MICHAELIS GLŒSENER,

EX HAUT-CHARAGE IN MAGNO DUCATU LUXEMBURGENSI,

MATHESEOS ET PHILOSOPHIÆ NATURALIS

IN ACADEMIA LEODIENSI CANDIDATI,

COMMENTATIO

AD

QUÆSTIONEM AB ORDINE DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM ACADEMIÆ LEODIENSIS E MATHESI A. MDCCCXVIII

PROPOSITAM:

Postulatur : ut calculi litteralis seu algebraïci theoria principiis e sola arithmetica et signorum natura petitis, missa quantitatum positivarum et negativarum seorsim existentium absurda distinctione, superstruatur. Dein æquatio generalis tum primi, cum secundi gradus resolvatur discutiaturque ita ut varia solutionum genera, puta negativarum, infinitarum, et cæt. eruantur, verus et genuinus earum sensus, ratioque eis in analysi utendi explicentur aptisque exemplis illustrentur.

QUÆ PRÆMIUM REPORTAVIT D. IV. MENSIS OCTOBRIS A. MDCCCXIX.

SECTIO I.

THEORIA CALCULI ALGEBRAÏCI.

CAPUT I.

DE ORIGINE ET NATURA QUANTITATUM ALGEBRAÏCARUM.

1. Quum in vera calculi algebraïci principia inquirere instituam; hæcque partim in arithmetica existant, a proposito nequaquam alienum erit Algebram cum Arithmetica conferre, et breviter exponere quæ inter illas sit affinitas et quæ differentia intercedat. Nimirum, Arithmetica paucarum notarum quarum cuique suus inest valor, ope numeros quoscumque datos repræsentat : Algebra quæ numeros generaliori ratione considerat et a particulari eorum valore abstrahit ad numeros quoscumque sive datos sive incognitos repræsentandos generaliora adhibet symbola, litteras nempe alphabeticas, quæ quum nullum sibi proprium valorem habeant, quoslibet numeros repræsentare aptæ sunt. -- Arithmetica ex numeris datis seu cognitis, operationibus certa lege institutis, novos eruit numeros qui cum datis certas relationes habeant, quæ vulgo summæ, differentiæ, facti seu producti, quoti, potentiæ vel radicis nomine veniunt : Algebra litteras numeros exhibentes, præfixis vel interpositis certis signis, conjungendo, nova quoque componit symbola quæ non præfatas tantum easque simplices, sed quascumque complicatas quantitatum relationes repræsentent. -- Demum Arithmetica in solvendis problematibus nihil aliud sibi præstituit quam ut quantitatis incognitæ valorem numericum inveniat : Algebra vero non tam incognitæ valorem numericum quærit quam legem qua valor hic ex cognitis seu datis erui vel derivari possit.

2. Igitur Arithmetica et Algebra circa unum idemque objectum versantur; illa quidem ordine prior, huic prima subministrat fundamenta, hæc vero illa multo generalior est et sphæram multo ampliorem, imo quodammodo indefinitam amplectitur. Sunt vero duæ partes unius ejusdemque disciplinæ quæ quantitates quantitatumque relationes sive simplices sive complexas, paucorum siguorum ope repræsentare, ratiocinia quas circa illas instituit, eorum signorum usu exprimere, incognitasque ex datis, magno operationum compendio, eruere docet.

3. Itaque in Algebra numeri tum cogniti, tum incogniti litteris designantur alphabeticis, , illi quidem prioribus a b c.., hi posterioribus x y z.. : operationes vero quas Arithmetica circa illos exequitur, certis signis litteris præfixis vel interpositis indicantur, scilicet

1°. *Additio* signo + quod *plus* enunciatur : Sic $a + b + c$ *summam* exhibet quæ oritur cum numero a additur alius b et horum summæ tertius c;

2°. *Subtractio* signo — quod *minus* effertur : sic $a - b$ numerum qui b ex a subtracto residuus est, sive numerorum a et b differentiam repræsentat; pariter $a + b - c$ differentiam inter summam numerorum a et b et numerum c significat;

3°. *Multiplicatio* signo $\times$ vel. multiplicandum inter et multiplicatorem locato indicatur : sic $a \times b$ vel $a.b$ factum designat quod numerum a per b multiplicando obtinetur; pariter $a \times b \times c$ vel $a.b.c$ productum exhibet quod oritur quum factum a in b, per c multiplicatur. Plerumque tamen signum multiplicationis subintelligitur, et multiplicator immediate post multiplicandum scribitur; sic ab, abc, abcd... idem est $a \times b$, $a \times b \times c$, $a \times b \times c \times d$. Hic monere necesse est, signum multiplicationis semper via passiva enunciandum esse, ita ut quantitas præcedens multiplicandi, subsequens multiplicatoris vices agat.

4°. *Divisio* per lineam vel per duo puncta, dividendum inter et divisorem posita, designatur : Sic $\frac{a}{b}$ vel $a : b$ quotum repræsentat qui oritur a per b diviso.

5°. *Potentiarum elevatio* fit vel significatur litteris ad potentiam elevandis ad dextram superius adscribendo numerum qui potentiæ gradum indicet : sic a^2, a^3, a^4, ... a^n numeri a secundam, tertiam, quartam, ... n^{iam} potentiam repræsentant. Numeri minusculi 2, 3, 4... n *exponentes* vocantur.

6°. *Radicum extractio* figuratur, litteris præfixo signo $\sqrt{\ }$ cui numerus inscribitur qui radicis extrahendæ gradum indicet : sic $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$.... $\sqrt[n]{a}$ numeri a radicem secundam, tertiam, quartam, ... n^{iam} denotant. Numerus signo radicali inscriptus *index* radicis audit. Quum de radice secunda quæstio est, index subintelligi, et $\sqrt{a}$ pro $\sqrt[2]{a}$ scribi solet.

4. Hinc perspicitur quæ sit quantitatum algebraïcarum origo et natura : omnes enim ex immediata numerorum et operationum arithmeticarum indicatione oriuntur, et numeros vel numerorum summas, differentias, producta, quotos, potentias vel radices repræsentant.

5. Quantitates algebraïcæ distinguuntur.

1°. In simplices et compositas : *simplices* sunt quæ unica constant littera, ut a, b, x.. ; *compositæ* quæ pluribus litteris, aliquo operationis arithmeticæ signo, junctis conflantur ; tales sunt $a + b$, $a - b$, ab, abc, $\frac{a}{b}$, a^n, $\sqrt[2]{a}$, etc.

2°. In monomia et polynomia : *monomia* sunt quæ ex unica quantitate, sive simplice sive composita, nulli alteri signo + vel — ligata constant : talia sunt a, x, ax, $\frac{a}{x}$, a^n, $\sqrt[n]{a}$. *Polynomia* vocantur quæ ex pluribus quantitatibus signo + vel — conjunctis componuntur; ejusmodi sunt $a + x$, $a - x$, $x^2 - ax + b$, etc. Quantitates distinctæ ex quibus polynomium componitur, ejus *termini* appellantur ; sunt vero *positivi* vel *negativi* prout signo + vel — affecti sunt. Primus terminus polynomii, cum nullo signo affectus est, positivus censetur.

Polynomia in specie *binomia*, *trinomia*, *quadrinomia*, etc. vocantur quando duobus, tribus, quatuor, etc. terminis constant.

Polynomiorum termini ipsi quoque polynomia esse possunt, sed tunc parenthesi includenda sunt : sic v. g. $(a - b) - (c - d)$ binomium est ex duobus terminis binomiis constans.

6. Quum monomia et polynomia generatim numeros repræsentent quorum summa, differentia, productum, quotus, potentia vel radix denuo quæri potest, patet monomia et polynomia ad calculum algebraïcum perinde se habere ac

numeros chiffris expressos ad calculum numericum. Igitur regulæ practicæ investigandæ sunt per quas tam monomiorum quam polynomiorum additio, subtractio, multiplicatio, divisio, potentiarum elevatio et radicum extractio efficiantur : harum regularum demonstratione theoria calculi algebraïci continetur.

7. Ex iis quæ de quantitatum algebraïcarum natura exposuimus, facile colligitur, vera et genuina calculi algebraïci principia non aliunde quam ex ipsa signorum vi quæ omnis a conventionibus pendet, et ex rerum significatarum natura quæ in Arithmetica definitur, petenda esse.

Omnes propositiones quæ in Arithmetica demonstrantur de numerorum relationibus, quæque a particulari eorum valore non pendent, ad Algebram spectant, et principia quibus calculi algebraïci theoria susperstruatur, suppeditant. Nonnulla quibus in sequentibus frequenter utemur, hic subjicere non erit inutile.

CALCULI ALGEBRAÏCI

PRINCIPIA ARITHMETICA.

8. (a) Si a duorum numerorum summa, eorum subtrahatur unus, residuum dabit alterum.

(b) Si differentia duorum numerorum addatur minori, summa æquabit majorem.

(c) Si differentia duorum numerorum a majore subtrahatur, residuum dabit minorem.

(d) Quod uni ex numeris addendis additur vel detrahitur, eorum summæ additum vel detractum est.

(e) Quod majori ex duobus numeris additur vel detrahitur, eorum differentiæ additum vel detractum est.

(f) Quum duo numeri æqualiter augentur vel minuuntur, eorum differentia non mutatur.

(g) Qui numero cuipiam plures continue addit vel continue subtrahit numeros, idem præstat ac si eorum adderet vel subtraheret summam.

(h) Qui numero cuipiam addit alium, dein subtrahit, nihil præstat, sed priorem numerum invariatum relinquit.

(i) Qui numero cuipiam addit ex duobus majorem, dein subtrahit minorem, idem præstat ac si horum adderet differentiam.

(j) Qui numero cuipiam subtrahit ex duobus majorem, dein addit minorem, idem præstat ac si horum subtraheret differentiam.

(k) Productum duorum numerorum idem est, uteruter in alterum ducatur.

(l) Qui numerum a ducit in alterum b et productum in numerum c, idem præstat ac si numerum a in productum numerorum b et c duceret.

(m) Si plures numeri continue in invicem ducuntur, (nempe numerus a in b, productum in c et sic porro,) idem erit productum quocunque ordine in invicem ducantur.

(n) Productum summæ duorum pluriumve numerorum in tertium ductæ, æquatur summæ productorum quæ obtinentur si singuli seorsim in tertium ducantur.

(o) Productum differentiæ duorum numerorum in tertium ductæ, æquatur differentiæ productorum quæ obtinentur si singuli seorsim in tertium ducantur.

(p) Si productum per unum factorem dividatur, quotus dabit factorem alterum.

(q) Si quotus et divisor in invicem ducantur, productum dabit dividendum.

(r) Si dividendus per quotum dividatur, prodit divisor.

(s) Si factorum alteruter per numerum quempiam multiplicetur aut dividatur, productum per eundem numerum multiplicatum aut divisum erit.

(t) Si factorum unus per numerum quempiam multiplicetur, alter per eundem dividatur, productum idem manebit.

(u) Si factorum unus per a, alter per b multiplicatur aut dividitur, productum per factum numerorum a b multiplicatum aut divisum erit.

(v) Si dividendus per numerum quempiam multiplicatur aut dividitur, eodem manente divisore, quotus per eundem numerum multiplicatus vel divisus erit.

(x) Si divisor per numerum quempiam multiplicatur aut dividitur, eodem manente dividendo, quotus per eundem numerum divisus aut multiplicatus erit.

(y) Si dividendus et divisor per eundem numerum multiplicatur aut dividitur, quotus idem manebit.

(z) Quotus summæ vel differentiæ duorum numerorum per tertium divisæ, æquatur summæ vel differentiæ quotorum qui oriuntur quum singuli per eundem tertium dividuntur.

9. Scholion. Antequam ad calculi algebraïci regulas demonstrandas procedamus, monere necesse est, in omni quantitate algebraïca composita sive monomia sive polynomia operationes arithmeticas eodem ordine quo indicatæ sunt, exequendas esse, nec licere ordinem hunc intervertere nisi prævie demonstretur, hac ordinis mutatione quantitatis algebraïcæ valorem non mutari.

CAPUT II.

DE ADDITIONE ET SUBTRACTIONE QUANTITATUM ALGEBRAÏCARUM.

10. Quum quantitates algebraïcæ generatim in monomia et polynomia distinguantur, regulæ calculi algebraïci pro monomiis et pro polynomiis singulatim et ordine nobis investigandæ sunt.

Additio et subtractio monomiorum nullis indigent regulis, quum enim monomium alteri sive monomio sive polynomio addendum vel subducendum est, illud simpliciter, præfixo signo $+$ vel $-$, post alterum scribitur (3, 1°. et 2°.).

Quod vero polynomia attinet, illorum additionem et subtractionem ad successivas monomiorum additiones et subtractiones reduci demonstrabimus, quod ut facilius præstemus, quædam hic circa polynomiorum naturam propositiones præmittendæ sunt.

11. I^a. In omni polynomio terminorum ordo mutari potest quin polynomii valor inde mutetur. Si enim omnes termini positivi sunt, ut in polynomio $a + b + c$, evidens est polynomii valorem non mutari, mutato ordine terminorum, quia eorundem numerorum eadem summa prodit quocumque ordine invicem addantur; itaque $a + b + c = a + c + b =$ etc. Si termini pars positivi, pars negativi sunt, ut in polynomio $a - b + c$, polynomii valor idem quoque manebit si termini $- b$ et $+ c$ inter se locum mutent;

quod enim majori ex duobus numeris additur, eorum differentiæ additum est (8. e), unde $(a - b) + c = (a + c) - b$ sive $a - b + c = a + c - b$. Idem facile ad alia quæcunque polynomia extenditur.

12. II^a. Omne polynomium cujus termini pars positivi, pars negativi sunt, differentiam duorum numerorum repræsentat sive ad formam $p - n$ reduci potest, si summa terminorum positivorum per p, negativorum per n designetur. Sit enim e. g. polynomium $a - b + c - d + e - f$: hoc, mutato terminorum ordine, fit $a + c + e - b - d - f$; atqui $a + c + e - b - d - f = (a + c + e) - (b + d + f)$; qui enim a summa $a + c + e$ continuo subtrahit numeros b d f, idem præstat ac si numerorum b d f subtraheret summam (8. g.) : igitur $a - b + c - e + d - f = p - n$.

13. III^a. Duo termini æquales, signis contrariis affecti, se invicem destruunt : est enim $a + b - b = a$; nam si ex summa duorum numerorum subtrahitur unus, residuum dat alterum (8. a). Pariter $a - b + b = a$; nam si differentiæ duorum numerorum additur minor, summa dat majorem (8. b).

His præmissis, sit propositum sequens

PROBLEMA.

Polynomium quodcunque addere et subtrahere.

14. Resolutio I^a. Sit polynomio $a + b$ addendum et subtrahendum polynomium $c + d + f$: quum polynomium cujus omnes termini positivi sunt, summam plurium numerorum significet; idem vero sit plures continue numeros addere vel subtrahere ac eorum addere vel subtrahere summam, sequitur terminos c d f polynomio $a + b$ successive et continue addendos vel subtrahendos esse : igitur

$$(a + b) + (c + d + f) = a + b + c + d + f \ldots (A)$$
$$(a + b) - (c + d + f) = a + b - c - d - f \ldots (B)$$

15. Resol. II. Sit polynomio $a + b$ addendum et subtrahendum polynomium $c - d - f + g - k$: Si fiat $c + g = p$ et $d + f + k = n$, erit $c - d - f + g - k = p - n$ (12).

1°. Sit $p - n = \delta$: erit $p = n + \delta$ (8. b.); igitur polynomio $a + b$

addere p idem est ac addere $n + \delta$, sive $a + b + p = a + b + n + \delta$ (14. A.). Si nunc utrimque subtrahatur n, obtinebitur $a + b + p - n = a + b + n + \delta - n = a + b + \delta$ (13) : ergo $a + b + \delta$ sive $(a + b) + (p - n) = a + b + p - n$.

2°. In eadem hypothesi, subtrahere p idem est ac subtrahere $n + \delta$, sive $a + b - p = a + b - n - \delta$ (14. B). Si nunc utrimque addatur n, prodibit $a + b - p + n = a + b - n - \delta + n = a + b - \delta$ (13) : ergo $a + b - \delta$ sive $(a + b) - (p - n) = a + b - p + n$.

Quum p et n polynomia repræsentent quorum termini omnes positivi sunt, eorum additio et subtractio fit juxta formulas A et B (14) : igitur.....

$$(a + b) + (c - d + f + g - k) = a + b + c - d - f + g - k\ldots \text{(C)}$$

$$(a + b) - (c - d - f + g - k) = a + b - c + d + f - g + k \ldots \text{(D)}$$

16. Ex formulis A et C ex una, et ex formulis B et D ex altera parte inter se collatis, duæ sequentes colliguntur regulæ practicæ :

1a. Quum polynomium polynomio addendum est, omnes prioris termini post posterius scribantur, suo cuique servato signo.

