
# Cours de Géométronique

## 5. Les mesures et la qualité des mesures

Prof. C. Debouche

2010

Les références bibliographiques citées dans ce texte sont consultables en suivant le lien https://hdl.handle.net/2268/293535

# Sommaire

# 5. Les mesures et la qualité des mesures

## 5.1. Introduction

Les théories de la géodésie (chapitre 2[1]) et de la cartographie (chapitre 3[2]) permettent de calculer les coordonnées planes de points situés sur la surface terrestre en tenant compte de la courbure de la terre. En particulier la triangulation d'un pays, et plus récemment des mesurages GNSS (chapitre 13[3]), permettent la connaissance précise des coordonnées de points matérialisés sur le terrain de manière permanente et uniformément répartis sur le territoire (points géodésiques).

La topographie qui intéresse le bioingénieur et le géomètre a également pour objet de mesurer et de calculer les coordonnées de points particuliers du terrain et éventuellement de les reporter sur un plan, un levé ou une carte suivant la surface représentée.

Les mesures topographiques pourront évidemment se rattacher aux coordonnées définies pour le pays au moyen des points géodésiques (§ 2.5.1[1]).

Le **lever topographique** est l'ensemble des opérations de mesurage destinées à recueillir sur le terrain les éléments nécessaires à l'établissement d'un plan ou d'une carte. Le lever comporte souvent deux phases : l'établissement du ou des canevas et le lever des détails.

Un **canevas** est un ensemble discret de points bien répartis sur la surface à lever, dont les positions relatives sont déterminées avec une précision au moins égale à celle que l'on attend du levé. Ces points servent de points d'appui au lever des détails. Le canevas s'exprime par les coordonnées de ses points dans un même système.

Un **point d'appui** est un point stationné ou visé pour lever les points de détail. C'est en général, le sommet d'un cheminement polygonal effectué en utilisant une station totale (§ 11.1) ou un point levé au moyen d'un récepteur GNSS (§ 13.1[4]).

Le **lever des détails** est l'ensemble d'opérations intervenant dans un lever topographique et consistant à déterminer a partir du canevas, la position des différents objets d'origine naturelle ou artificielle existant sur le terrain.

Le **plan topographique** est une représentation du terrain et des éléments apparents, naturels et artificiels, et comportant généralement la planimétrie et l'altimétrie.

La **carte topographique** est une représentation à moyenne ou à petite échelle des éléments naturels et artificiels situés sur la surface terrestre, ainsi que des formes du terrain. La carte topographique se distingue essentiellement du plan topographique par le

[1] https://hdl.handle.net/2268/293594
[2] https://hdl.handle.net/2268/293634
[3] https://hdl.handle.net/2268/301113
[4] https://hdl.handle.net/2268/301113

fait que, dans la première, des détails importants : bâtiments isolés, voies de communication, ne sont plus représentés à l'échelle, mais par un signe conventionnel.

Quelques généralités et définitions propres à la topographie seront énoncées au paragraphe 5.2. Les notions de faute et d'erreurs dans les mesures sont détaillées au paragraphe 5.3. Le paragraphe 5.4 énoncera quelques tests d'hypothèse qui peuvent être réalisés sur des coordonnées ou des précisions par exemple. Le dernier paragraphe (paragraphe 5.5.) étant consacré aux principes élémentaires de calculs topométriques.

## 5.2. Généralités et définitions

Ce paragraphe présente diverses définitions de concepts de base utilisés en topographie terrestre, principalement pratiquée au moyen d'un théodolite ou d'une station totale (équipements de mesure présentés au chapitre 7[5]) ou d'un niveau (cf. paragraphe 10.3[6]) ou, éventuellement, d'une simple boussole.

Le § 5.2.2 est dédié à identifier les erreurs résultant de la simplification qui consiste à considérer que la surface de référence est plate et s'écarte donc du géoïde ou de l'ellipsoïde de référence.

Finalement le § 5.2.3 examine les erreurs commises en projetant les points mesurés sur le plan de référence au moyen de droites parallèles entre elles et non à partir de la verticale (ou de la normale) en chacun de ces points.

### 5.2.1. Quelques définitions

Rappelons que **l'azimut** d'une direction est l'angle horizontal compté de 0 gr à 400 gr, à partir de la direction du nord, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. L'azimut est géographique lorsqu'il est défini à partir du nord géographique et magnétique s'il est compté à partir du nord magnétique (paragraphe 2.3.2[7]).

**Le gisement** d'une direction est l'azimut compté à partir de la direction positive choisie pour l'axe des Y.



[5] https://hdl.handle.net/2268/293804
[6] https://hdl.handle.net/2268/293929
[7] https://hdl.handle.net/2268/293594

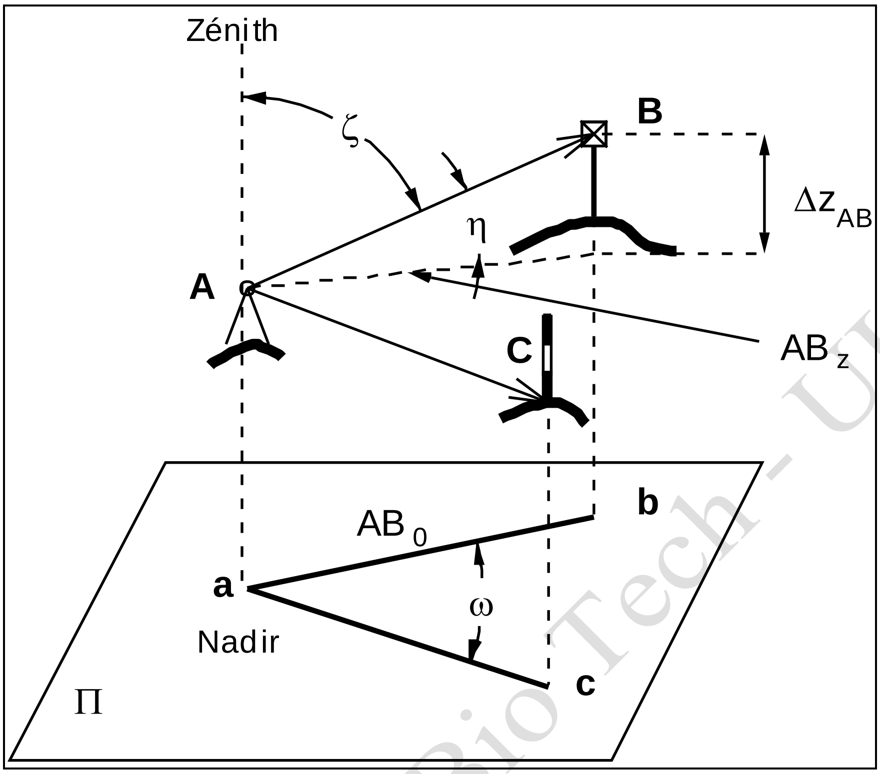


Figure 5.2.1. Éléments d'une mesure topographique.

Pour les opérations topographiques relatives à des points peu distants entre eux, les trois points du terrain schématisés sur la figure 5.2.1 B, A et C se projettent suivant des verticales sur un plan horizontal de référence Π, d'altitude zéro, assimilé au niveau moyen des mers. Leurs représentations topographiques sont les points b, a et c du plan Π également appelé plan topographique ou plan topométrique.

Les mesures topographiques se groupent en trois grandes catégories : longueurs, angles et dénivelées. On parlera de longueur ou **distance inclinée** AB qui n'apparaît pas sur le plan. **La distance horizontale** $AB_Z$ à la hauteur z ou sa projection $AB_O$ sur le plan $\Omega_0$, c'est-à-dire à l'altitude 0, est utilisée dans les calculs de coordonnées.

**L'angle horizontal** ω de deux directions de l'espace, AB et AC est l'angle dièdre formé par les plans verticaux de ces directions. On le mesure sur un cercle horizontal centré sur la verticale du **point de station** A de l'instrument.

**L'angle vertical** d'une direction de l'espace AB est l'angle, compté dans le plan vertical, que fait cette direction avec la verticale ou l'horizontale. **L'angle zénithal ζ** est compté de 0 à 200 gr à partir du zénith de l'origine jusqu'à la direction considérée. **L'angle nadiral** est compté de 0 à 200 gr à partir du nadir de l'origine jusqu'à la direction considérée.

**L'angle de hauteur ou angle d'inclinaison ou inclinaison η** est l'angle vertical de la direction avec l'horizontale. Il est positif si l'extrémité de la visée est à une altitude supérieure à celle de l'origine, négatif dans le cas contraire et sa valeur absolue est comprise entre 0 et 100 gr.

Les angles horizontaux et verticaux peuvent être mesurés à l'aide d'un théodolite dont le cercle vertical centré en A fait fonction d'éclimètre (cf. chapitre 7[8]).

**La dénivelée $\Delta z_{AB}$** entre le point origine A de l'espace et le point extrémité B est la différence d'altitude, c'est-à-dire la hauteur positive ou négative comptée depuis le plan horizontal de l'origine A jusqu'à celui de l'extrémité B.

### 5.2.2. Assimilation de la surface de référence à un plan

Il convient de préciser l'importance de l'erreur commise en assimilant la surface de la Terre à un plan.

Soit la sphère terrestre approchant le géoïde de centre C et de rayon R représentée à la figure 5.2.2 qui schématise la substitution de la surface plane Π à la surface sphérique Ω.

