



Cours de Compléments de Géométrie

4. Les transformations de coordonnées

[Prof. C. Debouche](#)

2010

Les références bibliographiques citées dans ce texte sont consultables en suivant le lien
<https://hdl.handle.net/2268/293535>

Sommaire

Sommaire.....	2
4.1. Introduction	3
4.2.1. Les transformations linéaires à deux dimensions	7
4.2.2. Les transformations linéaires à trois dimensions.....	9
4.3. Les coordonnées rectangulaires géocentrées et les coordonnées géodésiques.....	12
4.3.1. Des coordonnées rectangulaires géocentrées aux coordonnées géodésiques.....	13
4.3.2. Des coordonnées géodésiques aux coordonnées rectangulaires géocentrées.....	16
4.4. Des coordonnées WGS84 aux coordonnées cartographiques locales	19
4.4.1. Les différentes voies de transformation.....	19
4.4.2. La transformation de coordonnées ETRS89 en coordonnées du système belge BE_BD72 / LAMB72.....	22
4.4.3. La conversion de coordonnées ETRS89 en coordonnées du système belge BE_ETRS89 / LB08	28
4.4.4. La transformation de coordonnées WGS84 en coordonnées du ETRS89.....	30
4.5. D'un référentiel cartographique à un autre	32

4.1. Introduction

Le positionnement d'un objet ou d'un point particulier de l'environnement, situé sur ou à proximité de la surface de la Terre, se fait toujours au moyen de coordonnées qui sont définies dans un système de référence. Les chapitres 2¹ et 3² ont présenté différents référentiels, fondés sur des caractéristiques de la Terre pour ce qui est des référentiels géodésiques, ou conçus pour une représentation sur une carte ou un plan pour ce qui est des référentiels cartographiques.

Un système géodésique de référence comprend un datum tel que décrit dans le paragraphe 2.4¹ et qui positionne l'ellipsoïde de référence par rapport à la Terre, mais aussi un système de coordonnées, c'est-à-dire un ensemble de règles qui précisent comment les coordonnées peuvent être assignées à un point.

Nous avons vu², par exemple, la localisation d'un point par ses **coordonnées cartésiennes globales** (dites aussi rectangulaires géocentrées), l'origine des axes du système de référence étant confondue ou proche du centre de masse de la Terre. Rappelons qu'un système de référence peut être qualifié de cartésien s'il donne la position de points, relativement à n axes mutuellement perpendiculaires (**ISO 19111, 2003**). Ces coordonnées sont généralement notées X, Y et Z (figure 4.1.1).

Ont également été définies, les coordonnées géodésiques, basées sur un ellipsoïde de référence (§ 2.3.1)¹ et qui localisent un point par deux angles (une longitude λ et une latitude φ) et une distance à l'ellipsoïde appelée hauteur ellipsoïdale h (figure 4.1.1).

La figure 4.1.1 présente un point P situé dans un référentiel cartésien global avec ses coordonnées X_P , Y_P et Z_P et dans un système géodésique de référence, avec ses coordonnées géodésiques λ_P , φ_P et h_P .

¹ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

² <https://hdl.handle.net/2268/293634>

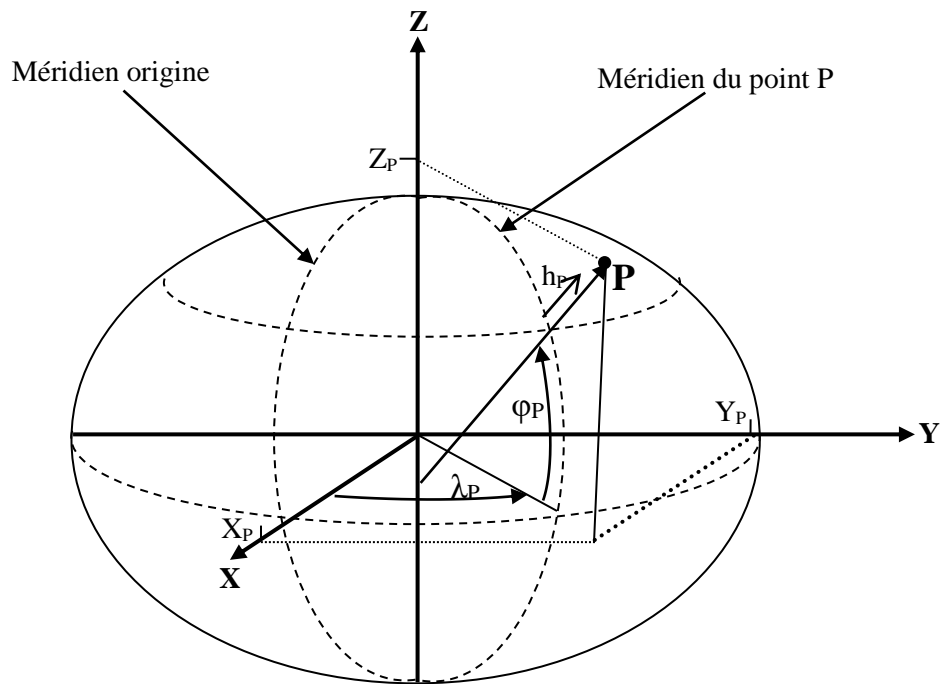


Figure 4.1.1. Localisation d'un point P par ses coordonnées cartésiennes globales (X_P , Y_P et Z_P) et géodésiques (λ_P , φ_P et h_P).

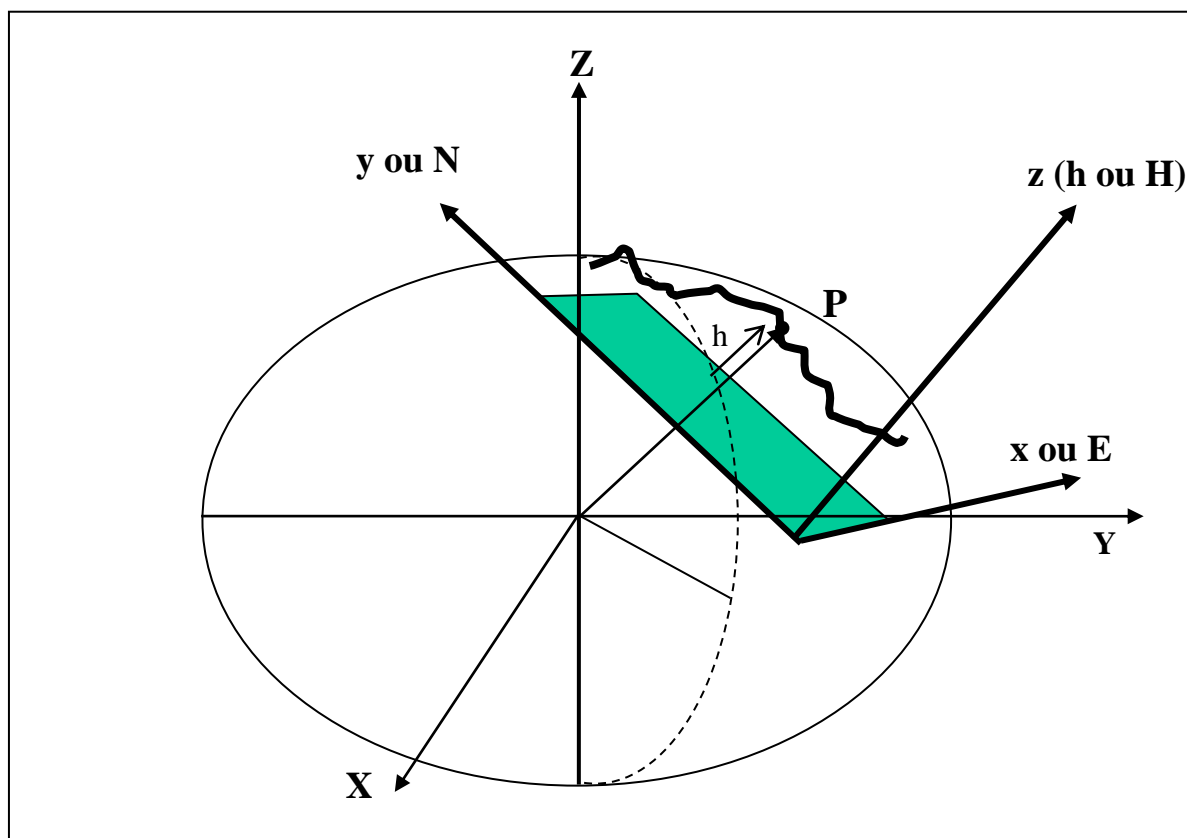


Figure 4.1.2. Localisation d'un point P par ses coordonnées cartographiques (x ou E, y ou N et z ou h ou H).

Quant aux **coordonnées cartographiques**, elles permettent de localiser un point par trois coordonnées cartésiennes x (ou Est, ou E), y (ou Nord ou N) et z, x et y situant le point dans le plan d'une carte, tangent ou sécant à l'ellipsoïde, z étant soit une hauteur ellipsoïdale h, soit une altitude H (figure 4.1.2).

Il est également fréquent de recourir à un système de référence local, défini par l'utilisateur en fonction de ses besoins et sans référence particulière aux systèmes de référence rappelés ci-dessus.

Cette diversité dans les systèmes de référence implique souvent de pouvoir transformer les coordonnées définies dans un système, en coordonnées définies dans un autre système. Cela peut concerner par exemple la conversion de coordonnées locales en coordonnées cartographiques, afin d'intégrer le résultat d'un mesurage dans un ensemble plus vaste de données localisées. Cela peut aussi concerner le passage d'un système géodésique de référence global à un système géodésique de référence local (§ 2.4.1)¹.

Les opérations pratiquées sur les coordonnées sont des transformations s'il s'agit de changements impliquant le passage d'un datum à un autre datum. Elles seront par contre appelées conversions s'il s'agit de changer le type de coordonnées pour un même datum (ISO 19111, 2003), comme par exemple le passage de coordonnées géodésiques à des coordonnées cartographiques qui s'appelle aussi une projection (chapitre 3).

Ce chapitre est donc dédié aux différentes transformations ou conversions de coordonnées qui peuvent se rencontrer dans la pratique du topographe, en présentant les formules de

transformation ou de conversion, mais aussi, dans la mesure du possible, les conséquences de cette transformation sur la précision des coordonnées transformées.