2a. Quum polynomium a polynomio subtrahendum est, omnes prioris termini post posterius scribantur signo cujusque termini in contrarium mutato.

De polynomiorum reductione.

17. Polynomium *reduci* dicitur Quum plures termini, salvo polynomii valore, in unum conflantur. Polynomium cujus omnes termini positivi et æquales sunt, ad monomium revocatur : sic pro $a + a$ et $b + b + b$ scribere placuit 2a et 3b quod *bis a* et *ter b* enunciatur. Numeri 2, 3 litteris a et b præfixi, harum *coefficientes* vocantur. Coefficientes quantitatum quibus præfixi sunt, multiplicatores esse, facile patet.

18. Hinc sequitur

1°. Pro polynomiis $a + b + b + a + b$ et $a - b - b + a - b$ scribi posse $2a + 3b$ et $2a - 3b$: nam $a + b + b + a + b = (a + a) + (b + b + b) = 2a + 3b$, et $a - b - b + a - b = (a + a) - (b + b + b) = 2a - 3b$ (12 et 14. B).

2°. Pro $2a + 3a + a$ scribi posse $6a$: nam $2a + 3a + a = a + a + a + a + a + a = 6a$ (17 et 14. A).

3°. Pro $9a - 2b - 3b$ scribi posse $9a - 5b$: nam $9a - 2b - 3b = 9a - (2b + 3b)$ (14. B) $= 9a - 5b$ (18. 2°).

4°. $5a - 4b + 4a - 3b + a$ æquivalere $10a - 7b$: nam $5a - 4b + 4a - 3b + a = (5a + 4a + a) - (4b + 3b) = 10a - 7b$ (14. B).

5°. $9a - 4b - 5a + b$ æquivalere $4a - 3b$: nam $9a - 4b - 5a + b = (9a - 5a) - (4b - b) = 4a - 3b$ (15. D).

6°. $6a - 3b - 4a + 2b + a - b$ æquivalere $3a - 2b$: nam $6a - 3b - 4a + 2b + a - b = (6a - 4a + a) - (3b - 2b + b)$ (15. D) $= (7a - 4a) - (4b - 2b) = 3a - 2b$.

19. Hinc sequentes deducuntur regulæ secundum quas polynomiorum fiat reductio :

1ª. Reductio non cadit nisi in terminos similes. Termini *similes* dicuntur qui iisdem constant litteris, iisdem exponentibus affectis, quicumque cæterum sint coefficientes. Si coefficientes quoque iidem sunt, termini *æquales* erunt.

2ª. Duo quivis termini æquales, signis contrariis affecti, supprimantur (13).

3ª. Si plures termini similes eodem signo affecti, in polynomio occurrant, coefficientes addantur et signum commune conservetur (18. 1°. 2°. 3°. 4°).

4ª. Si duo termini similes signis contrariis affecti sint, coefficiens minor ex majore subducatur, et residuum afficiatur signo majoris (18. 5°.).

5ª. Si tres pluresve termini similes occurrant, addantur hinc omnes coefficientes positivi, illinc omnes negativi, minor summa ex majore subtrahatur, et differentia signo majoris summæ afficiatur (18. 5°. et 6°.).

Cæterum litteræ et exponentes invariati perstant.

20. Reductioni locus est quotiescumque polynomium quod additione vel subtractione vel alia quacumque operatione obtinetur, terminos similes continet. Duo exempla ad rem elucidandam sufficient.

Ex. I. Quæritur summa polynomiorum :

$(4a^2 + 5ab - 3b^2) + (6a^2 - 4ab + 4c) + (a^2 - 3ab + 3b^2)$.

Scribantur polynomia sic ut termini similes sibi correspondeant ut in schemate sequente; tum fiat reductio.

$$\begin{array}{r} 4a^2 + 5ab - 3b^2 \\ + 6a^2 - 4ab + 4c \\ + a^2 - 3ab + 3b^2 \\ \hline 11a^2 - 2ab + 4c \end{array}$$

II. Quæritur differentia : $(5ab + bc - 3c^2) - (ab - 4bc + c^2)$.

Scribatur polynomium subtrahendum sub altero, omnibus signis illius in contraria mutatis; tum fiat reductio :

$$\begin{array}{r} 5ab + bc - 3c^2 \\ - ab + 4bc - c^2 \\ \hline 4ab + 5bc - 4c^2 \end{array}$$

CAPUT III.

DE MULTIPLICATIONE ALGEBRAICA.

ARTICULUS I.

DE MULTIPLICATIONE MONOMIORUM.

21. Monomia in simplicia et composita distinguuntur; composita vero vel producta sunt ut ab, abc, .. vel quoti seu fractiones ut $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, .. vel potentiæ ut a^2, b^3, .. vel radices ut $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, ..; igitur nobis hic inquirendum est quo modo diversa illa monomia in se invicem ducenda sint.

1°. Quum monomium simplex a in aliud b ducendum est, juxta conventionem (3, 3°.) scribitur ab.

2°. Quum monomium compositum in simplex ducendum est, ut v. g. ab in c, juxta eandem conventionem (3, 3°.) scribitur abc. Pariter abc $\times$ d $=$ abcd; etc. igitur producta abc, abcd, abcde, etc ita intelligenda sunt, ut a per b, productum ab per c, productum abc per d, et ita porro, multiplicetur. Producta hujusmodi *continua* vocantur.

3°. Quum monomium simplex per compositum multiplicandum est, ut a per bc, scribendum quoque abc : sit enim a $\times$ b = p ; cum uno ex factoribus per numerum quempiam multiplicato, productum quoque per eundem numerum multiplicatum sit (8, s.), erit a $\times$ (bc) = p $\times$ c = a b c. Igitur pari ratione est a $\times$ (bcd) = abcd ; etc.

4°. Quum monomium compositum ab per aliud cd multiplicari debet, scribendum quoque est a b c d : sit enim a b $\times$ c = p, erit quoque (8, s.) ab $\times$ (cd) = pd = abcd. Igitur pariter (ab) $\times$ (cdf) = abcdf; etc.

5°. Quum monomium fractum per integrum vel per aliud fractum multiplicandum est, regulæ pro multiplicatione fractionum in Arithmetica demonstratæ observari debent. Sic $\frac{a}{b} \times c$ vel $c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; etc.

22. Productum duorum factorum a b duas habet permutationes a b et b a : est vero a b = b a (8, k).

23. Productum trium factorum abc sex habet permutationes, nempe abc, bac, bca, acb, cab et cba : hæc vero omnia inter se æqualia sunt. Nam

1°. abc = bac; quia ab = ba (22), hinc ab $\times$ c = ba $\times$ c.

2° bac = bca; quia bac = b $\times$ ac (21, 3°.), et b $\times$ ac = b $\times$ ca = bca.

3°. bca = acb; quia bca = bc $\times$ a = cb $\times$ a = a $\times$ cb (22) = acb.

4°. acb = cab; quia ac = ca (22) atque adeo acb = cab.

5°. cab = cba; quia cab = c $\times$ ab = c $\times$ ba = cba (21, 3°.). Ergo abc = bac = bca = acb = cab = cba.

24. Productum quatuor factorum abcd viginti quatuor permutationes habet, quas in quatuor classes redigimus :

I.	abcd	bacd	bcad	acbd	cabd	cbad
II.	abdc	badc	bcda	acdb	cadb	cbda
III.	adbc	bdac	bdca	adcb	cdab	cdba
IV.	dabc	dbac	dbca	dacb	dcab	dcba.

Omnia hæc producta inter se æqualia sunt. Nam

1°. Sex producta n°. I°. inter se æqualia sunt, constant enim ex factoribus abc bac bca acb cab cba inter se æqualibus (23) per communem factorem d multiplicatis.

2°. Sex producta n°. IV. sex productis n°. I. respective æquantur ; nam abc $\times$ d = d $\times$ abc, bac $\times$ d = d $\times$ bac, et sic porro (22).

3°. Sex producta n°. II. ex sex productis n°. I. et sex n°. III. ex sex n°. IV., duos ultimos et duos primos factores inter se permutando, derivantur. Atqui hæc permutatio valorem non mutat, nam abcd = ab $\times$ cd (21, 4°) = ab $\times$ dc = abdc ; similiter dabc = da $\times$ bc = ad $\times$ bc = adbc ; et sic de cæteris.

Ergo viginti quatuor producta inter se sunt æqualia.

25. Pari ratione demonstrabitur omnes permutationes producti continui quinque, sex, etc. factorum, producta formare inter se æqualia : *ergo in producto continuo quocumque ordo factorum omni possibili modo variari potest quin producti valor mutetur.*

26. Producta continua quorum omnes factores æquales sunt, ut aa, aaa, aaaa, etc. compendii gratia scribere placuit a^2, a^3, a^4; etc : numeri 2, 3, 4... qui numerum factorum æqualium indicant, *exponentes* vocantur. Quum vero facta quæ ex ejusdem numeri per se ipsum continua multiplicatione oriuntur, ejusdem *potentiæ* dicantur, sequitur a^2, a^3, a^4, ... numeri a potentiam 2^{dam}, 3^{tiam}, 4^{tam} repræsentare, exponentes vero potentiæ gradum indicare ut (3. 5°) dictum est.

27. Hinc sequitur

1°. Pro ababac scribi posse a^3b^2c. Nam ababac = aaabbc (25) = aaa $\times$ bb $\times$ c (21, 4°.) = a^3b^2c. Inde patet etiam, quare litteris nullo exponente affectis, exponens 1 tribuendus sit : sic $a^3b^2c^1$ idem est ac a^3b^2c. Hinc quoque c^1 vel c potentia 1^a. litteræ c vocari solet, per extensionem et propter analogiam.

2°. Quum potentiæ diversæ ejusdem quantitatis in invicem ducendæ sunt, exponentes addendos esse, v. g. $a^3 \times a^2 = a^5$. Nam $a^3 \times a^2$ = aaa $\times$ aa = aaaaa = a^5 (26).

28. Ex iis quæ præcedunt sequens concluditur regula practica :

Quum monomia in se invicem ducenda sunt, 1°. coefficientes in se invicem ducantur ; 2°. litteræ communes semel scribantur et exponentes earum addantur ; 3°. litteræ diversæ cum suis exponentibus post alias scribantur.

Si monomia fracta sint, regulæ pro fractionum multiplicatione in Arithmetica traditæ præterea observentur.

Ex. gr. $4ab^3c^2 \times 3a^3b^2d = 12\, a^4b^5c^2d$;

$$\frac{3a}{c} \times 5a^2b = \frac{3a \times 5a^2b}{c} = \frac{15a^3b}{c};$$

$$\frac{3a^3}{b^2} \times \frac{a^2}{2b^3} = \frac{3a^3 \times a^2}{b^2 \times 2b^3} = \frac{3a^5}{2b^5}.$$

ARTICULUS II.

De multiplicatione polynomiorum.

29. Multiplicationem polynomiorum ad monomiorum ex quibus componuntur multiplicationes reduci demonstrabimus, sequentibus nixi principiis :

I. $(a + b) \times c = ac + bc$, id est, factum summæ duorum vel plurium numerorum in tertium ductæ æquatur summæ factorum quæ obtinentur quum singuli seorsim in tertium ducuntur.

Hoc principium ex ipsa natura multiplicationis evidenter sequitur (8, n).

II. $(a - b) + c = ac - bc$, id est, factum differentiæ duorum numerorum in tertium ductæ æquatur differentiæ factorum quæ obtinentur quum singuli seorsim in tertium ducuntur (8, o).

Sit enim $a - b = \delta$, erit $a = b + \delta$ (8, b); igitur multiplicare a per c idem est ac multiplicare $b + \delta$ per c, sive $ac = (b + \delta) \times c = bc + \delta c$ (29, I.) : hinc $ac - bc = \delta c = (a - b) \times c$.

III. $(a + b) \times (c + d) = ac + bc + ad + bd$, id est, factum summæ plurium numerorum in summam plurium aliorum ductæ æquatur summæ factorum quæ obtinentur quum priores successive in singulos posteriorum seorsim ducuntur.

Sit enim $a + b = m$; erit $(a + b) \times (c + d) = m \times (c + d) = (c + d) \times m = mc + md = (a + b) \times c + (a + b) \times d$; atqui $(a + b) \times c = ac + bc$ et $(a + b) \times d = ad + bd$: igitur $(a + b) \times (c + d) = ac + bc + ad + bd$.

IV. $(a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd$.

Sit enim $c - d = \delta$, erit $(a - b) \times (c - d) = (a - b) \times \delta = \delta a - \delta b$ (29, II.) $= (c - d) \times a - (c - d) \times b$; atqui $(c - d) \times a = ac - ad$, et $(c - d) \times b = bc - bd$; ergo $(a - b) \times (c - d) = (ac - ad) - (bc - bd) = ac - ad - bc + bd$ (16, 2ª.).

His præmissis, sit nunc propositum sequens

Problema I.

Polynomium quodcunque per monomium multiplicare, v. g. $a - b + c - d + f$ per k.

Resolutio.

30. Si fiat $a + c + f = p$ et $b + d = n$, polynomium $a - b + c - d + f$ ad formam $p - n$ reducitur : igitur $(a - b + c - d + f) \times k = \ldots (p - n) \times k = pk - nk$: sed

$$pk = (a + c + f) \times k = ak + ck + fk$$
$$nk = (b + d) \times k = bk + dk, \text{ (29, I.) :}$$

Ergo $pk - nk = ak + ck + fk - bk - dk$, sive

$$(a - b + c - d + f) \times k = ak - bk + ck - dk + fk \ldots\ldots \text{(E)}$$

Problema II.

Polynomium quodcumque per aliud polynomium multiplicare, v. g. $f - g + h - k$ per $l + m - n - r + s$.

Resolutio.

31. Fiat $f + h = a$, $g + k = b$, $l + m + s = c$ et $n + r = d$, erit $f - g + h - k = a - b$ et $l + m - n - r + s = c - d$, et $(f - g + h - k) \times (l + m - n - r + s) = (a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd$ (29, IV) : jam vero

$$ac = (f + h) \times (l + m + s) = fl + hl + fm + hm + fs + hs,$$
$$bc = (g + k) \times (l + m + s) = gl + kl + gm + km + gs + ks,$$
$$ad = (f + h) \times (n + r) = fn + hn + fr + hr,$$
$$bd = (g + k) \times (n + r) = gn + kn + gr + kr \text{ (29. III.)};$$

Igitur

$$ac - bc - ad + bd = (fl + hl + fm + hm + fs + hs) - (gl + kl + gm + km + gs + ks) - (fn + hn + fr + hr) + (gn + kn + gr + kr)$$

Sive

$$(f-g+h-k) \times (l+m-n-r+s) = \left\{\begin{array}{l} fl-gl+hl-kl+fm-gm+hm-km \\ -fn+gn-hn+kn-fr+gr-hr+kr \\ +fs-gs+hs-ks. \;.\;.\;.\;.\; (F) \end{array}\right.$$

32. Si nunc facta (E et F) cum factoribus comparentur, patet illa constare ex omnibus factis particularibus quæ obtinentur quum omnes termini unius factoris successive per singulos alterius multiplicantur; facta vero particularia quæ a terminis eodem signo affectis proficiscuntur, positiva, illa quæ a terminis signis contrariis affectis proveniunt, negativa esse : hinc sequens concluditur regula :

« Quum duo polynomia quæcumque in se invicem ducenda sunt, omnes unius « termini successive per singulos alterius multiplicentur, factaque particularia « signo + afficiantur si factores particulares eodem signo affecti sunt, signo — « vero si factores particulares signa contraria habeant.

Regula hæc duobus partibus constat : in prima ubi singuli termini unius polynomii in singulos alterius ducuntur, regula pro multiplicatione monomiorum supra (17) tradita observari debet; in 2^da^ vero parte ubi signum cujusque facti particularis determinatur, ad signa terminorum qui in invicem ducuntur, attendendum est, nam termini eodem signo affecti dant facta positiva, qui vero contrariis signis sunt, facta negativa. Hæc secunda pars *regula signorum* vocatur et, brevitatis gratia, sic technice efferri solet : *plus per plus et minus per minus dat plus ; plus vero per minus, vel minus per plus, dat minus.* Uno saltem exemplo rem elucidare juvabit : petitur productum............ $(3a^2 - ab - 2b^2) \times (2a^2 + 2ab - b^2)$?

Disponantur factores ut in adjecto schemate; tum fiat multiplicatio et producta particularia ita scribantur ut quæ similia sunt sibi respondeant, ut dein commode fieri possit reductio.