Le point M situe le centre de la zone à représenter et P un point quelconque de la surface terrestre. m et p représentent les projections des points M et P sur la sphère de référence suivant les verticales correspondantes qui sont les rayons terrestres Cm et Cp. La projection du point P sur le plan Π est située en p'. La distance mp" est égale à la longueur de l'arc mp. L'erreur commise sur la distance horizontale séparant les points M et P en prenant le plan Π comme surface de référence à la place du géoïde représenté par la surface Ω est donc la distance p'p".

Le segment rectiligne mp' vaut par définition :

$$mp' = R \tan \alpha$$

La longueur de l'arc mp vaut :

$$mp = R\,\alpha$$

si l'angle $\alpha$ est exprimé en radian.

L'erreur commise en assimilant le géoïde à un plan vaut donc :

$$p'p'' = R\,(\tan \alpha - \alpha),$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$p'p'' \approx \frac{R\alpha^3}{3} = \frac{(mp)^3}{3R^2}$$

en remplaçant tan($\alpha$) par son développement en série tronquée :

$$\tan\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

[8] https://hdl.handle.net/2268/293804

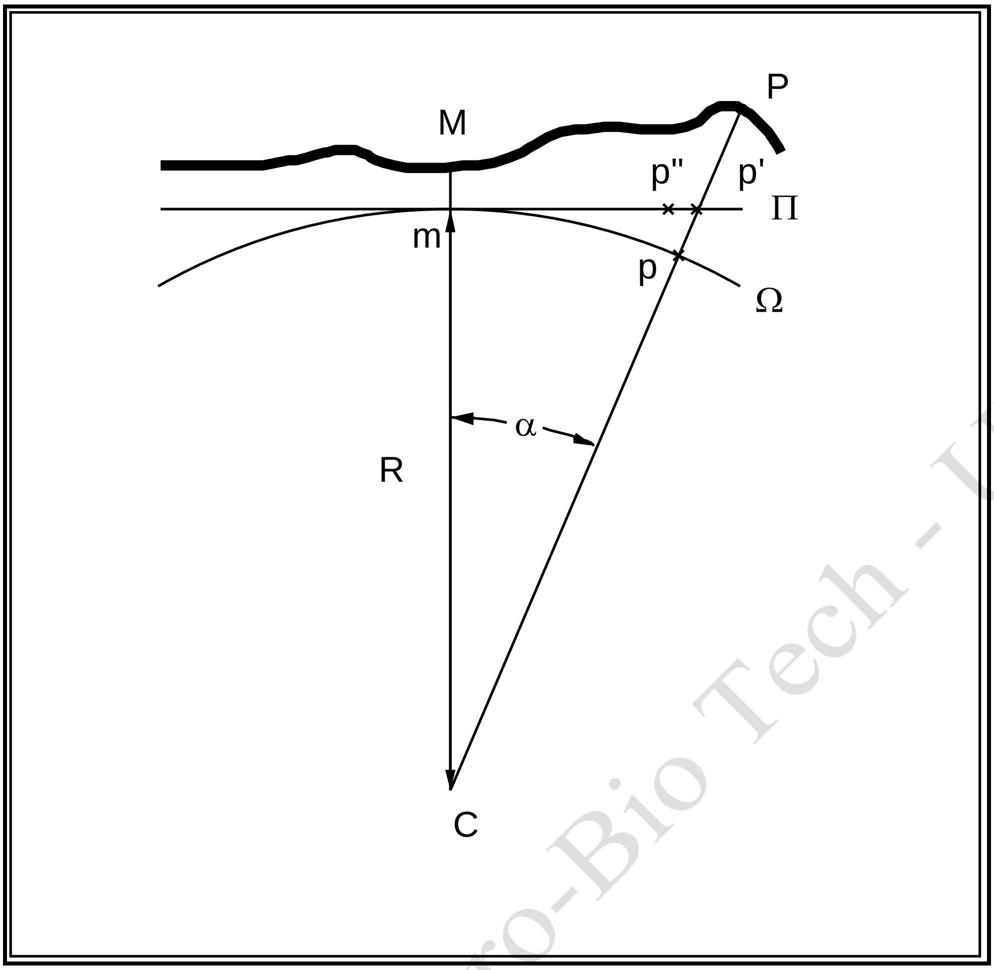

Figure 5.2.2. Assimilation de la surface terrestre à un plan.

Le rayon moyen de la terre étant de 6.367 km (§ 2.2[9]) l'erreur ainsi commise sur une longueur de 10 km vaut environ 8 mm ce qui est évidemment négligeable.

### 5.2.3. L'erreur de projection

Il reste à prendre en considération l'erreur commise en assimilant les verticales des différents points considérés à des droites parallèles entre elles, ce qui est schématisé à la figure 5.2.3. Cela correspond à une projection orthogonale en lieu et place d'une projection centrale.

En vertu des propriétés des triangles semblables, on a pour l'erreur commise p'p" :

$$p'p'' = \frac{(Mp').z_P}{R} = \frac{(Mp')(Mp' + p'p'')\tan\beta}{R} \approx \frac{(Mp')^2 \tan\beta}{R}$$

où β est la pente moyenne du terrain entre M et P. Pour des distances MP dépassant quelques kilomètres tan(β) est généralement inférieure à 0,25 ce qui donne sur une distance MP de 5 km une erreur p'p" inférieure à 1 m. Cette erreur, plus importante que la

[9] https://hdl.handle.net/2268/293594

précédente, précise les limites dans lesquelles la projection orthogonale est applicable. Sur une distance de 1 km cette erreur sera inférieure à 4 cm.

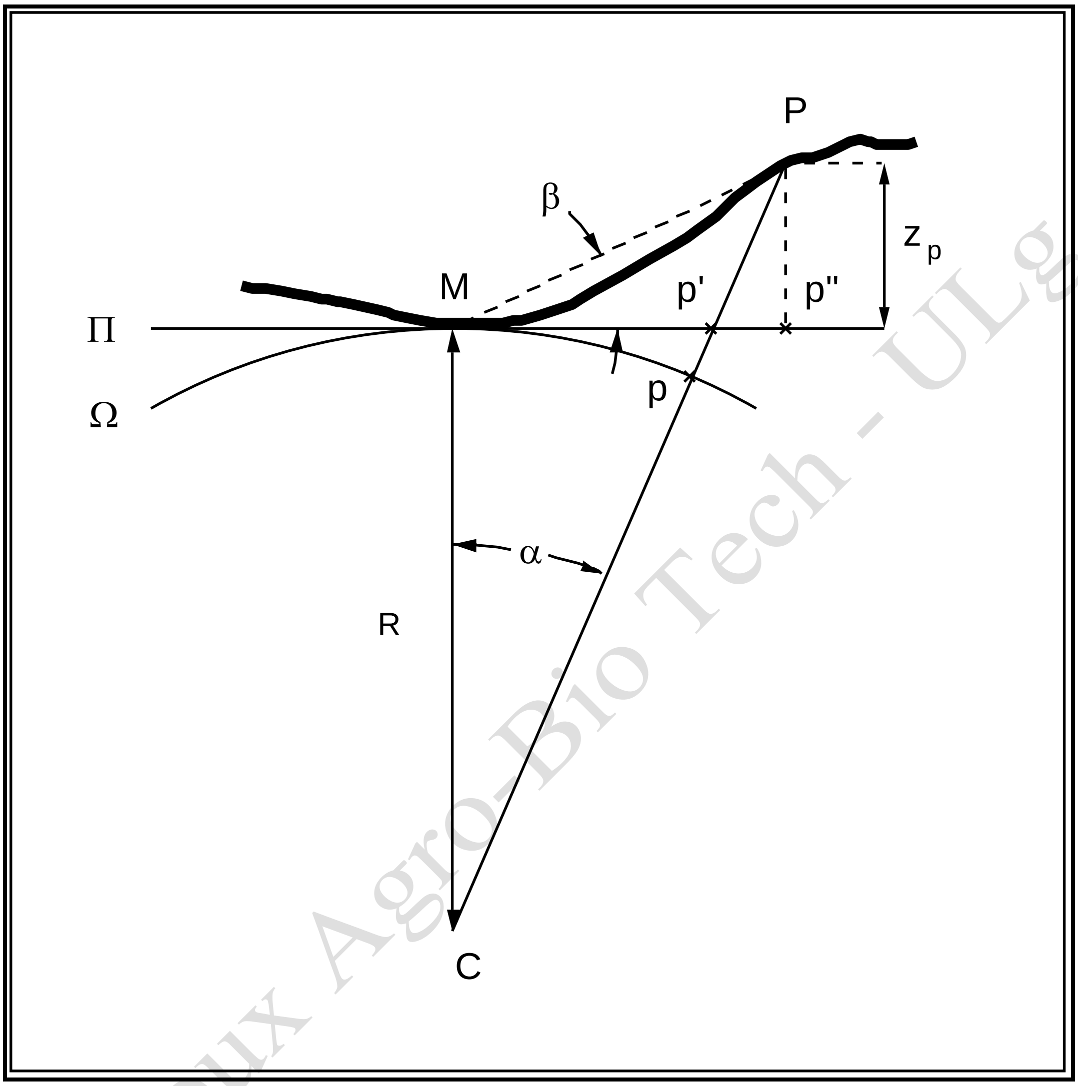


Figure 5.2.3. Illustration de l'hypothèse de parallélisme des verticales des points à cartographier.

