Toutes ces réduites, à partir de a', sont plus grandes que z ; et chacune d'elles montre le degré d'approximation fourni par la précédente. Ainsi a' fournit un chiffre exact, a'' deux, a''' quatre, etc. Si a^{V} fait voir que a^{IV} ne donne que cinq chiffres exacts : cela provient de ce que le calcul n'a été étendu qu'à sept décimales et que l'erreur résultante de la septième décimale a altéré déjà les deux derniers décimaux.

Note. La suite du Mémoire sera inséré dans un des Nos prochain de ce Recueil.

Les Nos, depuis 29 jusqu'à 46 inclusivement, de ce Mémoire sur la Résolution des équations numériques, seront remplis par la Partition des nombres, que l'auteur n'a pas jugé nécessaire de donner, afin de se tenir le plus près possible du but principal du Mémoire lui-même.

Les fautes essentielles à corriger seront données à la fin du Mémoire.

XIII. — *Mémoire sur la réfraction*,

Par M. GLOESENER,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

1. *Objet du Mémoire.* Je me propose de donner dans ce mémoire 1° une démonstration nouvelle et très simple de la formule générale, pour la réfraction astronomique, qui se trouve dans la mécanique céleste, vol. 4, p. 281 et 282 ; 2° de déduire des réfractions observées et non des observations barométriques le terme qui dépend du produit de la densité et de la hauteur de l'atmosphère ; 3° de comparer les résultats que donne la formule, et dont les coefficients numériques diffèrent un peu de ceux de la formule de Laplace, aux résultats déduits des tables données par Bessel, réputées comme les plus exactes, et 4° de faire voir que le premier terme de la formule proposée suffit pour déterminer les réfractions dans toutes les distances zénithales z depuis $z=0$ jusqu'à $z=45°$.

2. *Remarques sur la réfraction astronomique.*

1) Les densités des couches concentriques, parallèles et infiniment minces de l'atmosphère, décroissent à mesure qu'on s'élève au-dessus du niveau des mers : elles décroîtraient suivant une progression géométrique, si la température de différentes couches était la même ; mais comme celle-ci décroit, lorsque la hauteur des couches croit, les couches se refroidissent, se condensent, et leurs densités décroissent moins rapidement que dans une progression géométrique, lorsque la hauteur croit en progression arithmétique. Ne connaissant pas la loi suivant laquelle les densités décroissent quand les distances des couches augmentent par rapport au niveau de la mer, nous ne pouvons exprimer ces densités en fonction de leurs distances au centre de la terre ; or l'expression différentielle de la réfraction contenant les densités et les hauteurs des couches, il faudrait, pour l'intégrer, précisément connaitre la loi d'après laquelle les premières diminuent à mesure que les secondes augmentent ; c'est-à-dire il faudrait connaître les densités des cou-

ches en fonction de leurs distances à la surface de la terre. C'est pour cette raison que l'auteur de la mécanique céleste a comparé la réfraction horizontale observée à la même réfraction calculée dans trois hypothèses différentes : en supposant 1° que la densité de l'atmosphère soit uniforme; 2° que la température de l'atmosphère soit uniforme et que par conséquent les densités des couches d'air diminuent dans une progression géométrique ; et 3° que les densités des couches diminuent dans une progression arithmétique, lorsque leurs hauteurs croissent dans une progression semblable. Mais la première hypothèse donne la réfraction horizontale beaucoup plus petite que la même réfraction observée. La seconde donne la même réfraction trop grande, ce qui prouve que la constitution de l'atmosphère et les réfractions sont comprises entre les deux limites des valeurs déduites des deux hypothèses précédentes; la troisième donne la réfraction horizontale trop petite et nous apprend par conséquent 1° que les densités des couches d'air décroissent plus rapidement que dans une progression arithmétique et moins rapidement que dans une progression géométrique, lorsque leurs hauteurs croissent dans une progression semblable ; 2° qu'une hypothèse qui participerait à la fois de l'une et de l'autre des deux hypothèses susdites semble représenter le mieux la constitution de l'atmosphère et partant les réfractions.