SCHEMA OPERATIONIS.

$$\text{Factores.}\left\{\begin{array}{l}3a^2-ab-2b^2\\2a^2+2ab-b^2\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrrrr}
6a^4 & -2a^3b & -4a^2b^2 & & \\
 & +6a^3b & -2a^2b^2 & -4ab^3 & \\
 & & -3a^2b^2 & +ab^3 & -2b^4.
\end{array}$$

$$\text{Factum. . . . . } 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3-2b^4.$$

33. Scholion. In multiplicatione polynomiorum ambo factores et productum communiter ordinantur secundum exponentes descendentes cujusdam litteræ; sic in exemplo præcedenti factores et productum ordinata sunt secundum exponentes descendentes litteræ a; in hac hypothesi terminum *maximum* vocabimus illum in quo littera a maximum habet exponentem. Quando polynomia quæ in invicem ducuntur secundum potentias descendentes cujusdam litteræ ordinata sunt, utile erit observare, primum terminum producti nullum sibi similem habere posse; quum enim proveniat a duobus maximis terminis factorum, ipse quoque sit maximus terminus producti, necesse est.

CAPUT IV.

DE DIVISIONE ALGEBRAICA.

ARTICULUS I.

DE DIVISIONE MONOMIORUM.

34. Cum monomia per se invicem dividenda sunt, quotus interposita inter dividendum et divisorem linea passim indicatur (3, 3°.) : quotus autem ita indicatus ut fractio spectari et in calculo tractari potest, quia omnis fractio quo-

tus est qui nascitur numeratore per denominatorem diviso. Sic quoti $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{c}$, etc. fractiones sunt algebraïcæ.

35. Quotus semper sub forma monomii fracti dari potest; sed quum monomium compositum integrum per aliud dividendum est, quotus aliquando sub forma monomii integri dari quoque potest, quo casu divisio *effici* potest. Sic v. g. $\frac{ab}{b} = a$ (8, p). Ut autem casus hic locum habeat, necesse est ut divisor sit factor dividendi, sive ut dividendus sit productum divisoris in monomium integrum. Tunc vero divisio efficitur decomponendo dividendum in duos factores quorum unus est divisor : alter erit quotus quæsitus.

36. Ut monomium dividendum decomponi possit in duo monomia integra quorum unum sit divisor, requiritur: 1°. ut nulla in divisore occurrat littera quæ in dividendo non reperiatur; 2°. ut litteræ communes in divisore non majores exponentes habeant quam in dividendo; et 3°. ut coefficiens dividendi divisibilis sit per coefficientem divisoris. Defectu unius ex his conditionibus, divisio effici, seu quotus sub forma monomii integri dari non poterit.

37. Quum divisio nihil aliud est quam decompositio producti in suos factores, regulas divisionis regulis multiplicationis contrarias esse necesse est. Hinc sequitur in divisione monomiorum

1°. Coefficientem dividendi per coefficientem divisoris esse dividendum (28, 1°.);

2°. Exponentes litterarum divisoris ex exponentibus earumdem litterarum dividendi esse subtrahendos (28, 2°.);

3°. Litteras quæ cum eodem exponente in dividendo et in divisore occurrunt, in quoto esse omittendas (28, 3°.);

4°. Tandem litteras quæ in dividendo solo occurrunt, in quoto esse scribendas (28, 3°.).

Juxta has regulas invenitur $\frac{20\,a^4b^3c^2d}{5\,a^2b\,c^2} = 4a^2b^2d$.

38. Quando una vel plures ex conditionibus supra datis (36) desunt, quotus non aliter quam sub forma fractionis dari potest; quæ tamen ad simpliciores terminos reduci poterit quotiescumque dividendus et divisor factorem aliquem

communem habebunt; sic, ex. gr. quoti $\frac{12\,ab}{4\,bc}$, $\frac{a^3bc}{a^2b^3}$ et $\frac{3\,a^2b}{4\,ab}$ reducuntur ad $\frac{3a}{c}$, $\frac{ac}{b^2}$ et $\frac{3a}{4}$, si duo termini 1^{us}. per 4b, 2^{di}. per a^2b et 3^{tii}. per ab dividantur. Quando tertia conditio (36) sola deficit, ut pro quoto $\frac{3a^2b}{4a\,b}$, quotus integer erit sed coefficientem fractum habebit; sic $\frac{3a^2b}{4\,ab}$, $= \frac{3a}{4} = \frac{3}{4}\,a$.

39. Si dividendus vel divisor formam fractionis habet, regulæ divisionis pro fractionibus in arithmetica traditæ applicari debent. Sic ex. gr.

$$\frac{9a^3b}{4cd} : 3ab = \frac{3a^2}{4cd};\ \frac{a^2b^2}{c} : a^5 = \frac{a^2b^2}{a^5c} = \frac{b^2}{a^3c};\ a^4 : \frac{a^3}{b} = \frac{a^4b}{a^3} = ab;$$

$$\frac{2a^2}{3b^3} : \frac{3a}{26^2} = \frac{4a^2b^2}{9ab^3} = \frac{4a}{9b}.$$

ARTICULUS II.

DE DIVISIONE POLYNOMIORUM.

40. Sit nunc propositum sequens

PROBLEMA.

Polynomium per polynomium dividere v. g. $6a^4 + 4a^3b - 9\,a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4$ per $2a^2 + 2ab - b^2$.

RESOLUTIO.

Quum dividendus productum sit divisoris in quotum, productum vero duorum polynomiorum componatur ex productis singuli termini unius factoris in singulum terminum alterius, si nosceretur terminus dividendi $6a^4 + 4a^3\,b +$ etc. qui a certo termino divisoris in terminum quoti ducto sine reductione proveniret, terminus ille quoti simplice divisione unius per alium inveniretur. Jam vero juxta id quod observavimus (33), si productum et factores secundum potentias descendentes ejusdem litteræ ordinata sunt, primus et maximus terminus producti est productum duorum primorum terminorum utriusque factoris, qui quum nullum similem sibi habere possit, cum nullo alio reductus fuit: igitur

$6a^4$ est productum $2a^2$ in maximum terminum quoti; quare $\frac{2a^2}{6a^4} = 3a^2$ primus est terminus quoti. Itaque divisor $2a^2 + 2ab - b^2$ per $3a^2$ multiplicetur et productum $6a^4 + 6a^3b - 3ab^2$ a dividendo proposito subtrahatur noteturque residuum.

Residuum $- 2a^3 b - 6a^2 b^2 -$ etc productum est divisoris in reliquos terminos quoti; igitur ad reliquos terminos quoti inveniendos, hoc residuum per divisorem quoque dividendum est, quare hic idem quod initio ratiocinium recurrit.

Maximus igitur residui terminus $- 2a^3b$ per maximum terminum divisoris $2a^2$ denuo dividetur et quotus $\frac{-2a^3b}{2a^2} = - ab$, erit alter terminus quoti. Divisor per $- ab$ multiplicetur et productum $- 2a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$ a primo residuo subducatur noteturque secundum residuum $- 4a^2b^2 -$ etc.

Quum hoc residuum productum sit divisoris in partem restantem quoti, primus seu maximus terminus hujus residui $- 4a^2b^2$ iterum per $2a^2$ dividatur et quotus $\frac{-4a^2b^2}{2a^2} = - 2b^2$ erit tertius terminus quoti. Divisor in $- 2b^2$ ductus dat productum $- 4a^2 b^2$ etc. quod si ex 2do residuo auferatur, nihil remanet, quare divisio finita est.

Quum maximus terminus dividendi, singulique residui per maximum divisoris dividi semper debent, patet dividendum et divisorem, singulumque residuum secundum potentias descendentes ejusdem litteræ ordinanda esse. En

SCHEMA OPERATIONIS.

$$
\begin{array}{ll}
 & 6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 \\
 & - 6a^4 - 6a^3b + 3a^2b^2 \\
\text{Resid.} & \overline{} \\
1^{m} \ldots\ldots & - 2a^3b - 6a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 \\
 & + 2a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 \\
 & \overline{} \\
2^{dum} \ldots\ldots\ldots & - 4a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4 \\
 & + 4a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^4 \\
 & \overline{} \\
3^{tium} \ldots\ldots\ldots\ldots & 0
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{l}
2a^2 + 2ab - b^2 \\
\hline
3a^2 - ab - 2b^2
\end{array}
\right.
$$

Si termini qui per se invicem dividendi sunt, signis contrariis affecti sunt, ut in secunda divisione particulari contigit, quotus signo — afficiendus est : hic enim nihil aliud agitur quam ut polynomium inveniatur quod in divisorem ductum, reproducat omnes terminos dividendi cum suis signis; jam vero termini negativi a terminis factorum contrariis signis affectis proficiscuntur : igitur quum terminus negativus per positivum, vel vice versa, dividendus est, quotus negativus esse debet. Si termini qui per se invicem dividuntur, ambo positivi sunt vel ambo negativi, quotus positivus erit. Regula signorum eadem igitur est in divisione ac in multiplicatione polynomiorum.

41. Hinc sequens concluditur regula divisionis : « Quum unum polynomium « per aliud dividendum est, utrumque secundum potentias descendentes ejus- « dem litteræ ordinatur. Tum primus terminus dividendi dividatur per pri- « mum terminum divisoris, quotus dabit 1^{mum}. terminum quoti. Hic terminus « in integrum divisorem ducatur, et factum ex dividendo subtrahatur note- « turque residuum. Circa hoc et subsequentia residua eodem procedatur modo « ac circa dividendum propositum, donec nihil amplius resmanet. In divisio- « nibus particularibus eadem observatur regula signorum, ac in multiplica- « tione. «

42. Scholion. In divisione polynomiorum quorum omnes termini sunt integri, idem accidit quod in divisione numerorum integrorum, quod nimirum divisio non semper *sine residuo* perfici possit. Hoc vero contingit quando primus seu maximus terminus residui minor est primo termino divisoris; tunc enim divisio ulterius provehi nequit, et quotus, sub forma integra obtineri non poterit. Si autem quotus completus desideratur, quoto invento addenda est fractio quæ residuum pro numeratore et divisorem pro dominatore habeat.

Si tamen polynomia quæ per se invicem dividuntur terminos fractos habeant, divisio continuari debet donec residuum nullum inveniatur ut in exemplo hic subjecto, vel donec observetur numerum terminorum residui non amplius minui sed contra crescere; hoc enim indicio est divisionem nullum finem habere.

EXEMPLUM DIVISIONIS.

$$
\begin{array}{l|l}
12a^5 - 10a^4b + 13a^3b^2 - 5a^2b^3 - 4ab^3c + 2ab^4 + 2b^4c - \frac{b^5c}{a} & \\
-12a^5 + 6a^4b - 3a^3b^2 & \\
\hline
\quad -4a^4b + 10a^3b^2 - \text{etc.} & 4a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
\quad +4a^4b - 2a^3b^2 + a^2b^3 & 3a^3 - a^2b + 2ab^2 - \frac{b^3c}{a} \\
\hline
\qquad + 8a^3b^2 - 4a^2b^3 - \text{etc.} & \\
\qquad - 8a^3b^2 + 4a^2b^3 - 2ab^4 & \\
\hline
\qquad\qquad - 4ab^3c + 2b^4c - \frac{b^5c}{a} & \\
\qquad\qquad + 4ab^3c - 2b^4c + \frac{b^5c}{a} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

CAPUT V.

DE POTENTIARUM ELEVATIONE ET EXTRACTIONE RADICUM.

ARTICULUS I.

DE POTENTIIS ET RADICIBUS MONOMIORUM.

44. Quum quantitas aliqua semel, bis, ter, etc. continue in se ipsam ducitur, productum ejusdem quantitatis *potentia* 2^a, 3^a, 4^a, etc, quantitas ipsa vero ejusdem producti *radix* 2^a, 3^a, 4^a, etc. appellatur. Sic aaaa sive a^4 est potentia 4^{ta} quantitatis a, et a radix 4^{ta} est quantitatis a^4 a^2 *quadratum*, a^3 *cubus* quantitatis a, et a *radix quadrata* quantitatis a^2, *radix cubica* quantitatis a^3 quoque nuncupatur.

45. Radix alicujus quantitatis signo $\sqrt{\ }$ ipsi præfixo indicatur ut (3, 6°.) dictum est : ita $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, etc. radicem 2^{am}, 3^{am}, 4^{am} quantitatis a

repræsentant : numeri 2, 3, 4, etc. signo radicali inscripti *indices* vocantur.

46. Igitur potentiæ et radicis denominationes correlativæ sunt ita ut qui quantitatem quampiam b potentiam v. g. 3^{am}. alterius a dicit, implicite asserit quantitatem a esse radicem 3^{am}. prioris b, et vice versa. Hinc si $b = a^3$, erit quoque $\sqrt[3]{b} = a$; et reciproce, si $a = \sqrt[3]{b}$, erit etiam $a^3 = b$.

47. Monomia composita vel producta sunt ut ab, abc..., vel quoti seu fractiones ut $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, ...; vel potentiæ ut a^3, b^3...; vel radices ut $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b}$: quomodo singulum monomiorum genus ad potentiam quamcumque evehi et quomodo ex singulo radix quæcumque extrahi debeat, nobis nunc est inquirendum.

48. Probl. I. Monomium abc ad certam potentiam puta 3^{am} elevare.

Dico $(abc)^3 = a^3b^3c^3$. Est enim $(abc)^3 = abc.\,abc.\,abc$ (44) $= aaabbbccc = a^3b^3c^3$ (26). Ergo generatim $(abc)^n = a^nb^nc^n$ si n numerum quemcumque integrum designet : id est, *potentia n producti est productum potentiarum n omnium factorum*, sive *ut productum quotcumque factorum ad potentiam n elevetur*, *omnes ejus factores ad potentiam n elevandi sunt.*

49. Coroll. Ergo *radix n producti est quoque productum radicum n omnium factorum*, sive ut ex producto radix n extrahatur, radix n extrahenda est ex omnibus factoribus. Quum enim $(abc)^n = a^nb^nc^n$, sequitur, vi correlationis (46), esse $abc = \sqrt[n]{(a^nb^nc_n)}$. Pariter $\sqrt[n]{(pqr)} = \sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}\sqrt[n]{r}$, nam (48) $(\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}\sqrt[n]{r})^n = pqr$.

50. Probl. II. Monomium $\frac{a}{b}$ ad certam potentiam puta 3^{am}. elevare.

Dico $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$. Nam $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} - \times \frac{a}{b} - \times - \frac{a}{b}$ (44) $= \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$ (26) Ergo generatim $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, id est, *ut fractio ad potentiam quacumque n elevetur*, *ambo ejus termini ad eandem potentiam elevandi sunt.*

51 Coroll. Ergo ut ex fractione radix n extrahatur, radix n extrahenda est ex ambobus ejus terminis. Quum enim $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b}$, sequitur, vi correlationis (46), esse $\frac{a}{b} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}$ Pariter est $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$, nam (50) $\left(\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}\right)^n = \frac{p}{q}$.

52. Probl. III. Monomium a^2 ad certam potentiam puta 3^{am}. elevare.

Dico $(a^2)^3 = a^6$. Nam, $(a^2)^3 = a^2a^2a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3}$. Igitur generatim $(a^n)^m = a^{nm}$, id est, *ut quantitas aliqua exponente affecta ad potentiam quamcumque n elevetur, ejus exponens per m multiplicari debet.*

53. Coroll. 1. Ergo $(a^pb^qc)^m = a^{pm}b^{qm}c^m$: nam (48) omnes factores producti a^pb^qc ad potentiam m elevari debent.

54. Coroll. 2. Ergo $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^m = \frac{a^{pm}}{b^{qm}}$: nam uterque fractionis $\frac{a^p}{b^q}$ terminus ad potentiam m elevari debet (50).

55. Coroll. 3. Ergo, vi correlationis (46), $\sqrt[m]{a^{pm}b^{qm}c^m} = a^pb^qc$, et $\sqrt[m]{\frac{a^{pm}}{b^{qm}}} = \frac{a^p}{b^q}$, id est, *ad extrahendam radicem m ex quantitate exponentibus affecta, exponentes omnes per m dividendi sunt* : sic ex. gr. $\sqrt[3]{a^9b^6c^3} = a^3b^2c$ et $\sqrt[3]{\frac{a^9}{b^6}} = \frac{a^3}{b^2}$.

56. Probl. IV. Monomium $\sqrt[2]{a}$ ad certam potentiam puta 3^{am} elevare.

Dico $\left(\sqrt[2]{a}\right)^3 = \sqrt[2]{a^3}$. Sit enim $\sqrt[2]{a} = x$, erit $a = x^2$ (46) et $a^3 = x^{2.3}$ (53); igitur $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[2]{x^{2.3}} = x^3$ (55) $= \left(\sqrt[2]{a}\right)^3$. Ergo generatim $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, id est, *ut quantitas radicalis ad potentiam m elevetur, quantitas subradicalis ad potentiam m elevanda est, non mutato signo radicali.*

57. Coroll. 1. Ergo *cum quantitas radicalis ad potentiam m elevanda est, omnes exponentes quantitatis subradicalis per m multiplicandi sunt, non mutato signo radicali.* Sic $\left(\sqrt[3]{a^2b^3c}\right)^2 = \sqrt[3]{a^4b^6c^2}$, et $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^6}}$.