Le paragraphe 4.2 traite des transformations linéaires en général. Celles-ci peuvent s'appliquer dans diverses circonstances, tant sur des coordonnées rectangulaires géocentrées que sur des coordonnées cartographiques. Le paragraphe suivant est consacré aux conversions des coordonnées rectangulaires géocentrées (X, Y et Z) en coordonnées géodésiques (λ , φ , et h) et réciproquement. Les conversions des coordonnées géodésiques (λ , φ , et h) en coordonnées cartographiques (x, y et h ou H) et réciproquement sont exposées dans le chapitre 3³. Le paragraphe 4.4 expose la procédure à suivre pour transformer les coordonnées WGS84, fournies par un récepteur GNSS (chapitre 13) en coordonnées cartographiques. Finalement, le paragraphe 4.5 présente la marche à suivre pour passer d'un référentiel cartographique à un autre.

Signalons enfin que les instituts géographiques nationaux fournissent souvent un logiciel qui permet de réaliser les conversions ou transformations de coordonnées sur le territoire de leur pays. C'est par exemple le cas de l'IGN belge qui propose gratuitement le logiciel "cConvert" qui peut être téléchargé à l'adresse <<http://www.ign.be/FR/FR4-4.shtm>>, comme de l'IGN français avec le logiciel Circé téléchargeable à l'adresse <http://professionnels.ign.fr/14/la-gamme/ficheProduitCMS.do?idDoc=5352513>.

³ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

4.2. Les transformations linéaires

Nous envisageons les transformations linéaires à deux dimensions, pratiquées en planimétrie dans le § 4.2.1, alors que les transformations à trois dimensions sont présentées dans le § 4.2.2.

4.2.1. Les transformations linéaires à deux dimensions

Une **transformation linéaire à deux dimensions** permet de produire un nouveau référentiel (système d'axes) en opérant sur le référentiel initial une translation et/ou une rotation et/ou un changement d'échelle, tel qu'illustré sur la figure 4.2.1.

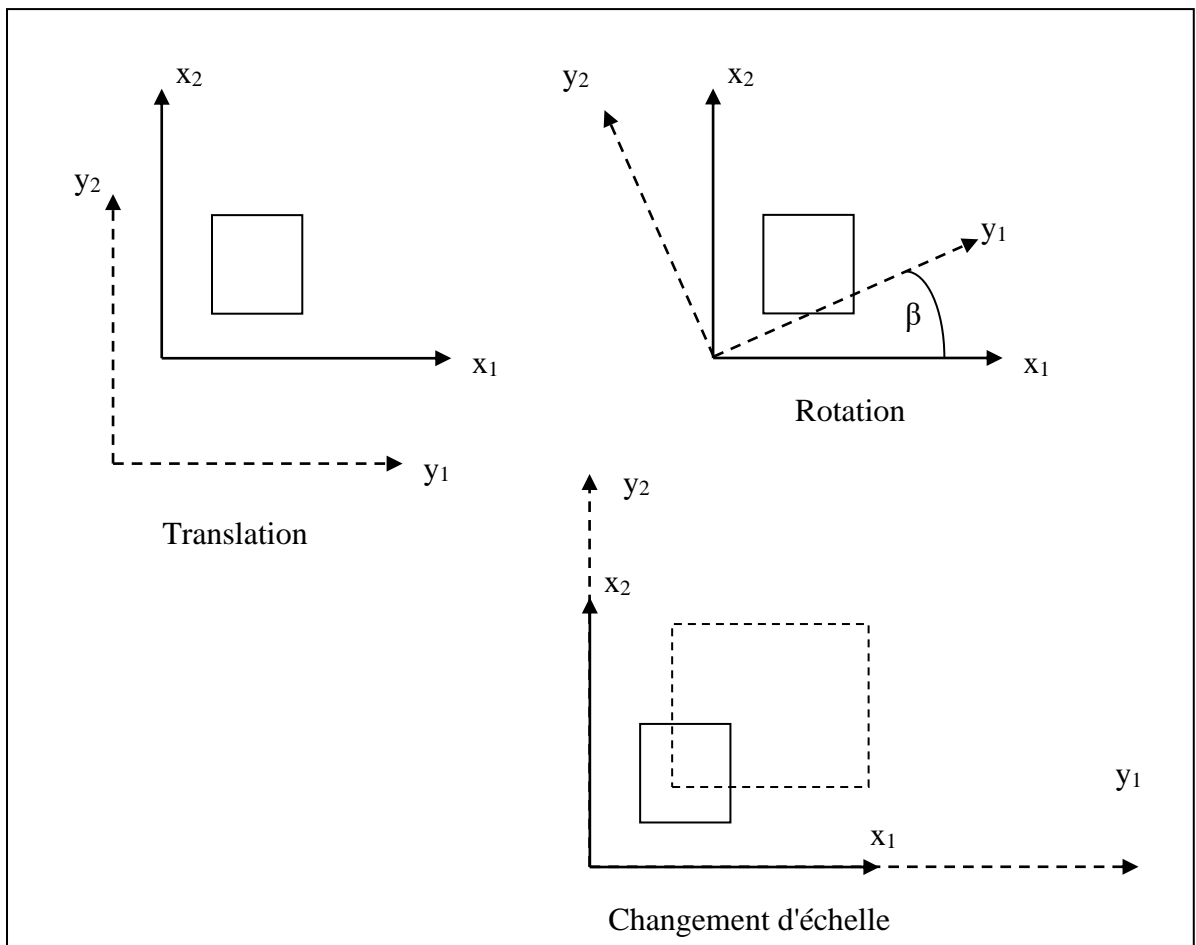


Figure 4.2.1. Transformations linéaires dans le plan: translation, rotation et changement d'échelle.

En représentant par x_1 et x_2 les coordonnées d'un point dans le système initial et par y_1 et y_2 les coordonnées du même point dans le système transformé, on peut obtenir ces dernières en appliquant la transformation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{SRx} + \mathbf{d},$$

ou encore sous forme détaillée :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

- où d_1 et d_2 sont les constantes de translation appliquées respectivement sur les axes x_1 et x_2 ,
- β est l'angle que fait le nouveau référentiel par rapport au référentiel initial, compté dans le sens anti horlogique,
- s_1 et s_2 sont les facteurs d'échelle appliqués respectivement sur les axes x_1 et x_2 ,
- \mathbf{d} est le vecteur de translation,
- \mathbf{R} est la matrice de rotation, dite aussi matrice de transformation,
- \mathbf{S} est la matrice de mise à l'échelle ou matrice d'extension contraction.

En l'absence de changement d'échelle, la matrice \mathbf{S} est une matrice identité qui peut donc être ignorée dans l'écriture de la formule de transformation. Si la transformation d'échelle est la même pour les deux axes, la matrice \mathbf{S} est remplacée par la constante correspondant à cette transformation d'échelle.

Si les coordonnées initiales doivent être considérées comme des valeurs observées de variables aléatoires, parce qu'elles résultent, par exemple, d'un processus de mesurage comprenant inévitablement des erreurs accidentelles, les coordonnées transformées doivent aussi être considérées comme des valeurs observées de variables aléatoires. La précision de ces coordonnées transformées se quantifie par leur matrice de dispersion, également appelée matrice des variances et des covariances.

En vertu de la loi de propagation des erreurs, qui est sommairement rappelée dans le § 6.5.2⁴, on peut obtenir la matrice de dispersion des coordonnées transformées par la relation suivante :

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{SR}\Sigma_{xx}\mathbf{R}'\mathbf{S}',$$

- où Σ_{xx} est la matrice de dispersion, également appelée matrice des variances et des covariances des coordonnées initiales x_1 et x_2 ,
- Σ_{yy} est la matrice de dispersion, également appelée matrice des variances et des covariances des coordonnées transformées y_1 et y_2 .

⁴ <https://hdl.handle.net/2268/293771>

La matrice de dispersion comprend dans sa diagonale les variances des deux coordonnées et, hors diagonale, la covariance des deux coordonnées :

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \mu_{x_1x_2} \\ \mu_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix},$$

où $\sigma_{x_1}^2$ et $\sigma_{x_2}^2$ sont les variances des coordonnées estimées x_1 et x_2 ,

$\mu_{x_1x_2}$ est la covariance des coordonnées estimées x_1 et x_2 , qui permet le calcul du coefficient de corrélation entre les coordonnées estimées x_1 et x_2 .

Il convient de remarquer que la transformation de coordonnées peut introduire une dépendance entre les coordonnées transformées y_1 et y_2 alors que les erreurs commises sur les coordonnées initiales x_1 et x_2 sont indépendantes entre elles, comme c'est le cas le plus souvent. En effet, la plus part du temps, la matrice Σ_{xx} est diagonale, parce que les erreurs commises sur la mesure de x_1 sont indépendantes des erreurs commises sur x_2 . La transformation produira des coordonnées y_1 et y_2 dont la matrice de dispersion n'est pas diagonale; c'est-à-dire des coordonnées qui ne sont pas indépendantes entre elles. A noter que c'est la rotation qui engendre cette dépendance. En l'absence de rotation ($\beta = 0$), l'indépendance des coordonnées initiales est conservée pour les coordonnées transformées.

4.2.2. Les transformations linéaires à trois dimensions

Comme à deux dimensions, on peut envisager un changement d'échelle, une rotation et/ou une translation selon chacun des trois axes, ce qui définit donc neuf paramètres précisant chacune de ces transformations. Cependant nous nous limiterons, pour ce qui concerne le changement d'échelle, à considérer une transformation homogène sur les trois variables, caractérisée par la constante s . Il reste donc sept paramètres définissant cette transformation (un changement d'échelle, trois translations et trois rotations) qui peut se présenter sous la forme :

$$\mathbf{y} = s\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

expression dans laquelle on retrouve les matrices et vecteurs suivants :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 \cos \beta_3 & \cos \beta_1 \sin \beta_3 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 & \sin \beta_1 \sin \beta_3 - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \\ -\cos \beta_2 \sin \beta_3 & \cos \beta_1 \cos \beta_3 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 & \sin \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \\ \sin \beta_2 & -\sin \beta_1 \cos \beta_2 & \cos \beta_1 \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

où d_1 , d_2 et d_3 sont les constantes de translation appliquées respectivement sur les axes x_1 , x_2 et x_3 ,

β_1 , β_2 et β_3 sont les angles que fait le nouveau référentiel par rapport au référentiel initial, décrits dans la figure 4.2.2,

s est le facteur d'échelle appliqué aux trois axes,

\mathbf{d} est le vecteur de translation,

R est la matrice de rotation, dite aussi matrice de transformation,

Cette transformation porte le nom de **transformation de Helmert**, également appelée **transformation à sept paramètres**. Elle est souvent utilisée pour passer d'un système de référence cartésien global à un autre, correspondant à un changement d'ellipsoïde de référence (§ 2.3.). Dans ce cas les angles de rotation sont très faibles, ce qui permet d'adopter les simplifications suivantes :

$$\cos \beta \approx 1, \sin \beta \approx \beta \text{ et } \sin \beta \sin \beta \approx 0,$$

ce qui permet d'écrire la matrice de rotation sous la forme approximative et simplifiée suivante :

$$\mathbf{R} \approx \begin{bmatrix} 1 & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