2). On suppose que les forces réfractives des couches d'air sec soient proportionnelles à leurs densités, ce qui paraît conforme à l'observation ; mais on admet encore que le pouvoir réfringent de l'air humide est le même que celui de l'air sec, ce qui pourrait bien ne pas être tout-à-fait exact.

En effet, on sait que la force réfractive de la vapeur d'eau est plus grande que celle de l'air atmosphérique sec; mais l'air humide étant spécifiquement plus léger que l'air sec, il réfracte aussi moins fortement; et l'on admet que les effets de ces deux causes étant contraires se contrebalancent, tandis qu'il serait possible que l'une de ces causes produisît plus d'effet que l'autre. Mais, en admettant la force attractive de l'air sec ou humide proportionnelle à sa densité, on peut calculer la réfraction totale indépendamment de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère. Le terme qui contient le produit de la densité d'une couche par sa distance à la terre étendu à toutes les couches, et que l'on ne sait intégrer parce que l'on ne sait exprimer l'une de ces quantités en fonction de l'autre, se trouve être égal à la pression de l'air, dans le lieu de l'observateur, que l'on peut déterminer ; mais on peut aussi regarder ce terme comme une quantité constante pour le même état de l'atmosphère et le déduire des réfractions observées, ce qui a l'avantage de le rendre indépendant de l'hypothèse que le pouvoir refringent de l'air sec soit égal à celui de l'air humide.

3). Près de l'horizon jusqu'à la hauteur de 11 à 12° la densité de l'atmosphère est modifiée par des causes différentes et de diverses manières ; de sorte qu'il est impossible de faire sur la densité de l'air une hypothèse permettant de calculer les réfractions, comprises entre les limites des hauteurs désignées, qui soient d'accord avec celles qu'on observe directement ; en effet, la densité de l'atmosphère n'est pas toujours la plus grande près de la surface de la terre. Ici l'air est maintenu dans un mouvement continuel principalement par les vents, mais aussi par l'influence de la nature du sol inégalement chauffé dans des lieux différents. Ce mouvement de l'air est variable à chaque instant au même lieu et dans des lieux différents; il modifie à chaque instant la densité de l'air ; et il suit de cette modification 1° qu'on ne peut admettre que la densité de l'air décroisse depuis la surface de la terre jusqu'à la hauteur où elle est nulle 2° qu'il est douteux qu'en des lieux différents la réfraction moyenne soit la même à des hauteurs égales. Heureusement l'observation démontre que les modifications de l'air ne s'étendent que depuis l'horizon jusqu'à la hauteur de 12°. Pour les hauteurs au-dessus de cette limite jusqu'à 90°, on peut admettre que les densités des couches d'air décroissent lorsqu'ils croissent et alors, sans savoir exprimer la densité variable des couches par leurs distances à la surface de la terre, on peut regarder comme une quantité constante le terme qui contient l'intégrale du produit de ces deux quantités ou remplacer ce terme par son équivalent, qui est égal à la pression de l'air divisée par le rayon terrestre prise au lieu de l'observation. Aucune formule de réfraction ne pourra donc s'étendre que depuis la distance zénithale $=0$ jusqu'à la distance $=80°$.

3. *Marche à suivre.* Un rayon lumineux passe d'un astre par le vide dans l'atmosphère, divisée en couches concentriques et sphériques, infiniment minces, à la couche extérieure il subit une réfraction, à son passage dans la seconde il en subit une nouvelle et ainsi de couche en couche. Le rayon arrivera donc à l'œil de l'observateur, à la surface terrestre, sous un angle différent de celui de l'incidence.