58. Coroll. 2. Ergo, vi correlationis (46), *cum radix m ex quantitate radicali extrahenda est, radix m ex quantitate subradicali extrahi debet, sive exponentes quantitatis subradicalis, si fieri potest, per m dividendi sunt.* Cum enim $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, sequitur (46) esse $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)} = \sqrt[n]{a}$, sive, omissa parenthesi ut inutili, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$.

59. Probl. V. Ex monomio $\sqrt{a}$ certam radicem puta 3^{am} extrahere.

Dico $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[6]{a}$. Sit $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = x$, erit $\sqrt[2]{a} = x^3$ et $a = (x^3)^2 = x^6$ (46 et 52); igitur, extrahendo utrimque radicem 6^{am}, $\sqrt[6]{a} = x = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$. Ergo generatim $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, sive, *ad radicem n ex quantitate radicali extrahendam, index quantitatis radicalis per n multiplicari debet.*

60. Coroll. 1. Ergo, vi correlationis (36), *ad elevandum ad potentiam n quantitatem radicalem, index hujus quantitatis, si fieri potest, per n dividendus est.* Cum enim $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, sequitur esse $\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}$ (46).

61. Coroll. 2. Ergo index quantitatis radicalis et exponentes quantitatis subradicalis per eundem numerum multiplicari vel dividi possunt, quin quantitatis radicalis valor mutetur, id est, $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pm}}$: sit enim $\sqrt[n]{a^p} = x$, erit, ad potentiam m elevando (56), $\sqrt[n]{a^{pm}} = x^m$, et deinde extrahendo radicem m (59), $\sqrt[nm]{a^{pm}} = x = \sqrt[n]{a^p}$. q. e. d.

62. Ex n. 49 et 51 sequitur $\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{pq}$ et $\dfrac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} = \sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}$, id est, *cum quantitates radicales ejusdem denominationis per se invicem multiplicari vel dividi debent, quantitates subradicales per se invicem multiplicantur vel dividantur, et producto vel quoto præfigatur idem signum radicale.*

Si vero quantitates radicales sunt diversæ denominationis, hæ ad eandem denominationem reducantur, indicem et exponentes cujusque quantitatis per indicem alterius multiplicando, tum per se invicem multiplicentur vel dividantur juxta præfatam regulam.

ARTICULUS II.

De signis potentiarum et radicum.

63. Hucusque de signis, quibus potentiæ vel radices affici debeant, nullam fecimus mentionem, quia monomia cum sola sunt, nullo signo affecta sunt. Cum vero potentiæ et radices polynomiorum ex potentiis et radicibus terminorum ex quibus constant, componantur, termini autem polynomiorum signo + vel

— affecti sint, necesse est ad signa potentiarum et radicum attendere. Leges autem quibus ea determinentur, sequentibus nituntur propositionibus :

64. I^{a}. *Quævis potentia par, est positiva*, sive radix positiva sit sive negativa. Nam potentia par productum est factorum, numero pari, iisdem signis affectorum; atqui ejusmodi productum semper est positivum. Omnis numerus par per 2n exhiberi potest, n numerum quemcumque integrum repræsentante : igitur $(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$.

65. II^{a}. *Quævis potentia impar ejusdem signi est ac radix.* Nam potentia impar, productum est potentiæ paris, immediate inferioris in radicem ductæ; atqui potentia par semper est positiva, cujuscumque signi sit radix : igitur potentia impar ejusdem semper signi est ac radix. Omnis numerus impar per $2n+1$ exhiberi potest : igitur $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$.

66. III^{a}. *Quævis radix par quantitatis positivæ duplici signo afficienda est, nisi ex iis quæ præcedunt constet illam esse positivam aut negativam.* Cum enim $(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$, sequitur $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \pm a$.

67. IV^{a}. *Quævis radix impar eodem signo afficienda est ac potentia*, sive radix impar quantitatis positivæ positiva, negativæ negativa est. Cum enim $(+a)^{2n+1} = + a^{2n+1}$ et $(-a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$, sequitur esse $\sqrt[2n+1]{+a^{2n+1}} = + a$ et $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = - a$.

ARTICULUS III.

De quantitatibus imaginariis.

68. Radix quantitatis positivæ, sive par sit sive impar, et radix impar quantitatis negativæ semper possibiles sunt proptereaque *reales* vocantur. Sed radix par quantitatis negativæ impossibilis est : si enim possibilis esset, sequeretur quantitatem negativam esse potentiam parem : atqui omnis potentia par est positiva (64) : igitur radix par quantitatis negativæ nec quantitas positiva nec quantitas negativa esse potest, atque adeo est impossibilis seu *imaginaria*. Radix quæcumque gradu pari hoc symbolo repræsentari potest : $\sqrt[2n]{(a-b)}$: erit realis si $a > b$ vel $a = b$, imaginaria vero si $a < b$.

Quamvis quantitates imaginariæ mera sint impossibilitatis symbola, convenit tamen inter mathematicos illas in calculo admittere iisdemque subjicere legibus ac quantitates reales. Hujus conventionis utilitas potissimum elucet in analysi seu mathesi sublimiori, in qua hujus calculi ope veritates non raro eruuntur quarum demonstratio alia via longior et difficilior foret. Ut vero imaginariarum calculus justificari possit, quantitates imaginariæ considerari debent ut comprehensæ in formulis generalioribus quarum valor universim realis est, sed in casu quodam particulari impossibilis evadit.

69. Regula (62) tradita pro multiplicatione quantitatum radicalium ejusdem denominationis, cum quantitatibus imaginariis applicatur, modificationem aliquam subire videtur quæ tamen, ut videbimus, tantum apparens est.

Juxta præfatam regulam est $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a^2}$; cum vero (66) $\sqrt[2]{a^2} = \pm a$; sequi videtur esse $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = \pm a$. Jam autem evidens est quod $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = (\sqrt[2]{-a})^2 = -a$ (46).

Sed observare oportet, $\sqrt[2]{a^2}$ non esse signi ambigui $\pm a$ nisi quando incertum est utrum a^2 productum sit $+a$ in $+a$ aut $-a$ in $-a$. Jam autem hæc incertitudo in casu nostro non existit : antecedentia enim monstrant a^2 provenire de $-a$ ducto in $-a$: igitur $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = -a$.

70. Hinc sequitur

1°. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

2°. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$: nam cum $-a = a \times -1$, est $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \times \sqrt{b}\sqrt{-1}$ (49) $= \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$.

3°. $\sqrt{-a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}\sqrt{-1}$.

4°. $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$.

5°. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

6°. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{-1}$

7°. $\dfrac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{-1}$.

Quando quantitates imaginariæ signis $+$ vel $-$ affectæ sunt, pro calculi commoditate hæc signa ad coefficientes referantur. V. g. $-3\sqrt{-a} \times -2\sqrt{-b} = -3 \times -2 \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = +6 \times -\sqrt{ab} = -6\sqrt{ab}$. Pariter $\frac{-6\sqrt{ab}}{-3\sqrt{-a}} = -2\sqrt{-b}$.

71. Cum $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, est $(\sqrt{-a})^m = \sqrt{a^m}\,(\sqrt{-1})^m$ (48). Hic igitur inquirendum venit quæ sint potentiæ consecutivæ 1, 2, 3, 4, 5, etc. quantitatis $\sqrt{-1}$: imprimis $(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$, et $(\sqrt{-1})^4 = +1$. His positis, exponens $\sqrt{-1}$ ad unam ex sequentibus formis pertinet $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$.

1°. $(\sqrt{-1})^{4n} = ((\sqrt{-1})^4)^n = (+1)^n = +1$;

2°. $(\sqrt{-1})^{4n+1} = (\sqrt{-1})^{4n} \times (\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}$;

3°. $(\sqrt{-1})^{4n+2} = (\sqrt{-1})^{4n} \times (\sqrt{-1})^2 = +1 \times -1 = -1$;

4°. $(\sqrt{-1})^{4n+3} = (\sqrt{-1})^{4n} \times (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$.

Si in his formulis fiat $n = 0., 1, 2$, etc. obtinebuntur omnes potentiæ consecutivæ 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. quantitatis $\sqrt{-1}$, quæ sunt $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$, periodice recurrentes in infinitum.

72. Hinc sequitur etiam quod

1°. $\frac{1}{(\sqrt{-1})^{4n}} = +1$;

2°. $\frac{1}{(\sqrt{-1})^{4n+1}} = +\sqrt{-1}$;

3°. $\frac{1}{(\sqrt{-1})^{4n+2}} = -1$;

4°. $\frac{1}{(\sqrt{-1})^{4n+3}} = -\sqrt{-1}$;

73. Scholion. Quando in polynomiis quæ per se invicem multiplicanda vel dividenda sunt, termini occurrunt signo radicali affecti, regulæ hoc aut præcedenti articulo traditæ observari debent. En aliqua exempla :

I. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

II. $(\sqrt{a} + \sqrt{-b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{-b}) = a + b$

III. $(x-a-b\sqrt{-1}) \times (x-a+b\sqrt{-1}) = x^2-2ax+a^2+b^2.$

IV. $\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a + \sqrt{ab} + b.$

V. $\dfrac{\sqrt{a^6}-\sqrt{b^6}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a^5} - \sqrt{a^4b} + \sqrt{a^3b^2} - \sqrt{a^2b^3} + \sqrt{ab^4} - \sqrt{b^5}.$

ARTICULUS IV.

DE POTENTIIS NEGATIVIS ET FRACTIS.

74. Propositum sit a^m per a^n dividere, m et n numeros quoscumque integros repræsentantibus : quotus non aliter quam sub forma fractionis $\frac{a^m}{a^n}$ dari poterit si nulla circa magnitudinis relationem exponentium m et n fiat hypothesis. Hic enim tres casus possibiles sunt, nempe vel $m > n$, vel $m = n$, vel $m < n$:

1°. Si $m > n$; sit v. g. $m = n + p$, erit (37, 2°.)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^p.$$

2°. Si $m = n$; erit evidenter

$$\frac{a^m}{a^n} = 1.$$

3°. Si $m < n$; sit v. g. $m = n - p$, erit (38)

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}.$$

Hinc patet, formulam $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ non esse generaliter veram, sed solum in 1ª. hypothesi quando $m > n$; tunc enim sequitur ex regula divisionis (37, 2°.). In 2ª. et 3ª. hypothesi vero a^{m-n} daret a^0 et a^{-p}, duo nova symbola quæ per se nihil significant, nam o et $-$ p ut veri exponentes spectari nequeunt si notioni huic voci primitus subjectæ (26) inhæreamus.

Ut igitur formula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ generalis fieret et ab omni circa exponentium m et n relationem hypothesi libera, necesse foret ut a^0 et a^{-p} æquivalerent 1 et $\frac{1}{a^p}$: jam vero a^0 et a^{-p} per se nullum valorem habent, nec dictum valorem assumere possunt nisi per novam conventionem : ut igitur prædicta formula ab omni conditione liberetur, conveniemus ut deinceps sit

$$a^0 = 1, \quad \ldots \quad (1).$$
$$\text{et } a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad \ldots \quad (2).$$

Ex hac conventione hoc oritur commodum quod cum in formulis algebraicis nobis occurrit quantitas formæ $\frac{a^m}{a^n}$, non amplius opus sit distinguere diversos casus qui locum habere possunt pro diversis hypothesibus $m > n$, $m = n$ et $m < n$; sed pro $\frac{a^m}{a^n}$ substituemus a^{m-n} et formula vera erit in omni hypothesi.

Itaque cum in formula aliqua occurrit a^0 et a^{-p}, facile erit hæc symbola interpretari, si ad eorum originem attendatur : nimirum a^0 et a^{-p} non aliunde profecta esse possunt quam a divisione $\frac{a^m}{a^n}$ in qua m erat $= n$ in 1^o et $m = n - p$ in 2^o casu.

75. Coroll. 1. Omnis igitur quantitas cujus exponens zerus est, æquivalet unitati. Sic $a^0 = b^0 = (a \pm b)^0 = (ab)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = (\sqrt{-a})^0 = 1$.

76. Coroll. 2. Omnis quantitas cujus exponens est negativus, signum est fractionis cujus numerator est 1 et denominator eadem quantitas eodem exponente positivo affecta. a^{-} $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$, etc.

77. Coroll. 3. Igitur quilibet factor denominatoris ad numeratorem transferri potest, signo exponentis in contrarium mutato. Sic $\frac{a^m}{b^n} = a^m b^{-n}$, nam $\frac{a^m}{b^n} = a^m \times \frac{1}{b^n} = a^m b^{-n}$. Similiter $\frac{a^m}{b^n c^q} = a^m b^{-n} c^{-q}$. Pariter $\frac{a^m}{b^{-n}} = a^m b^n$, nam $\frac{a^m}{b^{-n}} = a^m : \frac{1}{b^n} = a^m b^n$.

78. Propositum sit radicem n extrahere ex quantitate a^p, n et p numeros quoscumque integros significantibus : radix hæc non aliter quam sub forma quan-

titatis radicalis dari poterit si nulla circa exponentes p et n fiat hypothesis. Etenim hic duo casus distinguendi sunt, nempe

1°. Si p per n exacte divisibilis est. Sit v. g. $p = nm$, erit (55)

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^m.$$

2°. Si p per n exacte divisibilis non est, radix quæsita non aliter quam sub forma $\sqrt[n]{a^p}$ dari potest. Igitur formula $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$, non est vera nisi in 1ª. hypothesi quando p per n exacte divisibilis est. In 2ª. hypothesi vero $\frac{p}{n}$ esset exponens fractus, novum symbolum quod per se nihil significat, exponens enim proprie dictus non nisi numerus integer esse potest (26); itaque hic in eodem casu versamur ac pro exponente negativo, nimirum cum $a^{\frac{p}{n}}$ symbolum sit sensu vacuum, quando $\frac{p}{n}$ non est numerus integer, ut formula

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

generalis et ab omni hypothesi circa p et n libera reddatur, conveniemus ut deinceps $a^{\frac{p}{n}}$ idem significet ac $\sqrt[n]{a^p}$, nempe radicem n quantitatis a^p.

Igitur cum in formula algebraica occurret $a^{\frac{p}{n}}$ symbolum hoc ita interpretabimur ut ex extractione radicis n ex a^p profectum censeatur: unde patet exponentes fractos esse novum signum quantitatum radicalium. Sic $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{(x^2-y^2)} = (x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{a^6b^2} = a^6 b^2 = a^2b^{\frac{2}{3}}$, etc.

79. Per conventiones (74 et 78) duo nova potentiarum genera in calculum algebraicum introducta videmus; sed cavendum ne potentias quas *negativas* et *fractas* vocamus cum veris et proprie dictis potentiis, quarum formam tantum habent, confondamus. Imprimis potentia negativa v. g. potentia —p quantitatis a, non est potentia proprie dicta quantitatis a, quamquam in potentiam proprie dictam p convertatur, quantitatem a invertendo; est enim $\left(\frac{a}{1}\right)^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$. Idem dicendum de potentia fracta quæ quamvis potentiæ proprie dictæ formam habeat, tamen reipsa quantitas radicalis est.

Nova hæc symbola unice ad hoc inventa sunt ut quantitatum algebraicarum formæ quantumvis diversæ, paucis iisque maxime generalibus regulis subjicerentur, utque formulæ seu expressiones algebraicæ simpliciores simul et generaliores evaderent. Quum igitur a^{-p} et $a^{\frac{p}{n}}$ non sunt potentiæ proprie dictæ, in leges logices graviter impingeret qui potentiis negativis et fractis regulas supra pro veris et proprie dictis potentiis demonstratas, citra omnem demonstrationem, applicaret, poneretque v. g. generaliter $a^m \times a^n = a^{m+n}$ non solum cum m et n numeri positivi et integri sunt, sed etiam cum m vel n numeri sunt negativi sive fracti : igitur demonstrandum nobis incumbit potentias negativas et fractas iisdem calculi regulis subjacere ac potentias positivas et integras seu proprie dictas, sive formulas $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ et $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, esse generaliter veras quicumque sint exponentes m et n, sive integri sive fracti, sive positivi sive negativi.

80. I°. Si exponentes negativi sunt, est

1°. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n}$ (76) $= \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (74).

Pariter $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$.

2°. $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^{m+n}$. Pariter $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = a^{n-m}$.

3°. $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

4°. $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$.

81. II°. Si exponentes fracti sunt, uterque fractionis terminus per eundem numerum multiplicari potest quin quantitatis valor mutetur; est enim $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (61) $= a^{\frac{mp}{np}}$: igitur exponentes fractos ad eundem denominatorem reducere licet.

Hinc

1°. $a^{\frac{m}{p}} \times a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^m} \times \sqrt[p]{a^n} = \sqrt[p]{a^{m+n}} = a^{\frac{m+n}{p}}$ (62, 78).