## 5.3. La qualité d'une mesure : justesse et précision

La qualité des mesures fait l'objet d'une attention sans cesse croissante dans les opérations de positionnement. En effet, un positionnement peut être obtenu de diverses manières et en utilisant des équipements très différents, notamment quant à leur prix. C'est la qualité du positionnement qui sera aussi très différente, d'une méthode de mesure à l'autre et d'un équipement à l'autre.

La qualité d'une mesure est son aptitude à rencontrer les besoins de son utilisateur. Cette qualité se décline principalement en deux concepts complémentaires que sont la justesse et la précision, également appelée la fidélité. Ces notions sont décrites ci-dessous, après avoir introduit le modèle mathématique utilisé pour définir ces concepts ainsi que les notations employées.

Sont également définies les notions de faute et d'erreur, d'exactitude, d'incertitude et de tolérance.

### 5.3.1. Notations et définitions

**Le mesurande** est une grandeur particulière soumise à mesurage (CEN 1999) qui, en topographie, sera le plus souvent une longueur, un angle, une altitude ou une coordonnée.

**Le mesurage** est l'ensemble des opérations réalisées dans le but de déterminer la valeur d'une grandeur (ISO 7078-1985). Le mesurage peut être **direct** s'il est réalisé par comparaison de la grandeur à mesurer avec une grandeur de même nature prise comme étalon. Il est **indirect** s'il est procédé à des mesures d'autres grandeurs que la grandeur à mesurer, liées à celle-ci par une ou plusieurs relations connues.

**Le résultat du mesurage** est la valeur obtenue par le mesurage et attribuée au mesurande, souvent appelé mesure.

**La valeur du mesurande** est la valeur que l'on tente d'estimer par le mesurage. C'est une notion idéale, en général inconnue. Elle est parfois remplacée par une valeur de référence, reconnue comme vraie.

**La valeur estimée d'une grandeur** est la valeur obtenue par mesurage de cette grandeur. Elle correspond le plus souvent au résultat du mesurage.

**L'exactitude[10] d'une mesure** (ISO 5725-1, 1994) est l'étroitesse de l'accord entre le résultat du mesurage et la valeur vraie du mesurande (de la grandeur que l'on tente d'estimer). La différence entre la valeur vraie et la valeur estimée d'une grandeur est donc son exactitude. Elle est la somme des fautes et des erreurs intervenues au cours du mesurage.

[10] En anglais : *accuracy*

**Les fautes** proviennent d'une inattention, d'une maladresse ou d'un oubli de l'opérateur dans le mesurage ou dans les calculs appliqués au résultat du mesurage. Généralement la faute est d'un ordre de grandeur largement supérieur à l'erreur.

**Les erreurs** sont inhérentes à la méthode et aux appareils utilisés pour le mesurage. Elles peuvent être systématiques ou accidentelles.

On utilisera les notations suivantes :

$$G = \gamma + F + A + s$$

où G est la valeur mesurée d'une grandeur quelconque et par exemple d'un angle ou d'une longueur,
$\gamma$ est la valeur vraie de cette grandeur (valeur du mesurande),
F est une faute éventuelle commise lors du mesurage,
A est une erreur accidentelle éventuelle et
s est une erreur systématique éventuelle.

Conformément aux conventions habituellement admises dans l'écriture des variables aléatoires (**Dagnelie, 1998, § 5.5.**) une majuscule représente une variable aléatoire et une minuscule est utilisée pour une constante ou pour une valeur observée d'une variable aléatoire.

## 5.3.2. Faute

La faute, également appelée erreur parasite, est donc une erreur grossière qui résulte d'une exécution incorrecte du mesurage. Cela peut résulter par exemple d'une confusion de chiffres dans la lecture sur une graduation ou de l'oubli d'une portée de décamètre dans un chaînage etc.

Quel que soit le soin apporté aux mesurages, des fautes sont évidemment toujours susceptibles d'apparaître. Il est donc indispensable d'envisager des procédures de détection de celle-ci. Ces procédures portent le nom de contrôles ou de vérifications. Elles peuvent être directes ou indirectes.

Les contrôles directs consistent à recommencer la mesure en modifiant autant que possible la méthode suivie (par exemple en inversant la suite des mesures dans un cheminement). Ce type de contrôle peut aussi être réalisé avec des moyens différents et éventuellement sensiblement moins précis que la mesure proprement dite puisqu'il a pour but de déceler les fautes importantes (exemple : contrôle d'une mesure de longueur en la parcourant au pas).

Les contrôles indirects sont obtenus par la réalisation de mesures redondantes qui permettent le calcul, à partir des résultats de mesures, de valeurs connues par ailleurs (exemple : fermeture d'un cheminement polygonal ou mesure des trois angles d'un triangle fermé).

La présence d'une faute peut aussi être détectée en utilisant le test statistique de Grubbs (**Dagnelie 2006 § 3.5.2**[11]). Celui-ci peut s'appliquer sur un échantillon comprenant n (n > 2)

[11] https://hdl.handle.net/2268/293634

répétitions indépendantes du mesurage d'une même grandeur. Les notions générales relatives à la réalisation d'un test statistique sont exposées dans le paragraphe 5.4.1.

Le résultat du mesurage présumé altéré par une faute est noté $x_F$. Il est une des n valeurs de l'échantillon et en constitue le minimum ou le maximum. L'hypothèse nulle, objet du test, consiste à dire que ce résultat ne comprend pas de faute. Cette hypothèse est rejetée si la statistique K de Grubbs est supérieure à sa valeur critique. Ces valeurs critiques sont présentées dans l'annexe 6[12] pour un niveau de signification (§ 5.4.1) de 5 et de 1 %. La statistique G se calcule par l'expression :

$$K = \frac{|x_F - \bar{x}|}{s_x},$$

où $x_F$ est le résultat du mesurage présumé altéré par une faute,
$\bar{x}$ est la moyenne de l'échantillon, calculée sur toutes les observations,
$s_x$ est l'écart-type observé calculé par l'expression :

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

L'hypothèse nulle est rejetée si la statistique K est supérieure à la valeur critique correspondant au niveau de signification choisi. Dans ce cas, le rejet de l'hypothèse nulle correspond à constater que l'on ne peut conclure à l'absence de faute, c'est-à-dire qu'il y a présomption de la présence d'une faute dans le mesurage.

## 5.3.3. Erreur systématique

**L'erreur systématique** est due à un défaut d'un instrument. Elle obéit donc à une loi qui peut être mise en évidence ou calculée. Par exemple un ruban d'acier de 50 m, trop court de deux centimètres, provoquera une surestimation des longueurs mesurées à concurrence de 2n cm si n représente le nombre de portées du ruban.

L'erreur systématique n'est pas nécessairement constante en grandeur et en signe comme dans l'exemple évoqué ci-dessus. Par exemple un défaut d'excentricité de l'axe principal d'un théodolite par rapport au centre du limbe gradué (§ 7.2[13]) va induire une erreur systématique qui est une fonction, en grandeur et en signe, de la direction des visées.

Les erreurs systématiques sont généralement les plus graves car elles sont rarement mises en évidence par les procédures de contrôle énoncées ci-dessus en raison de leur valeur généralement peu élevée. De plus elles ne se compensent pas. Comme la cause de ces erreurs peut être connue, leur incidence est parfois éliminée par des techniques de mesure appropriées (tarage, double lecture, etc.).

[12] https://hdl.handle.net/2268/293542
[13] https://hdl.handle.net/2268/293804

### 5.3.4. Erreur accidentelle

**1°** On appelle **erreurs accidentelles** les erreurs d'observation qui n'ont aucun caractère systématique. On admet par définition que leur influence s'élimine dans le résultat final si l'on recommence un très grand nombre de fois les opérations. De plus les valeurs absolues de ces erreurs accidentelles restent petites, les plus petites étant également les plus fréquentes. Il y a approximativement autant d'erreurs accidentelles positives que de négatives.

L'erreur accidentelle est donc une variable aléatoire continue, de moyenne nulle et dont la fonction de densité de probabilité est généralement assimilée à la courbe normale d'équation (**DAGNELIE 1998 P. 269**) :

$$f(a) = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{a - m_A}{\sigma_A} \right)^2 \right]$$

où $a$ est une valeur prise par l'erreur accidentelle,

$m_A$ est la moyenne des erreurs accidentelles qui est nulle en principe,

$\sigma_A$ est l'écart-type des erreurs accidentelles qui caractérise leur dispersion autour de la moyenne nulle,

$f(a)$ est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire A.

L'écart-type des erreurs accidentelles est donc une indication de la précision (ou fidélité) de la procédure de mesurage. Il est également appelé **<u>erreur quadratique moyenne</u>**. Il se définit par la relation :

$$\sigma_A = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (a - m_A)^2 f(a) \right] da}$$

Il convient aussi de signaler que l'appellation « **écart moyen quadratique**» est parfois réservée à un écart-type calculé sur des mesures comprenant une erreur systématique, éventuellement variable en plus de l'erreur accidentelle. Dans ce cas, l'écart moyen quadratique est évidemment supérieur à l'écart-type.

On peut interpréter la valeur de cet écart-type en constatant que dans le cas d'une distribution normale, 68 % des erreurs accidentelles prises en valeur absolue lui seront inférieures ce qui peut encore s'écrire :

$$P\left[ -\sigma_A \le A \le \sigma_A \right] = 0{,}68 \,.$$

**L'écart moyen absolu $\varepsilon_m$**

$$\varepsilon_m = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left| a - m_A \right| f(a) \right] da \,.$$

est également utilisé par les topographes sous le nom d'**erreur moyenne arithmétique** pour caractériser la dispersion des erreurs accidentelles. Pour une distribution normale on a :

$$\varepsilon_m = 0{,}80\ \sigma_A$$

$$P\left[ -\varepsilon_m \le A \le \varepsilon_m \right] = 0{,}58 \,.$$

Les topographes utilisent parfois la notion d'**erreur probable** qui n'est dépassée qu'une fois sur deux par les valeurs absolues des erreurs accidentelles. Pour une distribution normale, l'erreur probable vaut 67,5 % de l'écart-type.