Le rayon lumineux SM venant de l'astre S entre dans la couche extérieure de l'atmosphère au point M, il y fait un angle d'incidence $SMv = a$; et au lieu de continuer à se mouvoir suivant sa direction SMd prolongée, il est réfracté vers MM', l'angle d'incidence à l'entrée dans la seconde couche au point M' est $MM'v'$, le rayon y est réfracté vers $M'M''$ au lieu de se mouvoir suivant la ligne droite $MM'd'$. Au point M'' il est réfracté vers $M''A$ au lieu de continuer à se diriger suivant $M''d''$. l'observateur, placé à la surface de la terre au point A verra donc l'astre sur la ligne $AM''dS''$ et la réfraction totale est égale à l'angle $SdS'' = Adp$ que le rayon incident SM fait avec le rayon $S''dA$ qui arrive à l'œil de l'observateur. On voit que la lumière au lieu de décrire la ligne brisée $MM'M''A$ décrit dans la réalité un arc auquel le rayon $AdS'S''$ est tangent au point A. Or, si le rayon lumineux pénètre dans l'atmosphère au point M sous l'angle d'incidence a, la réfraction altère cet angle d'une quantité infiniment petite, en relevant l'astre un peu ou en augmentant sa hauteur apparente et cette altération n'est pas autre chose que la différentielle de l'angle d'incidence prise par rapport à l'indice de réfraction, mais cette différentielle est précisément l'élément de la réfraction ou sa différentielle, et son intégrale sera la réfraction totale cherchée :

Voyons donc l'expression de cet angle et sa différentielle.

3. *Expression de l'angle d'incidence.*

Nommons a, a', a'', etc., les angles d'incidence SMv, $MM'v'$, $M'M''v''$ aux points M, M', M'' : x, x', x'' les angles de réfraction cMM', $cM'M''$, $cM''A$ correspondants, et n, n', n'', etc., les indices de réfraction de la première, de la seconde et de la troisième couche extérieure etc. ..

Nous aurons les relations :

$$\sin a = n \sin x$$

$$\sin a' = \frac{n'}{n} \sin x'$$

$$\sin a'' = \frac{n''}{n} \sin x''$$

et par conséquent

$$\sin a \cdot \sin a \cdot \sin a'' = n'' \sin x \cdot \sin x' \cdot \sin x'' \qquad (1)$$

Mais les triangles McM', $M'cM''$, $M''cA$ donnent,

$$\sin x = \frac{\sin MM'c \times cM'}{cM} = \frac{\sin(180° - a')cM'}{cM} = \frac{\sin a' \cdot cM'}{cM}$$

$$\sin x' = \frac{\sin M'M''c \times cM''}{cM'} = \frac{\sin(180° - a'') \cdot cM''}{cM'} = \frac{\sin a'' \cdot cM''}{cM'}$$

$$\sin x'' = \frac{\sin M''Mc \times cA}{cM''} = \frac{\sin(180° - z) \cdot cM}{cM''} = \frac{\sin z \cdot cA}{cM''}$$

et par suite

$$\sin x \cdot \sin x' \cdot \sin x'' = \frac{\sin a' \cdot \sin a'' \cdot \sin z \times CA}{CM} \cdots (2)$$

En substituant cette valeur du premier membre dans l'équation (1) nous aurons la valeur du sinus de l'angle d'incidence a : savoir

$$\sin a = \frac{n'' \cdot \sin z \cdot CA}{CM} \qquad (3)$$

6. *Expression différentielle de la réfraction :*

Si le rayon lumineux, après qu'il est arrivé à l'œil de l'observateur, en partait pour retourner à l'astre, il décrirait certainement la même courbe qu'il décrit réellement : Prenons donc l'origine de la courbe de réfraction près de la surface de la terre, appelons n'' et n' les indices de réfraction de la première et de la seconde couche d'air comptées de la surface de la terre, et exprimons ce que devient sinus a lorsque la lumière pénètre de la première couche dans la seconde, sous un angle d'incidence égal à a. A cet effet, différentions l'expression (3) par rapport à n' ; la valeur de da sera la différentielle de la réfraction ; et l'intégrale de da prise depuis $n' = n''$ jusqu'à la hauteur de l'atmosphère, à laquelle n' est $= 0$, donnera la réfraction totale. Le calcul fournit :

$$\cos a da = d\left(\frac{n''}{n'}\right) \times \frac{\sin z \cdot CA}{CM} \qquad (4)$$