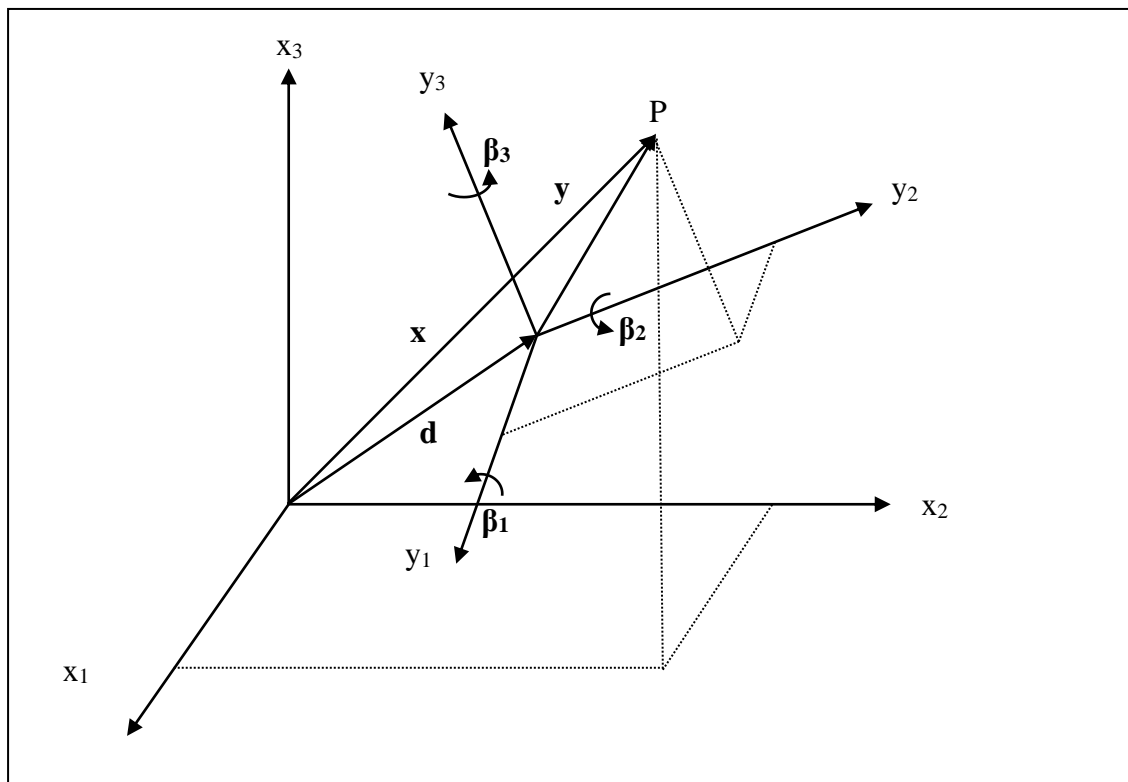


Figure 4.2.2. Transformation linéaire à trois dimensions: translation et rotation.

Comme exposé dans le § précédent, la matrice de dispersion des coordonnées transformées par cette équation à sept paramètres se calcule par l'expression :

$$\Sigma_{yy} = s^2 \mathbf{R} \Sigma_{xx} \mathbf{R}'$$

- où Σ_{xx} est la matrice de dispersion, également appelée matrice des variances et des covariances des coordonnées initiales x_1 , x_2 et x_3 ,
- Σ_{yy} est la matrice de dispersion, également appelée matrice des variances et des covariances des coordonnées transformées y_1 , y_2 et y_3 .

4.3. Les coordonnées rectangulaires géocentrées et les coordonnées géodésiques

La figure 4.1.1 présente les coordonnées rectangulaires géocentrées d'un point P (X_P , Y_P et Z_P) situé sur la surface de la Terre ou à sa proximité ainsi que les coordonnées géodésiques de ce point (λ_P , φ_P et h_P).

Il est évidemment fréquent de devoir convertir des coordonnées rectangulaires géocentrées en coordonnées géodésiques ou inversement. La première de ces deux conversions est présentée au § 4.3.1, alors que la deuxième fait l'objet du § 4.3.2.

Rappelons que les coordonnées géodésiques sont définies pour un ellipsoïde de référence donné. Ses caractéristiques interviennent donc dans les formules de conversion. Rappelons qu'un ellipsoïde de référence est défini par ses paramètres a et b qui sont respectivement le demi grand axe et demi petit axe de l'ellipse génératrice de cet ellipsoïde, également appelée ellipse méridienne (§ 2.3.3)⁵.

En général, au lieu de donner la valeur des 2 axes, on définit l'ellipse au moyen du demi grand axe et d'un coefficient appelé **aplatissement p** :

$$p = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a},$$

On définit également la première excentricité de l'ellipse méridienne par la relation :

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{2p - p^2}.$$

Pour les besoins des conversions présentées ci-dessous, on définit également le rayon de courbure N_P de l'ellipse méridienne (exprimé en m) correspondant au point P, de latitude φ_P par la relation :

$$N_P = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_P)^{1/2}}.$$

⁵ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

4.3.1. Des coordonnées rectangulaires géocentrées aux coordonnées géodésiques

1° La longitude se calcule immédiatement par l'expression :

$$\lambda_p = \arctan \frac{Y_p}{X_p}.$$

Par contre, il n'y a pas de formule de calcul explicite de la latitude et de la hauteur ellipsoïdale. Ces grandeurs sont calculables à partir des équations suivantes (**HOFMANN, 1997**) :

$$h_p = \frac{r_p}{\cos \varphi_p} - N_p,$$

$$\varphi_p = \arctan \left[\frac{Z_p}{r_p} \left(1 - e^2 \frac{N_p}{N_p + h_p} \right)^{-1} \right],$$

expressions dans lesquelles r_p est défini par :

$$r_p = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2},$$

N_p et e étant respectivement le rayon de courbure de l'ellipse méridienne correspondant à la latitude du point P et l'excentricité de cette ellipse méridienne, dont les définitions ont été rappelées ci-dessus (§ 4.3).

Comme on le voit, le calcul de h suppose que φ soit connu et le calcul de φ suppose h connue. Il faut donc procéder par itération pour résoudre cette équation en partant d'une valeur initiale pour φ qui peut se calculer par l'expression :

$$\varphi_{p_0} = \arctan \left[\frac{Z_p}{r_p (1 - e^2)} \right].$$

On procède ensuite au calcul de h_p et de φ_p au moyen des deux expressions présentées ci-dessus. On procède à une nouvelle itération avec cette nouvelle valeur de φ_p . Le processus itératif est terminé lorsque deux valeurs successives de φ_p sont jugées suffisamment proches.

2° On peut cependant éviter ce processus itératif en recourant aux formules suivantes, qui sont explicites et approchées (**HOFMANN, 1997**). L'erreur commise est négligeable pour les besoins de la pratique.

$$\varphi_p = \arctan \frac{Z_p + e^2 b \sin^3(\theta)}{r_p - e^2 a \cos^3(\theta)},$$

$$h_p = \frac{r_p}{\cos(\varphi_p)} - N_p.$$

où :

$$\theta = \arctan \frac{Z_p a}{r_p b},$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Il existe d'autres formulations explicites et approchées (**ANDERSON ET MIKHAIL 1998**).

Exemple 4.3.1. Calcul des coordonnées géodésiques, dans le datum ETRS89, de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux.

Soit à calculer les coordonnées géodésiques, dans le datum ETRS89, de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux (point géodésique n° 40F12C1 - IGN), à partir de ses coordonnées rectangulaires géocentrées. Celles-ci ont pour valeurs :

$$X = 4.046.068,019 \text{ m},$$

$$Y = 333.828,736 \text{ m},$$

$$Z = 4.902.973,807 \text{ m}.$$

La valeur de la longitude est évidemment de :

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X} = \frac{333.828,736}{4.902.973,807} = 0,082320493 \text{ rad} = 4^\circ 42' 59,8205''$$

Rappelons que l'ellipsoïde utilisé dans le datum ETRS89 est le GRS80 dont les paramètres sont (§ 2.3.6) :

$$a = 6.378.137,000 \text{ m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} = 298,257222101.$$

Les latitude et hauteur sont calculées par le processus itératif exposé ci-dessus. Le tableau 4.3.1 présente les valeurs obtenues au cours des deux itérations qui ont été nécessaires.

Tableau 4.3.1. Calcul de la latitude et de la hauteur de la borne BEREf par itération.

	Itération n°1	Itération n°2	Itération n°3
φ initial (rad)	0,882492664	0,882492557	0,882492558
N	6.390.909,534	6.390.909,532	6.390.909,532
h (m)	207,3986267	206,5671431	206,5704765
φ final (rad)	0,882492557	0,882492558	0,882492558

Le critère adopté pour interrompre le processus itératif est l'apport d'une correction inférieure au cm pour la hauteur et au dix millième de seconde, soit $4,848 \cdot 10^{-10}$ radians, pour la latitude. Cela conduit à limiter les itérations à 3.

Il en résulte que :

$$\varphi = 0,882492558 \text{ rad} = 50^\circ 33' 47,1564'',$$

$$h = 206,57 \text{ m}.$$

Ces valeurs correspondent à celles qui sont annoncées par l'IGN pour ce point.

Les latitudes et hauteurs peuvent aussi être calculées par les formules approchées énoncées ci-dessus :

$$\theta = \arctan \frac{Z_p a}{r_p b} = \arctan \frac{4.902.973,807 \quad 6.378.137,000}{4.059.816,257 \quad 6.356.752,314} = 0,880844473,$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{6.378.137,000^2 - 6.356.752,314^2}{6.356.752,314^2} = 0,006739497.$$

et

$$\varphi_p = \arctan \frac{Z_p + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_p - e'^2 a \cos^3(\theta)} = 0,882492558,$$

$$h_p = \frac{r_p}{\cos(\varphi_p)} - N_p = 206,5704632.$$

Ces valeurs sont pratiquement identiques à celles qui ont été obtenues par le processus itératif.