2°. $a^{\frac{m}{p}} : a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^m} : \sqrt[p]{a^n} = \sqrt[p]{\frac{a^m}{a^n}} = \sqrt[p]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{p}}$ (62, 78);

3°. $\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^n = \left(\sqrt[p]{a^m}\right)^n = \sqrt[p]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{p}}$ (56, 78);

4°. $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m} = a^{\frac{m}{np}}$ (59, 78).

Notandum hìc exponentes fractos non supponi positivos : ergo formulæ (79) generales sunt quicumque sint exponentes, sive integri sive fracti sive positivi sive negativi.

82. Scholion. In multiplicatione et divisione polynomiórum in quibus termini occurrunt exponentibus negativis vel fractis affecti, præcedentes regulæ observandæ sunt. Unum alterumve exemplum harum operationum hic adjicere, non erit inutile.

I. $(a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + ab + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^2) \times (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}$.

II. $\dfrac{a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = a^3 - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}} + a^2b - a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} + ab^2 - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}} + b^3$.

ARTICULUS V.

DE POTENTIIS POLYNOMIORUM.

83. Quum potentiæ generatim continua multiplicatione formentur, sola multiplicationis regula polynomiis ad potentias quascumque integras et positivas elevandis sufficit. Hac via obtinentur sequentes potentiarum formulæ :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$.
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4. $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$.
5. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
6. $(a+b+c)^4 = (a+b)^4 + 4(a+b)^3c + 6(a+b)^2c^2 + 4(a+b)c^3 + c^4$.
7. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^3 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
8. $(a+b+c)^5 = (a+b)^5 + 5(a+b)^4c + 10(a+b)^3c^2 + 10(a+b)^2c^3. + 5(a+b)c^4 + c^5$
9. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.
10. $(\sqrt{-a^2} + \sqrt{-b^2})^2 = -a^2 - 2ab - b^2 = -(a+b)^2$.
11. $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3 = a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{2}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b + b^{\frac{3}{2}}$.
12. $(a - b\sqrt{-1})^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 + b^3\sqrt{-1}$.

84. Coroll. 1. Igitur quadratum polynomii componitur ex quadrato termini primi, ex duplo termini primi ducto in secundum, quadrato secundi, ex duplo duorum primorum ducto in tertium, quadrato tertii, et ita porro.

85. Coroll. 2. Igitur cubus polynomii componitur ex cubo termini primi, ex triplo quadrato termini primi ducto in secundum, triplo quadrato termini secundi in primum, cubo secundi; ex triplo quadrato duorum primorum ducto in tertium, triplo quadrato tertii in duos primos, cubo tertii, et ita porro.

ARTICULUS VI.

DE RADICIBUS QUADRATA ET CUBICA POLYNOMIORUM.

86. Sit nunc propositum sequens

Problema.

Ex polynomio dato v. g. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ extrahere radicem quadratam.

Resolutio.

Si quadratum alicujus polynomii secundum potentias descendentes cujusdam litteræ ordinatum est, primus seu maximus quadrati terminus est quadratum maximi termini radicis, et secundus terminus quadrati est productum dupli termini primi radicis in secundum (84, 33): quum igitur polynomium propositum secundum potentias descendentes litteræ a ordinatum est, a^4 est quadratum primi seu maximi termini radicis quæsitæ; igitur primus radicis terminus erit $\sqrt{a^4} = \pm a^2$ (55, 66) Quadrato primi termini radicis sive a^4 ex polynomio proposito subducto, primus terminus residui est factum dupli termini primi in secundum (84): si igitur hic terminus $-4a^3b$ per duplum primi termini $\pm 2a^2$ dividatur, quotus dabit secundum terminum radicis; itaque hic terminus erit $\frac{-4a^3b}{\pm 2a^2} = \mp 2ab$. Formentur nunc factum dupli termini primi in secundum, et quadratum secundi, sive, quod eodem redit, duplo primi termini addatur secundus et summa per secundum multiplicetur, factumque $(\pm 2a^2 \mp 2ab) \times -2ab$ ex residuo subducatur, noteturque secundum residuum $+2a^2b^2 - 4a^3b + b^4$.

Residuum hoc continet factum duplum duorum primorum terminorum in tertium et quadratum tertii (84) : igitur ordinetur residuum et per duplum terminorum primorum radicis $\pm 2a^2 \mp 4ab$ dividatur, quotus dabit tertium terminum radicis. Itaque tertius radicis terminus erit $\frac{+ 2a^2b^2}{\pm 2a^2} = \pm b^2$.

Tertius terminus duplo duorum primorum addatur, summa per tertium multiplicetur et factum ex residuo subrahatur : si residuum hujus subtractionis nullum est, operatio finita erit. Si vero aliquod adhuc est residuum, circa hoc procedatur ut ante, ut quartus radicis terminus inveniatur. In nostro exemplo residuum est nullum, igitur radix quæsita erit $\pm a^2 \mp 2ab \pm b^2$.

Radix inventa duplex est, nempe $a^2 - 2ab + b^2$ et $- a^2 + 2ab - b^2$, quæ solo signo inter se differunt. Majoris simplicitatis gratiâ, primus terminus radicis et cæteri uno tantum signo afficiuntur, et postquam radix inventa est, signa omnia in contraria mutantur. Ecce operationis

SCHEMA.

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & a^2 - 2ab + b^2 \\
- a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
\text{Resid. } 1^{\text{mum}}. - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & 2a^2 \ldots \text{ Divisor} \\
+ 4a^3b - 4a^2b^2 \qquad\qquad\quad & 2a^2 - 2ab \\
\cline{1-1}
& \quad - 2ab \\
\ldots\ldots 2^{\text{dum}} \ldots\ldots + 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & \overline{-4a^3b + 4a^2b^2.} \text{ Factum subtrahendum.} \\
- 2a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 & \\
\cline{1-1}
\ldots\ldots 3^{\text{tium}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \qquad\qquad & 2a^2 - 4ab \ldots \text{ Divisor} \\
& 2a^2 - 4ab + b^2 \\
& \qquad\qquad + b^2 \\
& \overline{2a^2b^2 - 4ab^2 + b^4.} \text{ Factum subtrahendum.}
\end{array}
$$

Ex his sequens colligitur regula extrahendæ radicis quadratæ : polynomium propositum ante omnia ordinetur secundum potentias descendentes alicujus literæ; tum ex primo termino extrahatur radix quadrata : hæc erit primus terminus radicis quæsitæ.

Quadrato hujus primi termini ex polynomio subtracto, primus terminus residui per duplum primi termini radicis dividatur, quotus erit secundus radicis terminus. Secundus hic terminus addatur duplo primi et summa per secundum multiplicetur, factumque ex 1^{mo} residuo subducatur. Tum circa 2^{dum} et subsequentia residua eodem procedatur modo, cæteraque peragantur perinde ac in extractione numerica.

87. Scholion 1. Quum polynomium propositum non semper sit quadratum alterius polynomii, non semper radix exacta polynomii propositi inveniri poterit. Hoc locum habebit quando primus seu maximus terminus residui minor est 1^{mo} termino radicis; tunc enim operatio continuari ampliùs non potest, nisi forte polynomium propositum terminos habeat fractos vel exponentibus negativis affectos, ut in exemplo sequente :

$$
\begin{array}{ll}
 & a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 6ab^3 + 5b^4 - 2a^{-1}b^5 + a^{-2}b^6. \\
 & -a^4 \\
\hline
1 \ldots & - 4a^3b + 6a^2b^2 - \text{etc.} \\
 & + 4a^3b - 4a^2b^2 \\
\hline
2 \ldots & + 2a^2b^2 - 6ab^3 + 5b^4 - \text{etc.} \\
 & - 2a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \\
\hline
3 \ldots & - 2ab^3 + 4b^4 - \text{etc.} \\
 & + 2ab^3 - 4b^4 + 2a^{-1}b^5 - a^{-2}b^6 \\
\hline
4 \ldots & 0
\end{array}
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2 - a^{-1}b^3 \\
\hline
2a^2 \text{ Divisor}
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
2a^2 - 2ab \\
- 2ab \\
\hline
- 4a^3b + 4a^2b^2 \\
2a^2 - 4ab \ldots \text{Divisor} \\
2a^2 - 4ab + b^2 \\
+ b^2 \\
\hline
2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
2a_2 - 4ab + 2b^2 \ldots \text{Divisor} \\
2a^2 - 4ab + 2b^2 - a^{-1}b^3 \\
- a^{-1}b^3 \\
\hline
- 2ab^3 + 4b^4 - 2a^{-1}b^5 + a^{-2}b^6
\end{array}
$$

88. Scholion 2. Non aliter procedendum in extractione radicis, quando po-

lynomium propositum terminos habet signis radicalibus vel, quod eodem redit, exponentibus fractis affectos continet, ut in exemplo subjecto :

$$\begin{array}{l}
a^3 - 4a^2b + 2a^{\frac{3}{2}}b^2 + 4ab^2 - 4a^{\frac{1}{2}}b^3 + b^4 \\
- a^3 \\
\hline
\quad - 4a^2b + 2a^{\frac{3}{2}}b^2 + 4ab^2 - \text{etc.} \\
\quad + 4a^2b - 4ab^2 \\
\hline
\qquad + 2a^{\frac{3}{2}}h^2 - 4a^{\frac{1}{2}}b^3 + b^4 \\
\qquad - 2a^{\frac{3}{2}}b^2 + 4a^{\frac{1}{2}}b^3 - b^4 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
a^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b + b^2 \\
\hline
2a^{\frac{3}{2}} \ldots \text{Divisor}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r}
2a^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b \\
- 2a^{\frac{1}{2}}b \\
\hline
- 4a^2b + 4ab^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2a^{\frac{3}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}}b \ldots \text{Divisor} \\
2a^{\frac{3}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}}b + b^2 \\
\qquad\qquad\qquad + b^2 \\
\hline
2a^{\frac{3}{2}}b^2 - 4a^{\frac{1}{2}}b^3 + b^4
\end{array}$$

89. Sit nunc propositum sequens

Problema.

Ex polynomio proposito v. g. $8a^6 - 36a^4b^2 - 54a^2b^4 - 27b^6$ extrahere radicem cubicam.

Resolutio.

Si cubus polynomii secundum potentias descendentes alicujus litteræ ordinatus est, primus cubi terminus est cubus primi termini radicis, secundus productum tripli quadrati primi termini radicis in secundum, et ita porro (85, 33) : cum igitur polynomium propositum secundum potentias descendentes litteræ a ordinatum sit, $8a^6$ cubus est primi termini radicis quæsitæ; ergo primus terminus radicis erit $\sqrt[3]{8a^6} = 2a^2$ (55).

Si cubus hujus termini proposito polynomio subducatur, primus terminus residui erit productum tripli quadrati primi termini ducti in secundum (85) : si igitur ille terminus per triplum quadratum termini inventi dividatur, quotus erit secundus radicis terminus : itaque secundus terminus radicis erit $\frac{-36a^4b^2}{+12a^4} = -3b^2$.

Formentur tunc productum tripli quadrati termini primi in secundum, productum tripli quadrati termini secundi in primum, et cubus termini secundi, sive, quod eodem redit, triplo quadrato primi termini addantur triplum termini secundi in primum et quadratum secundi, summaque per secundum terminum multiplicetur; productum hoc ex 1^{mo} residuo subducatur. Facta hac subtractione in nostro exemplo, residuum est nullum; unde radix quæsita est $2a^2 - 3b^2$.

Si 2^{dum} residuum non est nullum, ad inveniendum reliquos radicis terminos, hoc residuum denuo ordinetur, dividaturque per triplum quadratum terminorum inventorum, quotus erit tertius terminus radicis.

Triplo quadrato duorum primorum terminorum addantur triplum tertii in duos primos et quadratum tertii, summaque per tertium terminum multiplicetur, et productum hoc ex residuo subtrahatur. Si adhuc aliquod est residuum, circa hoc eodem procedatur modo ac circa præcedens, donec residuum nullum inveniatur vel operatio continuari amplius non possit. In posteriore casu radix adæquata haberi non poterit. Ecce pro exemplo proposito operationis

Schema.

$$\begin{array}{l}
8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6 \\
-8a^6 \\
\hline
\quad -36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6 \\
\quad +36a^4b^2 - 54a^2b^4 + 27b^6 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 2a^2 - 3b^2 \\ \hline 12a^4 \ldots \text{ Divisor} \end{array}\right. \\
12a^4 - 18a^2b^2 + 9b^4 \\
\qquad\qquad\qquad -3b^2 \\
\hline
-36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6
\end{array}$$

Hinc colligitur sequens regula extrahendæ radicis cubicæ : Polynomium propositum secundum potentias descendentes cujuspiam litteræ ordinetur; tum radix cubica extrahatur ex primo termino, hæc radix erit primus terminus radicis.

Cubo hujus primi termini ex polynomio proposito subtracto, primus terminus residui per triplum quadratum termini inventi dividatur, quotus erit secundus terminus radicis. Tum triplo quadrato primi termini addantur triplum secundi termini in primum et quadratum secundi et summa per secundum terminum multiplicetur, productumque ex 1^{mo} residuo subducatur. Si residuum hujus subtractionis non est nullum, circa hoc residuum eodem procedatur modo ac circa 1^{mum}, duos primos terminos radicis per modum unius capiendo.

Scholion. Si polynomium propositum terminos continet exponentibus negativis aut fractis affectos, eodem prorsus modo procedendum est, ut ex exemplo hic subjecto videre est : Quæritur radix cubica sequentis polynomii :
$a^6 - 9a^{\frac{9}{2}}b + 30a^3b^2 - 45a^{\frac{3}{2}}b^3 + 30b^4 - 9a^{-\frac{3}{2}}b^5 + a^{-3}b^6$.

SCHEMA.

$$
\begin{array}{l}
a^6 - 9a^{\frac{9}{2}}b + 30a^3b^2 - 45a^{\frac{3}{2}}b^3 + 30b^4 - 9a^{-\frac{3}{2}}b^5 + a^{-3}b^6 \\
-a^6 \\
\hline
-9a^{\frac{9}{2}}b + 30a^3b^2 - 45a^{\frac{3}{2}}b^3 + \text{etc.} \\
+9a^{\frac{9}{2}}b - 27a^3b^2 + 27a^{\frac{3}{2}}b^3 \\
\hline
+3a^3b^2 - 18a^{\frac{3}{2}}b^3 + 30b^4 - \text{etc.} \\
-3a^3b^2 + 18a^{\frac{3}{2}}b^3 - 30b^4 + \text{etc.} \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
a^2 - 3a^{\frac{1}{2}}b + a^{-1}b^2 \\
\hline
3a^4 \ldots \text{ Divisor}
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
3a^4 - 9a^{\frac{5}{2}}b + 9ab^2 \\
-3a^{\frac{1}{2}}b \\
\hline
-9a^{\frac{9}{2}}b + 27a^3b^2 - 27a^{\frac{3}{2}}b^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
3a^4 - 18a^{\frac{5}{2}}b + 27ab^2 \ldots \text{ Divisor} \\
3a^4 - 18a^{\frac{5}{2}}b + 27ab^2 + 3ab^2 - 9a^{-\frac{1}{2}}b^3 + a^{-2}b^4 \\
+a^{-1}b^2 \\
\hline
+3a^3b^2 - 18a^{\frac{3}{2}}b^3 + 27b^4 + 3b^4 - 9a^{-\frac{3}{2}}b^5 + a^{-3}b^6
\end{array}
$$

Regulæ extrahendæ radicis $4^{tæ}$, $5^{tæ}$, etc. facile ex formulis (5, 6, 7 et 8) erui possunt; sed his supersedebimus.

Theoriam calculi algebraici principiis ex arithmetica et natura signorum petitis superstruximus : ad alteram quæstionis propositæ partem nunc transeamus.

SECTIO SECUNDA.

ÆQUATIONUM RESOLUTIO ET DISCUSSIO.

Definitiones et notiones generales.

91. Quantitates incognitas ex datis seu cognitis eruere, præcipuum Algebræ munus est. Propositio qua quantitas incognita datarum ope determinanda proponitur, *quæstio mathematica* sive *problema* vocatur. Problema *solvere* est incognitæ vel incognitarum valorem invenire, vel ostendere illud contradictionem involvere.

Ut quantitates incognitæ aliarum datarum ope inveniri queant, has inter et illas relationes quædam intercedant necesse est, non illæ vagæ quidem et indeterminatæ sed certæ ac determinatæ quæ ad æqualitates revocari possint : hæ relationes problematis *conditiones* vulgo appellantur.

92. Quævis expressio ex quantitatibus v. g. x, a, b, per operationes algebraicas composita, harum quantitatum *functio* dicitur. Duæ functiones sunt *identicæ* si ex iisdem quantitatibus, per easdem operationes algebraicas conjunctis constent, tales sunt v. g. $a^2 - x^2$ et $(a + x)(a - x)$. Functiones sunt *diversæ* si ex diversis, vel ex iisdem quidem sed per diversas operationes inter se conjunctis quantitatibus componantur; tales sunt $ax + b$ et $cx + d$, vel etiam $a^2 - x^2$ et $a^2 + x^2$.