Or, en appelant R le rayon terrestre CA, z le rayon CM, p la densité de la première couche d'air, p' celle de la seconde, α le pouvoir réfringent de l'air par rapport à la température zéro et à la pression barométrique $0^m,76$; d'où abaissant du centre C de la terre la perpendiculaire CP sur le rayon incident SMDR, nous aurons d'après la définition même du pouvoir réfringent :

$$n'' = \sqrt{1 + \alpha p},$$

$$n' = \sqrt{1 + \alpha p'},$$

partant

$$d\left(\frac{n''}{n'}\right) = -\frac{\alpha dp' \sqrt{1 + \alpha p}}{\sqrt{(1 + \alpha p)^3}}.$$

De plus,

$$CP = \sin PMC \times CM = \sin a \times z = \frac{Rn'' \sin z}{n'}$$

$$\cos a = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{CM}} = \sqrt{\frac{z^2 - \frac{n''^2}{n'^2}\cdot \mathrm{R}^2 \sin^2 z}{z^2}} = \frac{1}{z}\cdot\sqrt{z^2 - \frac{n''^2}{n'^2}\mathrm{R}^2 \sin^2 z}$$

ou

$$\cos a = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{z^2(1+\alpha p') - (1+\alpha p)\cdot \mathrm{R}^2 \sin^2 z}{1+\alpha p'}}$$

Substituons pour $\cos a$ et $d\left(\frac{n''}{n'}\right)$ leurs valeurs ; nous aurons :

$$da = -\frac{\frac{\alpha dp'}{2}\sqrt{1+\alpha p} \times \mathrm{R} \sin z}{(1+\alpha p')\cdot z\sqrt{\left[1+\alpha p' - (1+\alpha p)\frac{\mathrm{R}^2}{z^2}\sin^2 z\right]}} \quad (5)$$

Cette équation est la même que l'équation (3) de la mécanique céleste, vol. 4, p. 244, où le pouvoir réfringent α est représenté, conformément à la théorie de la réfraction, par le terme $\frac{4\mathrm{K}}{n^2}$, K étant une constante et n représentant la vitesse de la lumière à une distance sensible du corps où elle pénètre. Divisons le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+\alpha p}$, posons avec de Laplace $\mathrm{R} = z\cdot(1-s)$ et nous aurons :

$$da = -\frac{\frac{\alpha}{2}\cdot dp'(1-s)\cdot \sin z}{1+dp'\sqrt{\left[1-\frac{\alpha(p-p')}{1+\alpha p}\sin^2 z + (2s-s^2)\sin^2 z\right]}} \quad (6)$$

Or en mettant pour α sa valeur $\frac{4\mathrm{K}}{n^2}$ et posant $\frac{4\mathrm{K}}{n^2} : \left(1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p\right) = \frac{2\alpha'}{p}$, la quantité α' étant une constante, nous aurons : $\frac{\alpha}{1+\alpha p}$

$$\frac{\frac{4\mathrm{K}}{n^2}}{1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p} = \frac{2\alpha'}{p}$$ et le second terme sous le radical deviendra $2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)$.

Le terme $\frac{\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha p'}$ sera $= \frac{\frac{2\mathrm{K}}{n^2}}{1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p'}$; et si l'on substitue pour $\frac{2\mathrm{K}}{n^2}$ sa valeur $\frac{\alpha'}{p}\left(1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p\right)$, il sera $= \frac{\alpha'}{p}\left(\frac{1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p}{1+\frac{4\mathrm{K}}{n^2}p'}\right)$.

Divisons par le numérateur ; nous aurons $\frac{\alpha'}{p\left(1+\frac{\frac{4\mathrm{K}}{n^2}(p'-p)}{1+\frac{4\mathrm{K}p}{n^2}}\right)}$

et en mettant ensuite pour $\frac{4\mathrm{K}}{n^2}$ sa valeur $\frac{2\alpha'}{p}\left(1+\frac{4\mathrm{K}p}{n^2}\right)$, le terme $\frac{\alpha}{2(1+\alpha p')}$

deviendra $= \frac{\frac{\alpha'}{p}}{1+\frac{2\alpha'}{p}(p'-p)} = \frac{\frac{\alpha'}{p}}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)}$.