3° Comme explicité dans le § 6.5.2⁶, la matrice de dispersion (également appelée matrice des variances et des covariances) des coordonnées géodésiques peut se calculer en fonction de la matrice de dispersion des coordonnées rectangulaires géocentrées par la relation :

$$\Sigma_{\lambda\varphi h} = \mathbf{J} \Sigma_{XYZ} \mathbf{J}'$$

- où $\Sigma_{\lambda\varphi h}$ est la matrice de dispersion des coordonnées géodésiques,
 Σ_{XYZ} est la matrice de dispersion des coordonnées rectangulaires géocentrées,
 \mathbf{J} est la matrice des dérivées partielles des coordonnées géodésiques par rapport aux coordonnées rectangulaires géocentrées qui se calcule par la relation suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial X} & \frac{\partial \lambda}{\partial Y} & \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X} & \frac{\partial \varphi}{\partial Y} & \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \\ \frac{\partial h}{\partial X} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

⁶ <https://hdl.handle.net/2268/293771>

Ces dérivées partielles se calculent par les expressions :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} = \frac{Y}{r^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = -\frac{X}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial Z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = -\frac{X \left[3e'^2 bZ \sin(2\theta) \left(e'^2 \frac{b}{2r} \sin(2\theta) + \frac{Z}{r} \cos \theta - \sin \theta \right) - e'^2 b \sin^3 \theta - Z \right]}{r(1 + \tan^2 \varphi)(r - e'^2 a \cos^3 \theta)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\frac{Y \left[3e'^2 bZ \sin(2\theta) \left(e'^2 \frac{b}{2r} \sin(2\theta) + \frac{Z}{r} \cos \theta - \sin \theta \right) - e'^2 b \sin^3 \theta - Z \right]}{r(1 + \tan^2 \varphi)(r - e'^2 a \cos^3 \theta)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Z} = -\frac{\frac{3}{2r} e'^2 \sin(2\theta) \left[ra \sin \theta - bZ \cos \theta - \frac{1}{2} e'^2 b^2 \sin(2\theta) \right] + r - e'^2 a \cos^3 \theta}{(1 + \tan^2 \varphi)(r - e'^2 a \cos^3 \theta)^2},$$

$$\frac{\partial h}{\partial X} = \frac{X}{r \cos \varphi} + \left[\frac{r \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{e^2 a \sin(2\varphi)}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial X},$$

$$\frac{\partial h}{\partial Y} = \frac{Y}{r \cos \varphi} + \left[\frac{r \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{e^2 a \sin(2\varphi)}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial h}{\partial Z} = \left[\frac{r \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{a e^2 \sin(2\varphi)}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial Z}.$$

4.3.2. Des coordonnées géodésiques aux coordonnées rectangulaires géocentrées

1° La conversion de coordonnées géodésiques en coordonnées rectangulaires géocentrées est plus simple que la conversion inverse présentée au § précédent. Elle s'opère au moyen des formules suivantes :

$$X_p = (N_p + h_p) \cos \varphi_p \cos \lambda_p$$

$$Y_p = (N_p + h_p) \cos \varphi_p \sin \lambda_p$$

$$Z_p = \left[N_p (1 - e^2) + h_p \right] \sin \varphi_p$$

Exemple 4.3.2. Calcul des coordonnées rectangulaires géocentrées, dans le datum ETRS89, de la borne du réseau BREF située sur la Commune de Gembloux.

Soit à calculer les coordonnées rectangulaires géocentrées, dans le datum ETRS89, de la borne du réseau BREF située sur la Commune de Gembloux (point géodésique n° 40F12C1 - IGN), à partir de ses coordonnées géodésiques. Celles-ci ont pour valeurs :

$$\begin{aligned}\varphi &= 50^{\circ}33'47,1564'' = 0,882492558 \text{ rad,} \\ \lambda &= 4^{\circ}42'59,8205'' = 0,082320493 \text{ rad,} \\ h &= 206,57 \text{ m}\end{aligned}$$

L'application des formules présentées ci-dessus donne comme résultat :

$$\begin{aligned}N &= 6.390.909,532 \text{ m,} \\ X &= 4.046.068,019 \text{ m,} \\ Y &= 333.828,736 \text{ m,} \\ Z &= 4.902.973,807 \text{ m.}\end{aligned}$$

Ces valeurs correspondent à celles qui sont annoncées par l'IGN pour ce point.

2° Comme explicité dans le § 6.5.2, la matrice de dispersion (également appelée matrice des variances et des covariances) des coordonnées rectangulaires géocentrées peut se calculer en fonction de la matrice de dispersion des coordonnées géodésiques par la relation :

$$\Sigma_{XYZ} = \mathbf{J} \Sigma_{\lambda\varphi h} \mathbf{J}'$$

où $\Sigma_{\lambda\varphi h}$ est la matrice de dispersion des coordonnées géodésiques,

Σ_{XYZ} est la matrice de dispersion des coordonnées rectangulaires géocentrées,

\mathbf{J} est la matrice des dérivées partielles des coordonnées rectangulaires géocentrées par rapport aux coordonnées géodésiques qui se calcule par la relation suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial h} \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial h} \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial h} \end{vmatrix}.$$

Ces dérivées partielles se calculent par les expressions :

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(N+h)\sin \lambda \cos \varphi, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (N+h)\cos \lambda \cos \varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \left[\frac{a e^2 \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - (N+h) \right] \sin \varphi \cos \lambda,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \left[\frac{a e^2 \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - (N+h) \right] \sin \varphi \sin \lambda$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \left[\frac{a e^2 \sin^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \frac{h}{1-e^2} + N \right] (1-e^2) \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial h} = \cos \varphi \cos \lambda, \quad \frac{\partial Y}{\partial h} = \cos \varphi \sin \lambda \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial h} = \sin \varphi.$$

4.4. Des coordonnées WGS84 aux coordonnées cartographiques locales

Rappelons que c'est le datum WGS84 (§ 2.4.2. 4°)⁷ qui est utilisé par le système de positionnement par satellite GPS décrit dans le chapitre 13. Les coordonnées fournies par un récepteur GPS sont donc libellées dans ce datum. Elles sont fournies le plus souvent sous la forme de coordonnées géodésiques λ_{WGS84} , φ_{WGS84} et h_{WGS84} . Elles peuvent également être fournies sous la forme de coordonnées rectangulaires géocentrées X_{WGS84} , Y_{WGS84} et Z_{WGS84} . C'est la projection UTM qui est normalement appliquées aux coordonnées géodésiques pour obtenir des coordonnées cartographiques x_{WGS84} , y_{WGS84} et z_{WGS84} .

Quant à elles, les coordonnées cartographiques locales sont définies par un datum différent du datum WGS84 et par un système de projection déterminé, souvent différent de l'UTM. Le datum local et le système de projection qui lui est associé sont habituellement définis à l'échelle d'un pays, voire d'un ensemble de pays.

Il faut donc effectuer une transformation de ces coordonnées fournies par le récepteur GPS pour en obtenir les coordonnées rectangulaires géocentrées locales X_{local} , Y_{local} et Z_{local} , ou géodésiques λ_{local} , φ_{local} et h_{local} ou, enfin, cartographiques x_{local} , y_{local} et z_{local} .

A noter cependant que les coordonnées qui sont fournies par un récepteur GNSS fonctionnant en positionnement relatif sur le continent européen (DGPS ou RTK par exemple, § 13.4.2) le sont dans le datum ETRS89 (§ 2.4.2. 5°)⁵ et non dans le datum WGS84.

Le § 4.4.1 présente les différentes voies de transformation. La transformation des coordonnées ETRS89 en coordonnées du système de référence belge BD72 (§ 2.4.3 1° et 3.4.4)⁵ est présentée dans le § 4.4.2, alors que le § suivant présente la conversion de ces coordonnées vers celles du système belge Lambert 2008 (§ 2.4.3 5° et 3.4.5)⁵. Finalement le § 4.4.4 traite de la transformation de coordonnées WGS84 en coordonnées ETRS89.

4.4.1. Les différentes voies de transformation

La figure 4.4.1 illustre les différentes voies qui peuvent être suivies pour transformer des coordonnées WGS84 en coordonnées d'un système local.

1° La transformation la plus fréquemment utilisée et la plus précise est celle qui se pratique au niveau des coordonnées rectangulaires géocentrées. C'est la transformation de HELMERT présentée au § 4.2.2. Elle suppose que les sept paramètres qui la définissent sont connus. Ils sont souvent publiés par l'institut géographique national du pays concerné. Ces paramètres peuvent aussi être calculés par un ajustement de mesures de coordonnées X_{WGS84} , Y_{WGS84} et Z_{WGS84} , mesures réalisées au moyen d'un récepteur GPS sur des points dont les coordonnées X_{local} , Y_{local} et Z_{local} sont connues.

Notons que cette transformation est parfois simplifiée en annulant la rotation et le changement d'échelle. Elle est alors appelée transformation à trois paramètres puisqu'elle se résume à une translation le long des trois axes.