Duæ functiones identicæ necessario inter se æquales sunt; functiones diversæ æquales vel inæquales esse possunt. Æqualitas duarum functionum signo (=) inter illas locato indicata, *æquatio* vocatur, quæ si inter functiones identicas locum habeat, *identitas* vel *æquatio identica* dicitur. Inæqualitas duarum functionum signis $>$ vel $<$ inter illas positis designatur, et *inæquatio* vocari potest.

93. Ars problemata mathematica per æquationes algebraicas solvendi, nobis *analysis algebraica* vocabitur. Duabus constat partibus : prior in æquationum quibus problematis conditiones exprimantur constructione consistit ; altera earumdem æquationum resolutione absolvitur.

6

94. Ad construendum æquationes quibus problematis conditiones in linguam algebraicam traducantur, functiones incognitarum x, y...et datarum a, b... diversæ sed æquales quærendæ sunt : his vero inveniendis regulæ generales præscribi nequeunt. Præceptum sequens ad hunc finem sæpe sæpius perducet : » Conditiones quibus incognitarum valores satisfacere debent, attente perpen- » dantur : tum circa datas a, b..et incognitas x, y.. eæ instituantur opera- » tiones algebraicæ quibus si hæ inventæ essent, verificaretur illas conditioni- » bus problematis satisfacere. »

95. Æquationes unam vel plures incognitas continere possunt : si æquationes habeantur incognitis numero pares, problema *determinatum* erit; *indeterminatum* vero si æquationes numero pauciores sint quam incognitæ. Primo casu æquationes *determinatæ*, secundo *indeterminatæ* dicuntur. Æquationes gradu quoque inter se distinguuntur : nempe æquationes *simplices* seu *primi gradus* dicuntur in quibus incognitæ neque per se ipsas neque per se mutuo multiplicantur; æquationes *quadraticæ* sive *secundi gradus* in quibus quadratum alicujus incognitæ vel productum duarum incognitarum occurrit : æquationes *cubicæ* seu *tertii gradus* in quibus cubus alicujus incognitæ vel productum quadrati unius incognitæ per alteram, vel etiam productum trium incognitarum reperitur; et sic porro. Generatim gradus æquationis determinatur per maximum exponentem incognitæ vel per maximam summam exponentium incognitarum sese multiplicantium. Sic $ax - b = cx - d$, $ax + by = c$ æquationes sunt 1^{mi} gradus; $ax^2 + bx = c$, $axy + by + cx = d$ 2^{di} gradus; $ax^3 + bx^2 + cx = d$, $ax^2y + bxy^2 = c$ sunt 3^{tii} gradus; etc. De æquationibus 1^{mi} et 2^{di} gradus solum nos hic agemus.

96. Utrumque cujusvis æquationis membrum tam incognitarum quam datarum functio esse potest. Verum certis operationibus quæ membrorum æqualitatem non turbant, incognitæ et inter se et a cognitis segregari possunt, et æquationes obtineri in quibus singula incognita certæ datarum functioni æquatur : id quum fit, æquationes *resolvi* dicuntur. Æquationum determinatarum resolutio, saltem quum simplices sunt vel quadraticæ, certis regulis perficitur.

Per æquationum resolutionem pro singula incognita certa invenitur datarum a, b.. functio seu formula algebraica, cujus si valor quæratur, ipsius incognitæ valor numericus habebitur. Valor functionis algebraicæ a valore particulari qui litteris tribuitur, et a forma functionis, id est, a modo quo litteræ inter se conjunctæ sunt, pendet : alterutro enim mutato, valor functionis mutetur quoque necesse est.

Forma cujusque functionis algebraicæ non a litterarum a b c... valore, sed a problematis conditionibus solum pendet : hisce igitur iisdem manentibus, quamvis datarum valores mutentur, functiones algebraicæ quæ pro singulis incognitis inveniuntur, eandem formam conservabunt. Hinc patet hisce functionibus seu formulis regulas contineri generales quibus problemata solo quantitatum datarum valore diversa, solvi queant (1).

97. Ut incognitæ cujusque valor ex formula cui æquatur, deduci possit, necesse est ut omnes operationes indicatæ, in numeros litteris repræsentatos possibiles sint. Quum vero accidere possit ut una vel plures ex his operationibus pro certis valoribus impossibiles evadant, operæ pretium erit investigare quid in his casibus de problemate proposito judicandum sit, sive qua ratione analyseos algebraicæ responsa interpretanda sint; id quod tribus sequentibus capitibus pro viribus præstare conabor.

CAPUT I.

DE ÆQUATIONIBUS GENERALIBUS PRIMI GRADUS.

98. Quamvis æquationes primi gradus cum unica incognita, secundum conditionum quas exprimunt diversitatem, infinitis modis inter se differant, omnes tamen ad communem et constantem aliquam formam reduci possunt. Nimirum quævis ejusmodi æquatio, utrique ejus membro certas addendo quantitates, ad hanc formam revocari potest :

$$ax + b = cx + d \ldots (1)$$

in qua termini omnes positivi sunt et coefficientes a, b, c, d numeros absolutos cognitos repræsentant. Ad æquationem hanc generalem resolvendam, ab utroque ejus membro subtrahatur $cx + b$: obtinebitur $ax - cx = d - b$; tum utrumque hujus æquationis membrum per $a - c$ dividendo, prodibit

$$x = \frac{d-b}{a-c} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Talis est formula generalis quæ repræsentat valorem incognitæ x, quicumque sint valores coefficientium a, b, c, d.

99. Hic continuo tres examinandi veniunt casus, secundum diversas quæ inter coefficientes, a, c, d, b existere possunt relationes : scilicet vel 1°. est $a > c$ et $d > b$; vel 2° una tantum ex his relationibus locum habet; vel 3°. $a < c$ et $d < b$.

In 1° casu utraque subtractio $d - b$ et $a - c$ possibilis est, unde valor functionis $\frac{d-b}{a-c}$ numerus est absolutus qui problematis conditioni satisfaciet.

In 2° casu una ex dictis subtractionibus est impossibilis. Sit $a > c$ et $b < d$: in hac hypothesi æquatio (1) evidenter impossibilis est; quum enim valor incognitæ x numerus absolutus esse debeat, si $a > c$, est etiam $ax > cx$, et quum $b > d$, sequitur esse $ax + b > cx + d$, quod cum æquatione (1) pugnat. Si $a < c$ et $b < d$, erit $ax + b < cx + d$, quod etiam æquationi (1) repugnat. Ergo quando casus hic locum habebit, æquatio (1) impossibilis et *problema absurdum* erit.

In 3° casu subtractiones $a - c$ et $d - b$ ambæ sunt impossibiles. Si in hoc casu ad modum advertimus quo æquatio (1) resoluta fuit, reperimus operationem qua ex utroque membro subtraximus $cx + b$ (98) esse impossibilem, quandoquidem in hac hypothesi $ax + b$ et $cx + d$ est $< cx + b$. Quum igitur calculus hic vitio laboret, ex utroque æquationis (1) membro subtrahamus potius $ax + d$, quod est possibile quum utrumque membrum sit $> ax + d$; obtinetur $b - d = cx - ax$, et per $c - a$ dividendo, prodit

$$x = \frac{b-d}{c-a} \dots\dots\dots\dots (3).$$

Functio hæc a (2) non differt nisi quod signa in utroque fractionis termino in contraria sunt mutata. Quum autem nunc utraque subtractio possibilis sit, valor incognitæ x numerus erit absolutus qui dabit veram problematis solutionem, perinde ac in 1° casu. Igitur quando in hunc casum incidemus, cognoscemus modum solutionis præposterum adhibitum fuisse : non tamen, ad errorem corrigendum, necesse erit novam instituere operationem; sufficit enim in utroque termino functionis $\frac{d-b}{a-c}$ signa in contraria mutare.

100. Algebra, ut jam observavimus, eo constanter collimat ut formulas inveniat generales quæ omnes ejusdem problematis casus comprehendant. Atqui scopum hunc attingemus si convenimus, *quantitates negativas cum solæ occurrent, iisdem subjicere calculi legibus ac si alias positivas comitarentur.* Ex. gr. si haberemus $m + d - b$, posito $b > d$, scriberemus $m - (b - d)$ (16. 2°.); igitur quando habebimus $d - b$ et $b > d$, scribemus quoque $-(b - d)$. Congruenter huic conventioni in 2°. casu (99) valor incognitæ fiet $x = \frac{-(b-d)}{a-c} = -\frac{b-d}{a-c}$, et inde concludemus, *solutionem negativam contradictionis seu absurditatis indicium esse.*

Pariter, ubi $-a^4 + 3a^2b^2 +$ etc. per $-a^2 + b^2$ dividere oportet, dividimus $-a^4$ per $-a^2$, et scimus quotum esse $+a^2$ (40): idem præstabimus quando $-a^4$ per $-a^2$ separatim dividendum erit, et scribemus $\frac{-a^4}{-a^2} = +a^2$. Hinc in 3° casu (99) valor incognitæ $x = \frac{d-b}{a-c} = \frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, fiet $x = \frac{b-d}{c-a}$ ut esse debet.

101. Vi præcedentis conventionis formula (2) (98) sola omnes casus complectitur; sed nunquam excidere debet, quantitates negativas, ab aliis separatas, ut $-k$, $\frac{-m}{-n}$, etc. esse mere entia conventionis, symbola quæ per se nullas quantitates reales repræsentant; neque illa in calculo adhiberi perinde ac si quantitates reales repræsentarent nisi quia algebra hac ratione finem attingit non parvi momenti, quin ullum exinde incommodum resultet.

102. Igitur omnia signa æquationis cujusvis in contraria mutare, vel omnes terminos per quantitatem negativam multiplicare licet. Si enim in 1° ex tribus casibus (99) versamur, æquatio quidem ex possibili in absurdam transibit;

sed quantitatum negativarum per se invicem divisione (100) res in integrum restituetur. Si sumus in 2° casu (99), absurditas problematis adhuc per valorem negativum incognitæ x manifestabitur. Denique, si tertius casus obtinet, omnium signorum in contraria mutatio vitium calculi emendabit.

103. Quando æquatio erit absurda, solutio negativa non omnino usu carebit; si enim hoc casu in æquatione (1) (98) — x pro x ponatur, æquatio (1) in hanc transibit

$$b - ax = d - cx,$$

et, utrique membro addendo $ax - d$, et per $a - c$ dividendo, obtinebitur

$$x = \frac{b-d}{a-c}$$

qui valor a præcedente non differt nisi quod absolutus seu positivus sit. Si igitur problema propositum modificetur ita ut nova æquatio ipsi conveniat, problema ita modificatum non amplius absurdum erit, ac eandem ac propositum, seposito tamen signo, solutionem habebit. Hanc solutionibus negativis utendi rationem infra exemplis illustrabimus.

104. Præter tres casus supra (99) examinatos, duo sunt in quibus valor (2) incognitæ x formam induit singularem.

Si $a = c$, est æq. (2) $x = \frac{d-b}{o}$. Sed in hac hypothesi æquatio (1) est $ax + b = ax + d$ sive $b = d$: igitur quamdiu b differt a d, æquatio impossibilis et problema absurdum erit. $\frac{d-b}{o}$ sive $\frac{m}{o}$ *limes* est ad quem valor fractionis $\frac{m}{n}$ cujus denominator continue decrescit, magis magisque accedit, nec tamen attingere potest: si enim fiat successive $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$ valor fractionis fiet bis, quater, decies, centies, millies ... major; quum vero n continue ita decrescere nec zerum attingere possit, $\frac{m}{n}$ continue crescere poterit quin unquam limitem $\frac{m}{o}$ attingat. Hinc solutio $\frac{m}{o}$ *infinita* dicitur; et *solutio infinita problema absurdum esse indicat;* quod hoc signo $x = \infty$ designatur.

Sed si $a = c$, simulque $b = d$, tunc æq. (2) $x = \frac{o}{o}$; et proposita (1) fit $ax + b$

$= ax + b$, æquatio identica quæ semper vera erit quicumque sit valor x, qui proinde est arbitrarius. Ergo *problema indeterminatum est sive numerum solutionum indefinitum admittit, quando $x = \frac{o}{o}$ invenitur.*

105. Scholion. Quum problema indeterminatum esse dicimus quando invenitur $x = \frac{o}{o}$, supponimus valorem x (2) ad simplicissimam formam reductum fuisse. Si enim duo termini valoris x factorem communem haberent qui in casu quodam particulari zero æqualis fieri posset, valor x formam $\frac{o}{o}$ assumere posset quin tamen esset arbitrarius. Sic, ex. gr., si esset $x = \frac{a^2c - b^2c}{ad - bd}$: si ponatur $a = b$, fit $x = \frac{o}{o}$. Nec tamen problema est indeterminatum; si enim valor x ad simplicissimam formam reducatur, fit $x = \frac{ac + bc}{d}$ qui, posito $a = b$, fit $x = \frac{2ac}{d}$.

106. Æquationes primi gradus cum duobus incognitis ad hanc formam reduci possunt :

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right. \quad (A),$$

in quibus a, b, c, a', b', c' numeri sunt cogniti, positivi, negativi vel nulli.

Ad æquationes has generales resolvendas, prior per numerum arbitrarium k multiplicetur, et ab ea subtrahatur posterior ; hac ratione obtinetur

$$(ak - a')\,x + (bk - b')\,y = ck - c' \ldots (1).$$

Quum k numerus est arbitrarius, talis supponi potest ut unum vel alterum coefficientem nullum reddat quo casu una ex incognitis x, y erit eliminata.

Ponamus igitur

$$bk - b' = o \ldots (2);$$

æquatio (1) fiet $(ak - a')\,x = ck - c'$; unde $x = \frac{ck - c'}{ak - a'}$. Sed æquatio (2) dat $k = \frac{b'}{b}$: igitur, facta substitutione $\frac{b'}{b}$ pro k, et utroque termino per b multiplicato, erit

$$x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \ldots (B).$$

Ponamus in æq. (1)

$$ak-a' = o \ldots (3);$$

fiet $(bk-b')\,y = ck-c'$, unde $y = \frac{ck-c'}{bk-b'}$. Sed æq. (3) dat $k = \frac{a'}{a}$: igitur substituendo et multiplicando utrumque terminum per a, erit

$$y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \ldots (B).$$

107. Formulæ (B) solutiones continent omnium problematum 1^{mi} gradus cum duabus incognitis: si enim pro a, b, c, a′, b′, c′ numeri substituantur positivi vel negativi quos in singulo casu particulari repræsentant, operationesque indicatæ peragantur, incognitarum x, y valores prodibunt.

Si omnes operationes possibiles sunt, valoresque incognitarum prodeant absoluti vel positivi, hi valores solutionem dabunt problematis propositi. Sed quum pro certis coefficientium valoribus res aliter se habere possit, hic nobis inquirendum est, quid in his casibus de problemate proposito judicandum sit.

1°. Valor x vel y negativus esse potest; tunc *problema est absurdum* uti (99 et 100): eliminatione enim problema ad unam incognitam reducitur. Pariter si in æquationibus (A) — x vel — y ponatur pro x vel y, simulque problema propositum modificetur ita ut novæ æquationes ipsi conveniant, problema non erit amplius absurdum, et eandem, mutato signo, solutionem habebit (103). Hic solutionum negativarum usus infra exemplis illustrabitur.

2°. Formulæ (B) (106) valores dabunt infinitos si coefficientes tales sunt ut $ab'-ba' = o$, sive si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Ut quæ sit in hac hypothesi problematis propositi natura, appareat, in posteriore æquationum (B) pro a′ substituatur ejus valor $\frac{ab'}{b}$, et per $\frac{b}{b'}$ multiplicetur, æquationes (A) fient

$$ax+by=c$$
$$ax+by=-\frac{bc'}{b'},$$

æquationes quæ simul subsistere non possunt nisi sit $c = \frac{bc'}{b'}$ sive $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$. Si ergo hæc relatio locum non habet, æquationes (A) erunt contradictoriæ et problema absurdum. Ergo *valores infiniti problema absurdum esse indicant* sicut (104); atque hoc evenit quoties in æq. (A) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ sed non $= \frac{c}{c'}$.

3°. Sed si non solum $ab' - b'a = 0$, sed etiam $bc' - cb' = 0$, sive si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, æquationes (A) non erunt duæ distinctæ; posterior enim ad priorem reducitur si per $m = \frac{a}{a'}$ multiplicetur, nam $a'm = a$, $b'm = b$, $c'm = c$. Quum igitur una tantum habeatur æquatio pro duabus incognitis, *problema indeterminatum erit.* In hoc casu utriusque incognitæ valor formam $\frac{0}{0}$ induit, nam $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ dat $ac' = ca'$ unde $ac' - ca' = 0$.