Les substitutions faites dans l'équation (6) et le terme $1-\sin^2 z$ étant remplacé par $\cos^2 z$, la valeur de da ou la différentielle de la réfraction r, c'est-à-dire dr' deviendra :

$$dr = -\frac{\frac{\alpha'}{p}\cdot dp'(1-s)\sin z}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)\sqrt{\left[\cos^2 z - 2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z\right]}} \quad (7)$$

équation qui est la même que celle de la page 246 de la mécanique céleste.

Divisons le numérateur et le dénominateur par $\cos z$, réduisons le radical en série et nous aurons : $dr = -$

$$\frac{\frac{\alpha'}{p}\cdot dp'(1-s)\tan z}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{\alpha'}{\cos^2 z}\left(1-\frac{p'}{p}\right)-\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\tan^2 z + \\ \frac{3}{2}\left[\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)-\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\tan^2 z\right]^2 + \cdots \end{array}\right\} \quad (8)$$

ce qui est l'équation de la page 267 de la mécanique céleste.

Or en négligeant les produits de trois dimensions de α' et de s et en observant que α' est facteur commun à tous les termes, nous aurons à supprimer le terme $\frac{s^2}{2}\tan^2 z$ et tous les termes élevés à la seconde puissance qui ont pour facteur la fraction $\frac{3}{2}$, nous obtiendrons, après avoir divisé par le dénominateur :

$$dr = -\frac{\alpha'}{p} dp' \operatorname{tang} z \left\{ 1 - \frac{s}{\cos^2 z} + \alpha' \left(\frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} \right) \left(1 - \frac{p'}{p} \right) \right\} \quad (9)$$

telle est l'équation différentielle définitive de la réfraction p. 267 de la mécanique céleste.

7. *Réfraction totale.* En intégrant l'équation (9) depuis $p'=p$ jusqu'à $p'=0$, nous aurons, pour $p'=p$:

$$r = -\alpha' \operatorname{tang} z \left\{ 1 - \frac{1}{\cos^2 z} \int \frac{s dp'}{p} + \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} \right) + C \right\}.$$

Pour $p'=0$, on a $r=0$ et par suite $C=0$.

Donc la réfraction cherchée sera la première intégrale prise avec le signe contraire, c'est-à-dire

$$r = \alpha' \operatorname{tang} z \left\{ 1 - \frac{1}{\cos^2 z} \int \frac{s dp'}{p} + \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} \right) \right\} \quad (10)$$

telle est l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

Mettons dans cette équation pour $\cos^2 z$ sa valeur $\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 z}$, réduisons, et négligeons les termes qui contiennent les puissances supérieures à la 3^{me} de $\operatorname{tang} z$; nous aurons :

$$r = \alpha' \operatorname{tang} z \left\{ 1 - \int \frac{s dp'}{p} - \int \frac{s dp'}{p} \times \operatorname{tang}^2 z + \frac{3\alpha'}{2} + \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang}^2 z \right\}$$

ou

$$r = \alpha' \operatorname{tang} z \left\{ 1 - \int \frac{s dp'}{p} + \frac{3\alpha'}{2} - \left(\int \frac{s dp'}{p} - \frac{\alpha'}{2} \right) \operatorname{tang}^2 z \right\} \quad (11)$$

ou enfin

$$r = \alpha' \operatorname{tang} z \left[1 - \int \frac{p' ds}{p} + \tfrac{3}{2}\alpha' \sin 1'' \right] - \left(\int \frac{p' ds}{p} - \frac{\alpha'}{2} \right) \alpha' \operatorname{tang}^3 z \quad (12)$$

Nous pouvons aussi représenter le coefficient total de $\alpha' \operatorname{tang} z$ par A et celui de $\alpha' \operatorname{tang}^3 z$ par B ; l'équation (11) deviendra alors :

$$z = A\alpha' \operatorname{tang} z - B\alpha' \operatorname{tang}^3 z \quad (13)$$

Voyons maintenant comment on détermine le terme qui reste à intégrer.