⁷ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

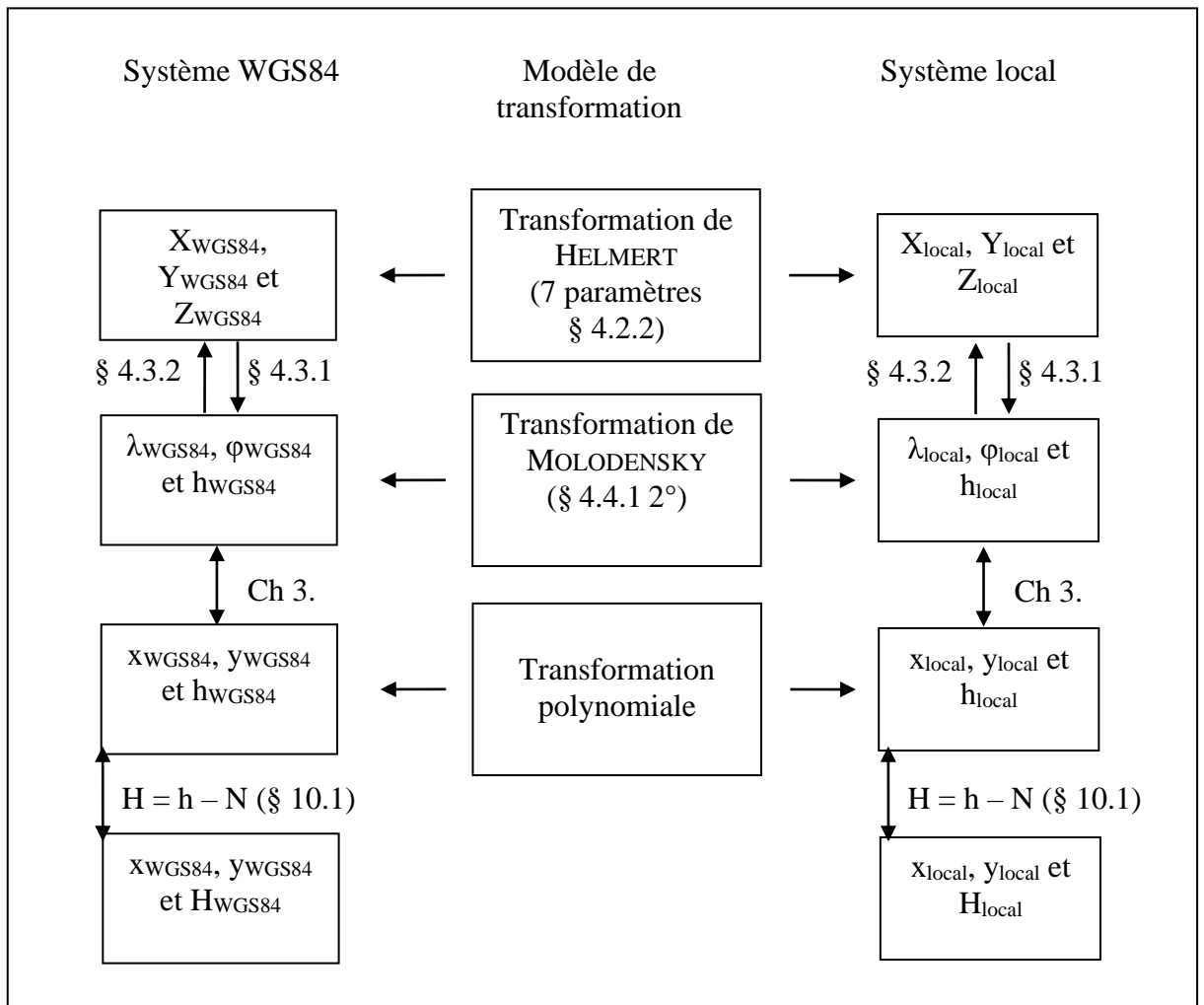


Figure 4.4.1. Transformation des coordonnées WGS84 en coordonnées locales.

2° Une autre voie de transformation des coordonnées WGS84 en coordonnées locales est celle qui se pratique sur les coordonnées géodésiques. Elle porte le nom de **transformation de Molodensky**. Moins précise que la précédente, elle présente cependant l'avantage d'être mieux documentée.

Cette transformation permet de corriger les longitude, latitude et hauteur exprimées dans le système WGS afin de les adapter à l'ellipsoïde local. Les différences entre les coordonnées géodésiques WGS-84 et celles d'un système local quelconque peuvent se calculer par les formules générales de MOLODENSKY (**DMA, 1991 p. 7-8**) :

$$\lambda_{\text{WGS84}} = \lambda_{\text{local}} + \Delta\lambda,$$

$$\varphi_{\text{WGS84}} = \varphi_{\text{local}} + \Delta\varphi,$$

$$h_{\text{WGS84}} = h_{\text{local}} + \Delta h.$$

relations dans lesquelles les corrections $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, exprimées en seconde, et Δh , exprimée en mètre, sont calculées par les expressions suivantes :

$$\Delta\lambda = \frac{-\Delta X \sin \lambda_{\text{local}} + \Delta Y \cos \lambda_{\text{local}}}{(R_N + h_{\text{local}}) \cos \varphi_{\text{local}} \sin 1''},$$

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_{\text{local}})^{3/2}},$$

$$R_N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_{\text{local}})^{1/2}},$$

$$q_1 = -\Delta X \sin \varphi_{\text{local}} \cos \lambda_{\text{local}} - \Delta Y \sin \varphi_{\text{local}} \sin \lambda_{\text{local}} + \Delta Z \cos \varphi_{\text{local}},$$

$$q_2 = \frac{\Delta a}{a} (R_N e^2 \sin \varphi_{\text{local}} \cos \varphi_{\text{local}}),$$

$$q_3 = \Delta p [R_M (a/b) + R_N (a/b)] \sin \varphi_{\text{local}} \cos \varphi_{\text{local}},$$

$$\Delta\varphi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{[(R_M + h_{\text{local}}) \sin 1'']},$$

$$\Delta h = \Delta X \cos \varphi_{\text{local}} \cos \lambda_{\text{local}} + \Delta Y \cos \varphi_{\text{local}} \sin \lambda_{\text{local}} + \Delta Z \sin \varphi_{\text{local}} - \Delta a \frac{a}{R_N} + \Delta p \frac{b}{a} R_N \sin^2 \varphi_{\text{local}}.$$

Rappelons la signification des symboles utilisés dans ces formules.

λ_{WGS84}	Longitude définie dans le datum WGS84
λ_{local}	Longitude définie dans le datum local
φ_{WGS84}	Latitude définie dans le datum WGS84
φ_{local}	Latitude définie dans le datum local
h_{WGS84}	Hauteur (ellipsoïdale) définie dans le datum WGS84
h_{local}	Hauteur (ellipsoïdale) définie dans le datum local
ΔX	Correction à apporter à la coordonnée rectangulaire en X d'un système local pour obtenir la valeur correspondante dans le système WGS: $X_{\text{WGS}} = X_{\text{local}} + \Delta X$
ΔY	Correction à apporter à la coordonnée rectangulaire en Y d'un système local pour obtenir la valeur correspondante dans le système WGS: $Y_{\text{WGS}} = Y_{\text{local}} + \Delta Y$
ΔZ	Correction à apporter à la coordonnée rectangulaire en Z d'un système local pour obtenir la valeur correspondante dans le système WGS: $Z_{\text{WGS}} = Z_{\text{local}} + \Delta Z$
R_M	Rayon de courbure de l'ellipsoïde local dans le plan du méridien
R_N	Rayon de courbure de l'ellipsoïde local dans un plan perpendiculaire au plan du méridien
a	Demi grand axe de l'ellipsoïde local
b	Demi petit axe de l'ellipsoïde local
e	Excentricité de l'ellipsoïde local
Δa	Correction à apporter au demi grand axe de l'ellipsoïde international pour obtenir le demi grand axe de l'ellipsoïde WGS84 $a_{\text{WGS84}} = a_{\text{local}} + \Delta a$
Δp	Correction à apporter à l'aplatissement de l'ellipsoïde international pour obtenir l'aplatissement de l'ellipsoïde WGS84 $p_{\text{WGS84}} = p_{\text{local}} + \Delta p$

Il convient cependant de préciser que ces formules générales ne sont pas applicables à proximité des pôles.

Actuellement les pays de l'Europe occidentale utilisent l'ellipsoïde international (§ 2.4.3) défini par Hayford en 1924. Il se caractérise par les paramètres suivants :

demi grand axe : $a = 6\,378\,388$ m,
demi petit axe : $b = 6\,356\,911,946$ m,
aplatissement : $p = 1/297,0$
excentricité : $e = 0,0819918899790$.

Toujours pour cet ellipsoïde et pour la plupart des pays de l'Europe de l'ouest, les constantes à utiliser dans ces formules générales sont présentées dans le tableau 4.4.1. Pour d'autres parties du monde les valeurs à donner à ces constantes sont présentées pour quelques pays dans l'annexe 7⁸ et détaillées dans **DMA (1991 ET 2000)**.

Tableau 4.4.1. Paramètres de transformation des coordonnées géodésiques européennes en coordonnées géodésiques WGS84 (**DMA, 1991 ET 2000**).

Symbole	Valeur
Δa	-251 m
Δp	$-0,14192702 \cdot 10^{-4}$
ΔX	$-87 \text{ m} \pm 3$
ΔY	$-98 \text{ m} \pm 8$
ΔZ	$-121 \text{ m} \pm 5$

A titre d'exemple, l'application de ces formules aux coordonnées géodésiques du sommet du clocher de l'église de Gembloux:

$$\begin{aligned}\lambda &= 4^\circ 41' 35,109'' \\ \varphi &= 50^\circ 33' 43,769'' \\ h &= 197,29 \text{ m}\end{aligned}$$

donne les résultats suivants:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= -4,6004'' \\ \Delta\varphi &= -3,0231 \\ \Delta h &= 42,95 \text{ m}\end{aligned}$$

Remarquons que ces formules permettent de calculer des coordonnées géodésiques WGS-84 à partir des coordonnées géodésiques locales et non l'inverse. Le plus souvent cependant c'est effectivement le problème inverse qui se pose. Il devra être résolu par approximations successives.

4.4.2. La transformation de coordonnées ETRS89 en coordonnées du système belge BE_BD72 / LAMB72

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, il y a plusieurs voies de transformation des coordonnées ETRS89 mais la transformation la plus fréquemment utilisée et la plus précise est celle qui se pratique au niveau des coordonnées rectangulaires géocentrées. Nous suivrons donc cette voie.

⁸ <https://hdl.handle.net/2268/293542>

La première étape consiste à transformer les coordonnées rectangulaires géocentrées X_{ETRS89} , Y_{ETRS89} et Z_{ETRS89} en coordonnées rectangulaires géocentrées du datum BD72 X_{BD72} , Y_{BD72} et Z_{BD72} . Pour ce faire, il faut appliquer la transformation de HELMERT à sept paramètres exposée au § 4.2.2. Les paramètres de cette transformation, proposés par l'IGN (2009) pour la Belgique, sont présentés dans le tableau 4.4.2.

Tableau 4.4.2. Paramètres de la transformation de HELMERT permettant d'obtenir les coordonnées géocentriques du datum BD72 à partir des coordonnées géocentriques du datum ETRS89 (selon les notations du § 4.4.2).

Translation en X : d_1	106,868628 m
Translation en Y : d_2	-52,297783 m
Translation en Z : d_3	103,723893 m
Facteur d'échelle s	1,0000012747
Rotation autour de l'axe X : β_1	0,336570 " ou $1,63174 \cdot 10^{-6}$ rad
Rotation autour de l'axe Y : β_2	-0,456955 " ou $-2,21538 \cdot 10^{-6}$ rad
Rotation autour de l'axe Z : β_3	1,842183 " ou $8,93116 \cdot 10^{-6}$ rad

La deuxième étape est destinée à la conversion de ces coordonnées rectangulaires géocentrées ainsi obtenues (X_{BD72} , Y_{BD72} et Z_{BD72}) en coordonnées géodésiques du même datum (λ_{BD72} , φ_{BD72} et h_{BD72}) selon une des procédures exposées au § 4.3.1.

La troisième étape permet de réaliser la projection qui convertit les longitude λ_{BD72} et latitude φ_{BD72} en coordonnées cartographiques planes x'_{BD72} , y'_{BD72} .