**2°** La précision également appelée fidélité, d'une mesure est donc quantifiée par l'écart-type des erreurs accidentelles qui peuvent l'accompagner en excluant les fautes et les erreurs systématiques. On peut estimer la valeur de cet écart-type en répétant la mesure en question un nombre suffisant de fois, indépendamment les unes des autres.

Soit n réalisations indépendantes de cette même mesure notées :

$$g_1, g_2, \ldots, g_n.$$

En supposant qu'il n'existe pas de faute ni d'erreur systématique, la valeur estimée de la vraie grandeur $\gamma$ peut être obtenue à partir de la moyenne des n répétitions indépendantes d'une même mesure :

$$\hat{\gamma} = \overline{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_i \,,$$

où $\overline{g}$ est la moyenne arithmétique des n valeurs mesurées $g_i$,

et l'écart-type caractérisant la précision de ce type de mesure peut être estimé par l'expression :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left( g_i - \overline{g} \right)^2}$$

**3°** Ce qui vient d'être dit est relatif à une opération bien identifiée et unique. Lorsque l'erreur globale résulte d'une fonction quelconque d'un ensemble d'opérations élémentaires affectées chacune de son erreur on peut énoncer le résultat sous la forme :

$$\gamma = f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots)$$

où $\gamma$ est la valeur vraie de la grandeur finale obtenue à partir des valeurs $\gamma_1$, $\gamma_2$, etc. Si on écrit la valeur mesurée finale:

$$G = \gamma + A = f(\gamma_1 + A_1, \gamma_2 + A_2, \ldots\ldots\ldots, \gamma_i + A_i, \ldots..)$$

où $A$ représente l'erreur globale caractérisant l'ensemble des opérations de mesure,
$A_i$ représente l'erreur commise sur la i<sup>ème</sup> opération.

Le développement en série de TAYLOR se réduit alors à :

$$A = f(\gamma_1 + A_1, \ldots, \gamma_i + A_i, \ldots) - f(\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots)$$
$$A \approx \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} A_1 + \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} A_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma_i} A_i + \ldots$$

Ce résultat montre le caractère additif et indépendant des différentes erreurs commises au cours de mesures complexes. C'est le **principe de l'indépendance des erreurs**.

Ce raisonnement suppose évidemment que les erreurs soient suffisamment petites que pour pouvoir négliger les termes en $A_i^2$. Il est applicable aux erreurs accidentelles.

Finalement, la variance de l'erreur globale s'obtient par l'expression :

$$\sigma_A^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_i}\right)^2 \sigma_{A_i}^2 + \ldots$$

Rappelons les propriétés suivantes de l'écart-type :

$$\sigma_{aX} = a\sigma_X,$$
$$\sigma_{X\pm Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2},$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}},$$

où $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes,
$\bar{X}$ est la moyenne d'un échantillon aléatoire et simple dont l'effectif est n.

## 5.3.5. Exactitude, incertitude, justesse et précision

Il y a plusieurs termes différents pour décrire l'écart qui existe entre la valeur du mesurande et le résultat du mesurage. Ces termes sont normalisés par ISO 5725-1 (1994) sous le titre « Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthode de mesure », par ISO 7078 (1985) sous le titre Construction immobilière – Procédés pour l'implantation, le mesurage et la topométrie – Vocabulaire et notes explicatives » et par CEN (1999) sous le titre « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ».

Les deux premières références {(ISO 5725-1, 1994) et (ISO 7078 1985)} définissent **l'exactitude** comme étant l'étroitesse de l'accord entre le résultat d'un essai (d'un mesurage) et la valeur du mesurande (ou valeur de référence reconnue comme vraie). Cette exactitude implique une combinaison de composantes aléatoires et systématiques.

La dernière référence (CEN, 1999) définit **l'incertitude** comme étant un paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

Exactitude et incertitude comprennent donc toutes deux le doute qui existe quant à la valeur à donner au mesurande, tant du fait des erreurs accidentelles que des erreurs systématiques, en supposant qu'il n'y a pas eu de faute dans le mesurage. Le mot « incertitude » est parfois réservé au paramètre qui quantifie l'exactitude, ou plutôt l'inexactitude du mesurage.

Exactitude et incertitude sont donc à considérer comme synonymes et traitant globalement des erreurs tant systématiques qu'accidentelles, ainsi que des fautes éventuelles qui altèrent le résultat d'un mesurage. **L'erreur totale** est également synonyme de l'exactitude et de l'incertitude, dans la mesure où elle est définie comme l'ensemble de l'erreur d'un mesurage constitué par la combinaison de l'erreur aléatoire et de l'erreur systématique (ISO 7078 1985).

La **justesse**[14] est définie comme étant l'étroitesse de l'accord entre la valeur moyenne obtenue à partir d'une large série de résultats d'essais et une valeur de référence acceptée (ISO 5725-1, 1994). La justesse est donc tributaire de la présence d'une faute éventuelle et/ou d'une erreur systématique éventuelle. Un mesurage est donc réputé « juste » s'il est dépourvu de faute et d'erreur systématique.

Finalement la **précision**[15] d'un mesurage est l'étroitesse de l'accord entre les valeurs mesurées obtenues en appliquant la procédure de mesurage plusieurs fois, dans des conditions prescrites. (ISO 7078 1985). Elle est également appelée fidélité (ISO 5725-1 1994). Elle quantifie l'importance des valeurs des erreurs accidentelles inévitables qui altèrent le résultat de ce mesurage. La précision est donc indépendante de la justesse. Un appareil peut être très précis sans être juste s'il fournit des résultats de mesurage entachés d'erreurs systématiques. La précision est quantifiée par l'écart-type des erreurs accidentelles.

[14] En anglais : t*rueness*
[15] En anglais : *precision*

L'exactitude (ou l'incertitude) comprend donc tant la justesse que la précision d'un mesurage.

Il importe de ne pas confondre ces termes. Le mot exactitude est parfois utilisé indûment pour qualifier la justesse. De même il ne faut pas confondre la précision avec l'exactitude.

La précision du résultat d'un mesurage dépend de la précision de l'appareil de mesure utilisé ainsi que de la procédure de mesurage (répétitions éventuelles, mesures en position I et II du théodolite, etc.) et des formules de calcul mises en œuvre (paragraphe 5.4.3. 3°). La précision des appareils de mesure (stations totales, mesureurs de distance, récepteurs GNSS, etc.) est indiquée sur la documentation technique qui accompagne ces appareils, généralement par la valeur d'un écart-type. Cette précision est évaluée par le constructeur de l'appareil dans des conditions généralement définies par des normes. Il est prudent de procéder à une estimation de la précision de l'appareil utilisé, dans les conditions de son utilisation, qui ne correspondent pas nécessairement aux conditions dans lesquelles le constructeur de l'appareil en a évalué la précision. Pour ce faire on appliquera la formule d'estimation de l'écart-type présentée au paragraphe 5.3.4. 2°.

### 5.3.6. Précision et tolérance

1° Rappelons que la notion de précision ne s'applique qu'aux erreurs accidentelles à l'exclusion des fautes et des erreurs systématiques. Il convient donc d'éliminer ces dernières en installant et en utilisant correctement les appareils de mesure et en en vérifiant régulièrement le bon fonctionnement.

Les erreurs accidentelles étant des variables aléatoires dont la dispersion est caractérisée par l'écart-type, on utilisera le plus souvent ce dernier comme **mesure de la précision d'un appareil**. A titre d'exemple l'écart-type de la mesure d'une direction avec un théodolite peut varier de 20" à 0,3" suivant le type d'appareil. Le prix de ces appareils varie évidemment plus que proportionnellement à l'inverse de l'écart-type.

Si la distribution de probabilité des erreurs accidentelles est la distribution normale on peut calculer l'intervalle dans lequel l'erreur est comprise avec une probabilité choisie. Cet intervalle s'appelle **la tolérance** et il est calculé le plus souvent avec la probabilité de 99 %. Il y a donc 99 chances sur 100 que l'écart entre la valeur du mesurande et la valeur mesurée soit inférieur à la tolérance notée T :

$$P\left[\left|\gamma - G\right| \leq T\right] = 0{,}99 .$$

D'après les propriétés de la distribution normale et en consultant les tables correspondantes (Annexe n° 5), la valeur de T s'obtient en fonction de l'écart-type par l'expression :

$$T = 2{,}58\ \sigma,$$

où σ est l'écart-type des erreurs accidentelle, considéré comme étant connu.

2° D'une manière plus générale, on rencontre parfois d'autres définitions de cette tolérance, qui diffèrent de la précédente par la probabilité associée à l'intervalle considéré. Ces définitions répondent à la relation générale suivante :

$$P\left[|\gamma - G| \leq k_p \sigma\right] = P ,$$

où $k_p$ est le **facteur d'élargissement**,

$P$ est la probabilité que l'intervalle défini par les limites $\left[\hat{\gamma} - k_p\sigma \text{ et } \hat{\gamma} + k_p\sigma\right]$ contienne la valeur du mesurande $\gamma$.

