test**
 - global de la justesse, 40
 - particulier de justesse, 43
- variance**
 - à posteriori, 37
 - à priori, 28
 - de poids unitaire, 28
 - de référence, 28
 - résiduelle, 37

Index Bibliographique

L'index bibliographique peut être obtenu en suivant le lien : <https://hdl.handle.net/2268/293535>