Quatrièmement, pour réduire l'imprécision résultant de la transformation de HELMERT appliquée à la première étape, ces coordonnées planes sont modifiées en appliquant les relations suivantes :

$$x_{BD72} = x'_{BD72} + \Delta x,$$

$$y_{BD72} = y'_{BD72} + \Delta y,$$

où Δx et Δy sont des corrections calculées par l'IGN (2009) pour tout le territoire belge. Elles sont disponibles pour des surfaces carrées de 2 km de côtés et présentées dans un fichier (xyGridlb72.xls) qui peut être obtenu auprès de l'IGN.

La cinquième étape est dédiée au calcul de la hauteur ellipsoïdale h_{ETRS89} à partir des coordonnées rectangulaires géocentrées X_{ETRS89} , Y_{ETRS89} et Z_{ETRS89} en appliquant une des procédures exposées au paragraphe 4.3.1 :

La sixième et dernière étape consiste en la conversion de la hauteur ellipsoïdale h_{ETRS89} en une altitude H_{DNG} référencée au deuxième nivellement général par la relation suivante :

$$H_{DNG} = h_{ETRS89} + \Delta h,$$

où Δh est la distance entre l'ellipsoïde WGS84, considéré comme identique à l'ellipsoïde ETRS89, et le pseudo-géoïde belge BG03 présenté au paragraphe 2.2.3. Cette distance est également appelée dénivelée géoïdale ou ondulation du géoïde et souvent notée N . Les valeurs de cette distance sont disponibles pour des surfaces "carrées" de 1,67 minutes de longitude et de latitude de côtés et présentées dans un fichier (hBG03.xls) qui peut être obtenu auprès de l'IGN.

Exemple 4.4.1. Transformation des coordonnées rectangulaires géocentrées de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux en coordonnées cartographiques du datum BD72.

Soit à calculer les coordonnées cartographiques, dans le datum belge BD72, de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux (point géodésique n° 40F12C1 - IGN), à partir de ses coordonnées rectangulaires géocentrées ETRS89. Celles-ci ont pour valeurs :

$$X_{\text{ETRS89}} = 4.046.068,019 \text{ m,}$$

$$Y_{\text{ETRS89}} = 333.828,736 \text{ m,}$$

$$Z_{\text{ETRS89}} = 4.902.973,807 \text{ m.}$$

La première étape consiste donc à transformer ces coordonnées en coordonnées rectangulaires géocentrées dans le datum BD72. A partir des paramètres présentés dans le tableau 4.4.2, cette transformation s'opère par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} X_{\text{BD72}} \\ Y_{\text{BD72}} \\ Z_{\text{BD72}} \end{bmatrix} = 1,0000012747 * \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_{\text{ETRS89}} \\ Y_{\text{ETRS89}} \\ Z_{\text{ETRS89}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106,868628 \\ -52,297783 \\ 103,723893 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.046.193,888 \text{ m} \\ 333.748,728 \text{ m} \\ 4.903.074,272 \text{ m} \end{bmatrix},$$

avec pour matrice de rotation \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} \approx \begin{bmatrix} 1 & 8,93115 \cdot 10^{-6} & 2,21538 \cdot 10^{-6} \\ -8,93115 \cdot 10^{-6} & 1 & 1,63174 \cdot 10^{-6} \\ -2,21538 \cdot 10^{-6} & -1,63174 \cdot 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}.$$

En deuxième étape, on calcule les longitude λ_{BD72} et latitude φ_{BD72} à partir des coordonnées qui viennent d'être calculées, par les formules présentées dans le paragraphe 4.3.1 :

$$\lambda_{\text{BD72}} = \arctan \frac{Y_{\text{BD72}}}{X_{\text{BD72}}} = \arctan \frac{333.748,728}{4.046.193,888} = 0,0822983 \text{ rad ou } 4^{\circ} 42' 55,24364''.$$

Le calcul de la latitude est réalisé à partir de la formule approchée :

$$\varphi_{\text{BD72}} = \arctan \frac{Z_{\text{BD72}} + e^2 b \sin^3(\theta)}{r_{\text{BD72}} - e^2 a \cos^3(\theta)},$$

dans laquelle a , b et e sont respectivement des demis grand et petit axe et l'excentricité de l'ellipsoïde utilisé dans le datum BD72, à savoir l'ellipsoïde de Hayford 1924 pour lequel (§ 2.3.5) :

$$a = 6.378.888 \text{ m,}$$

$$1/p = 297,$$

ce qui permet de calculer (§ 2.3.3)⁹:

$$b = a(1-p) = 6.378.888(1-1/297) = 6.356.911,946 \text{ m,}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,00672267,$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0,00676817,$$

$$r_{BD72} = \sqrt{X_{BD72}^2 + Y_{BD72}^2} = 4.059.935,122 \text{ m,}$$

$$\theta = \arctan \frac{Z_p a}{r_p b} = 0,88084715,$$

et finalement la latitude :

$$\varphi_{BD72} = \arctan \frac{Z_{BD72} + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_{BD72} - e^2 a \cos^3(\theta)} = 0.882802241 \text{ rad ou } 50^\circ 33' 49,1538".$$

La troisième étape est constituée de la projection Lambert 72 permettant de convertir les longitude et latitude en coordonnées cartographiques planes x_{BD72} et y_{BD72} . Cette procédure est exposée dans le paragraphe 3.4.4 et illustrée dans l'exemple 3.4.1. L'application de cette procédure donne les résultats de cette 3^{ème} étape :

$$x'_{BD72} = 174.646,652 \text{ m,}$$

$$y'_{BD72} = 139.210,647 \text{ m.}$$

L'étape suivante, la 4^{ème}, apporte des corrections à ces coordonnées planimétriques, réduisant l'imprécision résultant de l'application, à la première étape, d'une formule de transformation unique pour tout le territoire. Ces corrections sont présentées dans le tableau 4.4.3.

Tableau 4.4.3. Corrections des coordonnées planes

	y = 138.000 m	y = 140.000 m
x = 174.000 m	$\Delta x = -0,006 \text{ m}$	$\Delta x = -0,004 \text{ m}$
x = 176.000 m	$\Delta x = -0,007 \text{ m}$	$\Delta x = 0,003 \text{ m}$
x = 174.000 m	$\Delta y = 0,060 \text{ m}$	$\Delta y = 0,040 \text{ m}$
x = 176.000 m	$\Delta y = 0,051 \text{ m}$	$\Delta y = 0,043 \text{ m}$

L'interpolation bilinéaire entre ces valeurs donne le résultat :

$$\Delta x = -0,0035 \text{ m}$$

$$\Delta y = 0,0473 \text{ m}$$

Les coordonnées cartographiques planes ainsi corrigées deviennent :

$$x'_{BD72} = 174.646,652 - 0,0035 = 174.646,6485, \text{ soit } 174.646,65 \text{ m,}$$

⁹ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

$$y'_{BD72} = 139.210,647 + 0.0473 = 139.210,6943, \text{ soit } 139.210,69 \text{ m.}$$

Si la correction en x est négligeable dans ce cas, celle en y ne l'est pas.

En cinquième étape, on calcule la hauteur ellipsoïdale dans le datum ETRS89 à partir des coordonnées initiales X_{ETRS89} , Y_{ETRS89} et Z_{ETRS89} , par les formules présentées dans le paragraphe 4.3.1 :

Le calcul de la latitude, nécessaire au calcul de cette hauteur ellipsoïdale, est réalisé à partir de la formule approchée :

$$\varphi_{ETRS89} = \arctan \frac{Z_{ETRS89} + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_{ETRS89} - e^2 a \cos^3(\theta)},$$

dans laquelle a, b et e sont respectivement des demis grand et petit axe et l'excentricité de l'ellipsoïde utilisé dans le datum ETRS89, à savoir l'ellipsoïde WGS84 pour lequel (§ 2.3.6) :

$$a = 6.378.137 \text{ m,}$$

$$1/p = 298,257222101,$$

ce qui permet de calculer (§ 2.3.3):

$$b = a(1-p) = 6.356.752,314 \text{ m,}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,00669438,$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0,00673950,$$

$$r_{ETRS89} = \sqrt{X_{ETRS89}^2 + Y_{ETRS89}^2} = 4.059.816.257 \text{ m,}$$

$$\theta = \arctan \frac{Z_p a}{r_p b} = 0,88084447,$$

et finalement la latitude :

$$\varphi_{ETRS89} = \arctan \frac{Z_{ETRS89} + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_{ETRS89} - e^2 a \cos^3(\theta)} = 0.882492558 \text{ rad ou } 50^\circ 33' 47.1564''.$$

Il reste alors à calculer le rayon de courbure de l'ellipse méridienne à la latitude correspondante :

$$N_{ETRS89} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{ETRS89})^{1/2}} = 6.390.909,532 \text{ m,}$$

ce qui permet d'obtenir la hauteur ellipsoïdale :

$$h_{ETRS89} = \frac{r_{ETRS89}}{\cos(\varphi_{ETRS89})} - N_{ETRS89} = 206,570 \text{ m.}$$

La sixième et dernière étape permet de convertir cette hauteur ellipsoïdale, calculée à partir de l'ellipsoïde WGS84 en une altitude référencée au deuxième nivellement général et calculée à partir du pseudo-géοïde belge BG03 par la formule :

$$H_{DNG} = h_{ETRS89} + \Delta h,$$

La valeur de Δh se déduit d'une interpolation bilinéaire à partir des valeurs présentées dans le tableau 4.4.4 et extraites du fichier hBG03.xls évoqué ci-dessus. Pour sélectionner les valeurs entre lesquelles se fait cette interpolation, il faut connaître les longitude et latitude du point dans le datum ETRS89. La latitude a été calculée dans l'étape précédente. La longitude se calcule par l'expression :

$$\lambda_{ETRS89} = \arctan \frac{Y_{ETRS89}}{X_{ETRS89}} = 0,0823205 \text{ rad ou } 4^{\circ}42'59,8205''$$

Tableau 4.4.4. Écarts entre la hauteur ellipsoïdale h_{ETRS89} et l'altitude H_{DNG} .

	$\lambda_{ETRS89} = 4,7000^{\circ}$	$\lambda_{ETRS89} = 4,7167^{\circ}$
$\varphi_{ETRS89} = 50,5500^{\circ}$	$\Delta h = -43,606\text{m}$	$\Delta h = -43,578 \text{ m}$
$\varphi_{ETRS89} = 50,5667^{\circ}$	$\Delta h = -43,612 \text{ m}$	$\Delta h = -43,585\text{m}$

Par interpolation bilinéaire entre les valeurs présentées dans le tableau 4.4.4 et pour une longitude de $4,716617^{\circ}$ et une latitude de $50,563099$, la valeur de Δh est de $-43,5836 \text{ m}$, ce qui donne pour valeur de l'altitude :

$$H_{DNG} = 206,570 - 43,584 = 162,986 \text{ m.}$$

Le tableau 4.4.5 présente la synthèse des six étapes qui permettent d'obtenir les coordonnées planimétriques et l'altitude de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux dans le datum BD72.