Les valeurs de $k_p$ et de P sont données dans le tableau n° 5.3.1.

Tableau 5.3.1. Valeurs du facteur d'élargissement et de la probabilité correspondante pour un écart-type connu.

| Probabilité que l'intervalle contienne la valeur du mesurande P | Facteur d'élargissement $k_p$ |
|---|---|
| 0.683 | 1 |
| 0,900 | 1,645 |
| 0,950 | 1,960 |
| 0,954 | 2 |
| 0,990 | 2,576 |
| 0,997 | 3 |

3° L'utilisation qui sera faite des mesures topographiques permet de déterminer la valeur de la tolérance et donc d'en déduire l'écart-type admissible. Ce dernier oriente le choix de l'appareil de mesure et de la procédure à suivre. Rappelons à cet égard que la répétition d'une mesure en réduit l'écart-type et en augmente donc la précision pour autant que les manipulations successives restent indépendantes entre elles. En effet l'écart-type de la moyenne de n mesures est égal à (**Dagnelie 2007 § 8.3.1**) :

$$\sigma_{\bar{G}} = \frac{\sigma_G}{\sqrt{n}}$$

où $\sigma_G$ représente l'écart-type d'une mesure,

$\sigma_{\bar{G}}$ représente l'écart-type de la moyenne des n mesures.

Il faut donc quadrupler le nombre de mesures pour diviser l'écart-type par deux.

4° Si l'écart-type caractérisant la dispersion des erreurs accidentelles n'est pas connu mais estimé à partir de la répétition de n mesures par exemple, le facteur d'élargissement doit se calculer à partir de la distribution t de Student et non de la distribution normale (**Dagnelie 2006 § 8.2.1).** Le tableau 5.3.2 donne, à titre indicatif, les facteurs d'élargissement correspondant pour 5 et 10 degrés de liberté. Pour les autres valeurs du nombre de degrés de liberté, ces facteurs d'élargissement se lisent dans les tables de la distribution de Student (annexe 2[16]). On constate évidemment que ces facteurs d'élargissement sont supérieurs à ceux qui sont présentés dans le tableau 5.3.1. Ils intègrent, en effet, l'incertitude sur la valeur de l'écart-type qui est estimé et non considéré comme connu sans erreur.

Tableau 5.3.2. Valeurs du facteur d'élargissement et de la probabilité correspondante pour un écart-type estimé.

| Probabilité que l'intervalle contienne la valeur du mesurande P | | Facteur d'élargissement $k_p$ | |
|---|---|---|---|
| 5 degrés de liberté | 10 degrés de liberté | 5 degrés de liberté | 10 degrés de liberté |
| 0.637 | 0,659 | 1 | 1 |
| 0,900 | 0,900 | 2,015 | 1,812 |
| 0,950 | 0,950 | 2,571 | 2,228 |
| 0,898 | 0,927 | 2 | 2 |
| 0,990 | 0,990 | 4,032 | 3,169 |
| 0,970 | 0,987 | 3 | 3 |

5° La notion de tolérance est également utilisée dans la détection de fautes éventuelles. En effet, lorsque des mesures redondantes peuvent être réalisées (par exemple mesure de trois angles d'un triangle $\beta_1$, $\beta_2$ et $\beta_3$) on peut calculer un écart de fermeture (différence entre la somme des trois angles mesurés et 200 g) et le comparer à la tolérance correspondante. Si l'écart de fermeture est supérieur à la tolérance on a toutes les raisons de croire à l'existence d'une faute car, par définition, les erreurs accidentelles ont moins d'une chance sur cent de conduire à une valeur supérieure ou égale à cet écart.

La tolérance associée à la somme de trois angles est égale à :

$$T_{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 2,58\,\sigma = 2,58\sqrt{\sigma^2_{\beta_1} + \sigma^2_{\beta_2} + \sigma^2_{\beta_3}}$$

où $\sigma$ est l'écart-type relatif à la somme des trois angles,
$\sigma\beta_1$, $\sigma\beta_2$ et $\sigma\beta_3$ sont les écarts-types relatifs à chacun des trois angles.

Cela peut aussi s'écrire :

$$T = 2,58\sqrt{3}\,\sigma_\beta$$

si $\sigma_\beta$ représente l'écart-type relatif à la mesure d'un angle $\beta$ quelconque.

[16] https://hdl.handle.net/2268/293542

# 5.4. Tests d'hypothèse

Le paragraphe précédent a introduit la notion d'erreur accidentelle, de caractère aléatoire, qui s'ajoute inévitablement à tout résultat de mesurage. Ce dernier doit donc être traité comme une variable aléatoire également.

Outre le souci de quantifier la précision du résultat d'un mesurage, on peut également souhaiter répondre à d'autres questions relatives à la qualité des mesures. Par exemple on peut s'interroger sur l'égale précision de deux méthodes de mesurage ou de deux équipements de mesure différents. On peut également s'interroger sur la justesse d'un mesurage. Les réponses à ces questions, compte tenu du caractère aléatoire du résultat des mesurages, passent nécessairement par la réalisation de tests d'hypothèse, au sens statistique du terme.

Ce paragraphe présente sommairement cette notion de test statistique d'hypothèse (§ 5.4.1) et l'illustre par un test d'égalité de deux précisions (§ 5.4.2) et un test de justesse de coordonnées, intitulé test de conformité de coordonnées (§ 5.4.3).

## 5.4.1. Généralités

Sont ici présentées quelques indications générales sur les tests d'hypothèse destinées à permettre leur bonne utilisation dans le cadre de l'examen et de la garantie de la qualité des résultats d'un mesurage. Des informations plus complètes sur les tests d'hypothèse pourront évidemment être trouvées dans les ouvrages généraux de statistique (**DAGNELIE 2007** par exemple).

Effectuer un test d'hypothèse revient à énoncer une hypothèse, généralement appelée **hypothèse nulle** et notée $H_0$, et à vérifier si cette hypothèse doit être rejetée. Par exemple, comme évoqué dans le paragraphe 5.3.2, l'hypothèse nulle peut consister à affirmer qu'il n'y a pas de faute dans le résultat d'un mesurage. Une telle hypothèse nulle pourra s'écrire sous la forme :

$$H_0 : F = 0.$$

L'alternative à l'hypothèse nulle est appelée **hypothèse alternative** et notée $H_a$. Dans le cas précité cette hypothèse alternative s'écrit :

$$H_a : F = F_a \neq 0$$

Cette hypothèse alternative couvre évidemment une infinité de valeur. Si la faute n'est pas nulle, elle peut prendre une infinité de valeur.

La réalisation du test repose généralement sur le calcul d'une statistique bien définie, en fonction du contexte du mesurage et de la nature des variables aléatoires intervenant dans celui-ci. Par exemple, il sera généralement supposé que les erreurs accidentelles inévitables sont des variables aléatoires de distribution normale, de moyenne nulle et dont l'écart-type est soit connu soit inconnu.

La statistique calculée est évidemment sensible à l'hypothèse testée. Elle sera généralement une fonction croissante de l'écart qui existe entre la réalité et l'hypothèse nulle.

Pour décider de l'acceptation ou du rejet de l'hypothèse nulle, il faut se fixer un **niveau de signification** du test. Celui-ci correspond à la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors que celle-ci est bien respectée dans la réalité. Ce niveau de signification est aussi défini comme étant le **risque de première espèce** et souvent noté $\alpha$. Il s'agit donc du risque associé à une conclusion erronée.

Il existe une autre conclusion erronée qui consiste à accepter l'hypothèse nulle alors qu'en réalité elle n'est pas respectée. Le risque associé à ce deuxième type de conclusion erronée est le **risque de deuxième espèce**, souvent noté $\beta$. Il peut prendre une infinité de valeurs différentes puisqu'il dépend de l'écart existant entre la réalité et l'hypothèse nulle. Lors du test de détection d'une faute et en présence d'une faute, le risque de deuxième espèce sera d'autant plus faible que la faute commise est importante. Par contre, ce risque sera d'autant plus élevé que la faute commise est faible et se rapproche de zéro.

Dans le cas de la détection d'une faute dans un mesurage, on peut considérer que le risque de première espèce est le **risque du mesureur** (le topographe) et le risque de deuxième espèce est le **risque de l'utilisateur** du résultat du mesurage (le client du topographe). En effet, le rejet de l'hypothèse nulle, alors qu'elle est bien vérifiée dans la réalité, imposera, à tort, de recommencer le mesurage. Il s'agit bien d'une conclusion erronée qui pénalise le mesureur. Par contre, l'acceptation de l'hypothèse nulle alors qu'elle n'est pas vérifiée dans la réalité, livrera un résultat d'un mesurage affecté d'une faute. C'est bien l'utilisateur de la mesure qui est lésé dans cette situation.

Il faut évidemment en retenir qu'il n'y a jamais de certitude dans la conclusion d'un test d'hypothèse. Les deux risques d'erreur sont inévitables.

A noter également qu'on ne peut minimiser ces deux risques. Réduire le risque de première espèce augmente inévitablement le risque de deuxième espèce. Il faut donc un accord préalable entre le mesureur et l'utilisateur de la mesure sur la valeur à donner au niveau de signification des tests d'hypothèse qui seront pratiqués sur les résultats du mesurage. Habituellement, on prend pour le risque de première espèce les valeurs de 1 ou de 5 %. Le risque de deuxième espèce ne peut être fixé a priori puisque sa valeur dépend du degré de fausseté de l'hypothèse nulle. Le choix d'une valeur du risque de première espèce se raisonne évidemment en fonction du coût du mesurage d'une part et des conséquences de la présence d'une faute dans les résultats de ce mesurage.