Quum æquationes determinatæ 1^{mi} gradus, quocumque sint numero, per eliminationem unius pluriumve incognitarum semper ad duas cum duabus incognitis reduci queant, præcedens ratio omnibus æquationibus determinatis 1^{mi} gradus, quicumque sit incognitarum numerus, applicari debet.

CAPUT II.

DE ÆQUATIONE GENERALI 2^{di} GRADUS.

108. Æquationes 2^{di} gradus pro conditionum quas exprimunt diversitate, diversas sortiuntur formas. Omnes tamen certis operationibus ad constantem aliquam formam reduci possunt; si enim omnes termini in idem membrum transponantur, reducantur et ordinentur, quælibet æquatio quadratica ad hanc formam revocatur.

$$Ax^2 + Bx + C = 0;$$

quæ æquatio si per A dividatur, ponaturque $\frac{B}{A} = p$, $\frac{C}{A} = q$, fiet

$$x^2 + px + q = 0 \ldots (1)$$

æquatio generalis 2^{di} gradus cum una incognita, cujus coefficientes p, q sunt numeri cogniti, positivi, negativi vel nulli.

109. Numerus quicumque qui, si in locum x substituitur, æquationi (1) satisfacit seu primum ejus membrum nullum reddit, *radix* æquationis vocatur. Sic si numerus a talis est ut, facta substitutione, $a^2 + pa + q = 0$, a radix erit æquationis (1); et vicissim, si a radix est æquationis (1), erit quoque $a^2 + pa + q = 0$.

110. Si trinomium $x^2 + px + q$ per $x - a$ dividitur, invenitur quotus $x + a + p$ cum residuo $a^2 + pa + q$: igitur, quicumque sint p, q et a, erit

$$x^2 + px + q = (x - a)(x + a + p) + (a^2 + pa + q).$$

Si residuum divisionis, terminis se invicem destruentibus, nullum est, trinomium per $x - a$ exacte divisibile erit; et vicissim, ut trinomium per $x - a$ exacte divisibile sit, requiritur ut hæc conditio impleatur. Hinc sequitur

1°. Si a est radix æquationis (1), binomium $x - a$ divisor erit primi membri; tunc enim (109) $a^2 + pa + q = 0$.

2°. Si $x - a$ divisor est æquationis (1), a erit radix ejusdem æquationis; tunc enim residuum divisionis $a^2 + pa + q$ nullum est, unde a satisfacit æquationi (1) sive ejus radix est.

3°. Si æquatio (1) unam habet radicem qualemcumque a, habebit et alteram $-(a + p)$. Si enim a est radix, $x - a$ est divisor æquat. (1), et erit

$$x^2 + px + q = (x - a)(x + a + p);$$

jam autem hoc productum nullum fit, sive ponatur $x = a$, sive $x = -(a + p)$, nam primo casu factor $x - a$, altero $x + a + p$ erit $= 0$.

4°. Æquatio 2^{di} gradus duas tantum, non plures radices admittit. Si enim a radix est æquat. (1), hæc æquatio fiet (3°.)

$$(x - a)(x + a + p) = 0$$

cujus radices sunt $x = a$ et $x = -(a + p)$. Sit jam, si est possibile, $x = c$ tertia radix a duabus præcedentibus diversa : erit $(c-a)(c+a+p)=0$, quæ æquatio verificari nequit, nisi sit vel $c-a=0$ vel $c+a+p=0$; igitur vel $c=a$, vel $c=-(a+p)$; quod est contra hypothesim.

5°. In æquatione (1) *coefficiens* p, mutato signo, *summa est duarum radicum, et q earumdem productum.* Nam radices sunt a et $-(a+p)$; sed $a-(a+p)=-p$, et $a\times-(a+p)=-a^2-pa=q$ quandoquidem $a^2+pa+q=0$.

111. Nunc ad resolvendam æquationem generalem (1) accedamus. Si q esset $=\frac{1}{4}p^2$, æquatio (1) fieret

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=0,$$

et extrahendo radicem, obtineretur $x+\frac{1}{2}p=0$ vel $-x-\frac{1}{2}p=0$: harum utraque dat $x=-\frac{1}{2}p$. Igitur quando $q=\frac{1}{4}p^2=(\frac{1}{2}p)^2$ (quod supponit q esse positivum), duæ æquat. (1) radices *æquales* sunt.

Si conditio præcedens non obtinet, utrique æquat. (1) membro addatur $\frac{1}{4}p^2-q$; erit

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

Si ex utroque membro nunc extrahatur radix, erit $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; unde

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}\ldots.(2).$$

Hæc est formula resolutoria æquationis generalis, sive functio coefficientium p, q duas ejus radices repræsentans. Itaque si in quovis casu particulari æquatio 2^{di} gradus ad formam æquationis generalis (1) reducatur, tum valores p et q in formula (2) substituantur, operationesque indicatæ efficiantur, duæ radices sive duo valores incognitæ x prodibunt.

112. Scholion. Quum ex utroque membro æquationis $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q$ radicem extraximus quadratam, unam tantum duplici affecimus signo, quia inutile foret utramque duplici signo afficere quum radix 1^{mi} membri uum signo contrario sumpta ad eandem formulam (2) conducat, si omnia signa in contraria mutentur (102).

113. Ordo nunc postulat ut æquationem generalem 2^{di} gradus discutiamus, evolvamusque omnes casus particulares in formula resolutoria (2) contentos pro

diversis coefficientium p q signis et valoribus in æquatione generali (1). Quod ut majori compendio præstemus, ponatur $\frac{1}{4}p^2 - q = m$: erit $q = \frac{1}{4}p^2 - m$, et si valor hic pro q in æq. (1) substituatur, hæc fiet

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 - m = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - m = 0;$$

talis est quantitas quæ certis in locum x substitutis numeris nulla reddi debet. Hic vero continuo tres sese offerunt casus prout m quantitas est negativa, nulla vel positiva.

1°. *Si m est quantitas negativa* (ad quod requiritur ut coefficiens q in æq. (1) positivus sit et $> \frac{1}{4}p^2$) æquatio (1) erit $(x + \frac{1}{2}p)^2 + m = 0$ cujus prior terminus, quicumque pro x numerus substituatur, negativus reddi nequit, et posterior etiam positivus est; jam vero summa duorum numerorum zero æquari non potest : igitur in hoc casu æquatio proposita est impossibilis et proinde problema *absurdum*. Hæc absurditas per quantitatem imaginariam sese manifestat in formula (2), hæc enim tunc est $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$.

Dicemus nihilominus æquationi (1) in hoc casu duas esse radices, quia *si formulæ* $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$ *eisdem regulis subjiciantur ac si forent quantitates reales*, *et* in trinomio $x^2 + px + q$ *pro* x *substituantur*, *trinomium hoc zero æquabitur*. Radices imaginariæ quamvis mera absurditatis symbola, perinde ac radices negativæ, propter rationes similes in calculum introducuntur, nimirum ut formula (2) generalis sit et omnes casus comprehendat.

2°. *Si m est æqualis zero* (ad quod requiritur ut coefficiens q in æq. (1) positivus sit et $= \frac{1}{4}p^2$) trinomium $x^2 + px + q$ tunc est quadratum $x + \frac{1}{2}p$ vel $-x - \frac{1}{2}p$, et *radices æquales sunt* (111).

3°. *Si m quantitas positiva est*, (quod obtinebit quando in æq. (1) coefficiens q negativus est, vel positivus et $< \frac{1}{4}p^2$), tunc æquatio (1) fit

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 - m = (x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{m})(x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{m}) = 0,$$

cui satisfactum erit si $x + \frac{1}{2}p + \sqrt{m} = 0$ vel si $x + \frac{1}{2}p - \sqrt{m} = 0$; unde $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{m}$ vel $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{m}$, atque adeo radices hoc casu reales sunt sed *inæquales*.

4°. *Ut radices reales ejusdem sint signi*, necesse est ut $\frac{1}{2}p$ sit $> \sqrt{m}$ sive $\frac{1}{4}p^2 > m$ sive $\frac{1}{4}p^2 > \frac{1}{4}p^2 - q$, ad quod requiritur ut q positivus sit in æq. (1).

Itaque si q negativus est, radicis erunt signi contrarii, et quando q positivus est et $< \frac{1}{4}p^2$ radices erunt ejusdem signi, nempe positivæ si p in æq. (1) negativus, et negativæ si p positivus est.

Radices negativæ æquationum 2^{di} gradus eodem modo interpretandæ sunt ac radices negativæ æquationum 1^{mi} gradus, atque eadem est illis in analysi utendi ratio ut exemplis infra demonstrabitur. Vide n^{os}. 100 et 103.

5°. Si $q=0$, formula (2) fit $x= -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p$, unde $x = 0$ vel $x= -p$, quod etiam ex æquatione (1) patet; tunc enim hæc æquatio fit $x^2 + px = x\,(p+x) = 0$, cui satisfit sive ponatur $x = 0$ sive $x= -p$.

6°. Si $p=0$, æquatio proposita est $x^2 + q = 0$; unde $x = \pm \sqrt{-q}$, duæ radices *reales* si q numerus positivus est, imaginariæ si q est numerus negativus in æquatione proposita.

114. Resolvimus æquationem generalem tam primi quam secundi gradus casusque quos formulæ generales resolutoriæ offerre possunt examini subjecimus : quo in manifesto posuimus 1° formulas resolutorias veram præbere problematis solutionem quotiescumque operationes indicatæ in numeros litteris subrogatos reipsa effici possunt ita ut inde numerus absolutus resultet; 2° easdem operationes pro certis valoribus impossibiles esse posse; quo casu solutiones oriuntur mere symbolicæ quales sunt *negativæ*, *infinitæ*, *indeterminatæ*, *imaginariæ* quæ non dant valorem incognitæ sed indicant problema esse absurdum vel indeterminatum; 3° solutiones negativas, qua tales, esse mera impossibilitatis symbola; has tamen a signo abstractas seu absolute sumptas, veras esse solutiones problematis a proposito parva tantum circumstantia discrepantis; unde nascitur insignis illarum utilitas in analysi algebraica et geometrica, quam exemplis illustrare nunc aggredimur.

CAPUT III.

USUS SOLUTIONUM NEGATIVARUM IN ANALYSI EXEMPLIS ILLUSTRATUS.

115. Problema I. Pater annos natus est 42, filius 12 : quæritur post quot annos ætas patris tripla futura sit filii?

Resol. Ponamus conditionem hanc post x annos implendam : post x annos ætas patris erit $42 + x$, filii $12 + x$; igitur tunc erit $42 + x : 12 + x = 3 : 1$, et $42 + x = 36 + 3x$; unde $x = \frac{42 - 36}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$. Ergo post 3 annos patris ætas tripla erit filii.

116. II. Pater natus est annos 42, filius 16 : quæritur post quot annos ætas patris tripla futura sit filii?

Resol. Ponamus conditionem hanc post x annos implendam : post x annos ætas patris erit $42 + x$, illa filii $16 + x$; igitur tunc $42 + x : 16 + x = 3 : 1$ et $42 + x = 48 + 3x$, unde $x = \frac{42 - 48}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$. Quum hæc solutio negativa sit, respondendum *impossibile esse ut ætas tripla fiat filii* (100).

117. III. Pater natus est annos 42, filius 16 : quæritur a quot annis ætas patris tripla fuit filii?

Resol. Ponamus conditionem hanc abhinc x annis impletam fuisse : x abhinc annis ætas patris erat $42 - x$, filii $16 - x$; igitur tunc erat $42 - x : 16 - x = 3 : 1$ et $42 - x = 48 - 3x$; unde $x = \frac{48 - 42}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$. Ergo 3 abhinc annis ætas patris tripla fuit illa filii.

118. IV. Pater natus est annos 42, filius 12 : a quot annis patris ætas tripla fuit filii?

Resol. Ponamus conditionem hanc x abhinc annis impletam fuisse : x abhinc annis ætas patris erat $42 - x$ et filii $12 - x$; igitur tunc erat.... $42 - x : 12 - x = 3 : 1$, et $42 - x = 36 - 3x$; unde $x = \frac{36 - 42}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$. Quum hæc solutio negativa sit, respondendum *ætatem patris nunquam fuisse triplam filii* (100).

119. Si problema I et IV inter se conferantur, hoc solum inter illa discrimen intercedit quod momentum quo ætas patris tripla sit filii, in illo venturum, in isto jam elapsum supponatur; æquationes vero quæ utriusque problematis conditionem exprimunt, solo signo x discernuntur. Solutio negativa in casu problematis IV dictæ suppositionis impossibilitatem prodit. Sed si in æquatione quæ hanc suppositionem exprimit, signum x in contrarium mutetur, solutio positiva et problema possibile fit; atqui nova æquatio respondet problemati I in quo suppositio contraria facta est : igitur solutio negativa a signo abstracta seu abso-

lute sumpta respondet problemati quod a proposito hac solum ratione differt quod incognita x sensu contrario accipiatur.

Idem ex II problemate cum III collato quoque probatur.

120. Quum solutio negativa invenitur, non statim problema absurdum declarandum est, sed videndum prius est an non hypothesis quædam arbitraria assumpta fuerit ad problematis conditiones in æquationem traducendum : fieri enim potest ut illa hypothesis conditionibus problematis repugnet, quo casu solutio negativa erit, nec tamen problema erit absurdum; si enim hypothesis contraria adoptetur, vera problematis solutio obtinebitur, ut ex sequentibus exemplis patebit.

121. V. 1mo die anni 1800 pater annos habebat 40, filius 12 : quæritur quando ætas patris quadrupla fuerit filii ?

Resol. Quum quæstio non dicat an momentum quo dicta conditio exstitit, anterius sit 1mo diei anni 1800, an vero posterius, una vel altera hypothesis assumenda est ad problema in linguam algebraicam traducendum : ponamus dictam conditionem impletam fuisse x annis *post* dictum diem; x annis post dictum diem ætas patris erat $40 + x$ et illa filii $12 + x$: itaque tunc erat $40 + x : 12 + x = 4 : 1$ et $40 + x = 48 + 4x$; unde $x = \frac{40-48}{4-1} = \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}$. Quum solutio hæc negativa sit, dicendum est, hypothesim qua prædicta conditio impleta supponitur *post* 1^{mum} diem anni 1800, impossibilem esse. Fiat igitur hypothesis contraria et dicta conditio impleta ponatur x annos *ante* 1^{mum} diem anni 1800 : tunc æquatio erit $40 - x = 48 - 4x$, et $x = 2\frac{2}{3}$: ergo *ætas patris quadrupla fuit filii* $2\frac{2}{3}$ *ann. ante* 1^{mum} *diem anni* 1800.

122. VI. Sit triangulum cujus latera a, b, c et anguli his oppositi A, B, C : $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$, si ex A in latus oppositum demittatur perpendicularis AD; quæritur distantia hujus perpendicularis a vertice C.

Resol. Quum perpendicularis ex A in latus oppositum demissa, generatim cadere debeat vel in C vel ad sinistram puncti C vel ad dextram prout angulus C rectus est vel acutus vel obtusus; fiat figura quædam hypothetica in qua perpendicularis A D ad sinistram puncti C cadere ponatur : in hac hypothesi, posita $CD = x$, erit (Geom. Legendre; p. XII, l. 3) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ax$, unde $x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$. Si in locum a, b, c valores dati substituantur, facto calculo, invenitur solutio negativa $x = -5$: igitur figura hypothetica absurda est sive perpendicularis A D ad sinistram puncti C cadere non potest. Fiat igitur nova figura in qua dicta perpendicularis ad dextram puncti cadat extra triangulum : in hac hypothesi priori contraria, erit (Geom. Legendre, p. XIII, l. 3) $c^2 = b^2 + a^2 + 2ax$ unde $x = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a} = 5$: igitur perpendicularis cadet extra triangulum ad dextram puncti C in distantia C D $= 5$. Si duæ figuræ hypotheticæ et æquationes quæ ad illas pertinent, inter se comparentur, patet inter figuras hoc interesse quod distantia C D in partes oppositas dirigatur, et inter æquationes quod incognitæ x signa sint contraria.

Generatim quando quæstionis geometricæ objectum est invenire punctum rectæ datæ quod certis conditionibus satisfaciat, punctum aliquod pro arbitrio sumitur et pro quæsito habetur, cujus distantia a puncto dato in eadem recta per x designatur; tum problematis conditio sive relatio quæ inter x et alias rectas datas intercedit per æquationem exprimitur. Quod si, resoluta æquatione, pro x valor positivus invenitur, positio hypothetica puncti quæsiti cum problematis conditione consentit, quare linea x graphice constructa et in rectam datam a puncto dato versus punctum hypotheticum translata, dabit verum punctum quæsitum. Si vero pro x valor negativus prodit, positio hypothetica puncti quæsiti repugnat; sed tunc idem valor, mutato signo, construatur et a puncto dato in partem oppositam transferatur et habebitur punctum quæsitum.