Tableau 4.4.5. Synthèse des coordonnées calculées en vue de la transformation de coordonnées rectangulaires géocentrées ETRS89 en coordonnées cartographiques BD72 de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux.

Départ	$X_{ETRS89} = 4.046.068,019 \text{ m}$	$Y_{ETRS89} = 333.828,736 \text{ m}$	$Z_{ETRS89} = 4.902.973,807 \text{ m}$
1 ^{ère} étape	$X_{BD72} = 4.046.193,888 \text{ m}$	$Y_{BD72} = 333.748,728 \text{ m}$	$Z_{BD72} = 4.903.074,272 \text{ m}$
2 ^{ème} étape	$\lambda_{BD72} = 4\ 42' 55,2436'' \text{ E}$	$\varphi_{BD72} = 50^{\circ} 33' 49,1538'' \text{ N}$	
3 ^{ème} étape	$x_{BD72} = 174.646,65 \text{ m}$	$y_{BD72} = 139.210,65 \text{ m}$	
4 ^{ème} étape	$x_{BD72} = 174.646,65 \text{ m}$	$y_{BD72} = 139.210,69 \text{ m}$	
5 ^{ème} étape			$h_{ETRS89} = 206,57 \text{ m}$
6 ^{ème} étape			$H_{BD72} = 162,99 \text{ m}$

4.4.3. La conversion de coordonnées ETRS89 en coordonnées du système belge BE_ETRS89 / LB08

Comme indiqué dans le paragraphe 3.4.5¹⁰, le système belge BE_ETRS89 / LB08, également appelé le Lambert belge 2008, a été conçu pour faciliter la conversion des coordonnées fournies par les satellites en coordonnées cartographiques locales.

La première étape consiste à convertir les coordonnées rectangulaires géocentrées ainsi obtenues (X_{ETRS89} , Y_{ETRS89} et Z_{ETRS89}) en coordonnées géodésiques du même datum (λ_{ETRS89} , φ_{ETRS89} et h_{ETRS89}) selon une des procédures exposées au § 4.3.1.

La deuxième étape permet de réaliser la projection qui convertit les longitude λ_{ETRS89} et latitude φ_{ETRS89} en coordonnées cartographiques planes X_{BD08} , Y_{BD08} .

La troisième et dernière étape consiste en la conversion de la hauteur ellipsoïdale h_{ETRS89} en une altitude H_{DNG} référencée au deuxième nivellement général par la relation suivante :

$$H_{DNG} = h_{ETRS89} + \Delta h,$$

où Δh est la distance entre l'ellipsoïde WGS84, considéré comme identique à l'ellipsoïde ETRS89, et le pseudo-géoïde belge BG03 présenté au paragraphe 2.2.3. Cette distance est également appelée dénivelée géoïdale ou ondulation du géoïde et souvent notée N . Les valeurs de cette distance sont disponibles pour des surfaces "carrées" de 1,67 minutes de longitude et de latitude de côtés et présentées dans un fichier (hBG03.xls) qui peut être obtenu auprès de l'IGN.

Exemple 4.4.2. Transformation des coordonnées rectangulaires géocentrées de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux en coordonnées cartographiques du datum BD08.

Soit à calculer les coordonnées cartographiques, dans le datum belge BD72, de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux (point géodésique n° 40F12C1 - IGN), à partir de ses coordonnées rectangulaires géocentrées ETRS89. Celles-ci ont pour valeurs :

$$X_{ETRS89} = 4.046.068,019 \text{ m},$$

$$Y_{ETRS89} = 333.828,736 \text{ m},$$

$$Z_{ETRS89} = 4.902.973,807 \text{ m}.$$

En première étape, on calcule les longitude λ_{ETRS89} , latitude φ_{ETRS89} et hauteur ellipsoïdale h_{ETRS89} à partir de ces coordonnées, par les formules présentées dans le paragraphe 4.3.1, comme dans l'exemple 4.4.1 :

$$\lambda_{ETRS89} = \arctan \frac{Y_{ETRS89}}{X_{ETRS89}} = \arctan \frac{333.828,736}{4.046.068,019} = 0,0823205 \text{ rad ou } 4^{\circ}42'59,8205''.$$

¹⁰ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

Le calcul de la latitude est réalisé à partir de la formule approchée :

$$\varphi_{\text{ETRS89}} = \arctan \frac{Z_{\text{ETRS89}} + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_{\text{ETRS89}} - e^2 a \cos^3(\theta)},$$

dans laquelle a, b et e sont respectivement des demis grand et petit axe et l'excentricité de l'ellipsoïde utilisé dans le datum ETRS89, à savoir l'ellipsoïde WGS84 pour lequel (§ 2.3.6)¹¹ :

$$a = 6.378.137 \text{ m},$$

$$1/p = 298,257222101,$$

ce qui permet de calculer (§ 2.3.3)⁹:

$$b = a (1-p) = 6.356.752,314 \text{ m},$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,00669438,$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0,00673950,$$

$$r_{\text{ETRS89}} = \sqrt{X_{\text{ETRS89}}^2 + Y_{\text{ETRS89}}^2} = 4.059.816.257 \text{ m},$$

$$\theta = \arctan \frac{Z_p a}{r_p b} = 0,88084447,$$

et finalement la latitude :

$$\varphi_{\text{ETRS89}} = \arctan \frac{Z_{\text{ETRS89}} + e'^2 b \sin^3(\theta)}{r_{\text{ETRS89}} - e^2 a \cos^3(\theta)} = 0.882492558 \text{ rad ou } 50^\circ 33' 47.1564''.$$

Il reste alors à calculer le rayon de courbure de l'ellipse méridienne à la latitude correspondante :

$$N_{\text{ETRS89}} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{ETRS89}})^{1/2}} = 6.390.909,532 \text{ m},$$

ce qui permet d'obtenir la hauteur ellipsoïdale :

$$h_{\text{ETRS89}} = \frac{r_{\text{ETRS89}}}{\cos(\varphi_{\text{ETRS89}})} - N_{\text{ETRS89}} = 206,570 \text{ m}.$$

La deuxième étape est constituée de la projection Lambert 2008 permettant de convertir les longitude et latitude en coordonnées cartographiques planes x_{BD08} et y_{BD08} . Cette procédure est exposée dans le paragraphe 3.4.4¹² et illustrée dans l'exemple 3.4.1¹⁰. L'application de cette procédure donne les résultats de cette 3^{ème} étape :

$$x_{\text{BD08}} = 674.649,81 \text{ m},$$

¹¹ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

¹² <https://hdl.handle.net/2268/293634>

$$y_{BD08} = 639.214,25 \text{ m.}$$

La troisième et dernière étape permet de convertir la hauteur ellipsoïdale, calculée à partir de l'ellipsoïde WGS84 en une altitude référencée au deuxième nivellement général et calculée à partir du pseudo-géοïde belge BG03 par la formule :

$$H_{DNG} = h_{ETRS89} + \Delta h.$$

Cette étape est identique à la sixième étape de l'exemple 4.4.1.

Le tableau 4.4.6 présente une synthèse de ces trois étapes permettant la conversion des coordonnées rectangulaires géocentrées en coordonnées cartographiques.

Tableau 4.4.6. Synthèse des coordonnées calculées en vue de la transformation de coordonnées rectangulaires géocentrées ETRS89 en coordonnées cartographiques BD08 de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux.

Départ	$X_{ETRS89} = 4.046.068,019 \text{ m}$	$Y_{ETRS89} = 333.828,736 \text{ m}$	$Z_{ETRS89} = 4.902.973,807 \text{ m}$
1 ^{ère} étape	$\lambda_{ETRS89} = 4 \text{ } 42' \text{ } 59,8205'' \text{ E}$	$\phi_{ETRS89} = 50^{\circ} \text{ } 33' \text{ } 47,1564'' \text{ N}$	
2 ^{ème} étape	$x_{BD08} = 674.649,81 \text{ m}$	$y_{BD08} = 639.214,25 \text{ m}$	
3 ^{ème} étape			$H_{BD08} = 162,99 \text{ m}$

4.4.4. La transformation de coordonnées WGS84 en coordonnées du ETRS89

La transformation de coordonnées WGS84 en coordonnées du ETRS89 se fait par la transformation de HELMERT, dite aussi transformation à sept paramètres, exposée au paragraphe 4.2.2.

Les paramètres de cette transformation ne sont cependant pas constants. En effet, comme indiqué au paragraphe 2.4.2.5¹³, le datum ETRS89 est "attaché" à la plaque continentale eurasienne qui se déplace sans cesse par rapport à la Terre. Ce déplacement entre le datum WGS84 et le datum ETRS89 est de quelques centimètres par an. En 2009, l'écart entre ces deux datum pour la Belgique est de l'ordre de trente centimètres. Cet écart ne porte pas à conséquence pour des positionnements dont la précision est de quelques mètres. Il est, par contre, tout à fait considérable pour des positionnements plus précis et doit donc être corrigé par la transformation des coordonnées du datum WGS84 en coordonnées ETRS89.

Rappelons que les positionnements par satellites relatifs (RTK) ou différentiels (DGPS § 13.4.2¹⁴) qui sont menés sur le territoire de l'Europe s'expriment directement dans le datum ETRS89 et ne nécessitent donc pas de transformation.

Chacun de ces deux datum a fait l'objet de diverses réalisations qui sont détaillées dans le tableau 4.4.1. Les paramètres permettant ces transformations sont accessibles à l'adresse <http://itrf.ensg.ign.fr>.

Tableau 4.4.1. Réalisations des datum WGS84 et ETRS89

Réalisations du datum WGS84
WGS84 valable depuis le début du fonctionnement du système GPS
WGS84 (G730) – En vigueur entre le 2/1/1994 et le 28/9/1996
WGS84 (G873) – En vigueur entre le 29/9/1996 et le 19/01/2002

¹³ <https://hdl.handle.net/2268/293594>

¹⁴ <https://hdl.handle.net/2268/301113>

WGS84 (G1150) – En vigueur à partir du 20/1/2002
Réalisations du datum ETRS89
ETRF89, ETRF90, ETRF91, ETRF92, ETRF93, ETRF94, ETRF96, ETRF97, ETRF2000 et ETRF2005

4.5. D'un référentiel cartographique à un autre

1° Soit à transformer des coordonnées cartographiques définies dans un datum, appelées coordonnées sources, en des coordonnées cartographiques définies dans un autre datum, appelées coordonnées cibles. La transformation du datum source en datum cible se fait au niveau des coordonnées rectangulaires géocentrées par une transformation de HELMERT à sept paramètres, telle qu'exposée au paragraphe 4.2.2. En conséquence la procédure de transformation comprendra six étapes, illustrées dans la figure 4.5.1.