Dans la conclusion d'un test d'hypothèse conduisant au rejet de l'hypothèse nulle, on utilise parfois les mots « significatif » « hautement significatif » et « très hautement significatif » associés à des niveaux de signification respectivement de 5, 1 et 0,1 %.

## 5.4.2. Test d'égalité de deux précisions

Il est fréquent de s'interroger sur l'égalité de la précision associée à deux appareils de mesure ou à deux techniques de mesure.

Nous avons vu au paragraphe 5.3.5 que la précision se mesure généralement par un paramètre qui est l'écart-type. Nous avons vu également comment procéder à une estimation de l'écart-type d'un appareil de mesure par répétition de la mesure d'une même grandeur avec cet appareil (paragraphe 5.3.4 2°).

Il existe également des normes proposant des procédures précises en vue de l'évaluation de la précision des appareils utilisés en topographie (ISO 17123-3 pour un théodolite, ISO 17123-4 pour un télémètre électro-optique, 17123-5 pour un tachéomètre électronique et 17123-8 pour un Systèmes de mesure GNSS sur site en temps réel cinématique).

Ces procédures comprennent toutes un certain nombre de répétitions du mesurage, dans des conditions bien déterminées. Il en résulte une estimation de l'écart-type caractérisant la précision de l'appareil testé.

Deux écarts-types, caractérisant la précision de deux appareils de mesure ou de deux méthodes de mesure, peuvent-ils être considérés comme identiques ou sont-ils différents ? Pour répondre à cette question, on peut effectuer un test d'hypothèse qui va porter, non sur l'égalité des deux écarts-types mais sur l'égalité des deux variances correspondantes (la variance est égale au carré de l'écart-type).

Si on peut admettre que les erreurs accidentelles associées aux mesurages répétés au sein des deux séries sont indépendantes entre elles et indépendantes d'une série à l'autre, l'existence d'une différence significative entre ces deux précisions peut être confirmée par un test d'égalité de deux variances qui se réalise en calculant la valeur (**Dagnelie 2006:§ 7.4.2**[17]) :

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\max}}{\hat{\sigma}^2_{\min}} ,$$

où $\hat{\sigma}^2_{\max}$ et $\hat{\sigma}^2_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite des deux variances estimées dont l'égalité est testée.

On rejette l'hypothèse d'égalité de ces deux variances si la valeur de $F_{obs}$ est supérieure à la valeur $F_{1-\alpha/2}$ de la variable F de Snedecor dont la fonction de répartition vaut $1-\alpha/2$, à $k_1$ et $k_2$ degrés de liberté, $k_1$ et $k_2$ étant respectivement le nombre de degrés de liberté de la plus grande et de la plus petite des deux variances estimées. Les valeurs de la variable F de Snedecor se lisent dans une table fournie en annexe n°3. La probabilité associée à une valeur de la variable F peut également être calculée dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOI.F dans Excel). L'hypothèse à vérifier se rejette dans ce cas si la probabilité que la variable F prenne une valeur supérieure ou égale à $F_{obs}$ est inférieure ou égale à $\alpha/2$.

[17] https://hdl.handle.net/2268/293804

Le nombre de degrés de liberté d'une variance estimée est égal au nombre d'observations indépendantes ayant permis l'estimation de cette variance, diminué d'une unité.

### 5.4.3. Test de conformité de coordonnées

Dans des processus de vérification, il est assez fréquent de chercher à tester la justesse d'un processus de mesurage. Pour répondre à cette question, il faut évidemment disposer des coordonnées exactes d'un point de contrôle stationnable qui serviront de référence, afin de les confronter aux coordonnées mesurées sur ce même point. Il n'est pratiquement pas possible de disposer de coordonnées exactes d'un point. Cependant, on considérera des coordonnées comme exactes, si elles ont été obtenues par un mesurage de précision largement supérieure à la précision avec laquelle on a obtenu les coordonnées estimées dont on souhaite tester la justesse.

Outre la disponibilité de coordonnées de référence, il faut également disposer d'une estimation de la précision de ces coordonnées estimées dont on souhaite évaluer la justesse.

L'hypothèse à vérifier peut s'écrire sous la forme :

$$H_o : \hat{x} = x_0$$

où $\hat{x}$ est la valeur estimée de la coordonnée,
$x_0$ est la valeur exacte ou supposée telle de la coordonnée.

Il s'agit d'un **test de justesse** ou également appelé test de conformité en statistique.

Si la coordonnée à tester est estimée par un mesurage unique, on ne dispose pas d'estimation de la précision caractérisant la coordonnée estimée. On se fonde dans ce cas sur la précision annoncée par le constructeur de l'appareil utilisé pour effectuer le mesurage. La question à laquelle on tente de répondre est de savoir si cet appareil est juste. Pour ce faire on calcule la valeur :

$$u_{obs} = \frac{|\hat{x} - x_0|}{\sigma_X},$$

où $u_{obs}$ est une valeur observée d'une variable aléatoire de distribution normale réduite,
$\sigma_X$ est l'écart-type de la distribution des erreurs accidentelles commises par l'appareil de mesure.

On rejette l'hypothèse de justesse de l'appareil de mesure si la valeur de $u_{obs}$ est supérieure à la valeur $u_{1-\alpha/2}$ de la variable normale réduite dont la fonction de répartition vaut 1-α/2. Les valeurs de la variable normale réduite se lisent dans une table fournie en annexe n°5. La probabilité qu'une variable normale réduite prenne une valeur inférieure à $u_{obs}$ peut également être calculée dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOI.NORMALE.STANDARD dans Excel). L'hypothèse à vérifier se rejette dans ce cas si la probabilité que la variable u prenne une valeur inférieure ou égale à $u_{obs}$ est supérieure ou égale à 1-α/2.

Dans ce test, on considère que l'écart-type annoncé $\sigma_X$ décrit correctement la précision de l'appareil de mesurage.

Si la coordonnée à tester est estimée à partir de la moyenne de n mesurages indépendants effectués sur le point, l'écart-type qui en caractérise la précision est la variance estimée à partir des n répétitions par la formule :

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \ ,$$

où $x_i$ est la $i^{ème}$ observation de la coordonnée,
$\bar{x}$ est la moyenne des n observations de la coordonnée.

Dans ce cas, le test de conformité se réalise en calculant la statistique :

$$t_{obs} = \frac{|\hat{x} - x_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{x}}} \ .$$

Si la coordonnée à tester est estimée à partir d'un lever caractérisé par une redondance des mesures et donc soumis à un ajustement au sens des moindres carrés généralisés, tel qu'expliqué au chapitre 6[18], la précision de cette estimation est estimée à partir de la variance correspondant à cette coordonnée extraite la matrice variance-covariance des paramètres du modèle. La racine carrée de cette variance est l'écart-type estimé de la coordonnée estimée.

Dans ce cas, le test de conformité se réalise en calculant la statistique :

$$t_{obs} = \frac{|\hat{x} - x_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{x}}} \ .$$

Pour ces deux derniers cas, on rejette l'hypothèse de justesse de l'appareil de mesure si la valeur de $t_{obs}$ est supérieure à la valeur $t_{1-\alpha/2}$ de la variable t de STUDENT à k degrés de liberté dont la fonction de répartition vaut $1-\alpha/2$. Les valeurs de la variable t de STUDENT se lisent dans une table fournie en annexe n°2[19]. La probabilité qu'une variable t de STUDENT prenne une valeur supérieure à $t_{obs}$ peut également être calculée dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOI.STUDENT dans Excel, avec l'option test bilatéral). L'hypothèse à vérifier se rejette dans ce cas si la probabilité que la variable t prenne une valeur supérieure ou égale à $t_{obs}$ est inférieure ou égale à $\alpha$.

[18] https://hdl.handle.net/2268/293771
[19] https://hdl.handle.net/2268/293542

### 5.4.4. Test de conformité d'une précision

Ayant procédé à l'évaluation de la précision d'un appareil, par exemple suivant les procédures exposées aux § 7.4.2 à 7.4.4[20], 9.3.3[21] et 15.3.2[22], on peut vérifier que cette précision est bien compatible avec la précision annoncée par le constructeur de l'appareil ou avec une précision figurant dans un cahier des charges par exemple.
Cela revient à tester l'hypothèse selon laquelle l'écart-type estimé est bien inférieur ou égal à un écart-type annoncé :

$$H_0 : \hat{\sigma} \leq \sigma_0 ,$$

où $\hat{\sigma}$ est l'écart-type estimé,
$\sigma_0$ est l'écart-type annoncé.

Si on peut admettre que les erreurs accidentelles associées aux mesurages qui ont conduit à l'estimation de $\hat{\sigma}$ sont de distribution normale et indépendantes entre elles, l'hypothèse peut être testée en calculant la valeur (**Dagnelie 2006:§ 7.4.2**) :

$$\chi^2_{obs} = \frac{k\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} ,$$

où k est le nombre de degré de liberté associé à l'écart-type estimé (généralement égal à l'effectif de l'échantillon à partir duquel cet écart-type a été estimé, s'il est aléatoire et simple, diminué d'une unité).