8. *Valeur du terme* $\int \frac{p' ds}{p}$. Nommons g' la gravité à la hauteur h au-dessus de la surface de la terre, g celle à la surface même, q la pression de l'air à la hauteur h et nous aurons :

$$dq = -g' p' \cdot dh \quad (14)$$

Or

$$g' = \frac{g \cdot R^2}{z^2} = \frac{g \cdot R^2}{R^2 (1+s)^2} = \frac{g}{(1+s)^2} \text{ et } h = Rs :$$

donc

$$dq = -\frac{g p' R ds}{(1+s)^2}$$

et en négligeant la petite fraction s par rapport à 1

$$q = -g \int p' ds + C \quad (15)$$

Mais à la surface de la terre la pression devient Q et l'intégrale $\int p' ds$ est nulle, à cause que s est $=0$ à son origine ; donc $C=Q$, et à la limite supérieure de l'atmosphère la pression q est nécessairement nulle ; on a donc :

$$0 = -\int p' ds + Q$$

et par suite

$$\int p' ds = Q, \quad (16)$$

quelle que soit la loi de la densité des couches atmosphériques. Mais la pression de l'air à la surface de la terre sur l'unité de base est égale au produit de la gravité g par la densité p de l'air et par la hauteur d'une colonne d'air, d'une densité uniforme égale à p, qui ferait équilibre à la pression du mercure dans le baromètre. Cette hauteur, à la température zéro et sous la pression 0^m,76, est égale à $\frac{13,59 \times 0^m,76}{0,0013} = 10454 \times 0^m,76 = 7945^m,04$. On a donc $\int p' ds = \frac{g \cdot p \times 7945^m,04}{g \cdot R}$ et en mettant pour R la valeur 6366198 mètres on trouve $\int \frac{p' ds}{p} = \frac{7945^m,05}{6366198} = 0,00124799$.

Laplace ayant pris 10477,9 pour le rapport de la densité du mercure à celle de l'air sec a trouvé 0,00125254. Mais on peut regarder l'intégrale ci-dessus comme une quantité constante pour le même état de l'air et en déterminer la valeur à l'aide des réfractions observées, la valeur de α' étant d'ailleurs connue, voici comment :

9. *Valeur de l'intégrale* $\int \frac{p' ds}{p}$ *déduite des réfractions observées.* J'ai trouvé, comme nous le verrons dans un instant, pour la valeur moyenne de cette intégrale, le nombre 0,00134. Ce résultat est un peu plus grand que celui donné par de *Laplace;* et il doit l'être effectivement ; l'air humide étant plus léger que l'air

sec pris dans les mêmes circonstances ; le rapport de la densité du mercure à celle de l'air humide est nécessairement plus grand que 10477,9 : le rapport devient $10477,9\left(1+\frac{13}{21}\times\frac{f}{0,76}\right)$, si nous représentons par f la tension des vapeurs d'eau dans l'air à la température zéro, et par $\frac{13}{21}$ le rapport de la densité de l'air sec et des vapeurs d'eau ; nombre que l'on trouve pour la densité des vapeurs d'eau à 100° et à la pression $0^{m},76$, si on les compare à celle de l'air pris aussi à 100° et à 0,76 , en prenant 0,00365 pour le coefficient de dilatation de l'air. Mais le produit ci-dessus ne donne pas le nombre 0,00134; cependant c'est la valeur moyenne déduite de plusieurs réfractions relatives au même état de l'air ; et en l'admettant on peut calculer exactement toutes les réfractions que *Bessel* parait avoir déterminées avec tant de précision. Si donc ce nombre était exact, comme je le crois, il indiquerait que la puissance réfractive de la vapeur aqueuse est plus grande que celle de l'air sec, bien que la vapeur soit moins dense que l'air ; c'est-à-dire que l'excès de la puissance réfractive de la vapeur aqueuse sur celle de l'air est loin d'être compensé par la plus petite densité comme on l'a admis jusqu'ici. Mais comment a-t-on trouvé ce terme $\int p'ds$ et comment a-t-on déterminé les coefficients de la formule (13) ?