123. Problemata quæ præcedunt ad analysim determinatam pertinent; sed solutiones negativæ non aliter interpretandæ nec aliter iis utendum in analysi indeterminata. Sit ex. gr. æquatio

$$ax + by = c \ldots (1)$$

cujus coefficientes a, b, c sint numeri cogniti. Quum una tantum habeatur æquatio inter duas incognitas, harum una est arbitraria et æquatio numerum infinitum solutionum admittit. Unumquodque systema valorum m, n qui pro x et pro y substituti æquationi (1) satisfaciunt, unam problematis indeterminati cui respondet, solutionem præbet.

Si vero $x = m$ et $y = -n$ satisfaciant æquationi (1), m et n dabunt unam solutionem problematis indeterminati cui respondet

$$ax - by = c \ldots.(2).$$

Similiter si $y = n$ et $x = -m$ satisfaciant æquationi (1), m et n unam præbebunt solutionem problematis cui respondet

$$-ax + by = c \ldots.(3).$$

Denique si $x = -m$ et $y = -n$ satisfaciant æquationi (1), m et n unam solutionem dabunt problematis cui respondet

$$-ax - by = c \ldots(4).$$

Problemata quibus respondent æquationes (2, 3 et 4) ab illo cui respondet æquatio (1), non aliter differunt quam quod in prioribus una vel utraque incognita sensu contrario accipiatur. Omnia autem illa problemata sola æquatione (1) comprehenduntur et una eademque opera resolvuntur, modo valores negativi qui pro x et pro y inveniuntur, absolute sumpti problematibus applicentur in quibus incognitæ x et y sensu contrario sumantur.

Ex hac solutionibus negativis utendi ratione, insigne hoc nascitur commodum in geometria analytica quod relatio quæ inter abscissam x et ordinatam y cujusvis curvæ puncti intercedit, una eademque æquatione exprimi possit quæcumque sit ejus positio respectu axium. Sic v. g. æquatio $y = ax + b$ quæ ad lineam rectam pertinet, omnia dabit ejusdem rectæ puncta in quocumque ex quatuor angulis per axes coordinatarum formatis existant, si coordinatæ negativæ a signis abstractæ in sensum contrarium positivis portentur. Hic vero probe notandum est, quando pro x vel pro y valor negativus in æquatione rectæ vel curvæ substituitur, id propter compendium fieri; evidenter enim eodem redit sive fiat $x = -m$ in æquatione $y = ax + b$, sive fiat $x = m$ in æquatione $y = -ax + b$.

124. VII. Datis duarum rectarum in eodem plano ductarum æquationibus, invenire punctum intersectionis earum.

Resol. Sint

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

æquationes duarum rectarum. Abscissa et ordinata puncti intersectionis æquationi utriusque rectæ satisfacere debent; sint igitur x et y abscissa et ordinata puncti quæsiti, quum duæ habeantur æquationes pro duabus incognitis, problema erit determinatum. Resolvendo has æquationes (106), invenitur

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

tales sunt expressiones generales abscissæ et ordinatæ puncti intersectionis per coefficientes æquationum duarum rectarum.

Si coordinatæ x y ambæ positivæ sunt, punctum intersectionis existet in illo ex quatuor angulis in quo coordinatæ punctorum positivæ seu absolutæ supponuntur. Si coordinatæ x y ambæ negativæ inveniuntur, punctum intersectionis in angulo priori ad verticem opposito situm erit (123). Si una tantum ex coordinatis x y negativa est, idem punctum in uno ex duobus angulis vicinis reperietur. Si abscissa $x = 0$, punctum intersectionis erit in axe ordinatarum; si ordinata $y = 0$, erit in axe abscissarum, et si $x = 0$ et $y = 0$, erit ipsa *origo*.

Si coordinatæ x y infinitæ sunt, punctum intersectionis duarum rectarum est *in distantia infinita* sive non existit (107,2°), quod significat *duas rectas datas esse parallelas*. Hoc casu duæ æquationes datæ simul verificari per eosdem valores sive positivos sive negativos sive nullos, non possunt.

Tandem si coordinatæ x y formam $\frac{0}{0}$ affectant, punctum intersectionis rectarum *indeterminatum* erit. Quum enim in hoc casu duæ æquationes non sint distinctæ, sed una ad alteram reducatur (107,3), duæ rectæ coincidunt, et quodvis earum punctum pro puncto intersectionis haberi potest.

Hoc problema ad ea quæ supra (107) diximus elucidanda inservit, et monstrat quis sit solutionum negativarum, infinitarum atque indeterminatarum usus in geometria analytica.

125. VIII. Datis duobus punctis A, B, in recta AB invenire tertium punctum C cujus distantia a puncto A media proportionalis sit inter distantiam ejusdem ab alio puncto B et distantiam punctorum A, B ab invicem.

Resol. Ponamus punctum quæsitum C inter A et B situm. Sit AB $= a$, AC $= x$ atque adeo CB $= a - x$: erit ex hypothesi $a : x = x : a - x$, unde $x^2 = a^2 - ax$ et

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \;\ldots\ldots\; (1);$$

unde patet problema ab æquatione 2^{di} gradus dependere. Resoluta æquatione (1), invenitur (111)

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + a^2)} \;\ldots\; (2).$$

Radices reales sunt et una positiva, altera negativa. Prior, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$, graphice constructa et in lineam AB a puncto A versus B translata, dabit punctum C quod problematis conditioni satisfaciet.

Posterior, $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$ cum signis contrariis sumpta, graphice constructa et in lineam AB a puncto A versus partem oppositam translata, dabit alterum punctum C′ quod æqualiter problematis conditionem implebit. Quum problema non exigit ut punctum quæsitum sit inter A et B, secunda hæc solutio æque problemati convenit.

Ponamus punctum quæsitum extra puncta A, B v. g. in C′ positum. Sit C′A $= x$ et proinde C′B $= x + a$: erit ex hypothesi $a : x = x : x + a$, unde $x^2 = ax + a^2$ et

$$x^2 - ax - a^2 = 0 \;\ldots\; (3),$$

æquatio quæ ab æq. (1) solo signo secundi termini differt. Si resolvatur, invenitur

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + a^2)} \;\ldots\; (4).$$

Una harum radicum positiva est, nempe $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$, quæ constructa et in lineam AB a puncto A versus sinistram translata, dabit punctum C′; altera negativa $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$, quæ mutato signo constructa et a puncto A versus dextram translata, dabit punctum C. Solutiones hæ eædem sunt cum præcedentibus.

Ponamus punctum quæsitum situm esse extra puncta A, B ad dextram puncti B, v. g. in C″. sit C″A $= x$ et proinde C″B $= x - a$: erit $a : x = x : x - a$, unde $x^2 = ax - a^2$ et

$$x^2 - ax + a^2 = 0 \;\ldots\; (5),$$

qua resoluta (111), invenitur

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - a^2)} \ldots (6).$$

Radices hæ imaginariæ sunt et indicant hypothesim quæ punctum quæsitum ad dextram puncti B collocat, absurdam esse; quod per se quoque manifestum est, quum enim $C''A$ major sit quam $C''B$ et AB, illa inter has media proportionalis esse nequit.

126. Scholion. In ultima resolutione præcedentis problematis, si hypothesis quæ punctum quæsitum ad dextram puncti B collocat, una esset ex conditionibus problematis, concludendum foret problema propositum esse impossibile (113, 1°.). Sed quum hypothesis illa est arbitraria, antequam de natura problematis aliquid statuatur, hypothesis mutanda est, et videndum utrum in alia hypothesi solutiones adhuc sint imaginariæ. Quod si in nova hypothesi solutiones reales obtineantur, consequens erit, non problema sed hypothesim priorem esse absurdam : igitur exemplum hoc probat, solutiones imaginarias, perinde ac negativas, aliquando oriri ex errore hypotheseos quæ arbitrarie assumitur ad problema in æquationem traducendum.

127. IX. Datis duobus punctis A, B, invenire in recta AB punctum C tale ut rectangulum super AC et BC formatum, æquivaleat quadrato cujus latus est recta data m.

Resol. Fingamus punctum quæsitum situm esse inter A et B. Sit $AC = x$, $AB = a$, et proinde $BC = a - x$: erit ex hypothesi $x(a - x) = ax - x^2 = m^2$, et

$$x^2 - ax + m^2 = 0 \ldots . (1);$$

unde $$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - m^2)} \ldots (2);$$

Hæc solutio tres offert casus particulares prout $m^2 < \frac{1}{4} a^2$, $m^2 = \frac{1}{4} a^2$ vel $m^2 > \frac{1}{4} a^2$.

1°. Si $m^2 < \frac{1}{4} a^2$ sive $m < \frac{1}{2} a$, radices sunt *reales* et positivæ; unde duo sunt puncta quæ problematis conditioni satisfacient, quorum unum C per $x = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - m^2)}$, alterum D per $x = \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - m^2)}$ determinatur. Puncta C et D ambo inter A et B sita sunt, ita ut C ab A æqualiter distat ac D a B, et vice versa.

2°. Si $m^2 = \frac{1}{4} a^2$ sive $m = \frac{1}{2} a$, radices sunt *æquales*, nempe $x = \frac{1}{2} a$; unde unicum tantum est punctum C idque ab A et B æquidistans. Hoc casu rectangulum formatum super AC et BC erit quadratum cujus latus $= \frac{1}{2} a$.

3°. Si $m^2 > \frac{1}{4}a^2$ sive $m > \frac{1}{2}a$, radices sunt *imaginariæ;* unde sequitur nullum inter A et B existere punctum quod conditioni problematis satisfacere possit.

Igitur, si problema exigeret ut punctum quæsitum C inter A et B situm esset, in 1^{mo} casu problema duas admitteret solutiones, in 2^{do} unam tantum, et in 3^{tio} casu nullam sive esset impossibile.

Verum quum hypothesis quæ punctum quæsitum collocat inter A et B, arbitraria sit, fieri potest ut in singulo ex tribus casibus problema alias solutiones admittat, si punctum quæsitum extra puncta A, B situm ponatur.

Fingamus igitur punctum quæsitum C′ ad dextram punctorum A, B situm esse, sit $AC' = x$, et proinde $BC' = x - a$; erit $x(x-a) = x^2 - ax = m^2$

et $$x^2 - ax - m^2 = 0 \ldots (3),$$

unde $$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + m^2)} \ldots (4).$$

Quum radices sint reales, una positiva $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}$, altera negativa $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}$, problema in omni casu duas insuper habet solutiones, unam in C′ ad dextram punctorum A, B quod per radicem positivam, alteram in C″ ad sinistram eorum quod per radicem negativam cum signo contrario sumptam determinatur.

Tandem fingamus punctum quæsitum esse ad sinistram punctorum A, B v. g. in C″. Sit $AC'' = x$, et proinde $BC'' = x + a$: erit $x(x+a) = x^2 + ax = m^2$, et

$$x^2 + ax - m^2 = 0 \ldots (5),$$

unde $$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + m^2)} \ldots (6).$$

Quum hæ radices eædem sint cum præcedentibus, a quibus solo signo differunt, easdem quoque dabunt solutiones.

Ergo in 1^{mo} casu sive si $m < \frac{1}{2}a$, problema propositum quatuor admittit solutiones, duas nempe inter puncta A et B, et duas extra eadem puncta.

In 2^{do} casu sive si $m = \frac{1}{2}a$, problema tres habebit solutiones unam inter puncta A, B, duas alias extra eadem puncta.

Denique in 3^{tio} casu sive si $m > \frac{1}{2}a$, problema duas tantum habebit solutiones extra puncta A, B, unam ad dextram, alteram ad sinistram eorum.

128. Scholion. Quando problema ab æquatione 2^{di} gradus dependet, ut omnes solutiones problematis inveniantur, necesse est signa secundi et tertii termini seorsim in contraria mutare, et examinare quænam ex obtentis ita solutionibus problemati convenire possint.

129. X. Datis duobus punctis lucidis A, B intervallo $AB = a$ distantibus, invenire distantiam in qua planum ad rectam A B perpendiculare, ab utroque puncto lucido æquali luce perfundatur, posito quod intensitates lucis a punctis A, B emanantis in æquali distantia sint in ratione data m.

Resolut. Ponamus planum in puncto C inter A et B positum, æquali utrimque luce perfundi. Sit distantia $AC = x$ et proinde $BC = a - x$. Sint α et β intensitates lucis e punctis A, B emanantis in distantia $= 1$: erit ex hypothesi

$$\frac{\alpha}{\beta} = m \ldots (1)$$

Quum intensitas lucis ab eodem puncto emanantis decrescat ut quadratum distantiæ a puncto lucido augetur, lucis a puncto A profectæ intensitas in distantia $= 1, 2, 3 \ldots x$, erit respective $= \frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{9} \ldots, \frac{\alpha}{x^2}$; illa lucis a puncto B profectæ in distantia $= 1, 2, 3 \ldots (a-x)$ erit respective $= \frac{\beta}{1}, \frac{\beta}{4}, \frac{\beta}{9} \cdots \frac{\beta}{(a-x)^2}$: quum igitur in puncto C eadem sit lucis ab utroque puncto profectæ intensitas, erit

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(a-x)^2} \ldots (2).$$

Si in æquatione (2) pro α substituamus $m\beta$, et utrumque membrum per β dividamus, venit $\frac{m}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2}$ et $x^2 = m(a-x)^2$; unde, extrahendo radicem, $\pm x = (a-x)\sqrt{m} = a\sqrt{m} - x\sqrt{m}$; transponendo et dividendo, obtinetur

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm 1} \ldots . (3),$$

talis est expressio distantiæ quæsitæ. Sed tres hic distinguendi sunt casus, prout $m > 1$, $m < 1$ vel $m = 1$.

1°. Si $m > 1$, uterque valor incognitæ x positivus est; quare problema duas habet solutiones, unam inter A et B in puncto C cujus distantia ab A est $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$, alteram ad dextram punctorum A, B in puncto C′ cujus distantia ab A est $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$.

2°. Si $m<1$ unus ex valoribus x positivus est, alter negativus; valor positivus $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$ a puncto A dextram versus, negativus $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$, absolute sumptus a puncto A versus sinistram transferendus est; unde problema duas quoque habet solutiones, unam in C ad dextram puncti A, alteram in C″ ad sinistram.

3°. Si $m=1$, unus ex valoribus x est $\frac{1}{2}$ a, alter $\frac{a}{0}$: prior significat planum in æquali ab utroque puncto distantia positum æquali luce collustrari; posterior *infinitus* est et indicat in hoc casu nullum dari punctum extra A et B, in quo planum ab utroque puncto lucido æqualiter collustretur.

In præcedenti solutione punctum C inter A et B supposuimus; ne vero ullam solutionem nobis elabi sinamus, videamus quid analysis respondeat si illud extra puncta A et B positum fingamus.

Sit igitur punctum quæsitum ad dextram punctorum A et B v. g. in C′. Sit $AC'=x$, erit $BC'=x-a$: unde patet, in æquat. (2) $a-x$ in $x-a$ esse mutandum; sed quum $(x-a)^2=(a-x)^2$, æquatio (2) et consequenter æquatio (3) eædem manebunt. Ergo in hac hypothesi eædem obtinentur solutiones ac in præcedenti.

Sit tandem punctum quæsitum ad sinistram punctorum A, B, v. g. in C″. Sit $AC''=x$; erit, $BC''=a+x$: unde in æq. (2) $a+x$ pro $a-x$ ponendum, quo æq. (2) et (3) fiunt

$$\frac{\alpha}{x^2}=\frac{\beta}{(a+x)^2}\;\cdots\;(2),$$

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{\pm1-\sqrt{m}}\;\cdots\;(3).$$

Quid ferat hæc solutio in tribus supra dictis casibus, nunc videamus :

1°. Si $m>1$, uterque valor x negativus est; igitur in hac hypothesi ad sinistram punctorum A, B nullum est punctum quod conditioni problematis satisfacere possit, quod per se quoque manifestum est quum planum ad sinistram punctorum A, B positum, propinquius sit puncto A unde lux intensior emanat. Si vero uterque valor x cum signo contrario sumptus, ad dextram puncti A transferatur, eædem solutiones obtinentur quæ supra 1°.

2°. Si $m < 1$, unus ex valoribus x positivus est, alter negativus; prior ad sinistram puncti A translatus, dabit punctum C″; posterior cum signo contrario sumptus et ad dextram A collocatus, dabit punctum C inter A et B, perinde ac supra 2°.

3°. Tandem si $m = 1$, unus valor est $-\frac{1}{2}a$, et alter $\frac{a}{0}$, prior cum signo contrario sumptus et ad dextram puncti A translatus dat punctum medium inter A et B, ut supra 3°. Posterior valor infinitus est et idem significat ac supra 3°.

FINIS.