L'hypothèse est rejetée si cette valeur est supérieure à la variable théorique $\chi^2_{1-\alpha}$ à k degrés de liberté qui peut se lire dans le tableau de l'annexe n°1[23]. La probabilité associée à une valeur de la variable $\chi^2$ peut également être calculée dans les logiciels « tableurs » comme Excel de Microsoft par une fonction particulière (fonction LOI.KHIDEUX dans Excel).
L'hypothèse à vérifier est acceptée si la probabilité que la variable $\chi^2$ prenne une valeur égale ou supérieure à $\chi^2_{obs}$ est supérieure ou égale à α.



[20] https://hdl.handle.net/2268/293804
[21] https://hdl.handle.net/2268/293886
[22] https://hdl.handle.net/2268/301117
[23] https://hdl.handle.net/2268/293542

## 5.5. Quelques principes élémentaires de calculs topométriques

En planimétrie topographique, les mesures sur le terrain fournissent :

- des angles horizontaux
- des distances horizontales

de façon à caractériser des sommets de lignes brisées.

Le repérage de ces points s'obtient à partir de leurs coordonnées cartésiennes, à l'intérieur d'un système de référence caractérisé par ses axes Ox et Oy.

Les coordonnées de repérage d'un point se font, en général, dans un système de calcul de proche en proche au cours duquel on rencontre systématiquement l'un des problèmes suivants :

- détermination de la distance entre deux points dont on connaît les coordonnées ;
- détermination du gisement d'un vecteur dont on connaît les coordonnées d'extrémités ;
- calcul de la longueur d'un côté de triangle dont on connaît un côté et deux angles ;
- calcul du gisement d'une direction à partir de mesures angulaires dont une est établie sur une direction de gisement connu ;
- calcul des coordonnées de l'extrémité d'un segment dont on connaît les coordonnées de l'origine, la longueur et le gisement.

Nous allons étudier successivement tous ces problèmes.

### 5.5.1. Distance entre deux points de coordonnées connues

Si deux points A et B ont des coordonnées $x_A$, $y_A$ et $x_B$, $y_B$, la distance $d_{AB}$ sera fournie par la relation :

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ ,$$

avec évidemment :

$$d_{AB} = d_{BA}.$$

Par application de ce qui a été dit au § 5.3.4. 3°, on obtient facilement que la variance d'une distance calculée à partir de coordonnées mesurées se calcule simplement par la relation :

$$\sigma^2_{\hat{d}_{AB}} = 2\left[\frac{\Delta x^2}{d^2_{AB}}\sigma^2_X + \frac{\Delta y^2}{d^2_{AB}}\sigma^2_Y\right],$$

où $\sigma^2_{\hat{d}_{AB}}$ est la variance caractérisant la précision de la distance $d_{AB}$ calculée à partir des coordonnées mesurées $x_A$, $x_B$, $y_A$ et $y_B$,

$\sigma^2_X$ est la variance caractérisant la précision de la mesure des coordonnées en x,

$\sigma^2_Y$ est la variance caractérisant la précision de la mesure des coordonnées en y.

Si on peut considérer que les variances caractérisant la précision des mesures en x et en y sont identiques et notées $\sigma^2$, on obtient simplement :

$$\sigma^2_{\hat{d}_{AB}} = 2\sigma^2\ ,$$

et donc aussi :

$$\sigma_{\hat{d}_{AB}} = \sigma\sqrt{2}\ .$$

### 5.5.2. Détermination du gisement d'une direction AB

On appelle **gisement** $\gamma_{AB}$ d'une direction AB l'angle dont doit tourner OY, dans le sens topographique (sens de rotation des aiguilles d'une montre) pour être parallèle à l'orientation AB (figure 5.5.1.).

Cet angle est compris entre 0 et 400 gr. Sa valeur se calcule par la relation :

$$\tan\gamma_{AB} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

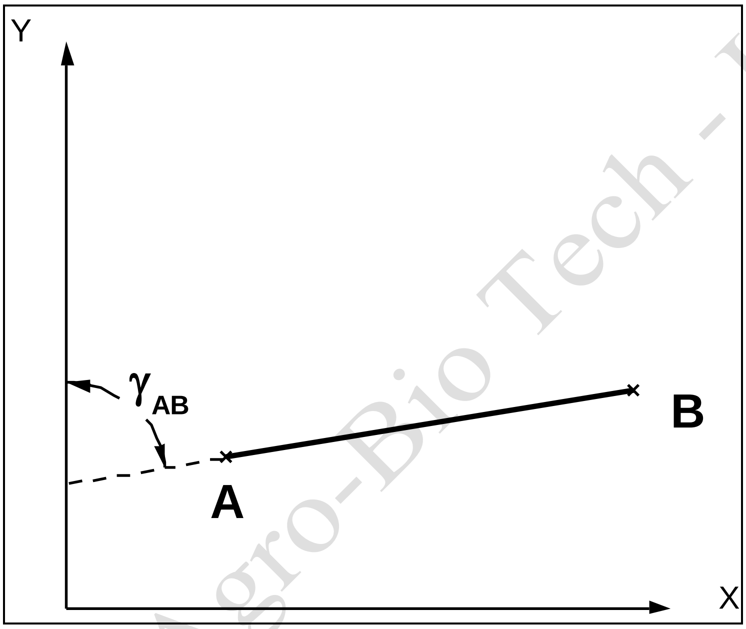


Figure 5.5.1. : Gisement de la direction AB.

L'indétermination apparente sur $\gamma$ (réduit au premier quadrant) issue de l'emploi de cette formule est levée en calculant tout d'abord le **gisement réduit** $\gamma_r$ par la relation :

$$\gamma_{ABr} = \arctan\frac{|\Delta x|}{|\Delta y|},$$

$\gamma_{ABr}$ se trouvant compris entre 0 et 100 grades.

On passe ensuite du gisement réduit $\gamma_{ABr}$ au gisement réel $\gamma_{AB}$ à partir des relations suivantes, expliquées dans la figure 5.5.2 (les angles étant exprimés en grades):

| | |
|---|---|
| $\gamma_{AB} = \gamma_{ABr}$ | si Δx est > 0 et Δy > 0 |
| $\gamma_{AB} = 200 - \gamma_{ABr}$ | si Δx est > 0 et Δy < 0 |
| $\gamma_{AB} = \gamma_{ABr} + 200$ | si Δx est < 0 et Δy < 0 |
| $\gamma_{AB} = 400 - \gamma_{ABr}$ | si Δx est < 0 et Δy > 0 |

On note également que, par définition :

$$\gamma_{BA} = \gamma_{AB} + 200^{gr}$$

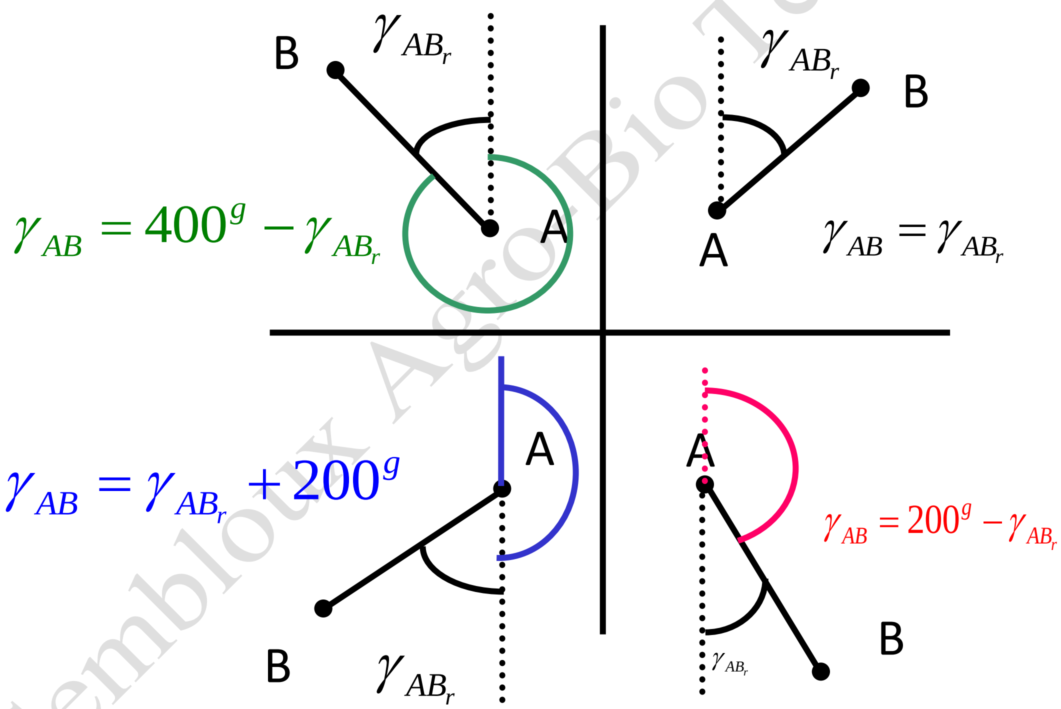


Figure 5.5.2. : Du gisement $\sigma_y^2$ réduit au gisement.

Par application de ce qui a été dit au § 5.3.4. 3°, on obtient que la variance d'une distance calculée à partir de coordonnées mesurées se calcule par la relation :

$$\sigma^2_{\hat{\gamma}_{AB}} = 2\left[\frac{\Delta y^2}{\hat{d}^4_{AB}}\sigma^2_X + \frac{\Delta x^2}{\hat{d}^4_{AB}}\sigma^2_Y\right],$$

où $\sigma^2_{\hat{\gamma}_{AB}}$ est la variance caractérisant la précision du gisement $\gamma_{AB}$ calculée à partir des coordonnées mesurées $x_A$, $x_B$, $y_A$ et $y_B$,
$\sigma^2_X$ est la variance caractérisant la précision de la mesure des coordonnées en x,
est la variance caractérisant la précision de la mesure des coordonnées en y,
$\hat{d}_{AB}$ est la distance horizontale séparant les points A et B, estimée à partir des coordonnées mesurées.