10. *Détermination des coefficients numériques des formules* (12) *et* (13). Par les observations des étoiles circompolaires on a trouvé le coefficient α' exprimé en secondes de degré égal à 60,525 et par-conséquent réduit en longueur égal à $\alpha'\sin 1''=0,000293434$. (Voir Astronomie de Biot, vol. 1).

On a donc $\frac{3\alpha'}{2}=\frac{3\alpha'\sin 1''}{2}=0,000440151$ ou $=0,00044$

et $\frac{\alpha'\sin 1''}{2}=0,0001467$.

Or Bessel a déterminé, dans ses *fundamenta Astronomiœ*, par une formule rigoureuse les réfractions de 20′ en 20′ pour toutes les distances zénithales apparentes depuis le zénith jusqu'à l'horison. Il se servait des observations faites par Bradley à la température de 48°,75 (Fahrenheit) et sous la pression 29, 6 pouces anglais, ce qui correspond à la température de 9°,3° et à la pression $751^{\text{millim}},83$.

En substituant donc dans l'équation (13) pour α' la valeur 60,525

et pour z successivement différentes réfractions correspondantes à des distances zénithales données, j'ai pu déterminer les coefficients A et B pour la température et la pression ci-dessus désignées. Or la moyenne de plusieurs valeurs de A et celle de plusieurs valeurs de B m'ont donné : A=0,95234 et B=0,001143. Pour réduire ces coefficients à ce qu'ils seraient, si les réfractions avaient été observées à la température zéro et à $0^{m},76$ de hauteur barométrique, prenons le coefficient de l'air, eu égard à l'humidité, égale à 0,004 $=m$; celui de la dilatation absolue du mercure $=\frac{1}{5550}=0,00018=n$ et désignons les coefficients cherchés respectivement par A′ et par B′, nous aurons d'après des formules connues : $A'=0,95234\times 1,0491=0,9991$ ou $=0,999$ et $B'=0,001143\times 1,0491=0,0011991=0,0012$. Ainsi pour déterminer l'intégral $\int p'ds$ on a l'équation : $A'=1-\int p'ds+\frac{3}{2}\alpha'\sin 1''$ ou $0,9991=1-\int p'ds+0,00044$, d'où l'on tire $\int p'ds=0,00134$. En substituant les valeurs de A′, B′ et $\int p'ds$ dans les équations (12) et (13), elles deviendront :

$$r=\alpha'\operatorname{tang} z\left[1-0,00134+\tfrac{3}{2}\alpha'\sin 1''\right]-\left(0,00134-\frac{\alpha'\sin 1''}{2}\right)\alpha'\operatorname{tang}^3 z \qquad (16)$$

$$r=0\cdot 9991\cdot\alpha'\operatorname{tang} z-0,0012\cdot\alpha''\operatorname{tang}^3 z. \quad (17).$$

Le coefficient du premier terme de la formule donnée par Laplace est 0,99918761 et celui du second est : 0,001105825, voir Astronomie de Biot, vol. 1, p. 442. Ainsi les réfractions calculées par la formule précédente seront à très-peu près les mêmes que celles dans la connaissance des temps, déterminées par la formule de Laplace ; mais elles sont cependant un tant soit peu plus petites, ce qui est conforme aux tables de Bessel, comme nous allons le voir dans le numéro suivant :

11. *Comparaison des réfractions calculées par la formule* (17) *avec celles données par les tables de Bessel, pour la température de* 9°,3 *et la pression* $751^{mm},83$. Le tableau suivant contient les réfractions de dix en dix degrés depuis la distance zénithale jusqu'à celle de 80 degrés de division sexagésimale.