La première étape consiste à convertir les coordonnées cartographiques du datum source (x_s , y_s , et h_s) en coordonnées géodésiques du même datum (λ_s , φ_s et h_s) selon une procédure particulière au système de projection utilisé, comme exposé au paragraphe 3.4.3.3^{15°} pour la projection LAMBERT sécante. Si la coordonnée verticale est une altitude H_s , elle doit au préalable être transformée en une hauteur ellipsoïdale h_s , ce qui suppose la connaissance de la position du géoïde par rapport à l'ellipsoïde du datum source.

La deuxième étape convertit les coordonnées géodésiques (λ_s , φ_s et h_s) en coordonnées rectangulaires géocentrées (X_s , Y_s et Z_s) selon la procédure énoncée au paragraphe 4.3.2.

La troisième étape est la transformation des coordonnées rectangulaires géocentrées du datum source (X_s , Y_s et Z_s) en coordonnées rectangulaires géocentrées du datum cible (X_c , Y_c et Z_c). Cette étape suppose que soient connues les valeurs des sept paramètres de la transformation de HELMERT à mettre en œuvre. Il se peut que ces paramètres ne soient pas disponibles. Dans certains pays, cette information est considérée comme stratégique et confidentielle. Si ces valeurs ne sont pas connues, on peut procéder à leur estimation. Pour ce faire, il faut disposer, pour un nombre de points suffisants (de dix à vingt), des coordonnées rectangulaires géocentrées du système source et du système cible et procéder à l'estimation de ces sept paramètres par un ajustement par la méthode des moindres carré telle qu'exposée au chapitre 5.

La quatrième étape permet la conversion de ces coordonnées rectangulaires géocentrées en coordonnées géodésiques (λ_c , φ_c et h_c) du système cible, selon la procédure énoncée au paragraphe 4.3.2.

La cinquième étape est la projection de ces coordonnées en coordonnées cartographiques (x_c , y_c , et h_c) du système cible selon la méthode de projection adéquate (chapitre 1).

Enfin, la sixième étape éventuelle permet de transformer la hauteur h_c en une altitude H_c .

¹⁵¹⁵ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

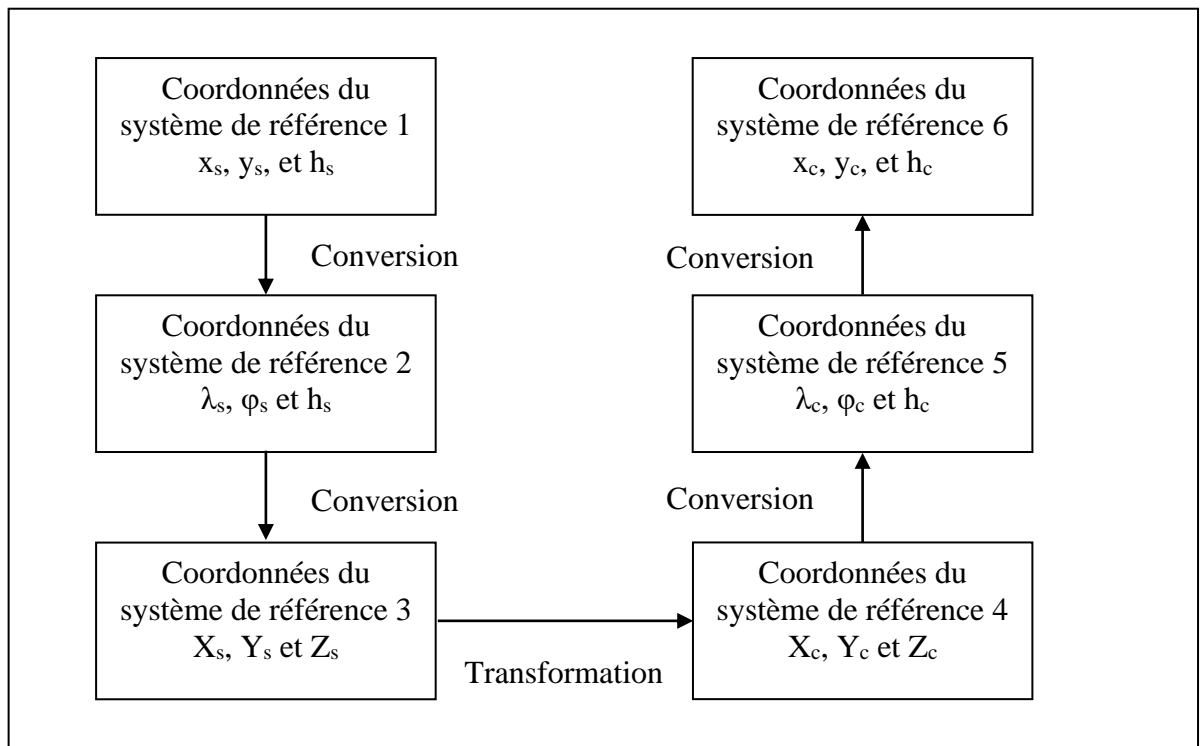


Figure 4.5.1. Procédure de transformation des coordonnées cartographiques d'un datum dans un autre datum

Exemple 4.5.1. Transformation des coordonnées cartographiques Lambert72 en coordonnées cartographiques Lambert 2008 de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux.

Les coordonnées cartographiques BD72 de la borne du réseau BEREf située sur la Commune de Gembloux sont :

$$x_{BD72} = 174.646,65 \text{ m}$$

$$y_{BD72} = 139210,69 \text{ m}$$

$$h_{BD72} = 163,095 \text{ m.}$$

Le calcul des coordonnées géodésiques λ_{BD72} , φ_{BD72} se fait selon la procédure exposée au paragraphe 3.4.3. 3^{16o} et donne les résultats suivants.

$$\gamma = \arctan \frac{x - x_0}{y_0 - y} = \arctan \frac{174.646,65 - 150.000,013}{5.400.088,438 - 139.210,69} = 0,00468486.$$

$$\lambda_{BD72} = \frac{\gamma}{n} + \lambda_0 = \frac{0,00468486}{0,771642} + 0,0761170 = 0,0822983 \text{ rad ou } 4^\circ 42' 55,2435''$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(174.646,65 - 150.000,013)^2 + (139.210,69 - 5.400.088,438)^2} = 5.260.935,$$

$$t = \left(\frac{R}{K}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{5.260.935,481}{11.565.915,8680}\right)^{\frac{1}{0,77164219}} = 0,36027797 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{1 + e \cos \theta}{1 - e \cos \theta}\right)^{\frac{e}{2}}.$$

Dans cette expression l'excentricité e vaut 0,081991890. La valeur de θ , racine de cette équation vaut :

$$\theta = 0,688294,$$

ce qui permet de calculer la latitude :

$$\varphi_{BD72} = \frac{\pi}{2} - \theta = 0,88250224 \text{ rad ou } 50^\circ 33' 49,1538''.$$

La deuxième étape fournit les coordonnées rectangulaires géocentrées du datum BD72 selon la procédure exposée au paragraphe 4.3.2, ce qui donne :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{BD72})^{1/2}} = \frac{6.378.388}{(1 - 0,081991890^2 \sin^2 0,88250224)^{1/2}} = 6.391.215,38 \text{ m,}$$

$$X_p = (N_p + h_p) \cos \varphi_p \cos \lambda_p$$

$$Y_p = (N_p + h_p) \cos \varphi_p \sin \lambda_p$$

$$Z_p = \left[N_p (1 - e^2) + h_p \right] \sin \varphi_p$$

$$X_p = (6.391.215,38 + 163,095) \cos 0,88250224 \cos 0,082298303 = 4.046.193,889 \text{ m}$$

$$Y_p = (6.391.215,38 + 163,095) \cos 0,88250224 \sin 0,082298303 = 333.748,726 \text{ m}$$

$$Z_p = \left[6.391.215,38 (1 - 0,081991890^2) + 163,095 \right] \sin 0,88250224 = 4.903.074,272 \text{ m}$$

¹⁶ <https://hdl.handle.net/2268/293634>

La troisième étape est la transformation de ces coordonnées rectangulaires géocentrées du datum BD72 en les coordonnées rectangulaires géocentrées du datum ETRS89. Comme indiqué ci-dessus, il s'agit d'appliquer une transformation de HELMERT à sept paramètres (§ 4.2.2) qui peut se présenter sous la forme simplifiée :

$$\begin{bmatrix} X_{\text{ETRS89}} \\ Y_{\text{ETRS89}} \\ Z_{\text{ETRS89}} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & s & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{BD72}} \\ Y_{\text{BD72}} \\ Z_{\text{BD72}} \end{bmatrix}.$$

A noter que les paramètres fournis par l'IGN belge concernent la transformation inverse, c'est-à-dire la transformation du datum ETRS89 vers le datum BD72. Il suffit de changer les signes des paramètres de translation (d_1 , d_2 et d_3) et de rotation (β_1 , β_2 et β_3) et d'inverser le paramètre d'échelle (s), ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} -106,868628 \\ 52,297783 \\ -103,723893 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,99999872 & -8,93116\text{E-}06 & -2,21538\text{E-}06 \\ 8,93115\text{E-}06 & 0,99999872 & -1,63174\text{E-}06 \\ 2,21539\text{E-}06 & 1,63172\text{E-}06 & 0,99999872 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{BD72}} \\ Y_{\text{BD72}} \\ Z_{\text{BD72}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.046.068,019 \\ 333.828,736 \\ 4.902.973,807 \end{bmatrix}$$

Les étapes suivantes correspondent à la procédure exposée dans l'exemple 4.4.2.

Index des matières

coordonnées	projection
cartésiennes globales, 4	LAMBERT sécante, 34
cartographiques, 6	transformation
géodésiques, 4	à sept paramètres, 11
rectangulaires géocentrées, 4	linéaire à deux dimensions, 8
datum	Transformation
ETRS89, 20, 32	de HELMERT, 11
WGS84, 32	de MOLODENSKY, 21

Index Bibliographique

L'index bibliographique peut être obtenu en suivant le lien :

<https://hdl.handle.net/2268/293535>