Si on peut considérer que les variances caractérisant la précision des mesures en x et en y sont identiques et notées $\sigma^2$, on obtient simplement :

$$\sigma^2_{\hat{\gamma}_{AB}} \; 2\frac{\sigma^2}{\hat{d}^4_{AB}} \;,$$

et donc aussi :

$$\sigma_{\hat{g}_{AB}} \; \frac{\sigma}{\hat{d}^2_{AB}}\sqrt{2}\,,$$

cet écart-type étant exprimé en radians.

## 5.5.3. Calcul de la longueur du côté d'un triangle

Dans un triangle quelconque (figure 5.5.3.) dont on connaît la longueur d'un côté AB et des deux angles adjacents à ce côté α et β, on peut calculer la longueur des deux autres côtés BC et AC et le troisième angle à partir de la relation générale :

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$AC = AB\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = AB\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$BC = AB\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = AB\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$\gamma = 200^g - (\alpha+\beta)$$

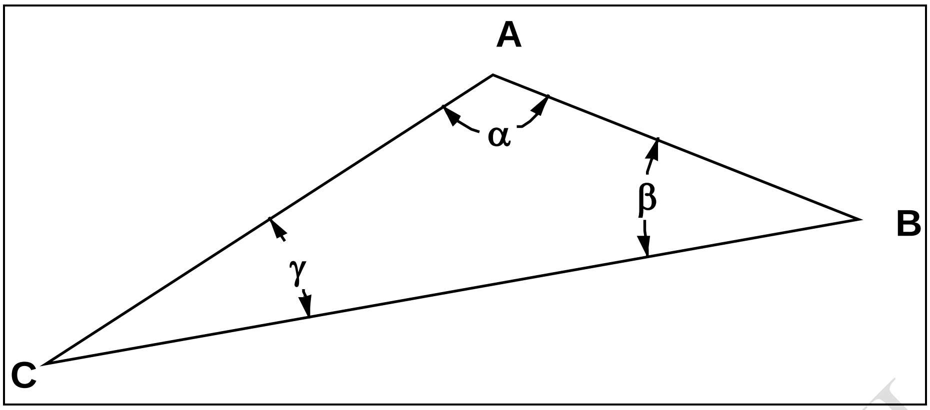

Figure 5.5.3. Triangle quelconque.

## 5.5.4. Calcul du gisement d'une direction à partir de mesures angulaires

En une station S on a visé vers une série de signaux A, B, ..., I, J, ..., N et on a noté les valeurs moyennes des lectures correspondantes sur le cercle horizontal du théodolite (cf. chapitre 7[24]): $L_A$, $L_B$, ..., $L_I$, $L_J$, ..., $L_N$ (figure 5.5.4.).

Si parmi toutes ces directions, la direction SI a un gisement connu, le calcul du gisement de la direction quelconque SJ s'obtient par la relation :

$$\gamma_{SJ} = \gamma_{SI} + (L_J - L_I)$$

pour autant que le cercle du théodolite ait le même sens de chiffraison que le sens topographique.



[24] https://hdl.handle.net/2268/293804

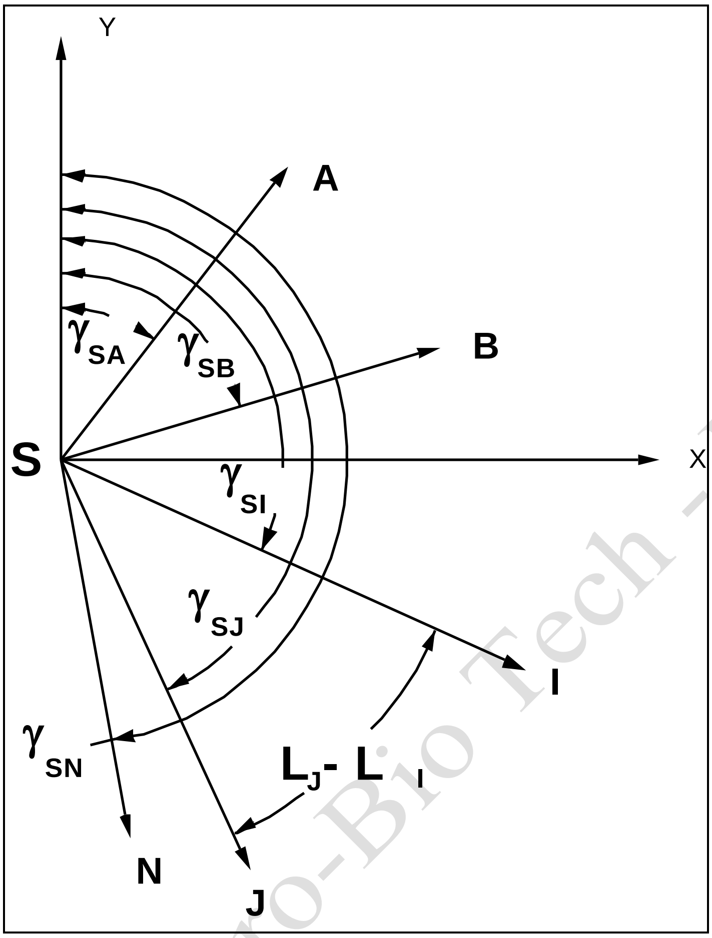


Figure 5.5.4. Gisements et mesures d'angle.

### 5.5.5. Calcul des coordonnées de l'extrémité d'un segment

Soit le segment AB dont on connaît : (figure 5.5.5.)

- les coordonnées $x_A$ et $y_A$ du point A
- la distance $d_{AB}$ qui sépare ces deux points
- le gisement $\gamma_{AB}$ de AB

On obtient :

$$x_B = x_A + d_{AB} \sin \gamma_{AB},$$

$$y_B = y_A + d_{AB} \cos \gamma_{AB},$$

ou encore :

$$\Delta x = d_{AB} \sin \gamma_{AB}$$

$$\Delta y = AB \cos \gamma_{AB}$$

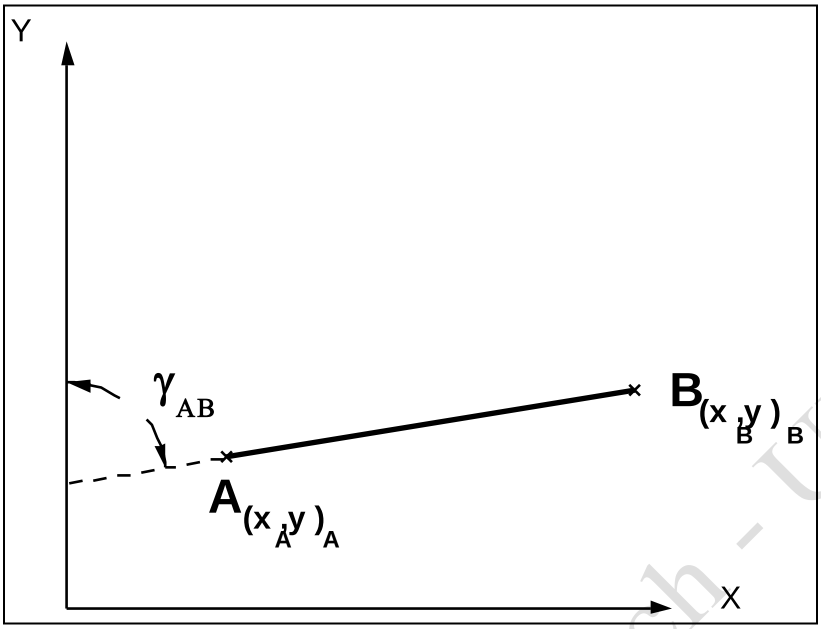


Figure 5.5.5. Calcul des coordonnées d'un point.

Par application de ce qui a été dit au § 5.3.4. 3°, on obtient que la variance de la coordonnée estimée en x du point B :

$$\hat{x}_B = \hat{x}_A + \hat{d}_{AB} \sin \hat{\gamma}_{AB},$$

où $\hat{x}_A$ est la coordonnées en x du point A, estimée à partir d'un mesurage,

$\hat{d}_{AB}$ est la distance entre les points A et B, estimée à partir d'un mesurage,

$\hat{\gamma}_{AB}$ est le gisement de la direction AB, estimé à partir d'un mesurage,

par la formule :

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{x}_B} = \hat{\sigma}^2_{\hat{x}_A} + \hat{d}^2_{AB} \cos^2 \hat{\gamma}_{AB} \hat{\sigma}^2_{\hat{\gamma}_{AB}} + \sin^2 \hat{\gamma}_{AB} \hat{\sigma}^2_{\hat{d}_{AB}}.$$

De la même manière, on obtient comme variance de la coordonnée estimée en y :

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{y}_B} = \hat{\sigma}^2_{\hat{y}_A} + \hat{d}^2_{AB} \sin^2 \hat{\gamma}_{AB} \hat{\sigma}^2_{\hat{\gamma}_{AB}} + \cos^2 \hat{\gamma}_{AB} \hat{\sigma}^2_{\hat{d}_{AB}}.$$

# Index des matières





# Index Bibliographique

L'index bibliographique peut être obtenu en suivant le lien :
https://hdl.handle.net/2268/293535