DISTANCES ZENITHALES.	RÉFRACTIONS CALCULÉES.	RÉFRACTIONS DES TABLES.	DIFFÉRENCES.
$z=9°$	$z=9'',129$	$9'',12$	$0'',009$
$z=10°$	$z=10'',163$	$10'',15$	$0'',013$
$z=11°$	$z=11'',19$	$11'',19$	$0'',00$
$z=20°$	$z=20'',979$	$20'',95$	$0'',029$
$z=30°$	$z=32'',278$	$35'',22$	$0'',058$
$z=40°$	$z=48'',36$	$48'',26$	$0'',10$
$z=50°$	$z=68'',57$	$68'',48$	$0'',09$
$z=60°$	$z=99'',47$	$96'',30$	$0'',14$
$z=70°$	$z=156'',93$	$156'',77$	$0'',16$
$z=80°$	$z=314'',27$	$315'',13$	$0'',86$

Les différences entre les réfractions calculées et celles des tables de *Bessel* sont, comme on voit, aussi petites qu'on peut le désirer. Ainsi les formules générales (16) et (17) sont pleinement confirmées par les recherches profondes et précises de Bessel. La formule très-simple (17) peut donc être employée avec confiance depuis $z=0$ jusqu'à $z=80°$; et depuis $z=0$ jusqu'à $z=30°$, la valeur du second terme n'a qu'une influence presqu'insensible sur les résultats ; car le premier terme seul a donné les réfractions comprises entre les limites désignées ci-dessus.

Sa valeur pour $z=50°$, n'est que de $0'',122$; à 60° de distance zénithale, elle est de $0'',37$, à 70° elle est de $1'',51$ et à 80° elle est de $13'',24$.

En prenant au lieu de 0,95234 le coefficient A égal à 0,951 qui correspond à une valeur de A′ égale à 0,9976941 ou simplement à 0,9977, j'ai calculé les réfractions de degrés en degrés depuis $z=0$ jusqu'à $z=40°$, en n'employant que le premier terme de l'équation (17) et la plus grande différence entre les réfractions calculées et celles des tables n'excède pas $0'',03$; elle correspond aux valeurs de $z=38$, 39 et 40.

XIV. — *Notice sur deux petits appareils propres à changer la direction des courants électriques.*

1. *Changeur.* Voulant faire, il y a quelques années des recherches sur l'électro-magnétisme, comme force motrice, j'eus besoin d'un Appareil propre à changer la direction des courants électriques dans plusieurs électro-aimants, qui devaient être tantôt mobiles tantôt fixes. Celui que je me suis fait construire et auquel je donne le nom de *Changeur,* diffère de tous ceux que je connais par sa construction et sa grande simplicité ; il m'a d'ailleurs si parfaitement servi dans un très-grand nombre d'expériences que je crois utile d'en donner la description en quelques mots : L'appareil est composé 1) d'un disque en cuivre de deux millimètres d'épaisseur, replié d'un centimètre environ à sa circonférence et fixé, à l'aide de petites vis de pression en cuivre, contre un disque en bois très-sec ou mieux contre un disque en ivoire ou en verre. 2) De deux lames ou ressorts en cuivre, qui, fixées sur un pied en bois, communiquent par une de leurs extrémités, avec les deux pôles d'une pile voltaïque, en s'appuyant par l'autre extrémité recourbée sur la circonférence du disque en mouvement. Les disques en cuivre et en ivoire sont percés à leur centre commun et fixés sur un cylindre creux en ivoire, qui est à son tour porté par l'arc horizontal en acier, destiné à être mis en mouvement.

On divise le disque en cuivre et sa circonférence en un nombre de parties égales au nombre de fois qu'on veut changer la direction du courant électrique pour chaque révolution entière de l'axe : par exemple, en deux parties égales, si l'on veut changer la direction du courant deux fois par rotation entière, c'est-à-dire si l'on veut employer un seul aimant fixe et un seul électro-aimant ; et en six secteurs égaux si l'on veut employer trois aimants fixes et trois électro-aimants mobiles ou réciproquement. Le diamètre du changeur doit-être proportionné au nombre des secteurs : pour six je lui ai donné la longueur de 8 centimètres en remplaçant, par de petites lames, les espaces vides, de trois millimètres d'épaisseur, qui sépa-